

CÁC DẠNG BÀI TẬP BÀI NGUYÊN HÀM**Dạng 1: Tìm nguyên hàm của hàm số lũy thừa**

Các công thức thường dùng:

$$\oplus \int 1 dx = x + C$$

$$\oplus \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$\oplus \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \alpha \neq -1$$

$$\oplus \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

Chú ý các công thức biến đổi lũy thừa:

$$\oplus \frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

$$\oplus x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$\oplus \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$\oplus \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}; \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$?

A. $F_1(x) = x^3 + x^2 - 4$ **B.** $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ **C.** $F_3(x) = x^3 - x^2 + 1$ **D.** $F_4(x) = 3x^3 + x^2$

Lời giải

Ta có: $F_1'(x) = 3x^2 + 2x$; $F_2'(x) = x^2 + x$; $F_3'(x) = 3x^2 - 2x$; $F_4'(x) = 9x^2 + 2x$.

Suy ra: $F_1'(x) = 3x^2 + 2x = f(x)$.

Vậy $F_1(x) = x^3 + x^2 - 4$ là một nguyên hàm của $f(x) = 3x^2 + 2x$ trên $\mathbb{R}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(0; +\infty)$?

A. $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + \sqrt{x}$ **B.** $F_2(x) = \frac{x^2}{2} - \sqrt{x}$
C. $F_3(x) = \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x}$ **D.** $F_4(x) = \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{x}$

Lời giải

Ta có: $F_1'(x) = x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $F_2'(x) = x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $F_3'(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$; $F_4'(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Suy ra: $F_4'(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$.

Vậy $F_4(x) = \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$ trên $(0; +\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(0; +\infty)$?

- A. $F_1(x) = 3x - \frac{1}{x^2}$. B. $F_2(x) = 3x + \ln x$. C. $F_3(x) = 3x + \frac{1}{x^2}$. D. $F_4(x) = 3x - \ln x$.

Lời giải

Ta có: $F_1'(x) = 3 + \frac{2}{x^3}$; $F_2'(x) = 3 + \frac{1}{x}$; $F_3'(x) = 3 - \frac{2}{x^3}$; $F_4'(x) = 3 - \frac{1}{x}$.

Suy ra: $F_2'(x) = 3 + \frac{1}{x} = f(x)$.

Vậy $F_2(x) = 3x + \ln x$ là một nguyên hàm của $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$ trên $(0; +\infty)$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$?

- A. $F_1(x) = x^3 + x^2 - 4$. B. $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$. C. $F_3(x) = x^3 - x^2 + 1$. D. $F_4(x) = 3x^3 + x^2$.

Lời giải

Ta có: $F_1'(x) = 3x^2 + 2x$; $F_2'(x) = x^2 + x$; $F_3'(x) = 3x^2 - 2x$; $F_4'(x) = 9x^2 + 2x$.

Suy ra: $F_1'(x) = 3x^2 + 2x = f(x)$.

Vậy $F_1(x) = x^3 + x^2 - 4$ là một nguyên hàm của $f(x) = 3x^2 + 2x$ trên $\mathbb{R}$.

Câu 5: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

- A. $2x^2 + 4x + C$. B. $x^2 + 4x + C$. C. $x^2 + C$. D. $2x^2 + C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx = \int (2x + 4)dx = 2 \int xdx + 4 \int dx = x^2 + 4x + C$.

Câu 6: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 2$ là

- A. $\int f(x)dx = 2x + C$. B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - 2x + C$.
C. $\int f(x)dx = x^2 - 2x + C$. D. $\int f(x)dx = x^3 - 2x + C$.

Lời giải

$$\int f(x)dx = \int (x^2 - 2)dx = \int x^2 dx - 2 \int dx = \frac{x^3}{3} - 2x + C$$

Ta có

Câu 7: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 - 8x^3 - 6x$ là

A. $F(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^2 + C.$

B. $F(x) = x^5 - x^4 - x^2 + C.$

C. $F(x) = x^5 - 4x^4 - 2x^2 + C.$

D. $F(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^2 + C.$

Lời giải

$$F(x) = \int (5x^4 - 8x^3 - 6x)dx = x^5 - 2x^4 - 3x^2 + C.$$

Ta có

Vậy một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^2 + C.$

Câu 8: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024$ thỏa mãn $F(1) = -2024$ là

A. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2024x + \frac{5}{12}$

B. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2024x - \frac{1}{12}$

C. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2024x + \frac{1}{12}$

D. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2024x - \frac{5}{12}$

Lời giải

Ta có
$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024 \right) dx = \frac{1}{3} \int x^3 dx - 2 \int x^2 dx + \int x dx - 2024 \int dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2024x + C = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2024x + C$$

$$F(1) = -2024 \Leftrightarrow \frac{1}{12} \cdot 1^4 - \frac{2}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 2024 \cdot 1 + C = -2024 \Leftrightarrow C = \frac{1}{12}$$

Vậy nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024$ thỏa mãn $F(1) = -2024$ là

$$\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2024x + \frac{1}{12}$$

Câu 9: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (2x - 3)^2$ thỏa mãn $F(-1) = -17$ là

A. $\frac{(2x-3)^3}{3} + \frac{4}{3}$

B. $\frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x - \frac{2}{3}$

C. $\frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x + \frac{8}{3}$

D. $\frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x + \frac{2}{3}$

Lời giải

Ta có
$$\int (2x - 3)^2 dx = \int (4x^2 - 12x + 9) dx = 4 \int x^2 dx - 12 \int x dx + 9 \int dx = \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x + C$$

$$F(-1) = -17 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) + C = -17 \Leftrightarrow C = -\frac{2}{3}$$

Vậy nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (2x-3)^2$ thỏa mãn $F(-1) = -17$ là $\frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x - \frac{2}{3}$.

Câu 10: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$.

A. $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$

B. $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$

C. $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln|5x-2| + C$

D. $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C$

Lời giải

Ta có $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \int \frac{d(5x-2)}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$

Câu 11: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$

B. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$

C. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$

Lời giải

Ta có $\int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$

Câu 12: Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ là hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F(1) = 5$. Khi đó $F(x)$ là hàm số nào sau đây?

A. $F(x) = 2 \ln|2x-1| + 5$

B. $F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x-1| + 5$

C. $F(x) = \ln(2x-1) + 5$

D. $F(x) = \ln|2x-1| + 5$

Lời giải

Ta có $F(x) = \int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$ mà $F(1) = 5 \Rightarrow C = 5$ Vậy $F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x-1| + 5$

Câu 13: Tìm họ các nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$.

A. $F(x) = x - \ln|x+1| + C$

B. $F(x) = x + \ln|x+1| + C$

C. $F(x) = x - 3 \ln|x+1| + C$

D. $F(x) = x + 2 \ln|x+1| + C$

Lời giải

$$\int f(x) dx = \int \frac{x+3}{x+1} dx = \int \frac{x+1+2}{x+1} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x+1}\right) dx = x + 2 \ln|x+1| + C.$$

Ta có

Câu 14: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

A. $x + \frac{1}{x-1} + C$

B. $1 + \frac{1}{(x-1)^2} + C$

C. $\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C$

D. $x^2 + \ln|x-1| + C$

Lời giải

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} dx = \int \frac{(x^2 - x) + 1}{x - 1} dx = \int x dx + \int \frac{1}{x - 1} dx$$

Ta có:

$$= \int x dx + \int \frac{1}{x - 1} d(x - 1) = \frac{1}{2} x^2 + \ln|x - 1| + C$$

Câu 15: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

A. $x^3 + C$

B. $\frac{x^3}{3} + x + C$

C. $x^3 + x + C$

D. $6x + C$

Lời giải

$$\int f(x) dx = \int (3x^2 + 1) dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + x + C = x^3 + x + C$$

Ta có

Câu 16: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sqrt{2x-1} + C$

C. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C$

D. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \sqrt{2x-1} + C$

Lời giải

$$\int f(x) dx = \int \sqrt{2x-1} dx = \int \frac{(2x-1)^{\frac{1}{2}} d(2x-1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C$$

Câu 17: Tìm nguyên hàm của hàm số $\int \left(x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}\right) dx$

A. $\frac{x^3}{3} + 3 \ln|x| + \frac{4}{3} \sqrt{x^3} + C$

B. $\frac{x^3}{3} + 3 \ln|x| - \frac{4}{3} \sqrt{x^3} + C$

C. $\frac{x^3}{3} + 3 \ln x - \frac{4}{3} \sqrt{x^3}$

D. $\frac{x^3}{3} - 3 \ln|x| - \frac{4}{3} \sqrt{x^3} + C$

Lời giải

$$\int \left(x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} \right) dx = \frac{1}{3}x^3 + 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$$

Ta có:

Câu 18: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\sqrt{x} + x^{2024}$ là

A. $\sqrt{x} + \frac{x^{2023}}{673} + C$

B. $2\sqrt{x^3} + \frac{x^{2025}}{2025} + C$

C. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x^{2024}}{2025} + C$

D. $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 6054x^{2025} + C$

Lời giải

Ta có:

$$\int (3\sqrt{x} + x^{2024}) dx = \int \left(3x^{\frac{1}{2}} + x^{2024} \right) dx = 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{2025}}{2025} + C = 2\sqrt{x^3} + \frac{x^{2025}}{2025} + C$$

Câu 19: Họ các nguyên hàm của hàm số $y = x(x+1)^5$ là

A. $\frac{(x+1)^7}{7} + \frac{(x+1)^6}{6} + C$

B. $6(x+1)^5 + 5(x+1)^4 + C$

C. $6(x+1)^5 - 5(x+1)^4 + C$

D. $\frac{(x+1)^7}{7} - \frac{(x+1)^6}{6} + C$

Lời giải

Ta có $y = x(x+1)^5 = (x+1-1)(x+1)^5 = (x+1)^6 - (x+1)^5$

Kiểm tra $F(x) = \frac{(x+1)^7}{7} - \frac{(x+1)^6}{6} + C$ ta có $F'(x) = \frac{7(x+1)^6}{7} - \frac{6(x+1)^5}{6} = (x+1)^6 - (x+1)^5$

Câu 20: Cho hàm số $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x^2$. Tính $F'(25)$.

A. 25.

B. 125.

C. 5.

D. 625.

Lời giải

Ta có $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x^2$ nên ta có $F'(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó $F'(25) = 25^2 = 625$

Câu 21: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{\sqrt{5}}$

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{5}-1} x^{\sqrt{5}-1} + C$

B. $\int f(x) dx = x^{\sqrt{5}+1} + C$

C. $\int f(x) dx = \sqrt{5} x^{\sqrt{5}-1} + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{5}+1} x^{\sqrt{5}+1} + C$

Lời giải

$$\int f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{5}+1} x^{\sqrt{5}+1} + C$$

Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản suy ra

Câu 22: Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

- A. $2x^2 + 4x + C$. B. $x^2 + 4x + C$. C. $x^2 + C$. D. $2x^2 + C$.

Lời giải

$$\int f(x)dx = \int (2x + 4)dx = x^2 + 4x + C$$

Ta có

Câu 23: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 - 2024$ là

- A. $x^4 - 2024x + C$. B. $4x^3 - 2024x + C$. C. $12x^3 + C$. D. $x^4 + C$.

Lời giải

$$\int (4x^3 - 2024)dx = x^4 - 2024x + C$$

Ta có

Câu 24: Biết $F(x) = x^3 + \frac{1}{x} + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên miền $(0; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \ln x$. B. $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$.
C. $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2}$. D. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \ln x + x + C$.

Lời giải

$$F(x) = x^3 + \frac{1}{x} + 1$$

Ta có

là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) \quad (0; +\infty)$$

nên

$$F'(x) = f(x) \quad x \in (0; +\infty) \quad F'(x) = \left(x^3 + \frac{1}{x} + 1 \right)' = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$$

với mọi x mà

Câu 25: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

- A. $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$. B. $\frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$. C. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$. D. $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

Lời giải

$$\int f(x)dx = \int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$$

Ta có

Câu 26: Biết $\int \left(\frac{1}{2x} + x^5 \right)dx = a \ln|x| + bx^6 + C$ với $(a, b \in \mathbb{Q}, C \in \mathbb{R})$. Tính $a^2 + b$?

- A. $\frac{5}{12}$. B. 9. C. $\frac{7}{13}$. D. $\frac{7}{6}$.

Lời giải

$$\int \left(\frac{1}{2x} + x^5 \right)dx = \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{6}x^6 + C \quad a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{6} \Rightarrow a^2 + b = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

Ta có nên

Câu 27: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)$ là

- A. $2x+3+C$ B. $\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^2 + 2x + C$
 C. $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^2 + 2x + C$ D. $\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$

Lời giải

$$\int f(x)dx = \int (x+1)(x+2)dx = \int (x^2 + 3x + 2)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$$

Ta có

Câu 28: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{5+2x^4}{x^2}$

- A. $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{5}{x} + C$ B. $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5}{x} + C$
 C. $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + 5\ln x^2 + C$ D. $\int f(x)dx = 2x^3 - \frac{5}{x} + C$

Lời giải

$$\int f(x)dx = \int \left(2x^2 + \frac{5}{x^2} \right) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5}{x} + C$$

Ta có

Câu 29: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + 3\sqrt{x}$ thỏa mãn $F(1) = 0$

- A. $F(x) = x^2 + 3\sqrt{x^3}$ B. $F(x) = x^2 + 2\sqrt[3]{x^2}$
 C. $F(x) = x^2 + 3\sqrt[3]{x^2} - 4$ D. $F(x) = x^2 + 2\sqrt[3]{x^3} - 3$

Lời giải

Ta có: $\int (2x + 3\sqrt{x})dx = x^2 + 2x\sqrt{x} + C$ mà $F(1) = 0 \Rightarrow C = -3$

Vậy $F(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} - 3$

Câu 30: Tìm hàm số $y = f(x)$, biết $f'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}, (x > 0)$ và $f(1) = 1$

- A. $f(x) = 2x\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - 4$ B. $f(x) = 2x\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + 2$
 C. $f(x) = \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - 3$ D. $f(x) = x\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 3$

Lời giải

$$\int \left(3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int \left(3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx \Rightarrow \int \left(3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int \left(3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx + C$$

Xét

- Câu 31:** Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x-3)^2$ thỏa $F(0) = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_2 [3F(1) - 2F(2)]$.
- A. $T = 10$. B. $T = 4$. C. $T = 2$. D. $T = -4$.

Lời giải

$$F(x) = \int (2x-3)^2 dx = \frac{1}{2} \int (2x-3)^2 d(2x-3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^3}{3} + C$$

Ta có:

$$F(0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{(0-3)^3}{3} + C = \frac{1}{3} \Leftrightarrow C = \frac{29}{6}$$

Ta có

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^3}{3} + \frac{29}{6} \quad F(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{29}{6} = \frac{14}{3}; F(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{29}{6} = 5$$

Do đó

nên

$$\Rightarrow T = \log_2 [3F(1) - 2F(2)] = \log_2 \left(3 \cdot \frac{14}{3} - 2 \cdot 5 \right) = \log_2 4 = 2$$

- Câu 32:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2}{x+2}$. Biết $F(-1) = 1$, khi đó $F(2)$ bằng
- A. $2\ln 3 + 2$. B. $4\ln 2 + 1$. C. $\ln 8 + 1$. D. $2\ln 4$.

Lời giải

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{2}{x+2} dx = 2\ln|x+2| + C$$

Ta có

$$F(-1) = 1 \quad 2\ln|-1+2| + C = 1 \Leftrightarrow C = 1$$

Do

nên

$$F(x) = 2\ln|x+2| + 1 \Rightarrow F(2) = 2\ln 4 + 1 = 4\ln 2 + 1$$

Vậy

- Câu 33:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-3}$; biết $F(2) = 1$. Giá trị $F(3)$ bằng
- A. $F(3) = 2\ln 3 + 1$. B. $F(3) = \frac{1}{2}\ln 3 + 1$.
C. $F(3) = \ln 3 + 1$. D. $F(3) = \frac{1}{2}\ln 3 - 1$.

Lời giải

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{2x-3} dx = \frac{1}{2} \ln|2x-3| + C$$

Ta có:

Thay $x = 2$ suy ra $C = 1$ nên $F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x-3| + 1$ và $F(3) = \frac{1}{2} \ln 3 + 1$. Vậy .

Câu 34: Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 2x$ có dạng $F(x) = ax^4 + bx^2$. Tính $T = 4a + b$.
A. $T = 0$. **B.** $T = 1$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = 3$.

Lời giải

Ta có: $F(x) = ax^4 + bx^2$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 2x$ nên

$$F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4ax^3 + 2bx = x^3 + 2x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 1 \\ 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 1 \end{cases}$$

$$T = 4a + b = 4 \cdot \frac{1}{4} + 1 = 2$$

Do đó

Câu 35: Với giá trị thực nào của tham số m để hàm số $F(x) = mx^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$?
A. $m = 0$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 2$.

Lời giải

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên ta có

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow 3mx^3 + 2(3m+2)x - 4 = 3x^2 + 10x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 3 \\ 2(3m+2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Câu 36: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị $F(-1) + 2F(2)$ bằng
A. 23. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 21.

Lời giải

Do F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) = \int (2x+3) dx = x^2 + 3x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ F_2(x) = \int (3x^2+2) dx = x^3 + 2x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

Theo bài ra, ta có $F(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên $F(x)$ liên tục trên đó và $F(0) = 2$.

$$\begin{cases} F_1(1) = F_2(1) \\ F_2(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + C_1 = 3 + C_2 \\ C_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Điều này tương đương với

$$F_1(x) = x^2 + 3x + 1, F_2(x) = x^3 + 2x + 2 \quad F(-1) = F_2(-1) = -1, F(2) = F_1(2) = 11$$

Do đó, , suy ra

$$F(-1) + 2F(2) = -1 + 2 \cdot 11 = 21$$

Vậy

Câu 37: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 27.

B. 29.

C. 12.

D. 33.

Lời giải

Theo giả thiết F là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + 4x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 2$$

Vì

Mặt khác, $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x = 1$ nên ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) \Leftrightarrow 6 + C_1 = 5 + C_2 \Rightarrow C_1 = C_2 - 1 = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + 4x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(-1) + 2F(2) = -3 + 2 \cdot 15 = 27$$

Vậy

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 6x$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F(x) = f'(x)$

b) $F'(x) = f(x)$

c) $F(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

d) $F(1) = 3$

Lời giải

- a) Sai: Theo định nghĩa $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên $F'(x) = f(x)$
- b) Đúng: $F'(x) = f(x)$
- c) Đúng: Ta có:
$$F(x) = \int 4x^3 dx - \int 6x dx = x^4 - 3x^2 + C$$
- Theo giả thiết $F(0) = 2$ suy ra $C = 2 \Rightarrow F(x) = x^4 - 3x^2 + 2$
- d) Sai: $F(1) = 1^4 - 3 \cdot 1^2 + 2 = 0$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = 2x + m$ và $G(x) = x^3 + mx^2 + 3x + m$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ sao cho $F(0) = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

- a) Khi $m = 3$ thì $\int f(x) dx = x^2 - 3x + C$
- b) Khi $m = 2$ thì $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$
- c) Khi $m = -1$ thì $\int (G(x) - f(x)) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$
- d) Có 2 giá trị nguyên dương của m để $F(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Lời giải

- a) Sai: Khi $m = 3$ thì $\int f(x) dx = \int (2x + 3) dx = \int 2x dx + \int 3 dx = x^2 + 3x + C$
- b) Sai: Khi $m = 2, f(x) = 2x + 2; G(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$
- Ta có $G'(x) = 3x^2 + 4x + 3 \Rightarrow G'(1) = 10 \neq f(1)$ nên khi $m = 2$, $G(x)$ là không phải là một nguyên hàm của $f(x)$
- c) Đúng: Khi $m = -1, f(x) = 2x - 1; G(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$
- $$\int (G(x) - f(x)) dx = \int (x^3 - x^2 + x) dx = \int x^3 dx - \int x^2 dx + \int x dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$$
- d) Đúng: Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int 2x dx + \int m dx = x^2 + mx + C$ mà $F(0) = 1$ suy ra $C = 1$
- $$\Rightarrow F(x) = x^2 + mx + 1$$
- $$F(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$$

$$m \in \{1; 2\}$$

Vì m nguyên dương nên

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ với $x \neq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

$$f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$$

a)

$$\int f(x)dx = 2x + 3\ln(x-1) + C$$

b)

c) Nguyên hàm của $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ thỏa mãn $F(2) = 1$ là $F(x) = 2x + 3\ln|x-1| - 3$

d) Phương trình $F(x) = 2x + 2$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$. Khi đó $T = x_1 + x_2 = 2$

Lời giải

$$f(x) = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$$

a) Đúng: Ta có

$$\int f(x)dx = \int \left(2 + \frac{3}{x-1} \right) dx = 2x + 3\ln|x-1| + C$$

b) Sai:

$$\int f(x)dx = \int \left(2 + \frac{3}{x-1} \right) dx = 2x + 3\ln|x-1| + C$$

c) Đúng: Ta có

Ta có: $F(2) = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 + 3\ln|2-1| + C = 1 \Leftrightarrow C = -3$ nên $F(x) = 2x + 3\ln|x-1| - 3$

d) Đúng: $F(x) = 2x + 2 \Leftrightarrow 2x + 3\ln|x-1| - 3 = 2x + 2 \Leftrightarrow \ln|x-1| = 5 \Leftrightarrow |x-1| = e^5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + e^5 \\ x = 1 - e^5 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện xác định}).$$

Vậy $T = x_1 + x_2 = (1 + e^5) + (1 - e^5) = 2$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x+1}$ với $x \neq -1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+1}$$

a)

$$\int f(x)dx = x^2 + x + \ln(x+1) + C$$

b)

c) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x+1}$ thỏa mãn $F(-2) = 3$ là $F(x) = x^2 + x + \ln|x+1| + 1$

d) Bất phương trình $F(x) < x^2 + x + 2$ có tập nghiệm là $T = (-e-1; e-1)$

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+1}$$

a) Đúng: Ta có

$$\int f(x) dx = \int \left(2x + 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = x^2 + x + \ln|x+1| + C$$

b) Sai:

$$\int f(x) dx = \int \left(2x + 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = x^2 + x + \ln|x+1| + C$$

c) Đúng: Ta có

$$F(-2) = 3 \Leftrightarrow (-2)^2 + (-2) + 3\ln|-2+1| + C = 3 \Leftrightarrow C = 1$$

Ta có

$$F(x) = x^2 + x + \ln|x+1| + 1$$

nên

$$F(x) < x^2 + x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x + \ln|x+1| + 1 < x^2 + x + 2 \Leftrightarrow \ln|x+1| < 1$$

d) Sai:

$$\Leftrightarrow |x+1| < e \Leftrightarrow -e < x+1 < e \Leftrightarrow -e-1 < x < e-1, x \neq -1$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $F(x) < x^2 + x + 2$ là $T = (-e-1; e-1) \setminus \{-1\}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$ với $x \neq \pm 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

a)

$$\int f(x) dx = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C$$

b)

c) Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$ thỏa mãn $F(-2) = \ln(3e)$ là

$$F(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + 1$$

d) Phương trình $F(x) = \ln(2e)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Khi đó $S = x_1 \cdot x_2 = 1$.

Lời giải

$$f(x) = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

a) Đúng: Ta có

$$\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + C = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

b) Sai:

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + C = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

c) Đúng: Ta có

$$F(-2) = \ln(3e) \Leftrightarrow \ln \left| \frac{-2-1}{-2+1} \right| + C = \ln(3e) \Leftrightarrow \ln \left| \frac{-2-1}{-2+1} \right| + C = 1 + \ln 3 \Leftrightarrow C = 1$$

$$F(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + 1$$

Vậy

$$F(x) = \ln(2e) \Leftrightarrow \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + 1 = 1 + \ln 2 \Leftrightarrow \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = 2 \Leftrightarrow |x-1| = 2|x+1|$$

d) Đúng:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện xác định}).$$

$$S = x_1 \cdot x_2 = 1$$

Vậy

Câu 6: Cho hàm số $F(x) = \int (2x + \sqrt{x}) dx$ (với $x > 0$). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F(x) = 2 \int x dx + \int \sqrt{x} dx + C$ với $C \in \mathbb{Q}$

b) $G(x) = F(x) + 2024 \Rightarrow G(x) = \int (2x + \sqrt{x}) dx$

c) $F(x) = x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

d) $F(1) = \frac{2}{3} \Rightarrow F(4) = \frac{28}{3}$

Lời giải

a) Đúng: Vì $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, k \neq 0; \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

b) Đúng: $F(x), G(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) = G(x) + C$

c) Sai: suy ra c) sai.

d) Sai:

Câu 7: Cho hàm số $F(x) = \int (\sqrt[5]{x^3}) dx$ (với $x > 0$). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

$$F(x) = \frac{3}{5} \int x dx$$

a)

$$F(x) + C = \int (\sqrt[5]{x^3}) dx, C \in \mathbb{R}$$

b)

$$F(x) = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} + C$$

c)

$$F(1) = -\frac{3}{8}, \quad F(x) = \frac{5}{8} \sqrt[5]{x^8} - \frac{3}{8}$$

d) Biết

, khi đó

Lời giải

$$F(x) = \int (\sqrt[5]{x^3}) dx = \int x^{\frac{3}{5}} dx$$

a) Sai:

b) Đúng: Nếu $F(x), G(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) = G(x) + C$

$$F(x) = \int (\sqrt[5]{x^3}) dx = \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} + C$$

c) Sai:

$$F(x) = \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} + C, F(1) = \frac{5}{8} + C = -\frac{3}{8} \Rightarrow C = -1 \Rightarrow F(x) = \frac{5}{8} \sqrt[5]{x^8} - 1$$

d) Sai:

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = 3$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

$$a) \int f(x) dx = 3x + C$$

$$b) \int [f(x) + x]^2 dx = x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 2x + C$$

b)

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1) = 1$ thì $F(x) = 3x - 1$.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(1) + F(2) + \dots + F(100) = 14590$ khi $F(1) = 1$

Lời giải

$$\int 3 dx = 3x + C$$

a) Đúng: Ta có:

$$\int [f(x) + x]^2 dx = \int (3 + x)^2 dx = \int (x^2 + 6x + 9) dx = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 9x + C$$

b) Sai:

c) Sai: Ta có $F(1) = 1 \Leftrightarrow 3 + C = 1 \Leftrightarrow C = -2$ vậy $F(x) = 3x - 2$.

d) Sai: Ta có: $F(x) = 3x - 2$ nên $F(1) = 1; F(2) = 4; F(3) = 7; \dots; F(100) = 298$ là cấp số cộng
với $u_1 = 1; d = 3$.

$$F(1) + F(2) + \dots + F(100) = \frac{(1 + 298) \cdot 100}{2} = 14950.$$

Khi đó:

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 4x + 5$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1) = 3$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int (x^3 - 4x + 5) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x + C$

b) $F(0) = 2$

c) $\int [f(x) + f'(x)] dx = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2 + 9x + C$

d) $\int f(x+1) dx = \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\int (x^3 - 4x + 5) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x + C$

b) Sai: Ta có $F(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{13}{4} + C = 3 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{4}$ vậy $F(0) = -\frac{1}{4}$

c) Sai: Ta có: $\int [f(x) + f'(x)] dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x + x^3 - 4x + C = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2 + x + C$

d) Đúng: $\int f(x+1) dx = \frac{(x+1)^4}{4} - 2(x+1)^2 + 5(x+1) + C = \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = x + 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int f(x) dx = x^2 + x + C$

b) $\int [(x-1) \cdot f(x)] dx = \frac{1}{3}x^3 - x + C$

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1) = 2$ Thì $F(x) = x^2 + x - 1$

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1) = 2$ và

$\frac{1}{F(1)} + \frac{1}{F(2)} + \dots + \frac{1}{F(99)} + \frac{1}{F(100)} = \frac{a}{b}$ thì $a + b = 201$.

$$\int f(x)dx = x^2 + x + C$$

a) Đúng: Ta có:

$$\int [(x-1).f(x)]dx = \int (x-1).(x+1)dx = \int (x^2-1)dx = \frac{1}{3}x^3 - x + C$$

b) Đúng:

c) Sai: Ta có $F(1) = 2 \Leftrightarrow 2 + C = 2 \Leftrightarrow C = 0$ vậy $F(x) = x^2 + x$

d) Đúng: Ta có: $F(x) = x^2 + x = x(x+1)$ nên ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(1)} + \frac{1}{F(2)} + \dots + \frac{1}{F(99)} + \frac{1}{F(100)} &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101} \end{aligned}$$

Vậy $a = 100, b = 101$ nên $a + b = 201$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = x^2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + C$

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(3) = 1$ thì $F(4) = \frac{4}{3}$.

c) $\int f(2x+1)dx = \int (2x+1)^2 dx = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C$

d) $\int [x.f(x-2)]dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 2x^2 + C$

Lời giải

$$\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + C$$

a) Đúng: Ta có

b) Sai: Ta có $F(3) = 1 \Leftrightarrow \frac{3^3}{3} + C = 1 \Leftrightarrow C = -8$ vậy $F(x) = \frac{x^3}{3} - 8$ nên $F(4) = \frac{40}{3}$.

c) Đúng: $\int f(2x+1)dx = \int (2x+1)^2 dx = \int (4x^2 + 4x + 1)dx = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C$

d) Sai: $\int [x.f(x-2)]dx = \int x.(x-2)^2 dx = \int x.(x^2 - 4x + 4)dx$

$$= \int (x^3 - 4x^2 + 4x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + C$$

Câu 12: Cho hàm số $F(x) = x^2 + x - 6$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + C$
- b) $f(1) + f(2) + \dots + f(49) + f(50) = 2400$
- c) Hàm số $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ và $G(1) = 3$ thì giá trị $G(4) = 24$.
- d) Hàm số $H(x-1)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x-1)$ và $H(0) = 3$ thì giá trị của biểu thức $H(2) - H(4) = 6$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $F'(x) = 2x + 1$

$$f(1) + f(2) + \dots + f(49) + f(50) = 3 + 5 + \dots + 101 = \frac{(3+101) \cdot 50}{2} = 2600$$

b) Sai: Ta có

c) Sai: Ta có $G(x) = x^2 + x + C$ với $G(1) = 3 \Leftrightarrow 1^2 + 1 + C = 3 \Leftrightarrow C = 1$

Khi đó $G(x) = x^2 + x + 1 \Rightarrow G(4) = 21$

d) Sai: $H(x-1) = (x-1)^2 + (x-1) + C = x^2 - 2x + 1 + x - 1 + C = x^2 - x + C$ với $x=1$ ta có:

$$H(0) = 3 \Leftrightarrow C = 3 \quad \text{nên} \quad H(x-1) = x^2 - x + 3; \quad H(2) = H(3-1) = 9; \quad H(4) = H(5-1) = 23$$

Khi đó: $H(2) - H(4) = 9 - 23 = -14$

Câu 13: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 7}{x}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x) = x + 5 - \frac{7}{x}$

b) $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + 5x - 7 \ln|x| + C$

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(1) = 5$. Khi đó ta tìm được

hàm số $F(x) = \frac{x^2}{2} + 5x - 7 \ln|x| + \frac{1}{2}$

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1) = 4$ và $G(3) + G(-9) = 20$.
 Khi đó tìm được $G(-6) = a \ln 2 + b \ln 3 + c$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Vậy $a + b + c = \frac{2}{3}$.

Lời giải

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 7}{x} = x + 5 - \frac{7}{x}$$

a) Đúng:

$$\int f(x) dx = \int \left(x + 5 - \frac{7}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 5x - 7 \ln|x| + C$$

b) Đúng:

$$\int f(x) dx = \int \left(x + 5 - \frac{7}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 5x - 7 \ln|x| + C$$

c) Sai: Ta có

Do $F(1) = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 5 + C = 5 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}$ nên $F(x) = \frac{x^2}{2} + 5x - 7 \ln|x| - \frac{1}{2}$

$$\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + 5x - 7 \ln|x| + C = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 5x - 7 \ln x + C_1 & \text{khi } x > 0 \\ \frac{x^2}{2} + 5x - 7 \ln(-x) + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

d) Sai: Ta có

$$\begin{cases} G(1) = 4 \\ G(3) + G(-9) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} + 15 - 7 \ln 3 - \frac{3}{2} + \frac{81}{2} - 45 - 14 \ln 3 + C_2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{3}{2} \\ C_2 = 21 \ln 3 + \frac{13}{2} \end{cases}$$

Do

$$G(-6) = \frac{36}{2} - 30 - 7 \ln 6 + 21 \ln 3 + \frac{13}{2} = -7 \ln 2 + 14 \ln 3 - \frac{11}{2}$$

Khi đó:

$$a + b + c = -7 + 14 - \frac{11}{2} = \frac{3}{2}$$

Vậy

Câu 14: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \frac{(x+1)(3x-2)}{x}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

$$f(x) = 3x + 5 - \frac{2}{x}$$

a)

$$\int f(x) dx = 3x + 5 - 2 \ln|x| + C$$

b)

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3) = 15$. Khi đó ta tìm

$$F(x) = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + 15$$

được

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(2) = 1$ và $G(5) + G(-5) = 10$.

Khi đó tìm được $G(-10) = a \ln 2 + b \ln 5 + c$, với a, b, c là các số hữu tỷ. Vậy $a + b + c = 75$.

Lời giải

$$f(x) = \frac{(x+1)(3x-2)}{x} = \frac{3x^2 + x - 2}{x} = 3x + 1 - \frac{2}{x}$$

a) Sai:

$$\int f(x) dx = \int \left(3x + 1 - \frac{2}{x} \right) dx = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + C$$

b) Sai:

$$\int f(x) dx = \int \left(3x + 1 - \frac{2}{x} \right) dx = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + C$$

c) Sai: Ta có

$$F(3) = 15 \Leftrightarrow \frac{27}{2} + 3 - 2\ln 3 + C = 15 \Leftrightarrow C = 2\ln 3 - \frac{3}{2}$$

Do

$$F(x) = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + 2\ln 3 - \frac{3}{2}$$

Vậy

$$\int f(x) dx = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + C = \begin{cases} \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln x + C_1 & \text{khi } x > 0 \\ \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln(-x) + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

d) Đúng: Ta có:

$$\begin{cases} G(2) = 1 \\ G(5) + G(-5) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 + 2 + C_1 = 1 \\ \frac{75}{2} + 5 - 2\ln 5 + C_1 + \frac{75}{2} - 5 - 2\ln 5 + C_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -7 \\ C_2 = 4\ln 5 - 65 \end{cases}$$

Do

$$G(-10) = 150 - 10 - 2\ln 10 + 4\ln 5 - 65 = 75 - 2\ln 2 + 2\ln 5 = a \ln 2 + b \ln 5 + c$$

Nên

$$a + b + c = -2 + 2 + 75 = 75$$

Vậy

Câu 15: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \frac{3x^5 - 2x^3 + x^2 + 5x + 4}{x^3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

$$f(x) = 3x^2 - 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}$$

a)

b) $\int f(x)dx = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(-1) = 0$. Khi đó tìm được $F(x) = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{2}$

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1) = 0$ và $G(-3) - G(3) = 2$. Khi đó tìm được $G(-2) = \frac{a}{b} + \frac{1}{\log_c e}$, với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy $a + b + c = 1093$

Lời giải

$$f(x) = \frac{3x^5 - 2x^3 + x^2 + 5x + 4}{x^3} = 3x^2 - 2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3}$$

a) Đúng:

$$\int f(x)dx = \int \left(3x^2 - 2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) dx = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$$

b) Đúng: Ta có

$$\int f(x)dx = \int \left(3x^2 - 2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) dx = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$$

c) Đúng: Ta có

Do $F(-1) = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{3}{2}$ nên $F(x) = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{2}$

$$\int f(x)dx = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C = \begin{cases} x^3 - 2x + \ln x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C_1 & \text{khi } x > 0 \\ x^3 - 2x + \ln(-x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

d) Sai:

$$\begin{cases} G(1) = 0 \\ G(-3) - G(3) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{5}{2} \\ -27 + 6 + \ln 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{18} + C_2 - 27 + 6 - \ln 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} - \frac{5}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{5}{2} \\ C_2 = \frac{275}{6} \end{cases}$$

$$G(-2) = -8 + 4 + \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{275}{6} = \frac{1013}{24} + \frac{1}{\log_2 e} = \frac{a}{b} + \frac{1}{\log_c e}$$

Nên

Vậy $a + b + c = 1013 + 24 + 2 = 1039$

Câu 16: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right)^2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$

b) $\int f(x) dx = x - 2 \ln|x| + \frac{1}{x} + C$

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3) = 5$. Khi đó ta tìm được $F(x) = x - 2 \ln|x| - \frac{1}{x} + 5$

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1) = 5$ và $G(2) + G(-4) = 2025$. Khi đó tìm được $F(-8) = \frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy $a + b = 16123$

Lời giải

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right)^2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$$

a) Đúng:

$$\int f(x) dx = \int \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = x - 2 \ln|x| - \frac{1}{x} + C$$

b) Sai: Ta có

$$\int f(x) dx = \int \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = x - 2 \ln|x| - \frac{1}{x} + C$$

c) Sai: Ta có

$$F(3) = 5 \Leftrightarrow 3 - 2 \ln 3 - \frac{1}{3} + C = 5 \Leftrightarrow C = 2 \ln 3 + \frac{7}{3}$$

Do

$$F(x) = x - 2 \ln|x| - \frac{1}{x} + 2 \ln 3 + \frac{7}{3}$$

Vậy

$$\int f(x) dx = x - 2 \ln|x| - \frac{1}{x} + C = \begin{cases} x - 2 \ln x - \frac{1}{x} + C_1 & \text{khi } x > 0. \\ x - 2 \ln(-x) - \frac{1}{x} + C_2 & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

d) Đúng: Ta có:

$$\begin{cases} G(1) = 5 \\ G(2) + G(-4) = 2025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ 2 - 2 \ln 2 - \frac{1}{2} + 5 - 4 - 4 \ln 2 + \frac{1}{4} + C_2 = 2025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = 6 \ln 2 + \frac{8089}{4} \end{cases}$$

$$G(-8) = -8 - 6 \ln 2 + \frac{1}{8} + 6 \ln 2 + \frac{8089}{4} = \frac{16115}{8} \Rightarrow a = 16115; b = 8$$

Nên

Vậy $a + b = 16115 + 8 = 16123$

Câu 17: Hàm hai số $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ và $\int g(x)dx = x + \ln|x| + C$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

b) $g(x) = 1 + \frac{1}{x} + C$

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) + g(x)$ và thỏa mãn $F(-1) = 3$. Khi đó tìm được $F(x) = x^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{2}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) + g(x)$. Biết $G(2) = 2\ln 2$ và $G(4) + G(-4) = 2$. Khi đó tìm được $G(-6) = a\ln 2 + b\ln 3 + c$, với a, b, c là các số thực. Vậy $a + b + c = -2$.

Lời giải

a) Đúng: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$

b) Sai: Ta có $\int g(x)dx = x + \ln|x| + C \Rightarrow g(x) = 1 + \frac{1}{x}$

c) Sai: Ta có $f(x) + g(x) = x + 1 + \frac{2}{x}$

Nên $\int [f(x) + g(x)]dx = \int \left(x + 1 + \frac{2}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x| + C$

Do $F(-1) = 3 \Leftrightarrow C = \frac{7}{2}$ nên $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x| + \frac{7}{2}$.

d) Đúng: Ta có $\int [f(x) + g(x)]dx = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x| + C = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + 2\ln x + C_1 & \text{khi } x > 0 \\ \frac{x^2}{2} + x + 2\ln(-x) + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

d) Đúng: Ta có

Do $\begin{cases} G(2) = 2\ln 2 \\ G(4) + G(-4) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -4 \\ 8 + 4 + 4\ln 2 - 4 + 8 - 4 + 4\ln 2 + C_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = -8\ln 2 - 10 \end{cases}$

$$G(-6) = 18 - 6 + 2 \ln 6 - 8 \ln 2 - 10 = 2 - 6 \ln 2 + 2 \ln 3 = a \ln 2 + b \ln 3 + c$$

Nên

$$\text{Vậy } a + b + c = -6 + 2 + 2 = -2$$

Câu 18: Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t) = -0,1t^3 + t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng cm/tuần. Gọi $h(t)$ (tính bằng cm) là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

$$h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} \quad t \geq 0$$

a) , với

$$88,4 \text{ cm}$$

b) Chiều cao tối đa của cây cà chua đó là (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

c) Giai đoạn tăng trưởng của cây cà chua đó kéo dài trong 9 tuần.

$$54,4 \text{ cm}$$

d) Vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì chiều cao cây cà chua đạt (kết quả được làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

$$\int (-0,1t^3 + t^2) dt = \int -0,1t^3 dt + \int t^2 dt = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + C$$

a) Sai: Ta có:

$$h(t) \quad v(t) \quad h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + C$$

Do là một nguyên hàm của nên

$$h(0) = 5 \quad C = 5$$

Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm nên suy ra

$$h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + 5, t \geq 0$$

Vậy

$$h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + 5 \quad t \in [0; 10]$$

b) Đúng: Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của với

$$h'(t) = \frac{-t^3}{10} + t^2 = \frac{t^2}{10}(-t + 10) \quad h'(t) = 0 \quad t$$

Ta có: suy ra khi bằng 0 hoặc 10.

Ta thấy $h(0) = 5, h(10) = \frac{265}{3}$. Khi đó, $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{265}{3}$ trên đoạn $[0;10]$.

$$\frac{265}{3} \approx 88,3 \text{ (cm)}$$

Vậy chiều cao tối đa của cây cà chua đó là .

$$v(t) > 0 \Leftrightarrow -0,1t^3 + t^2 > 0 \Rightarrow t < 10$$

c) Sai: Cây tăng trưởng khi .

Vậy giai đoạn tăng trưởng của cây kéo dài 10 tuần.

$$v(t) = -0,1t^3 + t^2 \quad t \in [0;10]$$

d) Đúng: Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số với .

$$v'(t) = -0,3t^2 + 2t = -0,3t \left(t - \frac{20}{3} \right) \quad v'(t) = 0 \quad t = \frac{20}{3}$$

Ta có: , suy ra khi bằng 0 hoặc .

$$v(0) = 0, v\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{400}{27}, v(10) = 0$$

Ta thấy .

Khi đó $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{400}{27}$ trên đoạn $[0;10]$ tại $t = \frac{20}{3}$.

$$h\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{4405}{81} \approx 54,4$$

Ta có: .

Câu 19: Một chiếc xe đang chuyển động đều với tốc độ $v_0 = 15 \text{ m/s}$ thì gặp chướng ngại vật rồi phanh gấp với gia tốc không đổi là $a = -3 \text{ m/s}^2$. Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của xe, $a(t)$ là gia tốc xe, $s(t)$ là quãng đường xe đi được cho đến thời điểm t giây kể từ lúc phanh xe. Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau.

a) $v(t) = a'(t)$.

b) $a(t) = s''(t)$.

c) Tính từ lúc phanh xe, sau 4 giây thì xe dừng hẳn.

d) Quãng đường xe đi được tính từ lúc phanh xe đến khi dừng hẳn nằm trong khoảng từ 35 mét đến 40 mét.

Lời giải

$$v(t) = \int a(t) dt$$

a) Sai:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

b) Đúng:

$$v(t) = \int a(t) dt = \int -3 dt = -3t + C$$

c) Sai:

$$v(0) = -3 \cdot 0 + C = 15 \Rightarrow C = 15 \quad v(t) = -3t + 15$$

. Suy ra

Xe dừng hẳn khi $v(t) = 0 \Rightarrow -3t + 15 = 0 \Rightarrow t = 5$ giây.

$$s(t) = \int v(t) dt = \int -3t + 15 dt = -\frac{3}{2}t^2 + 15t + C$$

d) Đúng:

$$s(0) = -\frac{3}{2} \cdot 0^2 + 15 \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(5) = 37,5$$

mét.

Câu 20: Trong thí nghiệm nuôi cấy một loại vi sinh vật, kí hiệu $f(t)$ là tổng số lượng vi sinh vật sau t giờ. Biết rằng sau 3 giờ đầu tiên thì tổng số lượng vi sinh vật là 50 con. Trong 7 giờ tiếp theo, số lượng vi sinh vật thay đổi với tốc độ $f'(t) = t^2 - 8t$ (con/giờ).

a) Họ nguyên hàm của $f'(t) = \frac{t^3}{3} - 8t^2 + C$ ($C \in \mathbb{R}$) là

b) Số lượng vi khuẩn tăng liên tục trong khoảng từ 3 giờ đến 10 giờ sau thời điểm làm thí nghiệm.

c) Số lượng vi khuẩn là nhỏ nhất sau 8 giờ tính từ lúc bắt đầu làm thí nghiệm.

d) Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn là 5 con.

Lời giải

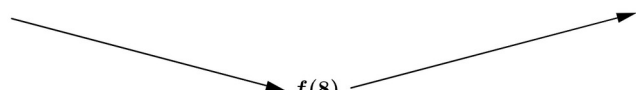
$$\int (t^2 - 8t) dt = \frac{t^3}{3} - 4t^2 + C$$

a) Sai: Ta có:

b) Sai: Ta có: $f'(t) > 0$ khi $8 < t < 10$ và $f'(t) < 0$ khi $3 < t < 8$.

Nên số lượng vi sinh vật giảm trong khoảng từ 3 giờ đến 8 giờ, sau đó tăng dần trong khoảng 8 giờ đến 10 giờ.

c) Đúng: Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	3	8	10
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$			

$$f(t) = \frac{t^3}{3} - 4t^2 + C \quad f(3) = 50 \Rightarrow \frac{3^3}{3} - 4 \cdot 3^2 + C = 50 \Rightarrow C = 77$$

d) Đúng: . Do

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 77 \Rightarrow f(6) = 5$$

Suy ra

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Người ta truyền nhiệt cho một bình nuôi cấy vi sinh vật từ 1°C . Tốc độ tăng nhiệt độ của bình tại thời điểm t phút ($0 \leq t \leq 5$) được cho bởi hàm số $f(t) = 3t^2$ ($^\circ\text{C}/\text{phút}$). Biết rằng nhiệt độ của bình đó tại thời điểm t là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$. Tìm nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt.

Lời giải

$$F(t) = \int f(t) dt = \int 3t^2 dt = t^3 + C$$

Ta có nhiệt độ của bình là

1°C

Vì người ta bắt đầu truyền nhiệt cho bình nuôi cấy từ nên ta có:

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(t) = t^3 + 1 (^\circ\text{C})$$

$$F(3) = 3^3 + 1 = 28 (^\circ\text{C})$$

Vậy nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt là

Câu 2: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là 90 m^3 và sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là 504 m^3 . Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $h(t) = \int (6at^2 + 2bt) dx = 2at^3 + bt^2 + c$

Lại có $h(0) = 0; h(3) = 90; h(6) = 504$ nên suy ra
$$\begin{cases} c = 0 \\ 54a + 9b = 90 \\ 432a + 36b = 504 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 6 \\ c = 0 \end{cases}$$

Vậy $h(t) = \frac{4}{3}t^3 + 6t^2 \Rightarrow h(9) = 1458 \text{ m}^3$

Câu 3: Tốc độ tăng trưởng của một đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng kể từ khi người ta thả 100 cá thể đầu tiên vào một khu rừng được ước lượng bởi công thức $P'(t) = 8t + 30$ (con/tháng), với $P(t)$ là số lượng cá thể trong đàn tại thời điểm t tháng tương ứng. Dựa vào tốc độ tăng trưởng đã cho, hãy ước tính số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng.

Lời giải

Số lượng cá thể trong đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng là

$$P(t) = \int P'(t) dt = \int (8t + 30) dt = 4t^2 + 30t + C \text{ (con)}$$

$$P(0) = 100 \Leftrightarrow C = 100 \Rightarrow P(t) = 4t^2 + 30t + 100$$

Vì ban đầu thả 100 cá thể gấu mèo nên (con).

Suy ra số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng là

$$P(3) = 4.3^2 + 30.3 + 100 = 226 \text{ (con)}$$

Câu 4: Cường độ dòng điện (đơn vị: A) trong một dây dẫn tại thời điểm t giây là:

$$I(t) = Q'(t) = 3t^2 - 6t + 5$$

Với $Q(t)$ là điện lượng (đơn vị: C) truyền trong dây dẫn tại thời điểm t . Biết khi $t = 1$ giây thì $Q(1) = 4$ điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q(3)$. Tính điện lượng truyền trong dây dẫn khi $t = 3$.

Lời giải

$$Q(t) = \int Q'(t) dt = \int (3t^2 - 6t + 5) dt = t^3 - 3t^2 + 5t + C$$

Ta có:

$$Q(1) = 4 \Rightarrow 1 - 3 + 5 + C = 4 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow Q(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 1$$

Vì

$$t = 3 \quad Q(3) = 3^3 - 3.3^2 + 5.3 + 1 = 16 \text{ (C)}$$

Suy ra điện lượng truyền trong dây dẫn khi $t = 3$ là

Câu 5: Một chất điểm thực hiện chuyển động thẳng trên trục Ox , với vận tốc cho bởi công thức $v(t) = 3t^2 + 4t$ (m/s) với t là thời gian. Biết rằng tại thời điểm bắt đầu của chuyển động, chất điểm đang ở vị trí có tọa độ $x = 1$. Tọa độ của chất điểm sau 1 giây chuyển động là bao nhiêu?

Lời giải

Phương trình tọa độ của chất điểm là nguyên hàm của phương trình vận tốc nên ta có:

$$x(t) = \int v(t) dt = \int (3t^2 + 4t) dt = t^3 + 2t^2 + C$$

Tại thời điểm bắt đầu của chuyển động, chất điểm đang ở vị trí có tọa độ $x = 1$ nên khi $t = 0$ có $C = 1 \Rightarrow x(t) = t^3 + 2t^2 + 1$

Tọa độ của chất điểm sau 1 giây chuyển động là $x = 4$.

Câu 6: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc thời gian $t(s)$ là $a(t) = 2t - 7 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Biết vận tốc đầu bằng 10 m/s , hỏi sau bao lâu thì chất điểm đạt vận tốc 18 m/s ?

Lời giải

$$v(t) = \int (2t - 7) dt = t^2 - 7t + C$$

Ta có

$$10 \text{ (m/s)} \quad v(0) = 10 \Leftrightarrow C = 10 \Rightarrow v(t) = t^2 - 7t + 10$$

Vận tốc ban đầu bằng nên

$$18 \text{ (m/s)} \quad t^2 - 7t + 10 = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 8. \end{cases}$$

Chất điểm đạt vận tốc khi và chỉ khi

$$18 \text{ (m/s)}$$

Vậy sau 8s thì chất điểm đạt vận tốc

Câu 7: Một viên đạn được bắn lên trời với vận tốc là 72 (m/s) bắt đầu từ độ cao 2 m . Hãy xác định chiều cao của viên đạn sau thời gian 5 s kể từ lúc bắn biết gia tốc trọng trường là $9,8 \text{ (m/s}^2\text{)}$

Lời giải

Ta có vận tốc của viên đạn tại thời điểm t là: $v(t) = \int -9,8 dt = -9,8t + C_1$

Do $v(0) = 72$ nên $v(0) = -9,8 \cdot 0 + C_1 = 72 \Leftrightarrow C_1 = 72 \Rightarrow v(t) = -9,8t + 72$

Độ cao của viên đạn tại thời điểm t là:

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (-9,8t + 72) dt = -4,9t^2 + 72t + C_2$$

Vì $s(0) = 2$ nên $s(0) = -4,9 \cdot 0^2 + 72 \cdot 0 + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2 \Rightarrow s(t) = -4,9t^2 + 72t + 2$

Vậy sau khoảng thời gian 5 s kể từ lúc bắn, viên đạn ở độ cao

$$s(5) = -4,9 \cdot 5^2 + 72 \cdot 5 + 2 = 239,5 \text{ (m)}$$

Câu 8: Một vật đang chuyển động với vận tốc 6 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = \frac{3}{t+1} \text{ (m/s}^2\text{)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây gần nhất với kết quả nào sau đây?

Lời giải

Ta có $v(t) = \int \frac{3}{t+1} dt = 3 \ln|t+1| + C$

Tại thời điểm lúc bắt đầu tăng tốc $t = 0$ thì $v = 6 \text{ m/s}$ nên ta có $3 \ln 1 + C = 6 \Leftrightarrow C = 6$

Suy ra $v(t) = 3 \ln|t+1| + 6 \text{ m/s}$

Tại thời điểm $t = 10s \Rightarrow v(10) = 3\ln 11 + 6 \approx 13 \text{ m/s}$.

Câu 9: Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số $B'(t) = \frac{1000}{(1 + 0,3t)^2}$ với $t \geq 0$, trong đó $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ t . Số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì người ta phải xử lý và thay nước mới cho hồ bơi.

Lời giải

Theo giả thiết thì số lượng vi khuẩn tăng với tốc độ là hàm số $B'(t)$ nên $B(t)$ chính là nguyên hàm của $B'(t)$:

$$B(t) = \int B'(t) dt = \int \frac{1000}{(1 + 0,3t)^2} dt = 1000 \int (1 + 0,3t)^{-2} dt = -\frac{1000}{0,3(1 + 0,3t)} + C$$

Khi đó:

Số lượng vi khuẩn lúc ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước nên:

$$B(0) = 500 \Leftrightarrow -\frac{1000}{0,3(1 + 0,3 \cdot 0)} + C = 500 \Leftrightarrow C = \frac{11500}{3}.$$

$$B(t) = -\frac{1000}{0,3(1 + 0,3t)} + \frac{11500}{3}.$$

Suy ra hàm số biểu thị cho số lượng vi khuẩn tại ngày thứ t là:

Số lượng vi khuẩn dưới 3000 con trên mỗi ml nước thì người bơi vẫn an toàn, ta có:

$$\begin{aligned} B(t) < 3000 &\Leftrightarrow -\frac{1000}{0,3(1 + 0,3t)} + \frac{11500}{3} < 3000 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1000}{0,3(1 + 0,3t)} < -\frac{2500}{3} \Leftrightarrow 1 + 0,3t < 4 \Leftrightarrow t < 10. \end{aligned}$$

Vậy vào ngày thứ 10 hồ bơi không còn an toàn, cần phải thay nước mới.

Câu 10: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ (m^3/s) và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

Lời giải

Ta có: $h'(t) = 3at^2 + bt$

$$\text{Suy ra } h(t) = \int (3at^2 + bt) dt = at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + C \Rightarrow h(t) = at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + C$$

$$t = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow h(t) = at^3 + \frac{1}{2}bt^2$$

Chọn

Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$: $h(5) = 150 \Leftrightarrow 125a + \frac{25}{2}b = 150$

Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$: $h(10) = 1100 \Leftrightarrow 1000a + 50b = 1100$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} 125a + \frac{25}{2}b = 150 \\ 1000a + 50b = 1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow h(t) = t^3 + t^2$$

Nên thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là $h(20) = 20^3 + 20^2 = 8400m^3$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^4 + x^{-3}$

c) $f(x) = x^2 + \frac{3}{x}$

d) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

e) $f(x) = x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}$

f) $f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Lời giải

a) Ta có $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

b) Ta có $\int f(x) dx = \int (x^4 + x^{-3}) dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^{-2} + C$

c) Ta có $\int \left(x^2 + \frac{3}{x}\right) dx = \frac{x^3}{3} + 3\ln|x| + C$

d) Ta có $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \ln|x| + \frac{1}{x} + C$

e) Ta có $\int x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} dx = \frac{x^3}{3} + 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

f) Ta có $\int \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx = \int \left(3x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}}\right) dx = \frac{6}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C = 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$

Bài tập 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết:

a) $f(x) = 2x(1 + 3x^3)$

b) $f(x) = (3x - 2)^2$

c) $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{2x - 1}$

e) $f(x) = \frac{2}{4x - 3}$

f) $f(x) = \frac{6x + 2}{3x - 1}$

Lời giải

$$\int 2x(1+3x^3)dx = \int (2x+6x^4)dx = x^2 \left(1 + \frac{6x^3}{5}\right) + C$$

a) Ta có

$$\int (3x-2)^2 dx = \int (9x^2 - 12x + 4)dx = 3x^3 - 6x^2 + 4x + C$$

b) Ta có

$$f(x) = \frac{2x^4+3}{x^2} = 2x^2 + 3x^{-2} \Rightarrow \int f(x)dx = \int (2x^2 + 3x^{-2})dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$$

c) Ta có

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$$

d) Ta có

$$\int \frac{2}{4x-3} dx = \int \frac{1}{2x-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2} \ln \left| 2x - \frac{3}{2} \right| + C$$

e) Ta có

$$\int \frac{6x+2}{3x-1} dx = \int \left(2 + \frac{4}{3x-1} \right) dx = 2x + \frac{4}{3} \ln|3x-1| + C$$

f) Ta có

Bài tập 3: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1+2x^2}{x}$ thỏa mãn $F(-1) = 3$. Tìm $F(x)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } F(x) = \int \frac{1+2x^2}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + 2x \right) dx = \ln|x| + x^2 + C$$

$$\text{Mà } F(-1) = 3 \Leftrightarrow \ln|-1| + (-1)^2 + C = 3 \Leftrightarrow C = 2 \text{ nên } F(x) = \ln|x| + x^2 + 2$$

Bài tập 4: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ và $F(0) = 2$. Tính $F(e)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$$

$$\text{Do } F(0) = 2 \text{ suy ra } C = 2 \text{ nên } F(e) = \frac{1}{2} \ln(2e+1) + 2 = \ln\sqrt{2e+1} + 2$$

Bài tập 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2-2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Tính $F(-1) + 2F(2)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int (2x-1)dx = x^2 - x + C_1 \quad \int (3x^2-2)dx = x^3 - 2x + C_2$$

$$F(x) = \int f(x) dx = \begin{cases} x^2 - x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \quad F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$$

Suy ra

mà ta có

Mặt khác hàm số F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $y = F(x)$ liên tục tại $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) \Rightarrow C_1 = 1$$

Suy ra:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} F(-1) = 3 \\ F(2) = 3 \end{cases} \quad F(-1) + 2F(2) = 9$$

Khi đó, ta có

suy ra

. Vậy

Bài tập 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 6x^2 - 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(2) = 0$. Tính $F(4)$.

Lời giải

Ta có: $\int f'(x) dx = \int (6x^2 - 2) dx = 2x^3 - 2x + C$

Suy ra $f(x) = 2x^3 - 2x + C$

Theo bài ra ta có $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = 2x^3 - 2x + 1$

Khi đó: $F(x) = \int f(x) dx = \int (2x^3 - 2x + 1) dx = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + x + C'$

Khi đó:

Mà $F(2) = 0 \Rightarrow 6 + C' = 0 \Rightarrow C' = -6$ suy ra $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + x - 6 \Rightarrow F(4) = 110$.

Vậy $F(4) = 110$.

Bài tập 7: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết:

a) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{\sqrt{x}}$

Lời giải

a) $\int f(x) dx = \int \frac{x^2 + 3x + 2}{x} dx = \int \left(x + 3 + \frac{2}{x} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2 \ln|x| + C$

a)

b) $\int f(x) dx = \int \frac{x^2 + 3x + 1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

b) Ta có

$$= \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x} + C$$

$$\int f(x) dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x} + C$$

Vậy

Bài tập 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{3x^3 + 1}{x}$. Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $f(-3) + f(3)$ biết $f(1) = 2, f(-1) = 3$.

Lời giải

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{3x^3 + 1}{x} dx = \int \left(3x^2 + \frac{1}{x} \right) dx = x^3 + \ln|x| + C = \begin{cases} x^3 + \ln x + C_1 & \text{khi } x > 0 \\ x^3 + \ln(-x) + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

$$f(1) = 1 + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = 1 \quad f(-1) = -1 + C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = 4$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \ln x + 1 & \text{khi } x > 0 \\ x^3 + \ln(-x) + 4 & \text{khi } x < 0 \end{cases} \quad f(-3) + f(3) = 2\ln 3 + 5.$$

Suy ra

nên

Bài tập 9: Tìm hàm số $y = f(x)$ biết $f'(x) = 3x^2 + 2x - m + 1$, $f(2) = 1$ và đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5 .

Lời giải

$$f(x) = \int (3x^2 + 2x - m + 1) dx = x^3 + x^2 + (1 - m)x + C$$

Ta có

$$\begin{cases} f(2) = 1 \\ f(0) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(1 - m) + C + 12 = 1 \\ C = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ C = -5 \end{cases}$$

Theo đề bài, ta có

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 5$$

Vậy

Bài tập 10: Tìm giá trị của tham số m biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + m - 1$ thỏa mãn $F(0) = 0$ và $F(3) = 7$.

Lời giải

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + m - 1 \right) dx = \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right) dx + \int (m - 1) dx$$

Ta có:

$$= \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right) d(x+1) + \int (m - 1) dx = \sqrt{x+1} + (m - 1)x + C$$

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(3) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C + 1 = 0 \\ C + 3m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -1 \\ m = 3 \end{cases}$$

Theo đề bài ta có:

$$\text{Vậy } m = 3 \text{ khi đó } F(x) = \sqrt{x+1} + 2x - 1$$

Bài tập 11: Một loài vi khuẩn đang phát triển với tốc độ $f(t) = \frac{300}{0,25t}$, trong đó, t là thời gian tính bằng ngày. Với $t = 1$ thì số lượng vi khuẩn là 1000 con. Hỏi sau 3 ngày số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

Lời giải

Do vi khuẩn đang phát triển với tốc độ $f(t) = \frac{300}{0,25t}$ nên hàm số lượng vi khuẩn $P(t)$ tại thời điểm t là một nguyên hàm của hàm số $f(t) = \frac{300}{0,25t}$.

$$P(t) = \int \frac{300}{0,25t} dt = \frac{300}{0,25} \cdot \ln t + C = 1200 \cdot \ln t + C$$

Từ đó có

$$P(1) = 1000 \Leftrightarrow 1200 \cdot \ln 1 + C = 1000 \Rightarrow C = 1000$$

Ta có với

Hàm số biểu diễn số lượng vi khuẩn theo thời gian t là: $P(t) = 1200 \cdot \ln t + 1000$.

Sau 3 ngày số lượng vi khuẩn là $P(3) = 1200 \cdot \ln 3 + 1000 \approx 2318$ (con).

Dạng 2: Nguyên hàm của hàm số lượng giác

Các công thức thường dùng:

$$\oplus \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\oplus \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\oplus \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$$

$$\oplus \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$$

Chú ý các công thức biến đổi lượng giác:

$$\oplus \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\oplus \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$\oplus \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

$$\oplus \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\oplus \sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\oplus \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\oplus \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\oplus \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3 \cos x - 4 \sin x$ là:

A. $3 \sin x - 4 \cos x$.

B. $-3 \sin x + 4 \cos x$.

C. $3 \sin x + 4 \cos x + C$.

D. $-3 \sin x + 4 \cos x + C$.

Lời giải

$$\int f(x)dx = \int (3\cos x - 4\sin x)dx = 3\int \cos x dx - 4\int \sin x dx = 3\sin x - 4\cos x + C$$

Câu 2: Nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = 2\sin x + \frac{3}{\sin^2 x}$$

là:

A. $-2\cos x - 3\cot x + C$

B. $2\cos x - 3\tan x + C$

C. $-2\cos x + 3\cot x + C$

D. $2\cos x - 3\cot x + C$

Lời giải

$$\int f(x)dx = \int \left(2\sin x + \frac{3}{\sin^2 x} \right) dx = 2\int \sin x dx + 3\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -2\cos x - 3\cot x + C$$

Ta có

Câu 3: Nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)^2$$

là:

A. $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} + C$

B. $x - \cos x + C$

C. $\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 + C$

D. $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} + C$

Lời giải

$$\int f(x)dx = \int \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + 2\cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} \right) dx$$

Ta có

$$= \int (1 + \sin x) dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C$$

Câu 4: Nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = 2\cos^2 \frac{x}{2}$$

là:

A. $4\cos \frac{x}{2} + C$

B. $x + \sin x + C$

C. $2\sin^2 \frac{x}{2} + C$

D. $\frac{2}{3}\cos^3 \frac{x}{2} + C$

Lời giải

$$\int f(x)dx = \int 2\cos^2 \frac{x}{2} dx = \int (1 + \cos x) dx = \int dx + \int \cos x dx = x + \sin x + C$$

Ta có

Câu 5: Nguyên hàm của hàm số có

$$f(x) = \tan^2 x + \cot^2 x$$

là:

A. $2\tan x + 2\cot x + C$

B. $\frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{3}\cot^3 x + C$

C. $-\tan x + \cot x - 2x + C$

D. $\tan x - \cot x - 2x + C$

Lời giải

$$\int f(x)dx = \int \tan^2 x dx + \int \cot^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x - 1) dx + \int (1 + \cot^2 x - 1) dx$$

Ta có

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx + \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - 2 \int dx$$

$$= \tan x - \cot x - 2x + C$$

Câu 6: Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \sin(2x + 1)$?

A. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos(2x + 1)$

B. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\cos(2x + 1)$

C. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\cos(2x + 1)$

D. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\cos(2x + 1)$

Lời giải

$$\left(\frac{1}{2}x^2 - \cos(2x + 1) \right)' = x + 2\sin(2x + 1)$$

$$\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\cos(2x + 1) \right)' = x + 4\sin(2x + 1)$$

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\cos(2x + 1) \right)' = x - \sin(2x + 1)$$

$$\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\cos(2x + 1) \right)' = x + \sin(2x + 1)$$

Vậy $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\cos(2x + 1)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \sin(2x + 1)$

Câu 7: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2\sin x - \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ là

A. $F(x) = 2\cos x - \sin x - 1$

B. $F(x) = 2\cos x + \sin x - 1 - \sqrt{3}$

C. $F(x) = -2\cos x - \sin x + 1$

D. $F(x) = -2\cos x - \sin x - 1$

Lời giải

$$F(x) = \int (2\sin x - \cos x) dx = -2\cos x - \sin x + C$$

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} + C = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C = 1$$

Vậy $F(x) = -2\cos x - \sin x + 1$

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\cos^2 x}$. Chọn khẳng định đúng:

A. $\int f(x)dx = \ln|x| + \tan x + C$

B. $\int f(x)dx = \ln x + \tan x + C$

C. $\int f(x)dx = \ln x + \tan|x| + C$

D. $\int f(x)dx = \ln|x| + \tan x$

Lời giải

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \ln|x| + \tan x + C$$

Ta có:

Câu 9: Khẳng định nào đây sai?

A. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

B. $\int \cos x \, dx = -\sin x + C$

C. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

D. $\int \cos x \, dx = -\tan x + C$

Lời giải

Ta có: $\int \cos x \, dx = -\sin x + C$

Câu 10: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A. $x^3 - \cos x + C$

B. $6x - \cos x + C$

C. $x^3 + C$

D. $x^3 + \sin x + C$

Lời giải

$$\int f(x)dx = \int (3x^2 + \sin x)dx = x^3 - \cos x + C$$

Ta có

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\cos x$ và $f(0) = 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 3x - 5\sin x - 5$

B. $f(x) = 3x + 5\sin x + 5$

C. $f(x) = 3x + 5\sin x + 2$

D. $f(x) = 3x - 5\sin x + 5$

Lời giải

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (3 - 5\cos x)dx = 3x - 5\sin x + C$$

Ta có

$$f(0) = 5 \Rightarrow 3 \cdot 0 - 5\sin 0 + C = 5 \Leftrightarrow C = 5$$

Ta lại có:

$$f(x) = 3x - 5\sin x + 5$$

Vậy

Câu 12: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + 2\cos x$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ là

A. $F(x) = -2\sin x - \cos x + 2$

B. $F(x) = 2\sin x - \cos x + 2$

C. $F(x) = \sin x - 2\cos x - 2$

D. $F(x) = 2\sin x - \cos x - 2$

Lời giải

$$\int (\sin x + 2\cos x)dx = -\cos x + 2\sin x + C$$

Ta có

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad C = -2 \quad F(x) = 2\sin x - \cos x - 2$$

Do nên nên

Câu 13: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là

A. $-\cos x + \tan x - \sqrt{2} + 1$

B. $-\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$

C. $\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$

D. $-\cos x + \tan x + C$

Lời giải

$$F(x) = \int \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\cos x + \tan x + C$$

Ta có

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad C = \sqrt{2} - 1 \quad F(x) = -\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$$

Vì nên nên

Câu 14: Tìm $\int \sin 5x \, dx$

A. $\int \sin 5x \, dx = -5\cos 5x + C$

B. $\int \sin 5x \, dx = -\cos 5x + C$

C. $\int \sin 5x \, dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$

D. $\int \sin 5x \, dx = \frac{1}{5}\cos 5x + C$

Lời giải

$$\int \sin 5x \, dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$$

Ta có

Câu 15: Với C là hằng số, họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\cos 2x$ là

A. $\sin 2x + C$

B. $2\sin 2x + C$

C. $-2\sin 2x + C$

D. $-\sin 2x + C$

Lời giải

$$\int f(x) dx = \int 2\cos 2x \, dx = \sin 2x + C$$

Ta có

Câu 16: Tìm $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} \, dx$

A. $\cos x + \sin x + C$

B. $-\cos x - \sin x + C$

C. $-\cot x - \tan x + C$

D. $\cot x - \tan x + C$

Lời giải

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} \, dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \, dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\cot x - \tan x + C$$

Câu 17: Nguyên hàm của hàm số $y = \tan^2 x$ là

A. $\tan x - x + C$

B. $-\tan x - x + C$

C. $-\tan x + x + C$.

D. $\tan x + x + C$.

Lời giải

$$\int \tan^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C$$

Ta có

Câu 18: Biết $\int (2\sin x + \cos x)^2 \, dx = a\sin 2x - \cos 2x + bx + C$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

A. $\frac{17}{2}$. B. $\frac{109}{4}$. C. $\frac{17}{16}$. D. $\frac{109}{16}$.

Lời giải

Từ giả thiết, áp dụng định nghĩa nguyên hàm ta được:

$$(a\sin 2x - \cos 2x + bx + C)' = (2\sin x + \cos x)^2 = 2\sin 2x - \frac{3}{2}\cos 2x + \frac{5}{2}$$

$$(a\sin 2x - \cos 2x + bx + C)' = 2a\cos 2x + 2\sin 2x + b$$

Ta có

$$\begin{cases} 2a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Đối chiếu kết quả đồng nhất ta được

Câu 19: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của của hàm số $f(x) = \sin x$ và đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Lời giải

Theo bài ra $f(x) = \sin x$ nên $F(x) = -\cos x + C$, với C là hằng số tùy ý.

Đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$ nên $1 = -\cos 0 + C \Leftrightarrow C = 2$

$$\Rightarrow F(x) = -\cos x + 2 \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

. Do đó

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int \sin x \, dx = \cos x$.

b) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.

- c) $\tan x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- d) $\cot(x+1)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Lời giải

- a) Sai: $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
- b) Đúng: $\int \cos x dx = \sin x + C$.
- c) Đúng: Do $(\tan x + 1)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ nên $\tan x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- d) Sai: Do $[\cot(x+1)]' = -\frac{1}{\sin^2(x+1)}$ nên $\cot(x+1)$ không phải là một nguyên hàm của hàm số $y = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \cos^2 x$ và $F(x) = \int f(x) dx$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $F'(x) = \sin 2x$
- b) $F(x) = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$
- c) $\frac{\sin x \cos x + x}{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$
- d) Biết $F(0) = 0$. Suy ra $F(\pi) = \pi$.

Lời giải

- a) Sai: $F'(x) = f(x) = \cos^2 x$.
- b) Đúng: Do $f(x) = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
- c) Đúng: $\left(\frac{\sin x \cos x + x}{2} \right)' = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x + 1}{2} = \frac{2 \cos^2 x}{2} = \cos^2 x$.
- d) Sai: Do $\frac{\sin x \cos x + x}{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F(x) = \frac{\sin x \cos x + x}{2} + C$
Ta lại có $F(0) = C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{\sin x \cos x + x}{2} \Rightarrow F(\pi) = \frac{\pi}{2}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \tan^2 x$ và $F(x) = \int f(x) dx$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $F'(x) = \tan^2 x$.

b) $\tan x$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

c) $F(x) = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$

d) Biết $F(0) = 0 \Rightarrow F(\pi) = 0$

Lời giải

a) Đúng: Vì $F'(x) = f(x) = \tan^2 x$

b) Sai: Ta có $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$

c) Đúng: Do $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ nên $F(x) = \int f(x) dx = \int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$

d) Sai: Ta có $F(x) = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C$

Khi đó $F(0) = C = 0 \Rightarrow F(x) = \tan x - x \Rightarrow F(\pi) = -\pi$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \sin x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

a) Ta có $\int f(x) dx = -\cos x + C$, với C là hằng số.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(\pi) = 1$. Khi đó ta có $F(0) = -1$

c) Ta có $\int F(x) dx = \sin x + C_1$, với C_1 là hằng số.

d) Phương trình $F(x) = f(x)$ có đúng 4 nghiệm trên đoạn $[0; 4\pi]$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\int f(x) dx = \int \sin x dx = -\cos x + C$

b) Đúng: Từ giả thiết, ta được $-\cos \pi + C = 1 \Leftrightarrow 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0$

Suy ra $F(x) = -\cos x \Rightarrow F(0) = -1$

c) Sai: Ta có $\int F(x) dx = -\int \cos x dx = -\sin x + C_1$

d) Đúng: Ta có $F(x) = f(x) \Leftrightarrow -\cos x = \sin x \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ta xét $0 \leq \frac{-\pi}{4} + k\pi \leq 4\pi \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{17}{4}$. Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Tức là phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm thuộc đoạn $[0; 4\pi]$.

Câu 5:

Đặt $F(x) = \int \frac{dx}{\sin^2 x}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ta có $F(x) = -\cot x + C$, với C là hằng số.

b) Biết rằng, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Khi đó, ta có $F(x) = 1 - \cot x$.

c) Hàm số $F(x)$ là hàm số chẵn trên tập xác định của $F(x)$.

d) Phương trình $F(x) = 0$ có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $F(x) = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$.

b) Đúng: Từ giả thiết, ta được $C - \cot \frac{\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow C = 1$ nên $F(x) = 1 - \cot x$.

c) Sai: Ta thấy $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $F\left(\frac{-\pi}{4}\right) = 2$ nên $F\left(\frac{-\pi}{4}\right) \neq \pm F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ nên hàm số đã cho không là hàm chẵn mà cũng không là hàm lẻ trên tập xác định của $F(x)$.

d) Sai: Ta có $F(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \cot x = 0 \Leftrightarrow \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 6:

Đặt $F(x) = \int \tan^2 x dx$ và thỏa mãn $F(0) = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ta có $F(x) = -x + \tan x$.

b) Ta thấy hàm số $F(x)$ là hàm số chẵn trên tập xác định của $F(x)$.

c) Hàm số $F(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

d) Phương trình $F(x) + x = 0$ có các nghiệm là $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $F(x) = \int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C$.

Mặt khác $F(0) = 0$ nên ta có $C = 0$ nên $F(x) = -x + \tan x$.

b) Sai: Ta thấy rằng $F(-x) = x - \tan x = -F(x)$ nên hàm số đã cho là hàm lẻ trên mỗi khoảng xác định của $F(x)$.

c) Đúng: Ta có $F'(x) = \tan^2 x \geq 0$ với mọi x thuộc tập xác định của $F(x)$ nên hàm số $F(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

d) Đúng: Ta có $F(x) + x = 0 \Leftrightarrow -x + \tan x + x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \sin x - \cos x + C$, với C là hằng số.

b) Biết rằng, $F(0) = -1$. Khi đó, $F(x) = \sin x - \cos x$.

c) Hàm số $F(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

d) Hàm số $F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất là -2 .

Lời giải

a) Đúng: Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$.

b) Từ giả thiết, ta được $\sin 0 - \cos 0 + C = -1 \Leftrightarrow C = 0$ nên $F(x) = \sin x - \cos x$.

c) Ta có $F'(x) = \sin x + \cos x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $F(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

d) Ta thấy $\begin{cases} \sin x \geq -1 \\ -\cos x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \sin x - \cos x \geq -2$.

Trong đó có $F(x) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 2 \neq 1$.

Từ đó suy ra hàm số không đạt giá trị nhỏ nhất là -2 .

Câu 8: Đặt $F(x) = -\int \sin x dx$ và thỏa mãn $F(0) = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ta có $F(x) = \cos x$.

b) Ta thấy hàm số $F(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

c) Ta thấy $F(\alpha) = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}, \forall \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) Ta có $F\left(\frac{\pi}{2^{2025}}\right) \cdot F\left(\frac{\pi}{2^{2024}}\right) \cdot F\left(\frac{\pi}{2^{2023}}\right) \cdots F\left(\frac{\pi}{2^3}\right) \cdot F\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2^{2025}}}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $F(x) = -\int \sin x dx = \cos x + C$. Mà $F(0) = 1$ nên ta có $C = 0 \Rightarrow F(x) = \cos x$.

b) Sai: Ta thấy rằng, $F(-x) = \cos(-x) = \cos x = F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $F(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$.

c) Sai: Ta thấy $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$ hay $F(\alpha) = \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$.

d) Sai: Ta có

$$F\left(\frac{\pi}{2^{2025}}\right) \cdot F\left(\frac{\pi}{2^{2024}}\right) \cdot F\left(\frac{\pi}{2^{2023}}\right) \cdots F\left(\frac{\pi}{2^3}\right) \cdot F\left(\frac{\pi}{2^2}\right)$$

$$= \frac{\sin \frac{\pi}{2^{2024}}}{2 \sin \frac{\pi}{2^{2025}}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^{2023}}}{2 \sin \frac{\pi}{2^{2024}}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^{2022}}}{2 \sin \frac{\pi}{2^{2023}}} \cdots \frac{\sin \frac{\pi}{2^2}}{2 \sin \frac{\pi}{2^3}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2 \sin \frac{\pi}{2^2}} = \frac{1}{2^{2024} \sin \frac{\pi}{2^{2025}}}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Tính giá trị của biểu thức $S = F(-\pi) + 2F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (Kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân sau dấu phẩy)

Lời giải

Vì Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 x$ nên ta có

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C = F(x)$$

Ta có $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}$

Suy ra $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}$

Khi đó $S = F(-\pi) + 2F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} - \frac{5\pi}{8}\right) + 2\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{3}{4} - \frac{3\pi}{8} \approx -0,43$

Câu 2: Biết nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{2 \tan x + 1}$ bằng $\frac{a}{b} \ln |2 \sin x + \cos x| + \frac{c}{b}x + C$ với $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{b}\right)$ là các phân số tối giản và $a \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^+$). Tính $a - b + c$.

Lời giải

Ta có $I = \int \frac{dx}{2 \tan x + 1} = \int \frac{\cos x}{2 \sin x + \cos x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2 \cos x - \sin x + \sin x}{2 \sin x + \cos x} dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2 \cos x - \sin x}{2 \sin x + \cos x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\sin x}{2 \sin x + \cos x} dx$$

Đặt $J = \int \frac{\sin x}{2 \sin x + \cos x} dx$ ta có $I = \frac{1}{2} \ln |2 \sin x + \cos x| + \frac{1}{2}J$

Ta có $2J + I = \int 1 dx = x + C$ suy ra $J = \frac{1}{2}(x - I + C_1)$.

Khi đó ta có: $I = \frac{1}{2} \ln |2 \sin x + \cos x| + \frac{1}{4}(x - I + C_1) \Leftrightarrow I = \frac{4}{5} \left[\frac{1}{2} \ln |2 \sin x + \cos x| + \frac{1}{4} x \right] + C$

$\Leftrightarrow I = \frac{2}{5} \ln |2 \sin x + \cos x| + \frac{1}{5} x + C$ suy ra $a = 2, b = 5, c = 1$.

Vậy $a - b + c = -2$.

Câu 3: Gọi $F(x)$ là họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 8 \sin 3x \cos x$. Biết rằng $F(x)$ có dạng $F(x) = a \cos 4x + b \cos 2x + C$. Khi đó $a - b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f(x) = 8 \sin 3x \cos x = 4(\sin 4x + \sin 2x) = 4 \sin 4x + 4 \sin 2x$

Khi đó $F(x) = -\cos 4x - 2 \cos 2x + C \Rightarrow a = -1; b = -2$. Vậy $a - b = 1$

Câu 4: Cho $F(x) = \cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \cdot \tan x$. Biết nguyên hàm của hàm số $\frac{\tan x}{f'(x)}$ có dạng $\frac{a}{b} \tan x + C$ với a, b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C \in \mathbb{Q}$. Tính $a - 2b$.

Lời giải

Ta có $F'(x) = -2 \sin 2x = -4 \sin x \cos x$.

Vì $F(x) = \cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \cdot \tan x$ nên:

$F'(x) = f(x) \cdot \tan x \Leftrightarrow -4 \sin x \cos x = f(x) \cdot \tan x \Leftrightarrow f(x) = -4 \cos^2 x$.

Suy ra $f'(x) = 8 \sin x \cos x$.

Khi đó ta có: $\int \frac{\tan x}{f'(x)} dx = \int \frac{\tan x}{8 \sin x \cos x} dx = \int \frac{1}{8 \cos^2 x} dx = \frac{1}{8} \tan x + C$ suy ra $a = 1, b = 8$.

Vậy $a - 2b = -15$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 4 \sin 2x + \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = -2$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(\pi) = 3$, khi đó $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int (4 \sin 2x + \cos x) dx = -2 \cos 2x + \sin x + C$

Với $f(0) = -2 \Rightarrow -2 \cdot \cos 2 \cdot 0 + \sin 0 + C = -2 \Rightarrow C = 0$ nên $f(x) = -2 \cos 2x + \sin x$

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int (-2 \cos 2x + \sin x) dx = -\sin 2x - \cos x + C'$

Với $F(\pi) = 3 \Rightarrow -\sin 2\pi - \cos \pi + C' = 3 \Rightarrow C' = 2$ nên $F(x) = -\sin 2x - \cos x + 2$

Khi đó $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \pi - \cos \frac{\pi}{2} + 2 = 2$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \sin 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, khi đó $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f'(x) = \sin 2x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$

Vì $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$ nên $f(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$

Vì $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $F(x) = \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) dx = -\frac{1}{4} \sin 2x + C$

Lại có $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + C = 2 \Leftrightarrow C = 2$ suy ra $F(x) = -\frac{1}{4} \sin 2x + 2$

Khi đó $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{4} \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + 2 = \frac{7}{4} = 1,75$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết:

- | | |
|--|-------------------------------------|
| a) $f(x) = 4x + 3 \cos x$ | b) $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ |
| c) $f(x) = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2$ | d) $f(x) = \sin 3x$ |
| e) $f(x) = \cos(2x + 3)$ | f) $f(x) = \cos 5x \cdot \cos x$ |

Lời giải

$$\int f(x) dx = \int (4x + 3 \cos x) dx = \frac{4x^2}{2} + 3 \sin x + C = 2x^2 + 3 \sin x + C$$

a) Ta có

$$\int \left(2x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = x^2 - \cot x + C$$

b) Ta có

$$\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 = \sin^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \sin x$$

c)

$$\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = \int 1 dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C$$

Do đó:

$$\int f(x) dx = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + C$$

d) Ta có

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x + 3) + C$$

e) Ta có

$$\int \cos 5x \cos x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 4x + \cos 6x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{6} \sin 6x \right) + C$$

f) Ta có

Bài tập 2: Tìm

a) $\int (2 \sin x - 3 \cos x) dx$

b) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

c) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

d) $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$

e) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$ trên $(0; \pi)$

f) $\int 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$

Lời giải

a) Ta có $\int (2 \sin x - 3 \cos x) dx = 2 \int \sin x dx - 3 \int \cos x dx = -2 \cos x - 3 \sin x + C$

b) Ta có $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2} (x + \sin x) + C$

c) Ta có $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C$

d) $\int (\sin x + \cos x)^2 dx = \int (\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) dx = \int (1 + \sin 2x) dx = x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$

e) Vì $(-\cot x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$, với mọi x thuộc $(0; \pi)$ nên $F(x) = -\cot x$ là một nguyên hàm của $\frac{1}{\sin^2 x}$ trên $(0; \pi)$ nên $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ trên $(0; \pi)$.

$$\int 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx = \int \sin x dx = -\cos x + C$$

f) Ta có

Bài tập 3: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Tìm hàm $f(x)$.

Lời giải

$$f(x) = \int (2 - 5\sin x) dx = 2x + 5\cos x + C$$

Ta có

$$f(0) = 10 \Rightarrow C = 5 \quad f(x) = 2x + 5\cos x + 5$$

Mà

nên

Bài tập 4: Cho $F(x) = \cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\tan x$. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $g(x) = \frac{\tan x}{f'(x)}$.

Lời giải

$$F'(x) = -2\sin 2x = -4\sin x \cos x$$

Ta có:

Vì $F(x) = \cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\tan x$ nên:

$$F'(x) = f(x)\tan x \Leftrightarrow -4\sin x \cos x = f(x)\tan x \Leftrightarrow f(x) = -4\cos^2 x$$

$$f'(x) = 8\sin x \cos x$$

Suy ra

$$\int g(x) dx = \int \frac{\tan x}{f'(x)} dx = \int \frac{\tan x}{8\sin x \cos x} dx = \int \frac{1}{8\cos^2 x} dx = \frac{1}{8} \tan x + C$$

Vậy

Bài tập 5: Một vật chuyển động với vận tốc là $v(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi}$ (m/s). Gọi S_1 là quãng đường vật đó đi trong 2 giây đầu và S_2 là quãng đường đi từ giây thứ 3 đến giây thứ 5. Chứng minh $S_2 > S_1$.

Lời giải

Gọi thời điểm ban đầu $S(0) = 0; t = 0; S = 0 \Rightarrow S_1 = S(2)$

Khi đó:

$$S(t) = \int \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi} \right) dt = \frac{1}{2\pi} t - \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi t) + C$$

Ta có:

$$S(0) = 0 \Rightarrow C - \frac{1}{\pi^2} = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{\pi^2}$$

Suy ra

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} t - \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi t) + \frac{1}{\pi^2}$$

$$S_1 = S(2) = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{2\pi} \approx 0,159; \quad S_2 = \int_3^5 v(t) dt = 0,31 \Rightarrow S_2 > S_1 \quad (\text{đpcm}).$$

$$a(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Bài tập 6: Một vật chuyển động với gia tốc phụ thuộc vào thời gian theo công thức $a(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$. Biết tại thời điểm $t = 0$ thì vận tốc và quãng đường đi được của vật đều bằng 0. Thiết lập công thức tính quãng đường đi được của vật đó theo thời gian

Lời giải

Vận tốc của vật tại thời điểm t là:

$$v(t) = \int a(t) dt = \int \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) dt = -\frac{1}{2} \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + C$$

Ta có:

$$v(0) = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{4} \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{2} \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow s(t) = \int \left(-\frac{1}{2} \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}\right) dt = -\frac{1}{4} \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}t + D$$

Khi đó:

$$s(0) = 0 \Leftrightarrow D = \frac{\sqrt{3}}{8} \quad \text{nên ta suy ra} \quad s(t) = -\frac{1}{4} \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}t + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Dạng 3: Nguyên hàm của hàm số mũ

Các công thức thường dùng:

$$\oplus \int e^x dx = e^x + C$$

$$\oplus \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Chú ý các công thức biến đổi lượng giác:

$$\oplus a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\oplus \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\oplus (a^x)^y = a^{xy}$$

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2025^x$ là

A. $F(x) = x \cdot 2025^{x-1}$

B. $F(x) = 2025 \cdot 2024^x$

C. $F(x) = 2025^x \cdot \ln 2025$

D. $F(x) = \frac{2025^x}{\ln 2025}$

Lời giải

Ta có:

$$\int f(x) dx = \int 2025^x dx = \frac{2025^x}{\ln 2025} + C$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = 1 + e^x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = x + xe^{x-1} + C$

B. $\int f(x) dx = 1 + e^x + C$

C. $\int f(x) dx = x + e^x + C$

D. $\int f(x) dx = 1 + xe^{x-1} + C$

Lời giải

$$\int f(x) dx = \int (1 + e^x) dx = x + e^x + C$$

Ta có:

Câu 3: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^{2x-1}$ là

- A. $\frac{1}{2} \cdot 5^{2x-1} \cdot \ln 5 + C$ B. $2 \cdot 5^{2x-1} \cdot \ln 5 + C$ C. $5^{2x-1} \cdot \ln 5 + C$ D. $\frac{1}{2 \ln 5} \cdot 5^{2x-1} + C$

Lời giải

$$\int f(x) dx = \int 5^{2x-1} dx = \frac{1}{5} \int 25^x dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{25^x}{\ln 25} + C = \frac{1}{2 \ln 5} \cdot 5^{2x-1} + C$$

Ta có:

Câu 4: Hàm số $F(x) = x^2 + e^{-2x} + 2025$ là một nguyên hàm của hàm số

- A. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} e^{-2x} + 2025x$ B. $f(x) = 2x - 2e^{-2x}$
C. $f(x) = 2x - 2e^{-2x} + 2025x$ D. $f(x) = 2x + 2e^{-2x} + 2025$

Lời giải

Hàm số $F(x) = x^2 + e^{-2x} + 2025$ là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = (x^2 + e^{-2x} + 2025)' = 2x - 2e^{-2x}$$

Câu 5: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^x + 2e^{-x} - 2x$ thỏa mãn $F(0) = 1$

- A. $F(x) = e^x - 2e^{-x} - x^2 + 2$ B. $F(x) = e^x + 2e^{-x} - x^2 - 2$
C. $F(x) = e^x - 2e^{-x} - x^2$ D. $F(x) = e^x + 2e^{-x} - x^2$

Lời giải

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^x + 2e^{-x} - 2x$

$$\Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (e^x + 2e^{-x} - 2x) dx = e^x - 2e^{-x} - x^2 + C$$

Vì $F(0) = 1$ nên suy ra $e^0 - 2e^0 - 2 \cdot 0 + C = 1 \Rightarrow C = 2$ nên $F(x) = e^x - 2e^{-x} - x^2 + 2$

Câu 6: Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có họ tất cả các nguyên hàm là hàm số

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1, C \text{ là hằng số}).$$

- A. $f(x) = a^x$ B. $f(x) = \frac{1}{x}$ C. $f(x) = \ln x$ D. $f(x) = x^a$

Lời giải

$$F(x) = \int f(x) dx = \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1, C \text{ là hằng số}).$$

Ta có

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = 3^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng

A. $\int f(x)dx = \frac{3^x}{\ln 3} + 2 + C$

B. $\int f(x)dx = \frac{3^x}{\ln 3} + x^2 + C$

C. $\int f(x)dx = 3^x \cdot \ln 3 + 2 + C$

D. $\int f(x)dx = 3^x \cdot \ln 3 + x^2 + C$

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx = \int (3^x + 2x)dx = \frac{3^x}{\ln 3} + x^2 + C$

Câu 8: Hàm số $F(x) = \frac{x^3}{3} + e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nào sau đây?

A. $f(x) = \frac{x^4}{3} + e^x$

B. $f(x) = 3x^2 + e^x$

C. $f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x$

D. $f(x) = x^2 + e^x$

Lời giải

Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

Suy ra hàm số cần tìm là $f(x) = \left(\frac{x^3}{3} + e^x \right)' = x^2 + e^x$

Câu 9: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x (1 + 2^{-x} \cdot \sin x)$ là

A. $\frac{2^{x+1}}{x+1} - \cos x + C$

B. $\frac{2^x}{\ln 2} - \cos x + C$

C. $\frac{2^x}{\ln 2} + \cos x + C$

D. $\frac{2^{x-1}}{x+1} + \cos x + C$

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx = \int 2^x (1 + 2^{-x} \cdot \sin x)dx = \int (2^x + \sin x)dx = \frac{2^x}{\ln 2} - \cos x + C$

Câu 10: Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x+1} - 2x^2$ là

A. $\frac{e^{3x+1} - 2x^3}{3}$

B. $\frac{e^{3x+1}}{3} - x^3$

C. $\frac{e^{3x+1}}{3} - 2x^3$

D. $\frac{e^{3x+1} - x^3}{3}$

Lời giải

$\int f(x)dx = \int (e^{3x+1} - 2x^2)dx = \frac{1}{3} \int e^{3x+1} d(3x+1) - \frac{2}{3} x^3 = \frac{e^{3x+1} - 2x^3}{3}$

Câu 11: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

A. 2

B. 6

C. 8

D. 4

Lời giải

Ta có $F(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$

Theo giả thiết $F(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} e^0 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}$

Khi đó $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} \Rightarrow F(\ln 3) = \frac{1}{2}e^{2\ln 3} - \frac{1}{2} = 4$

Câu 12: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4^x + \cos 2x$ là

A. $\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{\sin 2x}{2} + C$

B. $4^x \ln 4 + \frac{\sin 2x}{2} + C$

C. $4^x \ln 4 - \frac{\sin 2x}{2} + C$

D. $\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{\sin 2x}{2} + C$

Lời giải

Ta có $\int (4^x + \cos 2x) dx = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{\sin 2x}{2} + C$

Câu 13: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^x - 1$ trên $(-\infty; +\infty)$, biết $F(0) = 2$.

A. $F(x) = \frac{1}{e^x} - x + 1$

B. $F(x) = \ln x - x - 1$

C. $F(x) = e^x - x + 1$

D. $F(x) = e^x - x + 2$

Lời giải

Ta có: $F(x) = \int (e^x - 1) dx = e^x - x + C$

Vì $F(0) = 2 \Leftrightarrow e^0 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1$ nên $F(x) = e^x - x + 1$

Câu 14: Kết quả $\int (x + e^{2020x}) dx$ bằng

A. $x^2 + \frac{e^{2020x}}{2020} + C$

B. $x^3 + \frac{e^{2020x}}{2020} + C$

C. $\frac{x^2}{2} + \frac{e^{2020x}}{2020} + C$

D. $x + \frac{e^{2020x}}{2020} + C$

Lời giải

Ta có $\int (x + e^{2020x}) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{e^{2020x}}{2020} + C$

Câu 15: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{-x} \left(2 + \frac{e^x}{\cos^2 x} \right)$

A. $F(x) = -\frac{2}{e^x} + \tan x + C$

B. $F(x) = 2e^x - \tan x + C$

C. $F(x) = -\frac{2}{e^x} - \tan x + C$

D. $F(x) = 2e^{-x} + \tan x + C$

Lời giải

Ta có $F(x) = \int e^{-x} \left(2 + \frac{e^x}{\cos^2 x} \right) dx = \int \left(2e^{-x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -2e^{-x} + \tan x + C = -\frac{2}{e^x} + \tan x + C$

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = 2^x + 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx = 2^{x-3} + C$

B. $\int f(x)dx = 2^x \ln 2 + 3x + C$

C. $\int f(x)dx = \frac{2^x}{\ln 2} + 3 + C$

D. $\int f(x)dx = \frac{2^x}{\ln 2} + 3x + C$

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx = \int (2^x + 3)dx = \frac{2^x}{\ln 2} + 3x + C$

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = e^x + 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1) = e$. Tính $F(0)$.

A. $\frac{5}{6}$

B. $-\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $-\frac{5}{6}$

Lời giải

Ta có $f'(x) = e^x + 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \int (e^x + 2x + 1)dx = e^x + x^2 + x + C$

Vì $f(0) = 1 \Leftrightarrow e^0 + 0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0$ nên $f(x) = e^x + x^2 + x$

Vì $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $F(x) = \int (e^x + x^2 + x)dx = e^x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

Lại có $F(1) = e \Leftrightarrow C = -\frac{5}{6}$ suy ra $F(x) = e^x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}$

Khi đó $F(0) = e^0 - \frac{5}{6} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

Câu 18: Tìm $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 1$ trên $(-\infty; +\infty)$, biết $F(0) = 2$.

A. $F(x) = \ln x - x - 1$ B. $F(x) = e^x - x - 1$ C. $F(x) = \frac{1}{e^x} - x + 1$ D. $F(x) = e^x - x + 1$

Lời giải

Ta có: $F(x) = \int f(x)dx = \int (e^x - 1)dx = e^x - x + C$

Theo bài: $F(0) = 2 \Leftrightarrow e^0 - 0 + C = 2 \Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1$

Vậy $F(x) = e^x - x + 1$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = e^x + x^e$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) + 5$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.

b) $F(x) = e^x + x^e + C$ là họ nguyên hàm của $f(x)$.

c) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 1$ thì $F(1) = 2e$.

d) Nếu $F(x), G(x)$ lần lượt là các nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 1, G(1) = e$ thì ta luôn có $G(x) = F(x) + e$.

Lời giải

a) Đúng: Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên ta có:

$$(F(x) + 5)' = (F(x))' + (5)' = F'(x) = f(x).$$

Do đó $F(x) + 5$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.

b) Sai: Ta có: $\int f(x) dx = \int (e^x + x^{e-1}) dx = e^x + ex^{e-1} + C$

Suy ra $F(x) = e^x + ex^{e-1} + C$ là họ nguyên hàm của $f(x)$.

c) Đúng: Ta có: $F(x) = \int (e^x + x^{e-1}) dx = e^x + ex^{e-1} + C$ và $F(0) = 1 \Rightarrow 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0$

Suy ra $F(x) = e^x + ex^{e-1} \Rightarrow F(1) = e + e = 2e$

d) Sai: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 1$ thì $F(x) = e^x + ex^{e-1}$ (1)

Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $G(1) = e$ thì $\begin{cases} G(x) = e^x + ex^{e-1} + C \\ G(1) = e \end{cases}$
 $\Rightarrow 2e + C = e \Leftrightarrow C = -e \Rightarrow G(x) = e^x + ex^{e-1} - e$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $G(x) = F(x) - e$.

Câu 2: Cho hàm số $F(x) = \int (4^x + 2^x + 1) dx$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F(x) = \int 4^x dx + \int 2^x dx + \int dx$

b) $F(x) = \frac{2^{2x} + 2^x}{\ln 2} + x + C$

c) Nếu $F(1) = \frac{4}{\ln 2}$ thì $F(2) = \frac{12}{\ln 2} - 1$.

d) Nếu $G(x) = \int \frac{8^x + 1}{2^x + 1} dx$ thì $G(x) = F(x) + C$.

a) Đúng: Theo tính chất của nguyên hàm, ta có:

$$F(x) = \int (4^x + 2^x + 1) dx = \int 4^x dx + \int 2^x dx + \int dx$$

b) Sai:
$$F(x) = \int (4^x + 2^x + 1) dx = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2^x}{\ln 2} + x + C = \frac{2^{2x}}{2 \ln 2} + \frac{2^x}{\ln 2} + x + C$$

$$= \frac{2^{2x-1} + 2^x}{\ln 2} + x + C$$

c) Sai: Do
$$F(x) = \frac{2^{2x-1} + 2^x}{\ln 2} + x + C \quad \text{và} \quad F(1) = \frac{4}{\ln 2} \quad \text{nên} \quad \frac{4}{\ln 2} + 1 + C = \frac{4}{\ln 2} \Leftrightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{2^{2x-1} + 2^x}{\ln 2} + x - 1 \Rightarrow F(2) = \frac{12}{\ln 2} + 1$$

d) Sai : Ta có:

$$G(x) = \int \frac{8^x + 1}{2^x + 1} dx = \int \frac{2^{3x} + 1}{2^x + 1} dx = \int \frac{(2^x + 1)(4^x - 2^x + 1)}{2^x + 1} dx = \int (4^x - 2^x + 1) dx \neq F(x) + C$$

Câu 3: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{6^{x+1} + 3^{2x}}{2^{2x+3}}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

$$F'(x) = \frac{6^{x+1} + 3^{2x}}{2^{2x+3}}$$

a)

$$F(x) = \frac{\int (6^{x+1} + 3^{2x}) dx}{\int 2^{2x+3} dx}$$

b)

$$F(x) = \int \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^x + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{9}{4} \right)^x \right] dx$$

c)

d) Nếu $F(0) = 0$ thì $F(1) = \frac{29}{64(\ln 3 - \ln 2)}$

Lời giải

$$F'(x) = f(x) = \frac{6^{x+1} + 3^{2x}}{2^{2x+3}}$$

a) Đúng: Theo định nghĩa nguyên hàm suy ra

$$F(x) = \int \frac{6^{x+1} + 3^{2x}}{2^{2x+3}} dx \neq \frac{\int (6^{x+1} + 3^{2x}) dx}{\int 2^{2x+3} dx}$$

b) Sai: Theo tính chất nguyên hàm suy ra

$$F(x) = \int \frac{6^{x+1} + 3^{2x}}{2^{2x+3}} dx = \int \frac{6 \cdot 6^x + 9^x}{8 \cdot 4^x} dx = \int \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x \right] dx$$

c) Đúng: Ta có

$$F(x) = \int \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x \right] dx = \frac{\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln \frac{3}{2}} + \frac{\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x}{\ln \frac{9}{4}} + C = \frac{\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}}{\ln 3 - \ln 2} + C$$

d) Đúng:

$$\text{Do } F(0) = 0 \text{ nên } \frac{13}{16(\ln 3 - \ln 2)} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{13}{16(\ln 3 - \ln 2)}$$

$$F(x) = \frac{\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}}{\ln 3 - \ln 2} - \frac{13}{16(\ln 3 - \ln 2)}$$

Suy ra

$$F(1) = \frac{81}{64(\ln 3 - \ln 2)} - \frac{13}{16(\ln 3 - \ln 2)} = \frac{29}{64(\ln 3 - \ln 2)}$$

Khi đó

Câu 4: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = e^x - 2x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F'(0) = 0$

b) $F(1) = e - 1$

c) $\int F(x) dx = e^x - \frac{x^3}{3} + C$

d) $\int \frac{f(x)}{xe^x} dx = \ln|x| - 2e^x + C$

Lời giải

a) Sai: Ta có $F'(x) = f(x) = e^x - 2x \Rightarrow F'(0) = e^0 - 2 \cdot 0 = 1$

b) Đúng: $\int f(x) dx = \int (e^x - 2x) dx = e^x - x^2 + C \Rightarrow F(x) = e^x - x^2 + C$

$F(0) = 1 \Leftrightarrow e^0 - 0^2 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = e^x - x^2 \Rightarrow F(1) = e - 1$

c) Đúng: $\int F(x) dx = \int (e^x - x^2) dx = e^x - \frac{x^3}{3} + C$

d) Sai: $\int \frac{f(x)}{xe^x} dx = \int \frac{e^x - 2x}{x \cdot e^x} dx = \int \left(\frac{1}{x} - 2 \cdot e^{-x} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx - 2 \int (e^{-1})^x dx$

$$= \ln|x| - 2(e^{-1})^x \ln e^{-1} + C = \ln|x| + 2e^{-x} + C$$

Câu 5: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2^{2x+1} - 1 + \cos 2x}{2^x + \sin x}$ trên $[0; +\infty)$ thỏa

mãn $F(0) = \frac{2}{\ln 2} + 2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(\pi) = 2^{\pi+1} - 1$.

b) $F'(0) = 2$.

c) Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $F(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{\pi}{2}$ là $k = 2\sqrt{2^\pi} - 2$

d) $F(-1) = \frac{1}{\ln 2} + 2 \cos 1$.

Lời giải

Ta có
$$f(x) = \frac{2^{2x+1} - 2 \sin^2 x}{2^x + \sin x} = \frac{2(2^x - \sin x)(2^x + \sin x)}{2^x + \sin x} = 2 \cdot 2^x - 2 \sin x$$

a) Sai: $f(\pi) = 2 \cdot 2^\pi - 2 \sin \pi = 2^{\pi+1}$.

b) Đúng: $F'(x) = f(x) = 2 \cdot 2^x - 2 \sin x \Rightarrow F'(0) = 2 \cdot 2^0 - 2 \sin 0 = 2$.

c) Đúng: Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $F(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{\pi}{2}$ là

$$k = F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 2^{\frac{\pi}{2}} - 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2\sqrt{2^\pi} - 2$$

d) Đúng:
$$\int f(x) dx = \int [2 \cdot 2^x - 2 \sin x] dx = 2 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + 2 \cos x + C \Rightarrow F(x) = \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + 2 \cos x + C$$

Giả thiết $F(0) = \frac{2}{\ln 2} + 2 \Leftrightarrow \frac{2^{0+1}}{\ln 2} + 2 \cos 0 + C = \frac{2}{\ln 2} + 2 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + 2 \cos x$

$$\Rightarrow F(-1) = \frac{2^0}{\ln 2} + 2 \cos(-1) = \frac{1}{\ln 2} + 2 \cos 1$$

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2025$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(2) = 4 + e$

- b) $\int f(x)dx = \int (2x + e^x)dx = x^2 + e^x + C$
- c) $F(x) = x^2 + e^x + 2024$
- d) $\int xf'(x^2)dx = \int x(2 + e^{x^2})dx = x^2 + xe^{x^2} + C$

Lời giải

- a) Sai: $f(2) = 4 + e^2$
- b) Đúng: $\int f(x)dx = \int (2x + e^x)dx = x^2 + e^x + C$
- c) Đúng: Ta có $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 2025$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} F(x) = x^2 + e^x + C \\ F(0) = 2025 \end{cases} \Rightarrow 1 + C = 2025 \Leftrightarrow C = 2024$$

Vậy $F(x) = x^2 + e^x + 2024$

d) Ta có $\int xf'(x^2)dx = \int x(2 + e^{x^2})dx = x^2 + \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = e^x(2 + e^x)$, và $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int f'(x)dx = 2e^x + e^{2x} + C$

b) $F(x) = 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$

Nếu $F(0) = 3$ thì $F(1) = 5e$

d) Nếu $F(0) = \frac{5}{2}$ thì phương trình $F(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

a) Đúng: $\int f'(x)dx = f(x) + C = 2e^x + e^{2x} + C$

b) Đúng: $F(x) = \int f(x)dx = \int e^x(2 + e^x)dx = \int (2e^x + e^{2x})dx = 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$

c) Sai: $F(x) = 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$

Mà $F(0) = 3 \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2} \Rightarrow F(1) = 2e + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} = \frac{e^2 + 4e + 1}{2}$

d) Sai: Với $F(0) = \frac{5}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x}$

Ta có: $F(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} = 0$ nên phương trình vô nghiệm.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^2 \cdot e^{2x}$. Tính tổng $a + b + 2c$.

Lời giải

Ta có $F'(x) = (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx + c)e^{2x} = (2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c)e^{2x}$.

Mà $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^2 \cdot e^{2x}$

$$\Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $a + b + 2c = 1$.

Câu 2: Biết $F(x) = e^{2x} + 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giả sử $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(2x) + \cos \pi x$. Khi đó $G(2) - G(0) = a \cdot e^b + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tính $a \cdot b \cdot c$.

Lời giải

Ta có $F(x) = e^{2x} + 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $f(x) = F'(x) = 2e^{2x} + 4x \Rightarrow f(2x) = 2e^{4x} + 8x$

Khi đó $\int (f(2x) + \cos \pi x) dx = \int (2e^{4x} + 8x + \cos \pi x) dx = \frac{1}{2}e^{4x} + 4x^2 + \frac{1}{\pi} \sin \pi x + C$.

Suy ra $G(x) = \frac{1}{2}e^{4x} + 4x^2 + \frac{1}{\pi} \sin \pi x + C$.

Do đó $G(2) - G(0) = \left(\frac{1}{2}e^8 + 16 + C \right) - \left(\frac{1}{2} + C \right) = \frac{1}{2}e^8 + \frac{31}{2}$.

Vậy $a \cdot b \cdot c = 62$.

Câu 3: Cho hàm số $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = -(2x^2 - 8x + 7)e^{-2x}$. Tính tổng $a + b + c$.

Lời giải

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F'(x) = f(x)$.

Ta có:
$$F'(x) = \left[(ax^2 + bx + c)e^{-2x} \right]' = (2ax + b)e^{-2x} - 2(ax^2 + bx + c)e^{-2x}$$

$$= -\left[2ax^2 - (2a - 2b)x - b + 2c \right] e^{-2x}$$

Do $F'(x) = f(x)$ nên
$$\begin{cases} 2a = 2 \\ -2a + 2b = -8 \\ -b + 2c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 0$$

Câu 4: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(2)$ (làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

$$F(x) = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$$

$$F(0) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^0 + C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$$

$$F(2) \approx 11,9$$

Câu 5: Một chiếc cốc chứa nước ở 95°C được đặt trong phòng có nhiệt độ 20°C . Theo định luật làm mát của Newton, nhiệt độ của nước trong cốc sau t phút (xem $t = 0$ là thời điểm nước ở 95°C) là một hàm số $T(t)$. Tốc độ giảm nhiệt độ của nước trong cốc tại thời điểm t phút được xác định bởi công thức $T'(t) = -\frac{3}{2}e^{-\frac{t}{50}}$ ($^\circ\text{C}/\text{phút}$). Tính nhiệt độ của nước tại thời điểm $t = 30$ phút.

Lời giải

Ta có nhiệt độ của nước trong cốc sau t phút là:

$$T(t) = \int T'(t) dt = \int \left(-\frac{3}{2}e^{-\frac{t}{50}} \right) dt = -\frac{3}{2} \cdot \frac{e^{-\frac{t}{50}}}{\ln e^{-\frac{1}{50}}} + C = 75 \cdot e^{-\frac{t}{50}} + C$$

Vì $t = 0$ là thời điểm nước ở 95°C nên ta có:

$$T(0) = 95 \Leftrightarrow 75 + C = 95 \Leftrightarrow C = 15 \Rightarrow T(t) = 75 \cdot e^{-\frac{t}{50}} + 15$$

Vậy nhiệt độ của nước tại thời điểm $t = 30$ phút là: $T(30) = 75 \cdot e^{-\frac{30}{50}} + 15 \approx 56,16^\circ\text{C}$

Câu 6: Trọng lượng của một bào thai người nặng khoảng 0,04 ounce (1 ounce = 28,3485 gram) sau 8 tuần tuổi. Trong suốt 35 tuần tiếp theo, trọng lượng của bào thai này được dự đoán tăng với tốc

độ $B'(t) = \frac{2436e^{-0,193t}}{(1 + 784e^{-0,193t})^2}$, $8 \leq t \leq 43$ với $B(t)$ là cân nặng tính bằng ounce và t là thời gian

tính bằng tuần. Hãy tính trọng lượng của bào thai sau 25 tuần tuổi (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần trăm).

Lời giải

Theo giả thiết, trọng lượng của bào thai này được dự đoán tăng với tốc độ là hàm số $B'(t)$ nên $B(t)$ chính là nguyên hàm của $B'(t)$:

$$B(t) = \int B'(t) dt = \int \frac{2436e^{-0,193t}}{(1 + 784e^{-0,193t})^2} dt$$

Khi đó:

$$\text{Đặt } u = 1 + 784e^{-0,193t} \Rightarrow du = 784 \cdot (-0,193) \cdot e^{-0,193t} dt = -151,312e^{-0,193t} dt$$

$$B(t) = -\frac{2436}{151,312} \int \frac{du}{u^2} = \frac{2436}{151,312u} + C = \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-0,193t})} + C.$$

Sau 8 tuần tuổi thì bào thai cân nặng khoảng 0,04 ounce nên:

$$B(8) = 0,04 \Leftrightarrow \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-0,193 \cdot 8})} + C = 0,04 \Leftrightarrow C = 0,04 - \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-1,544})}$$

Do đó ta có hàm số cân nặng của bào thai là:

$$B(t) = \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-0,193t})} + 0,04 - \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-1,544})}, \quad 8 \leq t \leq 43.$$

Cân nặng của bào thai sau 25 tuần tuổi là:

$$B(25) = \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-0,193 \cdot 25})} + 0,04 - \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-1,544})} \approx 2,15$$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết:

a) $f(x) = 2024^x$

b) $f(x) = 5^x + 1$

c) $f(x) = e^{-x}$

d) $f(x) = e^{2x} - \frac{1}{x^2}$

e) $f(x) = 8^x \cdot 2^{1-2x}$

f) $f(x) = \left(3^x - \frac{1}{3^x}\right)^2$

Lời giải

a) Ta có $\int 2024^x dx = \frac{2024^x}{\ln 2024} + x + C$

b) Ta có $\int (5^x + 1) dx = \frac{5^x}{\ln 5} + x + C$

c) Ta có $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$

d) Ta có $\int f(x) dx = \int \left(e^{2x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{x} + C$

e) Ta có $f(x) = 8^x \cdot 2^{1-2x} = 2^{3x} \cdot 2^{1-2x} = 2^{x+1}$ nên nguyên hàm của $f(x)$ là $F(x) = \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + C$

f) Ta có: $= \int (9^x - 2 + 9^{-x}) dx = \frac{9^x}{\ln 9} - 2x - \frac{1}{9^x \ln 9} + C = \frac{9^x}{2 \ln 3} - \frac{1}{2 \cdot 9^x \ln 3} - 2x + C$

Bài tập 2: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau, biết:

a) $y = 2^x$

b) $y = \frac{1}{3^x}$

c) $y = (2e^x - 5^x)$

d) $y = \frac{1}{e^x}$

e) $y = \left(2 \cdot 3^x - \frac{1}{3} \cdot 7^x \right)$

f) $y = 2^{3x} \cdot 3^{2x}$

g) $y = \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}$

h) $y = \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1}$

i) $y = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$

Lời giải

a) $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

b) $\int \frac{1}{3^x} dx = \int \left(\frac{1}{3} \right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^x}{\ln \frac{1}{3}} + C = -\frac{1}{3^x \ln 3} + C$

b)

c) $\int (2e^x - 5^x) dx = 2e^x - \frac{5^x}{\ln 5} + C$

d) $\int \frac{1}{e^x} dx = \int \left(\frac{1}{e} \right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{e} \right)^x}{\ln \frac{1}{e}} + C = -\frac{1}{e^x} + C$

d)

e) $\int \left(2 \cdot 3^x - \frac{1}{3} \cdot 7^x \right) dx = \int 2 \cdot 3^x dx - \int \frac{1}{3} \cdot 7^x dx = 2 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{7^x}{3 \ln 7} + C$

e)

f) $\int (2^{3x} \cdot 3^{2x}) dx = \int 8^x \cdot 9^x dx = \int 72^x dx = \frac{72^x}{\ln 72} + C$

f)

g) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx = \int 2 \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^x dx - \int \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^x dx = 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{5} \right)^x}{\ln \frac{1}{5}} - \frac{1}{5} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^x}{\ln \frac{1}{2}} + C = \frac{-2}{5^x \ln 5} + \frac{1}{5 \cdot 2^x \ln 2} + C$

g)

h) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C$

h)

i) $\int e^x \left(2024 - \frac{2025e^{-x}}{x^5} \right) dx = \int \left(2024e^x - \frac{2025}{x^5} \right) dx = 2024e^x + \frac{506,25}{x^4} + C$

i)

