

CHUYÊN ĐỀ: NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT****I. NGUYÊN HÀM****1. Định nghĩa**

Cho K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng của tập số thực $\mathbb{R}$.

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .
- Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$ với C là một hằng số. Vì vậy,

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

- Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K . Ta có:

$$\int F'(x) dx = F(x) + C$$

2. Tính chất

Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K .

- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với k là hằng số khác 0;
- $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

3. Nguyên hàm một số hàm số sơ cấp cơ bản

- Với $\alpha \neq -1$ ta có $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
- Với $a > 0; a \neq 1$ ta có $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

II. TÍCH PHÂN**1. Định nghĩa**

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Khi đó

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

2. Tính chất

Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Ta có:

- $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (k là hằng số).
- $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$;

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

• Giả sử m, n, c là ba số thực tùy ý thuộc đoạn $[a; b]$, ta có: $\int_m^n f(x) dx = \int_m^c f(x) dx + \int_c^n f(x) dx$

3. Tích phân một số hàm số sơ cấp cơ bản

• Với $\alpha \neq -1$, ta có: $\int_a^b x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_a^b = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

• Với hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, ta có: $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_a^b = \ln|b| - \ln|a|$

• $\int_a^b \sin x dx = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b$

• $\int_a^b \cos x dx = \sin x \Big|_a^b = \sin b - \sin a$

• Với hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ liên tục trên $[a; b]$, ta có: $\int_a^b \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x \Big|_a^b = \cot a - \cot b$

• Với hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ liên tục trên $[a; b]$, ta có:

$\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x \Big|_a^b = \tan b - \tan a;$

• Với $a > 0, a \neq 1$, ta có $\int_a^b a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \Big|_a^b = \frac{a^b - a^a}{\ln a}$

4. Ứng dụng

• Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

• Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

• Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = a$ và $x = b$ ($a < b$). Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại x ($a \leq x \leq b$) cắt vật thể đó theo hình phẳng có diện tích là $S(x)$. Giả sử hàm số $S(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó, thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên được tính bởi công thức

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

- Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a; b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Ví dụ 1. [MD1] Hàm số $F(x) = 2x^3 - 2x + 1$ là nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = 6x^2 - 2$

B. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + x$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + x + C$$

D. $f(x) = 6x^2 - 2 + C$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x) = F'(x) = (2x^3 - 2x + 1)' = 6x^2 - 2$

Ví dụ 2. [MĐ1] Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x=0, x=\pi$, đồ thị hàm số $y=\cos x$ và trục Ox là:

$$S = \int_0^{\pi} \cos x \, dx$$

$$S = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx$$

C. $S = \int_0^{\pi} |\cos x| dx$

D. $S = \pi \int_0^{\pi} |\cos x| dx$

Lời giải

Chon C

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = a, x = b$ và các đồ thị hàm số

$y = f(x), y = g(x)$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$. Khi đó, theo đề bài ta có $S = \int_0^\pi |\cos x| \, dx$

Ví dụ 3. [MĐ1] Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ quay quanh Ox . Phát biểu nào sau đây là đúng?

$$V = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$$

$$V = \int_0^2 e^x \, dx$$

$$V = \pi \int_0^2 e^x \, dx$$

$$V = \int_0^2 e^{2x} dx$$

Lời giải

Chọn A

Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ quay quanh Ox sẽ tạo thành một khối

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$$

tròn xoay có thể tích bằng

Ví dụ 4. [MĐ1] Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 - 2 \sin 2t$ (m/s). Quãng đường vật di chuyển trong

khoảng thời gian từ $t = 0$ (giây) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (giây) được tính theo công thức:

A. $s(t) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - 2 \sin 2t) dt$

B. $s(t) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - 2 \sin 2t)^2 dt$

C. $s(t) = \left| \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - 2 \sin 2t) dt \right|$

D. $s(t) = v\left(\frac{3\pi}{4}\right) - v(0)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $s(t)$ là quãng đường mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $t = 0$ (giây) đến $t = \frac{3\pi}{4}$ (giây). Mà

$s'(t) = v(t)$ nên ta có $s(t) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - 2 \sin 2t) dt$

Dạng 2: Trắc nghiệm đúng -sai

Trong mỗi ý a) b) c) d) ở mỗi câu thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Ví dụ 5: [MĐ1] Giả sử $s(t)$ là phương trình quãng đường chuyển động của một vật theo thời gian t (giây) và $v(t)$ là phương trình vận tốc của chuyển động đó theo thời gian t (giây).

a) $\int s(t) dt = v(t) + C$

b) $\int v(t) dt = s(t) + C$

c) $\int s'(t) dt = v(t) + C$

d) $\int s'(t) dt = s(t) + C$

Lời giải

Ý	a)	b)	c)	d)
Kết quả	S	Đ	S	Đ

Vì $s(t)$, $v(t)$ lần lượt là phương trình quãng đường và phương trình vận tốc của chuyển động đó theo thời gian

t (giây) nên ta có $s'(t) = v(t)$ và $\int v(t) dt = s(t) + C$.

a) $\int s(t) dt = v(t) + C$. Suy ra Sai.

b) $\int v(t) dt = s(t) + C$. Suy ra Đúng.

c) $\int s'(t) dt = v(t) + C$. Suy ra Sai.

d) $\int s'(t) dt = s(t) + C$. Suy ra Đúng.

Ví dụ 6: [MĐ2] Cho hàm số $F(x) = x^3 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

- a) Nếu hàm số $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $G(-1) = 3$ thì $G(x) = F(x) - 1, x \in I$.
- b) Nếu hàm số $H(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $H(1) = -3$ thì $H(x) = F(x) - 3, x \in I$.
- c) Nếu hàm số $K(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $K(0) = 0$ thì $K(x) = F(x) + 1, x \in I$.
- d) Nếu hàm số $M(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $M(2) = 4$ thì $M(x) = F(x) - 1, x \in I$.

Lời giải

Ý	a)	b)	c)	d)
Kết quả	S	Đ	S	Đ

a) Vì $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên I nên $G(x) = F(x) + C$, với C là một hằng số. Mà $G(-1) = 3$ nên ta có $G(-1) = F(-1) + C \Leftrightarrow 3 = 2 + C \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy $G(x) = F(x) + 1, x \in I$.

Suy ra Sai.

b) Vì $H(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên I nên $H(x) = F(x) + C$, với C là một hằng số. Mà $H(1) = -3$ nên ta có $H(1) = F(1) + C \Leftrightarrow -3 = 0 + C \Leftrightarrow C = -3$.

Vậy $H(x) = F(x) - 3, x \in I$.

Suy ra đúng.

c) Vì $K(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên I nên $K(x) = F(x) + C$, với C là một hằng số. Mà $K(0) = 0$ nên ta có $K(0) = F(0) + C \Leftrightarrow 0 = 1 + C \Leftrightarrow C = -1$. Vậy $K(x) = F(x) - 1, x \in I$.

Suy ra Sai.

d) Vì $M(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên I nên $M(x) = F(x) + C$, với C là một hằng số. Mà $M(2) = 4$ nên ta có $M(2) = F(2) + C \Leftrightarrow 4 = 5 + C \Leftrightarrow C = -1$. Vậy $M(x) = F(x) - 1, x \in I$.

Suy ra Đúng.

Ví dụ 7: [MĐ2] Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = 2 \cos t \text{ (m/s}^2\text{)}$.

a) Tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0. Khi đó, vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t) = 2 \sin t \text{ (m/s)}$.

b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ là 1 m/s .

c) Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = 0 \text{ (s)}$ đến thời điểm $t = \pi \text{ (s)}$ là 4 m .

d) Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = \frac{\pi}{2} \text{ (s)}$ đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4} \text{ (s)}$ là 2 m .

Lời giải

Ý	a)	b)	c)	d)
Kết quả	Đ	S	Đ	S

a) Ta có $v(t) = \int a(t) dt = \int 2 \cos t dt = 2 \sin t + C$.

Mà tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0 nên ta có $v(0) = 0$ hay $C = 0$. Vậy $v(t) = 2 \sin t$. Suy ra đúng.

b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ là $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2 \text{ (m/s)}$.

Suy ra sai.

c) Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \pi$ (s) là

$$\int_0^{\pi} v(t) dt = \int_0^{\pi} 2 \sin t dt = -2 \cos t \Big|_0^{\pi} = -2 \cos \pi - (-2 \cos 0) = 4 \text{ (m)}.$$

Suy ra đúng.

d) Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ (s) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (s) là

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} v(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} 2 \sin t dt = -2 \cos t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = -2 \cos \frac{3\pi}{4} - \left(-2 \cos \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{2} \text{ (m)}.$$

Suy ra Sai.

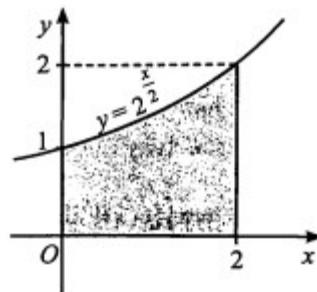
Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Ví dụ 8: [MĐ2] Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ và $F(2) = 2$. Tính $F(3)$.

Lời giải

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int (3x^2 - 4x + 1) dx = x^3 - 2x^2 + x + C$. Mà $F(2) = 2$ nên suy ra $C = 0$. Vậy hàm số $F(x) = x^3 - 2x^2 + x$. Suy ra $F(3) = 12$.

Ví dụ 9: [MĐ2] Cho đồ thị hàm số $y = 2^{\frac{x}{2}}$ và hình phẳng được tô màu như Hình 1. Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào? Tính diện tích hình phẳng đó (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).



Hình 1

Lời giải

Hình phẳng đã cho ở Hình 1 được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2^{\frac{x}{2}}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$. Khi đó, diện tích hình phẳng là

$$S = \int_0^2 2^{\frac{x}{2}} dx = \int_0^2 \left(2^{\frac{1}{2}} \right)^x dx = \frac{\left(2^{\frac{1}{2}} \right)^x}{\ln 2^{\frac{1}{2}}} \Big|_0^2 = \frac{2}{\ln 2} \approx 2,89$$

Ví dụ 9: [MĐ2] Một vật chuyển động với gia tốc được cho bởi hàm số $a(t) = 5 \cos t$ (m/s^2). Lúc bắt đầu chuyển động vật có vận tốc $2,5 m/s$. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất trong π (s) đầu tiên.

Lời giải

Vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t) = \int a(t) dt = \int 5 \cos t dt = 5 \sin t + C$.

Khi bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc $2,5 \text{ m/s}$ nên ta có:

$$v(0) = 2,5 \Leftrightarrow 5 \sin 0 + C = 2,5 \Leftrightarrow C = 2,5$$

Suy ra $v(t) = 5 \sin t + 2,5$. Mà $5 \sin t + 2,5 \leq 7,5$. Vậy vận tốc đạt giá trị lớn nhất tại $t = \frac{\pi}{2}$. Khi đó, gia

tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ là $a\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. [MĐ1] Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int F'(x) dx = F(x) + C$

B. $\int F(x) dx = F'(x) + C$

C. $\int F(x) dx = F(x) + C$

D. $\int F'(x) dx = F'(x) + C$

Lời giải

Chọn A

Câu 2. [MĐ1] Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int e^{-3x} dx = e^{-3x} + C$

B. $\int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C$

C. $\int e^{-3x} dx = \frac{1}{3} e^{-3x} + C$

D. $\int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x}$

Lời giải

Chọn B

Câu 3. [MĐ1] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay D quanh trục hoành là

A. $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

B. $V = 2\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

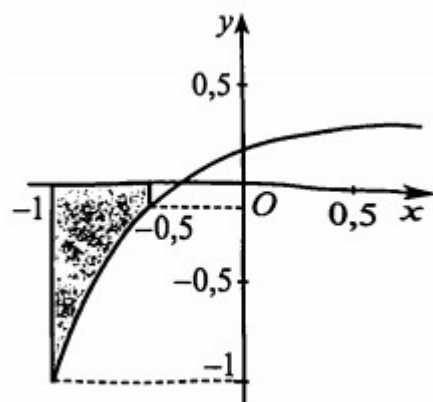
C. $V = \pi^2 \int_a^b [f(x)]^2 dx$

D. $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$

Lời giải

Chọn A

Câu 4. [MĐ2] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình 2. Gọi S là phần diện tích hình phẳng được tô màu. Phát biểu nào sau đây là đúng?



Hình 2

A. $S = \int_{-1}^{-0.5} f(x) dx$

B. $S = \int_{-1}^0 f(x) dx$

C. $S = - \left| \int_{-1}^{-0.5} f(x) dx \right|$

D. $S = - \int_{-1}^{-0.5} f(x) dx$

Lời giải

Chọn D

Ta có
$$S = - \int_{-1}^{-0.5} [0 - f(x)] dx = - \int_{-1}^{-0.5} f(x) dx$$

Câu 5. [MĐ1] Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng H quay quanh trục Ox là

A. $V = \pi \int_1^4 \frac{1}{x} dx$

B. $V = \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx$

C. $V = \pi \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx$

D. $V = \pi^2 \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx$

Lời giải

Chọn C

Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$ quay quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx$$

Câu 6. [MĐ1] Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng D quay xung quanh trục Ox là

A. $V = \pi \int_0^{\pi} |\sin x| dx$

B. $V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$

C. $V = \pi \left| \int_0^{\pi} (-\sin x) dx \right|$

D. $V = \pi^2 \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$

Lời giải

Chọn B

Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số

$$y = -\sin x, \text{ trục hoành và hai đường thẳng } x = 0, x = \pi \text{ quay quanh trục } Ox \text{ là } V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx.$$

Câu 7. **[MĐ1]** Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng H quay xung quanh trục Ox là

A. $V = \pi \int_1^2 \sqrt{x} dx$

B. $V = \pi^2 \int_0^\pi x dx$

C. $V = \pi^2 \int_1^2 \sqrt{x} dx$

D. $V = \pi \int_1^2 x dx$

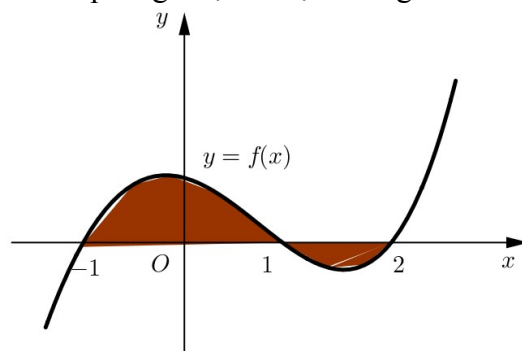
Lời giải

Chọn D

Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$,

$$\text{trục hoành và hai đường thẳng } x = 1, x = 2 \text{ quay quanh trục } Ox \text{ là } V = \pi \int_1^2 x dx.$$

Câu 8. **[MĐ1]** Gọi S là diện tích hình phẳng được tô đậm trong Hình 3. Công thức tính S là



A. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$

B. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$

C. $S = \int_{-1}^2 f(x) dx$

D. $S = -\int_{-1}^2 f(x) dx$

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị, suy ra diện tích hình phẳng là

$$S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$$

Câu 9. **[MĐTH]** $\int (2x)^{\sqrt{2}} dx$ bằng:

A. $\frac{(2x)^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + C$

B. $\frac{2^{\sqrt{2}} x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + C$

C. $\frac{(2x)^{\sqrt{2}}}{\ln(2x)} + C$

D. $(2x)^{\sqrt{2}} + C$

Lời giải

Chọn B

$$t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$$

Đặt

$$\text{Ta có } \int (2x)^{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{2} \int t^{\sqrt{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + C$$

$$\text{Thay } t = 2x \text{ ta có } \int (2x)^{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{2} \frac{(2x)^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + C = \frac{2^{\sqrt{2}} x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + C$$

Câu 10. [MĐTH] $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$ bằng:

- A.** $x - \cos x + C$ **B.** $\left(-\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)^2 + C$
- C.** $\frac{1}{3} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^3 + C$ **D.** $x + \cos x + C$

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Ta có: } \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 = \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$= 1 + \sin x$$

$$\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = \int (1 + \sin x) dx$$

Khi đó

$$= \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C$$

Câu 11. [MĐTH] $\int (e^x + e^{-2x}) dx$ bằng:

- A.** $e^x - 2e^{-2x} + C$ **B.** $e^x + e^{-2x} + C$ **C.** $e^x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$ **D.** $\frac{e^{x+1}}{x+1} + \frac{e^{-2x+1}}{-2x+1} + C$

Lời giải**Chọn C**

$$\int (e^x + e^{-2x}) dx = \int e^x dx + \int e^{-2x} dx$$

Ta có:

$$= \int e^x dx - \frac{1}{2} \int e^{-2x} d(-2x) = e^x - \frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

Câu 12. [MĐTH] $\int \left(\cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$ bằng:

- A.** $x + \sin x + C$ **B.** $\frac{1}{3} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^3 + C$ **C.** $\left(\sin \frac{x}{2} \right)^2 + C$ **D.** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \sin x + C$

Lời giải**Chọn D**

$$\int \left(\cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx$$

Ta có:

$$= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x + C$$

Câu 13. [MĐTH] $\int \left(5^{2x} - 6e^{-\frac{x}{2}} \right) dx$ bằng:

A. $e^x - \frac{1}{2} e^{-2x} + C$

B. $\frac{25^x}{2 \ln 5} + 12e^{-\frac{x}{2}} + C$

C. $e^x - 2e^{-2x} + C$

D. $\frac{e^{x+1}}{x+1} + \frac{e^{-2x+1}}{-2x+1} + C$

Lời giải

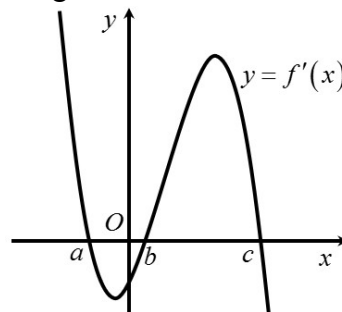
Chọn B

$$\int \left(5^{2x} - 6e^{-\frac{x}{2}} \right) dx = \int 25^x dx + 12 \int e^{-\frac{x}{2}} d\left(-\frac{x}{2}\right)$$

Ta có

$$= \frac{25^x}{\ln 25} + 12e^{-\frac{x}{2}} + C = \frac{25^x}{2 \ln 5} + 12e^{-\frac{x}{2}} + C$$

Câu 14. [MĐVD] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như Hình 4. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $f(c) > f(a) > f(b)$

B. $f(c) > f(b) > f(a)$

C. $f(a) > f(b) > f(c)$

D. $f(b) > f(a) > f(c)$

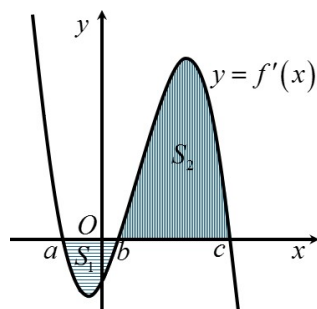
Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$			$f(a)$		$f(b)$		$f(c)$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f(a) > f(b)$; $f(c) > f(b)$ (1).



Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a; x = b$.

Gọi S_2 là diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = b; x = c$.

$$S_1 = \int_a^b (-f'(x)) dx = \int_b^a f'(x) dx = f(a) - f(b)$$

Ta có: ;

$$S_2 = \int_b^c f'(x) dx = f(c) - f(b)$$

Quan sát hình vẽ ta thấy $S_2 > S_1 \Rightarrow f(c) - f(b) > f(a) - f(b)$
 $\Rightarrow f(c) > f(a)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $f(c) > f(a) > f(b)$.

Câu 15. [MĐTH] Vi khuẩn E.coli sống chủ yếu ở đường ruột và có số lượng lớn nhất trong hệ vi sinh vật của cơ thể. Một quần thể vi khuẩn E. coli được quan sát trong điều kiện thích hợp, có tốc độ sinh trưởng được cho bởi hàm số $f(t) = 480 \cdot 2^t \ln 2$. Trong đó t tính bằng giờ ($t > 0$), $f(t)$ tính bằng cá thể/giờ (Nguồn: R Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage). Biết tại thời điểm bắt đầu quan sát, số lượng cá thể được ước tính một cách chính xác khoảng 480 cá thể. Hàm số biểu thị số lượng cá thể theo thời gian t là:

A. $F(t) = 480 \cdot 2^t + \ln 2$

B. $F(t) = 480 \cdot 2^t$

C. $F(t) = 480 \cdot \frac{2^t}{\ln 2}$

D. $F(t) = 480 \cdot \frac{2^t}{\ln 2} + C$

C.

Lời giải

Chọn B

Do $\int f(t) dt = \int 480 \cdot 2^t \ln 2 dt = 480 \cdot \ln 2 \cdot \frac{2^t}{\ln 2} + C = 480 \cdot 2^t + C = F(t)$

Biết tại thời điểm bắt đầu quan sát, số lượng cá thể được ước tính một cách chính xác khoảng 480 cá thể nên $F(0) = 480 \cdot 2^0 + C = 480 \Rightarrow C = 0$

Dạng 2: Trắc nghiệm đúng-sai

Trong mỗi ý a) b) c) d) ở mỗi câu thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 16. [MĐNB] Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbf{R}$

- a) $\int f(x)dx = f'(x) + C.$
 b) $\int f'(x)dx = f(x) + C.$
 c) $\int f'(x)dx = f(x).$
 $\int f''(x)dx = f'(x) + C.$
 d)

Lời giải

Ý	a)	b)	c)	d)
Kết quả	sai	đúng	sai	đúng

Do định nghĩa của nguyên hàm ta có kết quả trên.

Câu 17. [MĐTH] Giả sử $v(t)$ là phương trình vận tốc của một vật chuyển động theo thời gian t (giây), $a(t)$ là phương trình gia tốc của vật đó chuyển động theo thời gian t (giây).

- a) $\int a(t)dt = v(t) + C.$
 b) $\int v(t)dt = a(t) + C.$
 c) $\int v'(t)dt = a(t) + C.$
 $\int v'(t)dt = v(t) + C.$
 d)

Lời giải

Ý	a)	b)	c)	d)
Kết quả	đúng	sai	sai	đúng

- a) Do nguyên hàm của hàm gia tốc là hàm vận tốc. Suy ra đúng.
 b) Do nguyên hàm của hàm vận tốc là hàm quãng đường. Suy ra sai.
 c) Do $\int v'(t)dt = v(t) + C.$ Suy ra sai
 d) Do định nghĩa nguyên hàm. Suy ra đúng.

Câu 18. [MĐTH] Giả sử $v(t)$ là phương trình vận tốc của một vật chuyển động theo thời gian t (giây), $a(t)$ là phương trình gia tốc của vật đó chuyển động theo thời gian t (giây). Xét chuyển động trong khoảng thời gian từ c (giây) đến b (giây).

- a) $\int_c^b a(t)dt = v(b) - v(c).$
 b) $\int_c^b v(t)dt = a(b) - a(c).$
 c) $\int_c^b v'(t)dt = v(c) - v(b).$

$$\int_c^b v'(t) dt = v(b) - v(c).$$

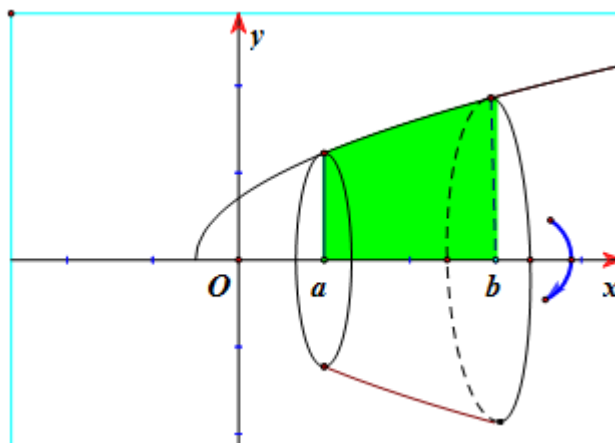
d)

Lời giải

Ý	a)	b)	c)	d)
Kết quả	Đúng	Sai	Sa i	Đúng

Do $a(t) = v'(t)$ Suy ra a), d) đúng.

Câu 19. Cho vật thể tròn xoay như Hình 5.



a) Vật thể được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh trục Ox .

b) Vật thể được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh trục Ox .

$$V = \pi \int_a^b f(x) dx$$

c) Thể tích của vật thể được tính theo công thức

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

d) Thể tích của vật thể được tính theo công thức

Lời giải

Ý	a)	b)	c)	d)
Kết quả	Sa i	Đúng	Sa i	Đúng

Theo lý thuyết về thể tích vật tròn xoay thì b, d đúng.

Câu 20. Tại một khu di tích vào ngày lễ hội hằng năm, tốc độ thay đổi lượng khách tham quan được biểu diễn bằng hàm số $Q'(t) = 4t^3 - 72t^2 + 288t$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 13$), $Q'(t)$ tính bằng khách/giờ. Nguồn: R.Larson and B. Eawads, Calculus 10e, Cengage). Sau 2 giờ đã có 500 người có mặt.

a) Lượng khách tham quan được biểu diễn bởi hàm số $Q(t) = t^4 - 24t^3 + 144t^2$.

b) Sau 5 giờ lượng khách tham quan là 1325 người.

c) Lượng khách tham quan lớn nhất là 1296 người.

d) Tốc độ thay đổi lượng khách tham quan lớn nhất tại thời điểm $t = 6$.

Lời giải

Ý	a)	b)	c)	d)
Kết quả	Sa i	Đúng	Sa i	Đúng

Ta có $Q(t) = \int Q'(t) \cdot dt = t^4 - 24t^3 + 144t + C \Rightarrow Q(2) = 500 \Rightarrow C = 100$.

Suy ra $Q(t) = t^4 - 24t^3 + 144t + 100 \Rightarrow$ a) sai.

Sau 5 giờ lượng khách tham quan là $Q(5) = 1325$. Do đó b) đúng.

Ta có $\max_{[0;13]} Q(t) = Q(6) = 1396$. Do đó d) đúng, c) Sai

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 21. $\int_0^1 \frac{3^{x-2}}{2^{2x}} dx$ có giá trị bằng bao nhiêu? (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

Trả lời: 0,1

$$\int_0^1 \frac{3^{x-2}}{2^{2x}} dx = \frac{1}{9} \int_0^1 \left(\frac{3}{4}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{9 \ln \frac{3}{4}} \Big|_0^1$$

Ta có:

$$= -\frac{1}{36 \ln \frac{3}{4}} \approx 0,1$$

Câu 22. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^2 - 2)(2x + 1)$ và $F(-1) = \frac{1}{6}$. Tính $F\left(-\frac{1}{2}\right)$ (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,49

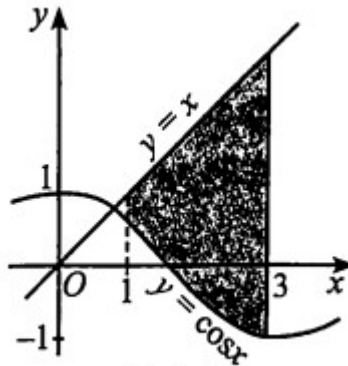
Ta có: $f(x) = (x^2 - 2)(2x + 1) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } F(x) &= \int f(x) dx = \int (2x^3 + x^2 - 4x - 2) dx \\ &= \int 2x^3 dx + \int x^2 dx - \int 4x dx - \int 2 dx \\ &= \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 2x + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Mà $F(-1) = \frac{1}{6}$ nên suy ra $C = 0$.

Vậy hàm số $F(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 2x \Rightarrow F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{47}{96} \approx 0,49$

Câu 23. Cho đồ thị hàm số $y = \cos x$ và hình phẳng được tô màu như Hình 6. Tính diện tích hình phẳng đó (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười).



Hình 6

Lời giải

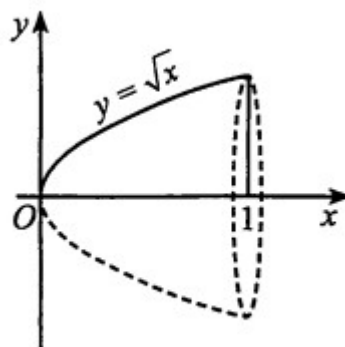
Trả lời: 4,7

Hình phẳng đã cho được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \cos x, y = x$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$. Khi đó diện tích hình phẳng được tính theo công thức

$$S = \int_1^3 |\cos x - x| dx. \text{ Vì } x \geq \cos x, \forall x \in [1; 3] \text{ nên ta có:}$$

$$S = \int_1^3 (x - \cos x) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \sin x \right) \Big|_1^3 = 4 - \sin 3 + \sin 1 \approx 4,7$$

Câu 24. Cho khối tròn xoay như Hình 7. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành bởi hình phẳng cho ở Hình 7 khi quay quanh trục Ox (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười).



Hình 7

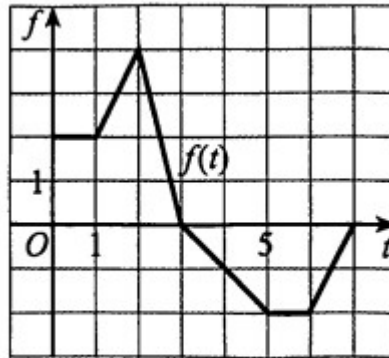
Lời giải

Trả lời: 1,57

Hình phẳng đã cho giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$, khi quay hình phẳng đó quanh trục Ox ta được khối tròn xoay như Hình 7. Thể tích của khối tròn xoay đó là:

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$$

Câu 25. Cho $g(x) = \int_0^x f(t) dt, (0 \leq x \leq 7)$ trong đó $f(t)$ là hàm số có đồ thị như Hình 8. Tính $g(3)$.



Hình 8

Lời giải

Trả lời: 7

Ta có:

$$\begin{aligned} g(3) &= \int_0^3 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt + \int_2^3 f(t) dt \\ &= \int_0^1 2 dt + \int_1^2 2t dt + \int_2^3 (12 - 4t) dt \\ &= 2t \Big|_0^1 + t^2 \Big|_1^2 + (12t - 2t^2) \Big|_2^3 = 7 \end{aligned}$$

Câu 26. Một vật được ném lên từ độ cao 300 m với vận tốc được cho bởi công thức $v(t) = -9,81t + 29,43$ (m/s) (Nguồn: R.Larson anh B. Edwards, Calculus 10e, Cengage). Gọi $h(t)$ (m) là độ cao của vật tại thời điểm t (s). Sau bao lâu kể từ khi bắt đầu được ném lên thì vật đó chạm đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét)?

Lời giải

Trả lời: 11

Ta có:

$$h(t) = \int v(t) dt = \int (-9,81t + 29,43) dt = -\frac{9,81}{2}t^2 + 29,43t + C$$

Vì vật được ném lên từ độ cao 300 m nên $h(0) = 300 \Rightarrow C = 300$.

Vậy $h(t) = -\frac{9,81}{2}t^2 + 29,43t + 300$. Khi vật bắt đầu chạm đất ứng với $h(t) = 0$.

Nên ta có: $-\frac{9,81}{2}t^2 + 29,43t + 300 = 0 \Leftrightarrow t \approx 11$ hoặc $t \approx -5$.

Do $t > 0$ nên $t \approx 11(\text{s})$.

Câu 27. Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn tăng giá cho thuê của mỗi gian hàng thêm x (triệu đồng) ($x \geq 0$). Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số $T'(x) = -20x + 300$, trong đó $T'(x)$ tính bằng triệu đồng (Nguồn: R.Larson anh B. Edwards, Calculus 10e, Cengage). Biết rằng nếu người đó tăng giá thuê cho mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là 12 000 triệu đồng. Tìm giá trị của x để người đó có doanh thu là cao nhất?

Lời giải

Trả lời: 15

$$T(x) = \int T'(x) dx = \int (-20x + 300) dx$$

Ta có:

$$= -10x^2 + 300x + C, C \in \mathbb{R}.$$

Khi người đó tăng giá cho thuê mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là 12 000 triệu đồng.

Nên ứng với $x = 10$ ta có $T(10) = 12\,000$ suy ra

$$12\,000 = -10 \cdot 10^2 + 300 \cdot 10 + C \Rightarrow C = 10\,000.$$

Vậy $T(x) = -10x^2 + 300x + 10\,000$. Ta có $T(x)$ là một hàm bậc hai với hệ số $a < 0$ và đồ thị hàm số có đỉnh là $I(15; 12\,250)$.

Vậy doanh thu cao nhất mà người đó có thể thu về là 12 250 triệu đồng và khi đó mỗi gian hàng đã tăng giá cho thuê thêm 15 triệu đồng.