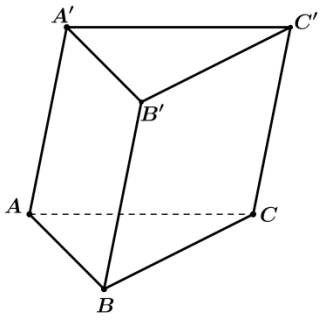
ĐỀ KIỂM TRA BÀI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

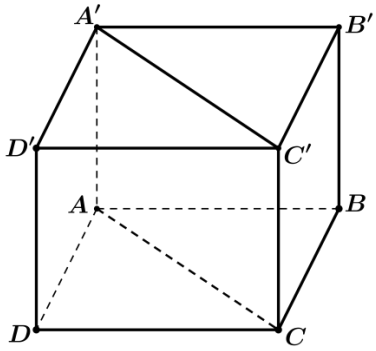
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{BC}=\vec{d}$. Trong các biểu thức vec tơ sau đây, biểu thức nào là **đúng**?



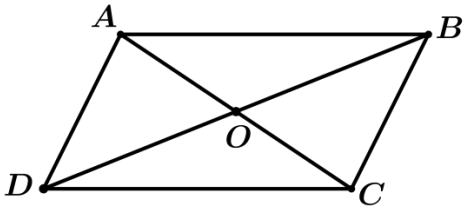
A. $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$. **B.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **C.** $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **D.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$.

Câu 2: Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'D'}$.



A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 3: Cho O là tâm hình bình hành $ABCD$. Hỏi vectơ $\left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}\right)$ bằng vectơ nào?



A. $\overrightarrow{BA}$. **B.** $\overrightarrow{AD}$. **C.** $\overrightarrow{DC}$. **D.** $\overrightarrow{AC}$.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các khẳng định dưới đây, đâu là khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC'}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC'}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

Câu 5: Trong không gian cho tam giác ABC có G là trọng tâm và điểm M nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Khẳng định nào sau đây là đúng?

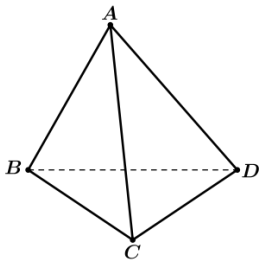
A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$.

C. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$. **D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Câu 6: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ tất cả các cạnh bằng $2\sqrt{3}$ (đvđd). Tính độ dài vecto $\vec{u}=\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC}$

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

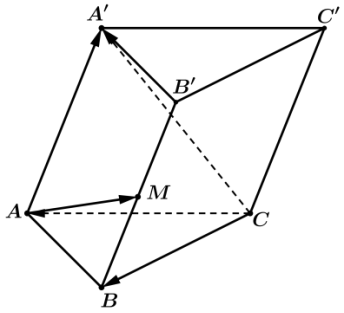
Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?



A. $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}$. **B.** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

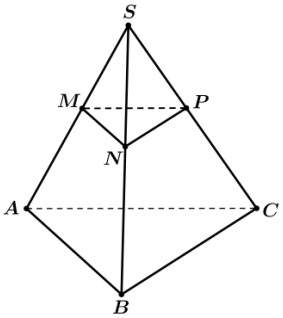


A. $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$. **C.** $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$. **D.** $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính độ dài véctơ $\vec{x}=\overrightarrow{A'C'}-\overrightarrow{A'A}$ theo a?

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{6}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

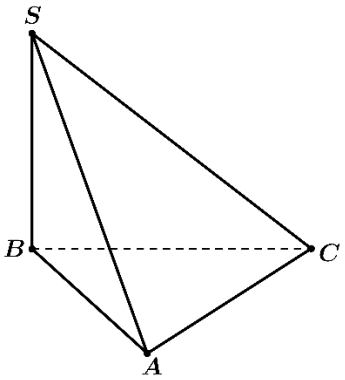
Câu 10: Cho tứ diện $S.ABC$ có M,N,P là trung điểm của SA,SB,SC. Tìm khẳng định đúng?



A. $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}\right)$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}$.

C. $\overrightarrow{AB}=2\left(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PN}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AB}=2\left(\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}\right)$.

Câu 11: Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, SB vuông góc với đáy và $SB=\sqrt{3}a$. Góc giữa hai vectơ $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AS}\right)$ là



A. 60^o. **B.** 30^o. **C.** 45^o. **D.** 90^o.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=4, \widehat{BAC}=60^\circ, \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6$. Khi đó độ dài $\overrightarrow{AC}$ là

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 12.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết rằng: cạnh $AB=a$, $AD=2a$, cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

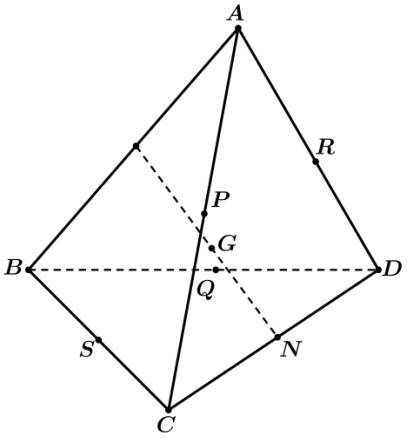
a) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ cùng phương, cùng hướng.

b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng 60°.

c) Tích vô hướng $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=\frac{a^2}{2}$.

d) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}$ là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S, G lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB, CD AC, BD, AD, BC, MN. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



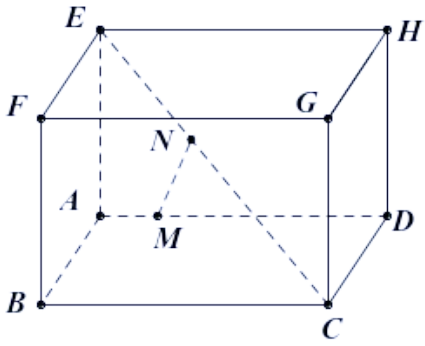
a) $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{SN}$.

b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

c) $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

d) $\left|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi điểm I trùng với điểm G.

Câu 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ có $AB = AE = 2$, $AD = 3$ và đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AD}, \vec{c} = \overrightarrow{AE}$ Lấy điểm M thỏa $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$ và điểm N thỏa $\overrightarrow{EN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{EC}$. (*tham khảo hình vẽ*)



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{5}\vec{b}$.

b) $\overrightarrow{EN} = \frac{2}{5}\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)$.

c) $\left(m\vec{a} + n\vec{b} + n\vec{c}\right)^2 = m^2.\vec{a}^2 + n^2.\vec{b}^2 + p^2.\vec{c}^2$ với m, n, p là các số thực.

d) $MN = \frac{\sqrt{61}}{5}$.

Câu 4: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. E là điểm trên đoạn CD sao cho $ED = 2CE$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Có 6 vectơ (khác vectơ $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối được tạo thành từ các đỉnh của tứ diện.

b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng 60°.

c) Nếu $\overrightarrow{BE} = m\overrightarrow{BA} + n\overrightarrow{BC} + p\overrightarrow{BD}$ thì $m + n + p = \frac{2}{3}$.

d) Tích vô hướng $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BE} = \frac{a^2}{6}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

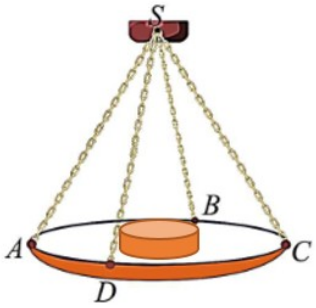
Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy M, N sao cho $AM = 3MD$, $BN = 3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC. Phân tích vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{DC}$ ta được $\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{PQ} + b\overrightarrow{DC}$. Tính $a + 2b$.

Câu 2: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng độ dài bằng 6. Biết độ dài của vectơ $\vec{a} + 2\vec{b}$ bằng $6\sqrt{3}$. Biết số đo góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là x độ. Giá trị của x là bao nhiêu?

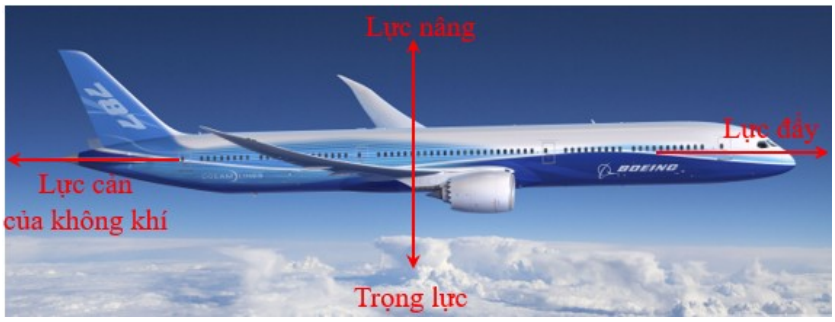
Câu 3: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 15. Biết độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ bằng $a\sqrt{6}$ khi đó giá trị của a là bao nhiêu?

Câu 4: Cho hình lập phương $B'C$ có đường chéo $A'C = \frac{3}{16}$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và điểm 20 thỏa mãn: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$. Khi đó độ dài của đoạn OS bằng $\frac{a\sqrt{3}}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Câu 5: Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng $m = 3\,\text{kg}$ được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 90^\circ$. Biết độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích có dạng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Lấy $g = 10\,\text{m/s}^2$, khi đó giá trị của a bằng bao nhiêu?



Câu 6: Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của 4 lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học(hình ảnh 2.20).

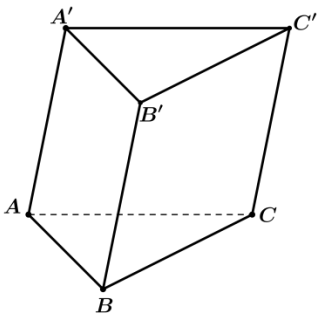


Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900(km/h) lên 920(km/h), trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900(km/h) và 920(km/h) lần lượt biểu diễn bởi hai véc tơ $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ với $\overrightarrow{F_1} = k\overrightarrow{F_2}\ (k \in \mathbb{R};\ k > 0)$. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

LỜI GIẢI

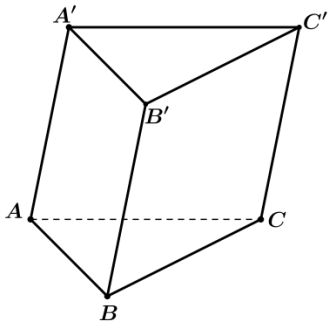
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Trong các biểu thức vec tơ sau đây, biểu thức nào là **đúng**?



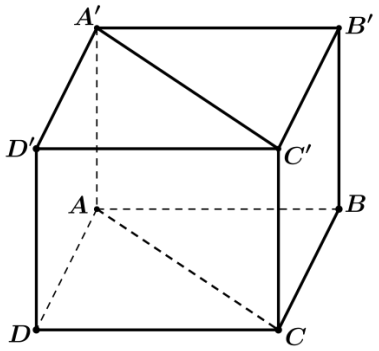
A. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. **B.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. **C.** $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. **D.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

Lời giải



Ta có: $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

Câu 2: Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'D'}$.



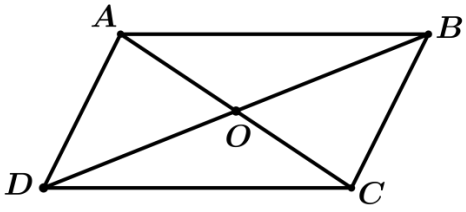
A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $A'C'CA$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC}$.

Khi đó: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{A'D'}$ nên $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'D'}\right|=\left|\overrightarrow{A'D'}\right|=A'D'=1$.

Câu 3: Cho O là tâm hình bình hành $ABCD$. Hỏi vectơ $\left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}\right)$ bằng vectơ nào?



A. $\overrightarrow{BA}$. **B.** $\overrightarrow{AD}$. **C.** $\overrightarrow{DC}$. **D.** $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}$.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các khẳng định dưới đây, đâu là khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC'}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC'}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

Lời giải

Xét hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC'}$.

Câu 5: Trong không gian cho tam giác ABC có G là trọng tâm và điểm M nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$.

C. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$. **D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Lời giải

Xét hình chóp $M.ABC$ ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

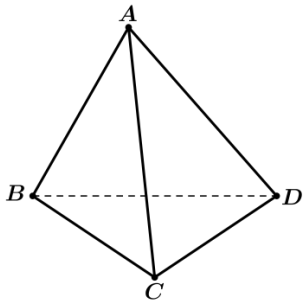
Câu 6: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ tất cả các cạnh bằng $2\sqrt{3}$ (đvđd). Tính độ dài vecto $\vec{u}=\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC}$

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $\left|\vec{u}\right|=\left|\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|=2\sqrt{6}$.

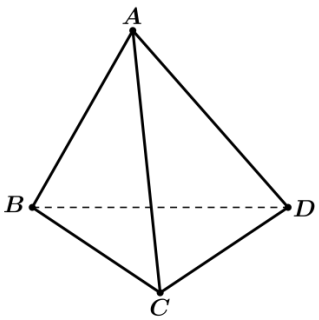
Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?



A. $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}$. **B.** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}$.

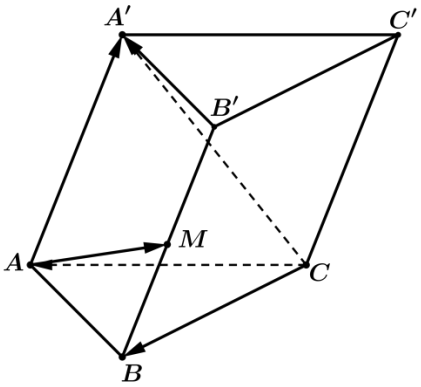
C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}\\ \overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$. **C.** $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$. **D.** $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

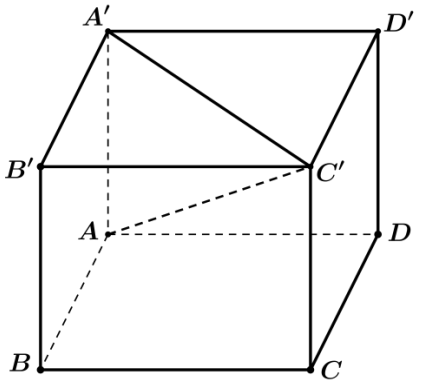
Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính độ dài vécto $\vec{x}=\overrightarrow{A'C'}-\overrightarrow{A'A}$ theo a?

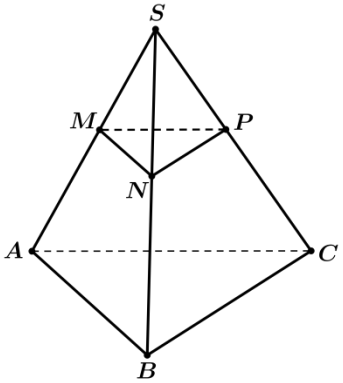
A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{6}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải



Ta có $\vec{x}=\overrightarrow{A'C'}-\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{AC'}$

Câu 10: Cho tứ diện $S.ABC$ có M,N,P là trung điểm của SA,SB,SC. Tìm khẳng định đúng?



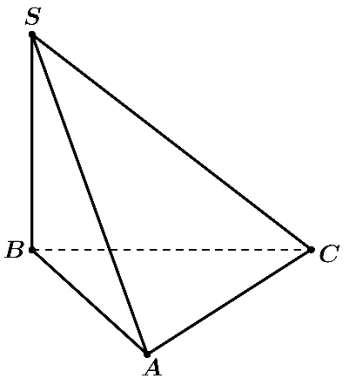
A. $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}\right)$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}$.

C. $\overrightarrow{AB}=2\left(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PN}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AB}=2\left(\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}\right)$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{MN}=2\left(\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}\right)$.

Câu 11: Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, SB vuông góc với đáy và $SB=\sqrt{3}a$. Góc giữa hai vectơ $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AS}\right)$ là



A. 60^o. **B.** 30^o. **C.** 45^o. **D.** 90^o.

Lời giải

Ta có: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AS}\right)=\widehat{SAB}$.

Xét ΔSBA vuông tại B ta có: $\tan\left(\widehat{SAB}\right)=\frac{SB}{AB}=\sqrt{3}$. Suy ra: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AS}\right)=60^o$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=4,\widehat{BAC}=60^\circ,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6$. Khi đó độ dài $\overrightarrow{AC}$ là

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 12.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\widehat{BAC}\Leftrightarrow 6=4.AC.\cos 60^\circ\Leftrightarrow AC=3$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết rằng: cạnh $AB=a$, $AD=2a$, cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

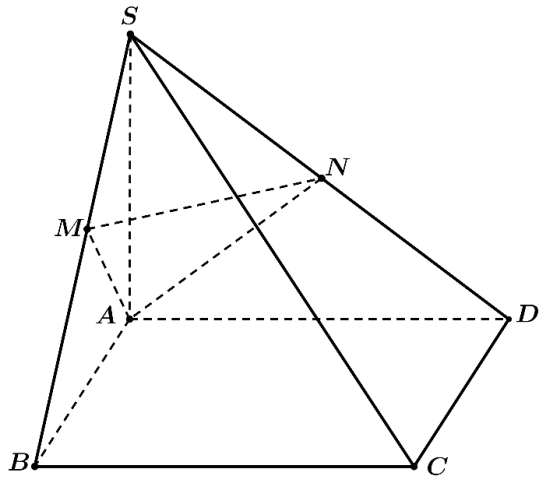
a) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ cùng phương, cùng hướng.

b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng 60°.

c) Tích vô hướng $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{2}$.

d) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$ là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



a) Sai: Ta thấy: $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AB//CD$.

Suy ra hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ cùng phương, ngược hướng.

b) Sai: Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật nên: $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$.

Hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy nên tam giác SAC là tam giác vuông tại A

Suy ra: $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} \Rightarrow \widehat{SCA} \approx 41^\circ 48'$.

Ta có: $\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{CS}, \overrightarrow{CA}\right) = \widehat{SCA} \approx 41^\circ 48'$.

c) Đúng: Hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy nên tam giác SAB là tam giác vuông tại A. Suy ra: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{5}$.

Trong tam giác SAB vuông tại A có AM là đường trung tuyến nên: $AM = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lại có M là trung điểm của SB nên $MB = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$$\cos \widehat{MAB} = \frac{MA^2 + AB^2 - MB^2}{2MA.AB} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Ta tính được .

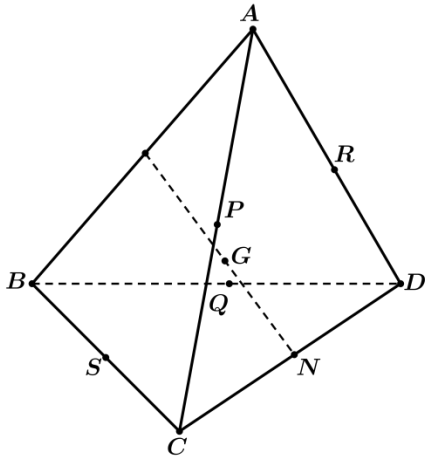
$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) = \widehat{MAB}$ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AM}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{a\sqrt{5}}{2}.a.\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{a^2}{2}$

Mà suy ra: .

d) Sai: Ta có: M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD nên MN là đường trung bình của tam giác SBD. Do đó: $MN = \frac{1}{2}BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra: $\left|\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}\right| = \left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S, G lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB, CD AC, BD, AD, BC, MN. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



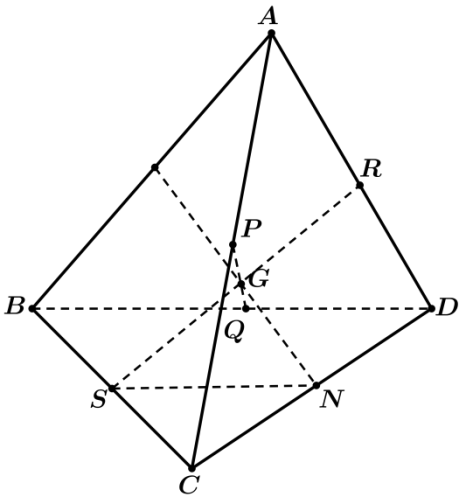
a) $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{SN}$.

b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

c) $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

d) $\left|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi điểm I trùng với điểm G.

Lời giải



a) Đúng: $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{MR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\\ \overrightarrow{SN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{MR}=\overrightarrow{SN}$.

b) Đúng: Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$

Vì N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}$

Vì G là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$

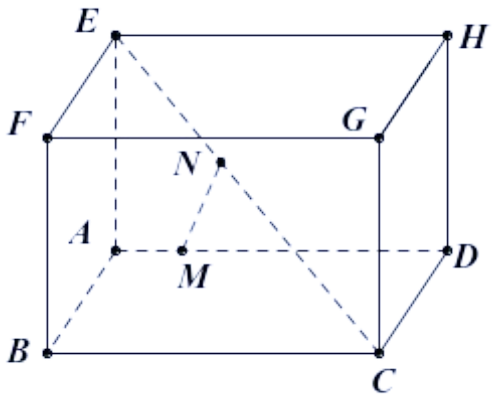
Do đó: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}\right)=2.\vec{0}=\vec{0}$.

c) Sai: $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

d) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=4\overrightarrow{IG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=4\overrightarrow{IG}$.

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right|=\left|4\overrightarrow{IG}\right|=4IG$. Do đó: $\left|\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right|$ nhỏ nhất khi $IG=0\Leftrightarrow I\equiv G$

Câu 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ có $AB=AE=2$, $AD=3$ và đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{AD},\vec{c}=\overrightarrow{AE}$ Lấy điểm M thỏa $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$ và điểm N thỏa $\overrightarrow{EN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{EC}$. (*tham khảo hình vẽ*)



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{5}\vec{b}$.

b) $\overrightarrow{EN} = \frac{2}{5}\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)$.

c) $\left(m.\vec{a} + n.\vec{b} + n.\vec{c}\right)^2 = m^2.\vec{a}^2 + n^2.\vec{b}^2 + p^2.\vec{c}^2$ với m,n,p là các số thực.

d) $MN = \frac{\sqrt{61}}{5}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{5}\vec{b}$.

b) Sai: $\overrightarrow{EN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{EC} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EA}\right) = \frac{2}{5}\left(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right)$.

c) Đúng: $\left(m.\vec{a} + n.\vec{b} + p.\vec{c}\right)^2 = m^2.\vec{a}^2 + n^2.\vec{b}^2 + p^2.\vec{c}^2 + 2mn.\vec{a}.\vec{b} + 2np.\vec{b}.\vec{c} + 2mp.\vec{a}.\vec{c}$

$= m^2.\vec{a}^2 + n^2.\vec{b}^2 + p^2.\vec{c}^2$. (vì $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đôi một vuông góc nên $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{a}.\vec{c} = 0$).

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EN} = -\frac{1}{5}\vec{b} + \vec{c} + \frac{2}{5}\left(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right) = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$.

d) Đúng: $MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = \left(\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}\right)^2 = \frac{4}{25}\vec{a}^2 + \frac{1}{25}\vec{b}^2 + \frac{9}{25}\vec{c}^2 = \frac{4}{25}.4 + \frac{1}{25}.9 + \frac{9}{25}.4 = \frac{61}{25}$

Suy ra $MN = \frac{\sqrt{61}}{5}$.

Câu 4: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. E là điểm trên đoạn CD sao cho $ED = 2CE$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

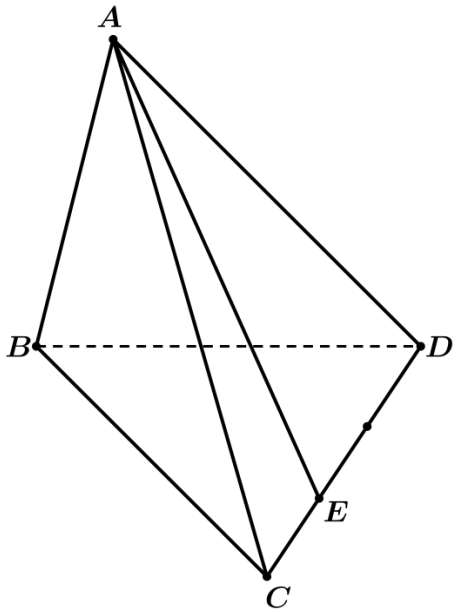
a) Có 6 vectơ (khác vectơ $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối được tạo thành từ các đỉnh của tứ diện.

b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng 60°.

c) Nếu $\overrightarrow{BE} = m\overrightarrow{BA} + n\overrightarrow{BC} + p\overrightarrow{BD}$ thì $m+n+p=\frac{2}{3}$.

d) Tích vô hướng $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BE} = \frac{a^2}{6}$.

Lời giải



a) Sai: Các vectơ (khác vectơ $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối được tạo thành từ các đỉnh của tứ diện là: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$. Do đó có 12 vectơ thỏa mãn yêu cầu.

b) Sai: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) = 180^\circ - \left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = 180^\circ - \widehat{ABC} = 120^\circ$.

c) Sai: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$.

Do đó $m=0$, $n=\frac{2}{3}$, $p=\frac{1}{3}$ suy ra $m+n+p=1$.

d) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}\right) - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

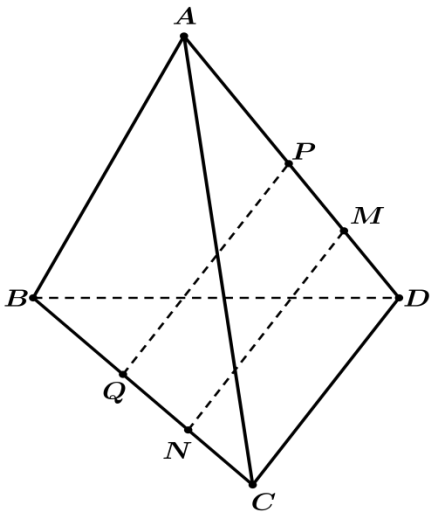
Suy ra $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD}.\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{2}{3}.\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}.\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$

$= \frac{2}{3}.a.a.\cos 60° + \frac{1}{3}a^2 - a.a.\cos 60° = \frac{a^2}{6}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy M,N sao cho $AM = 3MD$, $BN = 3NC$. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AD và BC. Phân tích vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{DC}$ ta được $\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{PQ} + b\overrightarrow{DC}$. Tính $a + 2b$.

Lời giải



Do $AM = 3MD$, $BN = 3NC$ và P,Q lần lượt là trung điểm của AD và BC nên M,N lần lượt là trung điểm của PD và QC.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC}\right)$

Khi đó: $a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{2} \Rightarrow a + 2b = \frac{3}{2}$.

Câu 2: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng độ dài bằng 6. Biết độ dài của vectơ $\vec{a} + 2\vec{b}$ bằng $6\sqrt{3}$. Biết số đo góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là x độ. Giá trị của x là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $6\sqrt{3} = \left|\vec{a} + 2\vec{b}\right| \Leftrightarrow \left(6\sqrt{3}\right)^2 = \left|\vec{a} + 2\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)^2$

$\Leftrightarrow a^2 + 4b^2 + 4\vec{a}\vec{b} = 108 \Leftrightarrow 6^2 + 4.6^2 + 4\vec{a}\vec{b} = 108 \Leftrightarrow 4\vec{a}\vec{b} = -72 \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} = -18$.

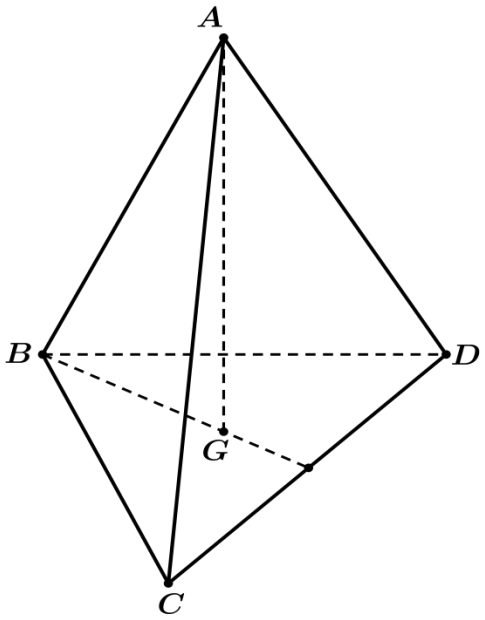
$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})\Leftrightarrow\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{-18}{6.6}=\frac{-1}{2}\Leftrightarrow(\vec{a},\vec{b})=120^\circ$$

Lại có .

Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 120°.

Câu 3: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 15. Biết độ dài của $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ bằng $a\sqrt{6}$ khi đó giá trị của a là bao nhiêu?

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tâm giác BCD, M là trung điểm CD.

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow3\overrightarrow{GA}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{AG}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|3\overrightarrow{AG}\right|=3AG.$$

Xét tam giác đều BCD có $BM=BC.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{2}\Rightarrow BG=\frac{2}{3}BM=5\sqrt{3}$.

Vì tứ diện $ABCD$ đều nên $AG\perp(BCD)\Rightarrow\widehat{AGB}=90^\circ$.

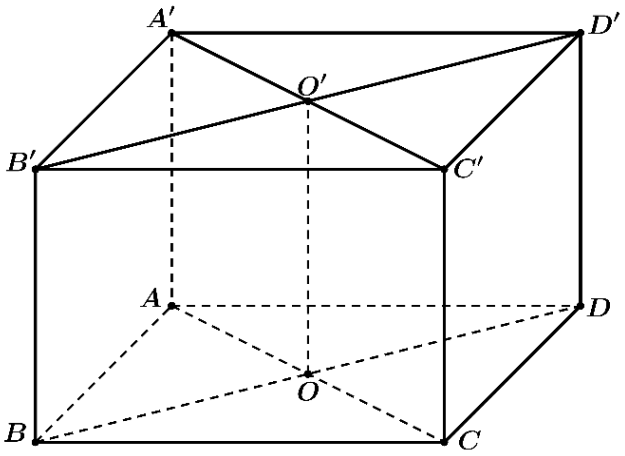
Xét tam giác ABG có $AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\sqrt{15^2-\left(5\sqrt{3}\right)^2}=5\sqrt{6}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=3AG=15\sqrt{6}\Rightarrow a=15$. Vậy giá trị của $a=15$.

Câu 4: Cho hình lập phương $B'C$ có đường chéo $A'C=\frac{3}{16}$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và điểm 20 thỏa mãn: $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}$. Khi đó độ dài của đoạn OS bằng $\frac{a\sqrt{3}}{b}$ với $a,b\in\square$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức

$P = a^2 + b^2$.

Lời giải



Ta có: $A'C^2 = A'A^2 + AC^2 = 3A'A^2 \Rightarrow A'A = \dfrac{A'C}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{16}$.

Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$.

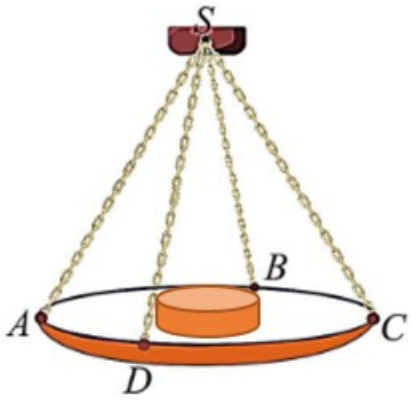
Ta có: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$

$= \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) + \left(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC'}\right) + \left(\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OD'}\right) = 2\overrightarrow{OO'} + 2\overrightarrow{OO'} = 4\overrightarrow{OO'}$

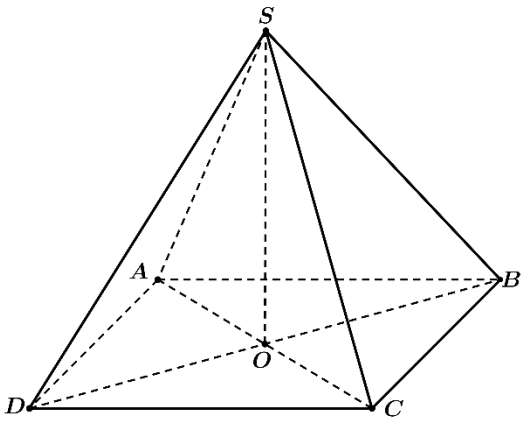
Suy ra $OS = \left|\overrightarrow{OS}\right| = \left|4\overrightarrow{OO'}\right| = 4OO' = 4.\dfrac{\sqrt{3}}{16} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Khi đó $a = 1, b = 4 \Rightarrow P = a^2 + b^2 = 17$.

Câu 5: Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng $m = 3\,\text{kg}$ được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 90^\circ$. Biết độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích có dạng $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Lấy $g = 10\,\text{m/s}^2$, khi đó giá trị của a bằng bao nhiêu?



Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SD}=\vec{0}$

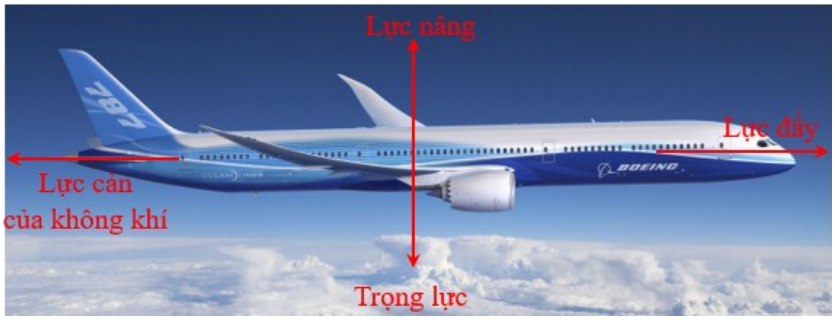
$\Leftrightarrow\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=-4\overrightarrow{OS}=4\overrightarrow{SO}\Rightarrow\left|\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}\right|=\left|4\overrightarrow{SO}\right|=4SO$.

Trọng lượng của vật nặng là $P=mg=3.10=30(N)$. Suy ra $4\left|\overrightarrow{SO}\right|=P=30(N)\Rightarrow SO=\frac{15}{2}$.

Lại có tam giác ASC vuông cân tại S nên

$SO=SA.\sin\widehat{SAC}\Rightarrow SA=\frac{SO}{\sin\widehat{SAC}}=\frac{\frac{15}{2}}{\sin 45^\circ}=\frac{15\sqrt{2}}{2}=\frac{30\sqrt{2}}{4}\Rightarrow a=30$. Vậy $a=30$.

Câu 6: Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của 4 lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học(hình ảnh 2.20).



Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900(km/h) lên 920(km/h), trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900(km/h) và 920(km/h) lần lượt biểu diễn bởi hai véc tơ $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ với $\overrightarrow{F_1}=k\overrightarrow{F_2}\ (k\in\mathbb{R};k>0)$. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Vì trong quá trình máy bay tăng vận tốc từ 900(km/h) lên 900(km/h), máy bay giữ nguyên hướng bay nên hai véc tơ $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ có cùng hướng và $\overrightarrow{F_1} = k\overrightarrow{F_2}\ (k > 0)$.

Gọi v_1, v_2 lần lượt là vận tốc của chiếc máy bay khi đạt 900(km/h) và 920(km/h).

Suy ra $v_1 = 900$ (km/h), $v_2 = 920$ (km/h).

Vì lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay nên $\left|\frac{\overrightarrow{F_1}}{\overrightarrow{F_2}}\right| = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{900^2}{920^2} = \frac{2025}{2116} \Rightarrow \left|\overrightarrow{F_1}\right| = \frac{2025}{2116}\left|\overrightarrow{F_2}\right| \Rightarrow \overrightarrow{F_1} = \frac{2025}{2116}\overrightarrow{F_2}$.

Từ đó suy ra: $k = \frac{2025}{2116} \approx 0,96$.