SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NAM

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT
NĂM HỌC 2024 – 2025 ĐỢT 2

Môn thi: TOÁN 10 (chuyên)
Thời gian: 180 phút (*không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi: 07/3/2025

Câu 1 (3,0 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+2}\left(x-y+4\right)=\sqrt{y-1} \\ \dfrac{5}{\sqrt{y+3}}=y-1-\sqrt{x+3} \end{cases}$.

Câu 2. (3,0 điểm). Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn $P(1)=2025$ và $(x-1)^2.P(x)=x(x+1).P(x-1)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Câu 3. (3,0 điểm).

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2y^2=2+\sqrt{-x^2-2x+24}$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương m và n thỏa mãn $2m+n^2$ chia hết cho m^2-n và $2n+m^2$ chia hết cho n^2-m.

Câu 4. (5,0 điểm). Cho tam giác nhọn $ABC\,(AB<AC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O; hai điểm B,C cố định và điểm A thay đổi trên cung lớn BC của đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, A' là điểm đối xứng với A qua BC, B' là điểm đối xứng với B qua AC. Hai đường thẳng AO và $B'C$ cắt nhau tại E; hai đường thẳng $A'O$ và BC cắt nhau tại F.

a) Chứng minh hai tam giác AHB, ACE đồng dạng và bốn điểm B,O,C,E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh đường thẳng AF đi qua điểm cố định khi A thay đổi.

Câu 5. (3,0 điểm). Lớp 10A có 32 học sinh, phân công 4 học sinh tham gia mỗi buổi trực nhật. Biết rằng trong một năm học, hai học sinh bất kỳ của lớp 10A trực nhật chung với nhau đúng 3 buổi. Tính số buổi trực nhật của lớp 10A trong năm học đó.

Câu 6. (3,0 điểm). Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^2}{a+2b^2}+\dfrac{b^2}{b+2c^2}+\dfrac{c^2}{c+2a^2}$.

---------- **HẾT** ----------

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Giám thị không giải thích gì thêm.

- Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh.....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NAM

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT
NĂM HỌC 2024 – 2025 ĐỢT 2

HDC CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN CHẤM
MÔN: TOÁN LỚP 10 (CHUYÊN)

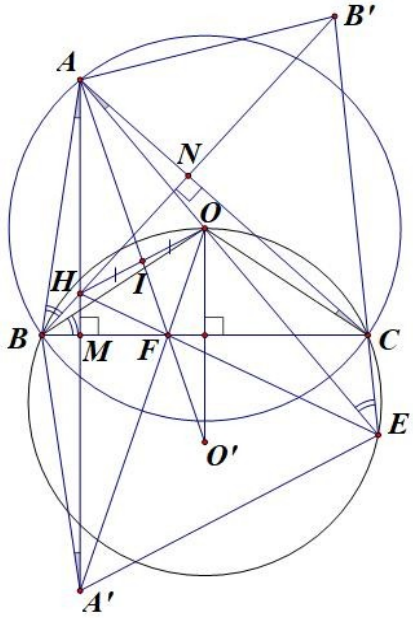
(Bản hướng dẫn này gồm 07 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1	Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+2}\left(x-y+4\right)=\sqrt{y-1} & (1)\\ \dfrac{5}{\sqrt{y}+3}=y-1-\sqrt{x+3} & (2)\end{cases}$	**3,0**
	Điều kiện: $\begin{cases}x\ge -2\\ y\ge 1\end{cases}$.	0,25
	$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x+2}\left(x+2-(y-1)\right)+\sqrt{x+2}=\sqrt{y-1}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{y-1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{y-1}\right)+\sqrt{x+2}-\sqrt{y-1}=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{y-1}\right)\left[\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{y-1}\right)+1\right]=0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+2}-\sqrt{y-1}=0$ (vì $\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{y-1}\right)+1>0$)	0,5
	$\Leftrightarrow y=x+3$	0,25
	Thay $y=x+3$ vào PT(2) ta được: $\dfrac{5}{\sqrt{x+3}+3}=x+2-\sqrt{x+3}$ (3), với $x\ge -2$	0,25
	Đặt $t=\sqrt{x+3}\ge 1$, PT(3) trở thành $\dfrac{5}{t+3}=t^2-t-1$	0,25
	$\Leftrightarrow t^3+2t^2-4t-8=0\Leftrightarrow \left(t+2\right)^2\left(t-2\right)=0$ $\Leftrightarrow t=2$ (vì $\left(t+2\right)^2>0,\forall t\ge 1$)	0,5
	Với $t=2$, ta có $\sqrt{x+3}=2\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=4$ (nhận). Vậy hệ PT đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=1\\ y=4\end{cases}$.	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 2	Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn $P(1)=2025$ và $(x-1)^2.P(x)=x(x+1).P(x-1)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.	**3,0**
	$(x-1)^2.P(x)=x(x+1).P(x-1)$ (1) Thay $x=0$ vào (1) ta được: $P(0)=0$.	0,25
	Thay $x=-1$ vào (1) ta được: $4.P(-1)=0\Leftrightarrow P(-1)=0$.	0,25
	Suy ra 0 và -1 là hai nghiệm của đa thức $P(x)$. Do đó $P(x)=x(x+1).Q(x),\forall x\in\mathbb{R}$, với $Q(x)$ là đa thức với hệ số thực.	0,5
	(1) được viết lại: $(x-1)^2x(x+1).Q(x)=x(x+1)(x-1)x.Q(x-1),\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow(x-1).Q(x)=x.Q(x-1)\quad(2),\forall x\in\mathbb{R}$	0,25
	Thay $x=0$ vào (2) ta được: $-1.Q(0)=0\Leftrightarrow Q(0)=0$. Suy ra $Q(x)=x.R(x),\forall x\in\mathbb{R}$, trong đó $R(x)$ là đa thức với hệ số thực.	0,5
	(2) được viết lại: $(x-1)x.R(x)=x(x-1).R(x-1),\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow R(x)=R(x-1),\forall x\in\mathbb{R}$	0,25
	Suy ra $R(x)=C,\forall x\in\mathbb{R}$, trong đó $C\in\mathbb{R}$ là hằng số. Do đó: $Q(x)=Cx,\forall x\in\mathbb{R}$ và $P(x)=x(x+1).Cx=Cx^2(x+1),\forall x\in\mathbb{R}$.	0,5
	Vì $P(1)=2025$ nên $C=\dfrac{2025}{2}$, do đó $P(x)=\dfrac{2025}{2}x^2(x+1)$.	0,25
	Thử lại, thấy thỏa mãn. Vậy đa thức cần tìm là: $P(x)=\dfrac{2025}{2}x^2(x+1)$.	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 3	a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2y^2 = 2 + \sqrt{-x^2 - 2x + 24}$.	**1,0**
	Điều kiện: $-x^2 - 2x + 24 \ge 0 \Leftrightarrow -6 \le x \le 4$.	0,25
	PT đã cho tương đương với $2y^2 - 2 = \sqrt{25 - (x+1)^2}$. Vì $0 \le \sqrt{25 - (x+1)^2} \le 5$ nên $0 \le 2y^2 - 2 \le 5 \Leftrightarrow 1 \le y^2 \le \frac{7}{2}$.	0,25
	Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$. Khi đó: $\sqrt{25 - (x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -6 \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện)	0,25
	Vậy PT đã cho có các nghiệm nguyên $(x;y)$ là: $(4;1),(4;-1),(-6;1),(-6;-1)$.	0,25
	b) Tìm tất cả các số nguyên dương m và n thỏa mãn $2m + n^2$ chia hết cho $m^2 - n$ và $2n + m^2$ chia hết cho $n^2 - m$.	**2,0**
	Xét hệ $\left\{\begin{array}{l} (2m + n^2) \vdots (m^2 - n) \quad (1) \\ (2n + m^2) \vdots (n^2 - m) \quad (2) \end{array}\right.$	
	Giả sử $n \ge m$. • Xét $n = m$: Hệ trên tương đương với: $(2m + m^2) \vdots (m^2 - m)$ (3) $\Rightarrow (m+2) \vdots (m-1)$ (do m nguyên dương) $\Rightarrow (m - 1 + 3) \vdots (m-1)$ $\Rightarrow 3 \vdots (m-1)$ $\Rightarrow m - 1 = 1$ hoặc $m - 1 = 3$ $\Rightarrow m = 2$ hoặc $m = 4$ (thỏa mãn (3))	0,5
	• Xét $n = m + 1$: Hệ trên tương đương với: $\left\{\begin{array}{l} (m^2 + 4m + 1) \vdots (m^2 - m - 1) \quad (4) \\ (m^2 + 2m + 2) \vdots (m^2 + m + 1) \quad (5) \end{array}\right.$ Với mọi số nguyên dương m, ta có $m^2 + m + 1 < m^2 + 2m + 2 < 2(m^2 + m + 1)$: không thỏa mãn (5).	0,5
	• Xét $n \ge m + 2$: Khi đó $n - 1 \ge m + 1$ $\Rightarrow n^2 - 2n + 1 \ge m^2 + 2m + 1$ $\Rightarrow n^2 - 2n \ge m^2 + 2m > m^2 + m$. $\Rightarrow 2n + m^2 < n^2 - m$: không thỏa mãn (2).	0,5
	Trường hợp $n < m$: xét lần lượt $m = n + 1$ và $m \ge n + 2$, thực hiện tương tự trên, thấy không thỏa mãn.	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	Vậy các số nguyên dương m,n cần tìm là: $\begin{cases}m=2\\n=2\end{cases}$, $\begin{cases}m=4\\n=4\end{cases}$.	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 4	Cho tam giác nhọn $ABC(AB<AC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O; hai điểm B,C cố định và điểm A thay đổi trên cung lớn BC của đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, A' là điểm đối xứng với A qua BC, B' là điểm đối xứng với B qua AC. Hai đường thẳng AO và $B'C$ cắt nhau tại E; hai đường thẳng $A'O$ và BC cắt nhau tại F.	**5,0**
	a) Chứng minh hai tam giác AHB, ACE đồng dạng và bốn điểm B,O,C,E cùng thuộc một đường tròn.	**2,0**
	 *(Có hình vẽ đúng phục vụ câu a) thì cho 0,25 đ)* *(Nếu không có hình vẽ thì không chấm điểm)*	0,25
	Gọi M,N lần lượt là chân đường cao kẻ từ A,B của ΔABC. Vì $\widehat{CMH}+\widehat{CNH}=180^\circ$ nên tứ giác $CMHN$ nội tiếp.	0,25
	Ta có: $\widehat{ACE}=180^\circ-\widehat{ACB'}=180^\circ-\widehat{ACB}$ (vì $\widehat{ACB'}=\widehat{ACB}$) $=\widehat{NHM}$ (vì tứ giác $CMHN$ nội tiếp) $=\widehat{AHB}$ (1)	0,25
	Vì H là trực tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC nên $\widehat{BAH}=\widehat{CAO}$ (2)	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	Từ (1) và (2) suy ra ΔAHB và ΔACE đồng dạng, do đó $\widehat{CEO} = \widehat{ABH}$ (3)	0,25
	Vì H là trực tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC nên $\widehat{ABH} = \widehat{CBO}$ (4)	0,25
	Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{CEO} = \widehat{CBO}$. Do đó B, O, C, E cùng thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC.	0,5
	b) Chứng minh đường thẳng AF đi qua điểm cố định khi A thay đổi.	**3,0**
	(Có hình vẽ đúng phục vụ câu b) thì cho 0,25 đ) *(Nếu không có hình vẽ thì không chấm điểm)*	0,25
	ΔAHB và ΔACE đồng dạng (theo câu a)) suy ra $AH.AE = AB.AC$ (5)	0,25
	$\Delta ABA'$ và ΔAOC lần lượt cân tại B và O, có $\widehat{BAA'} = \widehat{CAO}$ (do (2)) nên đồng dạng, suy ra $AA'.AO = AB.AC$ (6)	0,5
	Từ (5) và (6) ta có $AH.AE = AA'.AO \Rightarrow \dfrac{AH}{AA'} = \dfrac{AO}{AE} \Rightarrow HO // A'E$.	0,25
	Gọi O' là điểm đối xứng với O qua BC. Khi đó $AHO'O$ là hình bình hành nên AO' đi qua I là trung điểm của HO.	0,5
	Hình thang $HOEA'$ ($HO // A'E$) có 2 cạnh bên $A'H, EO$ cắt nhau tại A và AO' đi qua trung điểm I của đáy HO nên 3 đường thẳng $A'O, EH, AO'$ cùng đi qua một điểm.	0,5
	Vì A', O' lần lượt đối xứng với A, O qua BC nên $A'O, AO'$ cắt nhau tại một điểm thuộc BC, đó là điểm F (theo giả thiết $A'O$ và BC cắt nhau tại F).	0,25
	Suy ra $A'O, EH, AO'$ cùng đi qua điểm F. Vậy đường thẳng AF đi qua điểm cố định O' khi A thay đổi.	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 5	Lớp 10A có 32 học sinh, phân công 4 học sinh tham gia mỗi buổi trực nhật. Biết rằng trong một năm học, hai học sinh bất kỳ của lớp 10A trực nhật chung với nhau đúng 3 buổi. Tính số buổi trực nhật của lớp 10A trong năm học đó.	**3,0**
	Gọi n là số buổi trực nhật của lớp 10A trong năm học, $n \in \mathbb{N}^*$. Xét các bộ (A, B, X): hai học sinh A, B (không phân biệt thứ tự) cùng tham gia buổi trực nhật X. Ta đếm số bộ (A, B, X) theo hai cách:	0,5
	+ Cách đếm theo cặp học sinh: Có $C_{32}^2 = 496$ cách chọn một cặp học sinh. Có 3 cách chọn một buổi trực nhật chung của cặp học sinh đó.	0,5

	Suy ra số bộ (A,B,X) là $496.3=1488$.	0,5
	+ Cách đếm theo số buổi trực nhật: Có n cách chọn một buổi trực nhật. Có $C_4^2=6$ cách chọn một cặp học sinh trong 4 học sinh tham gia buổi trực nhật đó.	0,5
	Suy ra số bộ (A,B,X) là $6n$.	0,5
	Ta có phương trình: $6n=1488\Leftrightarrow n=248$. Vậy lớp 10A có 248 buổi trực nhật trong năm học.	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 6	Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}$.	**3,0**
	Ta có: $\frac{a^2}{a+2b^2}=a-\frac{2ab^2}{a+2b^2}=a-\frac{2ab^2}{a+b^2+b^2}\geq a-\frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}}$ (BĐT AM-GM)	0,5
	$=a-\frac{2}{3}\sqrt[3]{a.ab.b}$ $\geq a-\frac{2}{9}(a+ab+b)$ (BĐT AM-GM)	0,5
	Tương tự, ta có: $\frac{b^2}{b+2c^2}\geq b-\frac{2}{9}(b+bc+c)$ và $\frac{c^2}{c+2a^2}\geq c-\frac{2}{9}(c+ca+a)$.	0,5
	Do đó: $P\geq a+b+c-\frac{2}{9}((a+ab+b)+(b+bc+c)+(c+ca+a))$ (BĐT AM-GM) $=\frac{5(a+b+c)-2(ab+bc+ca)}{9}=\frac{5(a+b+c)-6}{9}$	0,5
	Ta có: $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)=9\Rightarrow a+b+c\geq 3$.	0,5
	Do đó $P\geq\frac{5.3-6}{9}=1$. $P=1$ khi $a=b=c=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1.	0,5

---------- HẾT ----------

Chú ý: *Nếu học sinh có lời giải đúng, khác với đáp án, Giám khảo căn cứ thang điểm câu tương ứng cho điểm phù hợp.*