

CÁC DẠNG BÀI TẬP BÀI TÍCH PHÂN**Dạng 1: Tích phân của các hàm số cơ bản. Tính chất của tích phân**

$$\int_a^b f(x) dx$$

Phương pháp: Các bước tính

- **Bước 1:** Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ (thường chọn $C = 0$)

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- **Bước 2:** Sử dụng công thức

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 3, \int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Khi đó $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$ bằng
- A. 10. B. $\frac{21}{2}$. C. $\frac{19}{2}$. D. $\frac{17}{2}$.

Lời giải

Ta có:
$$I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx = \int_{-1}^2 x dx + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx - 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = \frac{3}{2} + 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) = \frac{21}{2}$$

- Câu 2:** Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 (2 + f(x)) dx$ bằng
- A. 7. B. 9. C. $\frac{15}{4}$. D. $\frac{23}{4}$.

Lời giải

Ta có
$$\int_1^2 (2 + f(x)) dx = \int_1^2 2 dx + \int_1^2 f(x) dx = 2x \Big|_1^2 + x^3 \Big|_1^2 = 9$$

- Câu 3:** Cho $\int_{-1}^2 f(t) dt = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$
- A. $I = \frac{17}{2}$ B. $I = \frac{7}{2}$ C. $I = \frac{5}{2}$ D. $I = \frac{11}{2}$

Lời giải

Ta có
$$I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx = \int_{-1}^2 x dx + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx - 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = \frac{3}{2} + 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = \frac{17}{2}$$

- Câu 4:** Nếu $\int_1^4 f(x) dx = -2$ và $\int_1^4 g(x) dx = -6$ thì $\int_1^4 [2f(x) - g(x) + 1] dx$ bằng
- A. 2. B. -4. C. 5. D. 3.

Lời giải

$$\int_1^4 [2f(x) - g(x) + 1] dx = 2 \int_1^4 f(x) dx - \int_1^4 g(x) dx + \int_1^4 1 dx = 2 \cdot (-2) + 6 + 3 = 5$$

- Câu 5:** Giả sử $\int_0^9 f(x) dx = 7$ và $\int_9^0 g(x) dx = 1$. Khi đó $I = \int_0^9 [2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng
A. $I = 11$ **B.** $I = 17$ **C.** $I = 23$ **D.** $I = 8$

Lời giải

$$I = 2 \int_0^9 f(x) dx + 3 \int_0^9 g(x) dx = 2 \cdot 7 + 3 \cdot (-1) = 11$$

Ta có:

- Câu 6:** Nếu $\int_{-1}^4 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^4 g(x) dx = 3$. Khi đó $\int_{-1}^4 [f(x) - g(x)] dx$ bằng
A. 5 **B.** 6 **C.** 1 **D.** -1

Lời giải

$$\int_{-1}^4 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-1}^4 f(x) dx - \int_{-1}^4 g(x) dx = 2 - 3 = -1$$

Ta có:

- Câu 7:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-6; 11]$ và thỏa mãn $\int_{-6}^{11} f(x) dx = 8$, $\int_2^6 f(x) dx = 3$.
 Giá trị của biểu thức $P = \int_{-6}^2 f(x) dx + \int_6^{11} f(x) dx$ bằng
A. $P = 4$ **B.** $P = 11$ **C.** $P = 5$ **D.** $P = 2$

Lời giải

$$\begin{aligned} \int_{-6}^{11} f(x) dx = 8 &\Leftrightarrow \int_{-6}^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx + \int_6^{11} f(x) dx = 8 \Leftrightarrow \int_{-6}^2 f(x) dx + 3 + \int_6^{11} f(x) dx = 8 \\ \Leftrightarrow \int_{-6}^2 f(x) dx + \int_6^{11} f(x) dx &= 5 \Leftrightarrow P = 5 \end{aligned}$$

- Câu 8:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2) - F(0) = 5$. Khi đó $\int_0^2 3f(x) dx$ bằng
A. 6 **B.** 15 **C.** 10 **D.** 5

Lời giải

$$\int_0^2 3f(x) dx = 3 \int_0^2 f(x) dx = 3(F(2) - F(0)) = 3 \cdot 5 = 15.$$

Ta có:

- Câu 9:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^5 f(x) dx = 10$, $\int_3^5 f(x) dx = 1$. Khi đó $\int_1^3 f(x) dx$ bằng
A. 9 **B.** 10 **C.** 11 **D.** -9

$$\text{Ta có } \int_1^3 f(x) dx = \int_1^5 f(x) dx - \int_3^5 f(x) dx = 10 - 1 = 9$$

Câu 10: Nếu $\int_0^1 2f(x) dx = 6$ thì $\int_0^1 \left[\frac{1}{3}f(x) + 2x \right] dx$ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^1 \left[\frac{1}{3}f(x) + 2x \right] dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx + 2 \int_0^1 x dx = \frac{1}{6} \int_0^1 2f(x) dx + x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \cdot 6 + 1 = 2$$

Câu 11: Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

A. -1. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = (-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$$

Câu 12: Kết quả tích phân $I = \int_0^1 5^x dx$ bằng

A. $I = \frac{4}{\ln 5}$. **B.** $I = 4 \ln 5$. **C.** $I = 5 \ln 5$. **D.** $I = \frac{5}{\ln 5}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} \Big|_0^1 = \frac{5^1}{\ln 5} - \frac{5^0}{\ln 5} = \frac{4}{\ln 5}$$

Câu 13: Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx$ bằng

A. $-\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $1 - \ln 3$. **D.** $\ln 3 - \ln 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx = \ln|x+2| \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2$$

Câu 14: Cho $\int_0^{\ln 2} (2f(x) + e^x) dx = 5$. Khi đó $\int_0^{\ln 2} f(x) dx$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Ta có
$$\int_0^{\ln 2} (2f(x) + e^x) dx = 2 \int_0^{\ln 2} f(x) dx + \int_0^{\ln 2} e^x dx = 2 \int_0^{\ln 2} f(x) dx + e^x \Big|_0^{\ln 2} = 2 \int_0^{\ln 2} f(x) dx + 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{\ln 2} f(x) dx = 2$$

- Câu 15:** Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?
- A. $(-1; 2)$ B. $(-\infty; 0)$ C. $(0; 4)$ D. $(-3; 1)$

Lời giải

Ta có
$$\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = \left(x^3 - x^2 + x \right) \Big|_0^m = m^3 - m^2 + m$$

Để $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6 \Leftrightarrow m^3 - m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \in (0; 4)$

- Câu 16:** Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 4$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [2f(x) + \sin x] dx$ bằng
- A. $8 + \frac{\pi}{2}$ B. $4 + \pi$ C. 9 D. 7.

Lời giải

Ta có
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [2f(x) + \sin x] dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 2 \cdot 4 + 1 = 9.$$

- Câu 17:** Tính $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} + 3\sqrt{x} \right) dx$.
- A. $2 + \ln \sqrt{3}$ B. $4 + \ln 3$ C. $2 + \ln 3$ D. $1 + \ln \sqrt{3}$

Lời giải

Ta có
$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} + 3\sqrt{x} \right) dx = \left(\frac{1}{2} \ln |2x+1| + 2x\sqrt{x} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3 + 2 = 2 + \ln \sqrt{3}$$

- Câu 18:** Nếu $\int_0^{\pi} f(x) dx = 3$ thì $\int_0^{\pi} \left[f(x) + \sin \frac{x}{2} \right] dx$ bằng:
- A. 10. B. 6. C. 12. D. 5.

Lời giải

Ta có
$$\int_0^{\pi} \left[f(x) + \sin \frac{x}{2} \right] dx = \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx = 3 - 2 \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} = 3 - 2(0 - 1) = 5.$$

- Câu 19:** Tích phân $\int_0^1 e^{3x} dx$ bằng

- A. $e^3 + \frac{1}{2}$. B. $e - 1$. C. $\frac{e^3 - 1}{3}$. D. $e^3 - 1$.

Lời giải

Ta có
$$\int_0^1 e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3} e^{3x} \Big|_0^1 = \frac{e^3 - 1}{3}$$

Câu 20: Cho $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+a}}$, với $a > 0$. Tìm a nguyên để $I \geq 1$.

- A. Không có giá trị nào của a . B. $a = 0$.
C. Vô số giá trị của a . D. $a = 1$.

Lời giải

Ta có
$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+a}} = \sqrt{2x+a} \Big|_0^1 = \sqrt{2+a} - \sqrt{a}$$

Ta có:
$$I \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{2+a} \geq 1 + \sqrt{a} \Leftrightarrow 2+a \geq a+1+2\sqrt{a} \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq a \leq \frac{1}{4}.$$

Với $a > 0$, a nguyên thì không có giá trị nào của a thỏa mãn.

Câu 21: Nếu $\int_0^{\ln 3} [f(x) + e^x] dx = 6$ thì $\int_0^{\ln 3} f(x) dx$ bằng

A. $6 + \ln 3$. B. $6 - \ln 3$. C. 4. D. 8.

Lời giải

Ta có:
$$\int_0^{\ln 3} [f(x) + e^x] dx = \int_0^{\ln 3} f(x) dx + \int_0^{\ln 3} e^x dx = \int_0^{\ln 3} f(x) dx + 2$$

Suy ra
$$\int_0^{\ln 3} f(x) dx = 6 - 2 = 4$$

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\square$, thỏa mãn $\int_0^{\pi} [f(x) + \sin x] dx = 10$. Tính

- $I = \int_0^{\pi} f(x) dx$
- A. $I = 4$. B. $I = 8$. C. $I = 12$. D. $I = 6$.

Lời giải

Ta có
$$\int_0^{\pi} [f(x) + \sin x] dx = \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_0^{\pi} \sin x dx = \int_0^{\pi} f(x) dx - \cos x \Big|_0^{\pi} = 10$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} f(x) dx = 10 + (\cos \pi - \cos 0) = 8$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cdot \sin x dx$$

Câu 23: Tính tích phân

- A. $\frac{1}{2}$. B. 0. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cdot \sin x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x - \cos 4x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{4}.$$

Câu 24: Gọi a, b là các số nguyên sao cho $\int_0^2 \sqrt{e^{x+2}} dx = 2ae^2 + be$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

A. 3. B. 8. C. 4. D. 5.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_0^2 \sqrt{e^{x+2}} dx = \int_0^2 (e^{x+2})^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^2 e^{\frac{1}{2}x+1} dx = 2e^{\frac{1}{2}x+1} \Big|_0^2 = 2e^2 - 2e \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 = 5.$$

Câu 25: Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1$?

A. 4. B. 6. C. 8. D. 2.

Lời giải

$$\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1 \Leftrightarrow 2 \sin 2x \Big|_{\pi}^b = 1$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \sin 2b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2b = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ b = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Với } b = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad b \in (\pi; 3\pi) \Rightarrow 1 < \frac{\pi}{12} + k < 3, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k = 1; 2 \Rightarrow b = \frac{13\pi}{12}; \frac{25\pi}{12}$$

$$\text{Với } b = \frac{5\pi}{12} + k\pi \quad b \in (\pi; 3\pi) \Rightarrow 1 < \frac{5\pi}{12} + k < 3, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k = 1; 2 \Rightarrow b = \frac{17\pi}{12}; \frac{29\pi}{12}$$

Vậy có 4 số thực b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \cdot \sin x dx$ bằng:

A. $1 - e$. B. $e + 1$. C. e . D. $e - 1$.

Lời giải

Ta có:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \cdot \sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} d(\cos x) = -e^{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = - \left(e^{\cos \frac{\pi}{2}} - e^{\cos 0} \right) = -(1 - e) = e - 1$$

Câu 27: Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 - \sin x) dx = a\pi + b$, với a, b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $a + b$ bằng

A. 1. **B.** -4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 - \sin x) dx = (4x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi - 1 \Rightarrow a = 2, b = -1.$

$$\mathbf{V}\hat{\mathbf{y}} \quad a + b = 1.$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x \cos x dx = \frac{\sqrt{2}}{a} + \frac{b}{c}$$

Câu 28: Cho $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 4x \cos x dx = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ với a, b, c là các số nguyên, $c < 0$ và $\frac{b}{d}$ tối giản. Tổng $a + b + c$ bằng

A. -77 . **B.** 103 . **C.** -17 . **D.** 43 .

Lời giải

Ta có

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 5x + \cos 3x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{3} \sin 3x \right) \bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{30} - \frac{13}{60}$$

Suy ra
$$\begin{cases} a = 30 \\ b = 13 \\ c = -60 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 30 + 13 - 60 = -17$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \frac{a\sqrt{3}}{b} \quad (a, b \in \mathbb{Z}). \quad \text{Tính } P = \frac{a-2b}{b}$$

Câu 29: Biết $\int_0^1 \sin^{-1} x \cdot \cos^{-1} x \, dx = \frac{1}{3}$. Tính $\int_0^1 \sin^{-1} x \cdot \cos^{-1} x \, dx$.

A. $P = \frac{4}{3}$ **B.** $P = -\frac{4}{3}$ **C.** $P = -\frac{2}{3}$ **D.** $P = \frac{2}{3}$

Lời giải

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$= (\tan x - \cot x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{nên} \quad P = \frac{2 - 2.3}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Câu 30: Cho $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = a\sqrt{b} - \frac{8}{3}\sqrt{a} + \frac{2}{3}$, $(a, b \in \mathbb{Q}^+)$. Tính $a + 2b$.
A. 7. **B.** 8. **C.** -1. **D.** 5.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \int_0^1 (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) dx = \frac{2}{3} \left(\sqrt{(x+2)^3} - \sqrt{(x+1)^3} \right) \Big|_0^1 = 2\sqrt{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}$$

Do đó $a = 2; b = 3$ nên $a + 2b = 8$

Câu 31: Biết $I = \int_1^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = a^2 + b^3$.

A. $T = \frac{1}{8}$. **B.** $T = \frac{8}{3}$. **C.** $T = \frac{1}{2}$. **D.** $T = \frac{3}{8}$.

Lời giải

$$I = \int_1^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2} [\ln x - \ln(x+2)] \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{x+2} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3.$$

Từ đó: $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2} \Rightarrow T = a^2 + b^3 = \frac{3}{8}$.

Câu 32: Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + x \cos x - \sin^3 x}{1 + \cos x} dx = \frac{\pi^2}{a} - \frac{b}{c}$. Trong đó a, b, c là các số

nguyên dương, phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $T = 50$. **B.** $T = 59$. **C.** $T = 16$. **D.** $T = 69$.

Lời giải

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + x \cos x - \sin^3 x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{a} - \frac{b}{c} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 69$$

Câu 33: Diện tích hình thang cong giới hạn bởi $y = x^2; y = 0; x = 1; x = 3$ bằng

A. $S = 6$. **B.** $S = \frac{26}{3}$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = \frac{28}{3}$.

Lời giải

Ta có $f(x) = x^2$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[1; 3]$.

$F(x) = \frac{x^3}{3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ trên $[1; 3]$.

Do đó diện tích hình thang cong cần tìm là: $S = F(3) - F(1) = \frac{3^3 - 1^3}{3} = \frac{26}{3}$.

- Câu 34:** Diện tích hình thang cong giới hạn bởi $y = \frac{2}{x+1}; y = 0; x = 1; x = 3$ bằng
A. $S = \ln 8$. **B.** $S = \ln 4$. **C.** $S = 2 \ln 4$. **D.** $S = \ln 2$.

Lời giải

Ta có $f(x) = \frac{2}{x+1}$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[1; 3]$.

$F(x) = 2 \ln|x+1|$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{x+1}$ trên $[1; 3]$.

Do đó diện tích hình thang cong cần tìm là: $S = F(3) - F(1) = 2 \ln 4 - 2 \ln 2 = 2 \ln 2 = \ln 4$.

- Câu 35:** Diện tích hình thang cong được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = e$ là
A. 0. **B.** 1. **C.** e . **D.** e^{-1} .

Lời giải

Hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x}$ liên tục, dương trên đoạn $[1; e]$ và có một nguyên hàm là $F(x) = \ln x$

Do đó, diện tích hình thang cong cần tìm là $S = F(e) - F(1) = \ln e - \ln 1 = 1$.

- Câu 36:** Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2, x = 4$ là
A. $S = 10$. **B.** $S = 16$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 6$.

Lời giải

Hàm số $y = f(x) = x$ liên tục, dương trên đoạn $[2; 4]$ và có một nguyên hàm $F(x) = \frac{x^2}{2}$.

Do đó, diện tích hình thang cong cần tìm là $S = F(4) - F(2) = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} = 6$.

- Câu 37:** Tính diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^2 - 2x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2; x = 0$?
A. $S = \frac{10}{3}$. **B.** $S = 3$. **C.** $S = \frac{7}{3}$. **D.** $S = -3$.

Lời giải

Hàm số $y = f(x) = -x^2 - 2x + 1$ liên tục và không âm trên $[-2; 0]$ và có một nguyên hàm là

$$F(x) = \frac{-x^3}{3} - x^2 + x$$

$$S = F(0) - F(-2) = 0 - \left(\frac{-10}{3}\right) = \frac{10}{3}$$

Do đó diện tích hình thang cong cần tìm là

Câu 38: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = 2\cos t \text{ (m/s}^2\text{)}$, biết rằng tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0. Tính quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = 0 \text{ (s)}$ đến thời điểm $t = \pi \text{ (s)}$.

A. 5(m).

B. 3(m).

C. 2(m).

D. 4(m).

Lời giải

Ta có $v(t) = \int a(t) dt = \int 2\cos t dt = 2\sin t + C$

Mà tại thời điểm bắt đầu chuyển động thì vật có vận tốc bằng 0 nên ta có $v(0) = 0$ hay $C = 0$.

Vậy $v(t) = 2\sin t$

Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = 0 \text{ (s)}$ đến thời điểm $t = \pi \text{ (s)}$ là

$$\int_0^{\pi} v(t) dt = \int_0^{\pi} 2\sin t dt = -2\cos t \Big|_0^{\pi} = -2\cos \pi - (-2\cos 0) = 4 \text{ (m)}.$$

Câu 39: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1(m). Một ô tô A đang chạy với vận tốc 15m/s bỗng gặp ô tô B đang đứng chờ đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều bởi vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 15 - 5t \text{ (m/s)}$. Để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là s mét. Giá trị của s bằng:

A. 23,5.

B. 21.

C. 22,9.

D. 21,6.

Lời giải

Khi ô tô dừng lại $v_A(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$

Quãng đường ô tô A đi được từ lúc ô tô A đạp phanh đến khi dừng hẳn là:

$$\int_0^3 (15 - 5t) dt = 22,5 \text{ (m)}$$

Vậy để đảm bảo an toàn thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là 23,5m

Câu 40: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = \frac{1}{t^2 + 3t + 2} \text{ (m/s}^2\text{)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ thời điểm ban đầu. Vận tốc chuyển động của vật là $v(t)$. Vào thời điểm $t = 11 \text{ (s)}$ thì vận tốc của vật là $v \text{ (m/s)}$, biết vận tốc ban đầu của vật là $v_0 = 3 \ln 2 \text{ (m/s)}$. Giá trị của v là:

A. 2,35.

B. 2,69.

C. 2,29.

D. 2,16.

Lời giải

Ta có: $v(t) = \int a(t) dt = \int \frac{1}{t^2 + 3t + 2} dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \ln \left| \frac{t+1}{t+2} \right| + C$

$$v(0) = \ln \left(\frac{1}{2} \right) + C = 3 \ln 2 \Rightarrow C = 4 \ln 2 \Rightarrow v(t) = \ln \left| \frac{t+1}{t+2} \right| + 4 \ln 2$$

$$v(11) = \ln \left(\frac{12}{13} \right) + 4 \ln 2 \approx 2,69$$

Tính

Vậy $v \approx 2,69$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $\int_0^2 f(x) dx = 3, \int_0^3 f(x) dx = 5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_2^0 f(x) dx = 3$

b) $\int_2^3 f(x) dx = 2$

c) $\int_0^2 (f(x) - 2x) dx = -1$

d) Nếu $f(x) = 10$ thì $\int_0^2 x f'(x) dx = 13$

Lời giải

a) Sai: Vì $\int_2^0 f(x) dx = -3$

b) Đúng: Ta có $\int_2^3 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx = 2$

c) Đúng: Ta có $\int_0^2 (f(x) - 2x) dx = \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 2x dx = 3 - 4 = -1$

d) Sai: Ta có $\int_0^2 x f'(x) dx = x f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x) dx = 2f(2) - 3 = 17$

Câu 2: Cho $f(x) = \sin x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\int_0^{\pi} f\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) dx = 0$

$$\text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - f(x)) dx = \frac{\pi^2}{4} + 1$$

$$\text{d) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(2x) dx = \frac{\pi}{4}$$

Lời giải

$$\text{a) Đúng: Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{b) Đúng: Ta có } \int_0^{\pi} f\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) dx = \int_0^{\pi} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) dx = 0$$

$$\text{c) Sai: Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - f(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = \frac{\pi^2}{4} - 1$$

$$\text{d) Đúng: Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin 2x dx = \frac{\pi}{4}$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = e^x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

$$\text{a) } \int_0^1 f(x) dx = e$$

$$\text{b) } \int_0^1 f(2x+1) dx = e^3 - e$$

$$\text{c) } \int_0^1 (f(x) - 4x) dx = e - 3$$

$$\text{d) } \int_0^1 (x-1)f(x) dx = 2 - e$$

Lời giải

$$\text{a) Sai: Ta có } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1$$

$$\text{b) Sai: Ta có } \int_0^1 e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} \Big|_0^1 = \frac{e(e^2 - 1)}{2}$$

$$\text{c) Đúng: Ta có } \int_0^1 (f(x) - 4x) dx = \int_0^1 (e^x - 4x) dx = e - 3$$

$$\int_0^1 (x-1)f(x)dx = \int_0^1 (x-1)e^x dx = 2 - e$$

d) Đúng: Ta có

Câu 4: Giả sử chi phí mua và bảo trì một thiết bị trong x năm có thể được mô hình hóa theo công thức

$$C = 5000 \left(25 + 3 \int_0^x t^{\frac{1}{4}} dt \right).$$

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Chi phí mua 1 sản phẩm là 100.000 đồng.

b) Chi phí bảo trì năm đầu tiên của 1 sản phẩm là 12.000 đồng.

c) Sau 6,5 năm thì số tiền mua một sản phẩm bằng số tiền bảo trì sản phẩm đó.

d) Nếu một nhà đầu tư có 10 triệu, thì họ có thể mua và bảo trì tối đa 30 sản phẩm trong 10 năm.

Lời giải

a) Sai: Chi phí mua 1 sản phẩm ứng với $x = 0$, sau ra $C = 5000 \cdot 25 = 125.000$

b) Đúng: Với $x = 1$ ta có: $C = 5000 \left(25 + 3 \int_0^1 t^{\frac{1}{4}} dt \right) = 137.000$. Suy ra chi phí bảo trì năm đầu tiên của sản phẩm là $137.000 - 125.000 = 12.000$ đồng.

c) Sai: Gọi x là số năm mà số tiền bảo trì bằng số tiền mua sản phẩm. Khi đó tổng số tiền mua và số tiền bảo trì là $2 \cdot 125.000 = 250.000$.

$$5000 \left(25 + 3 \int_0^x t^{\frac{1}{4}} dt \right) = 250.000 \Leftrightarrow 25 + 3 \left(\frac{4}{5} t^{\frac{5}{4}} \Big|_0^x \right) = 50 \Leftrightarrow \frac{12}{5} x^{\frac{5}{4}} = 25 \Leftrightarrow x = \left(\frac{75}{2} \right)^{\frac{4}{5}} \approx 6.52 \text{ năm.}$$

d) Sai: Số tiền mua và bảo trì 1 sản phẩm trong 10 năm là:

$$C = 5000 \left(25 + 3 \int_0^{10} t^{\frac{1}{4}} dt \right) = 5000 \left(25 + 24\sqrt[4]{10} \right) \approx 338.393,53$$

Ta có: $\frac{10.000.000}{338.393,53} \approx 29,55$

Vậy với 10 triệu thì họ có thể mua và bảo trì tối đa 29 sản phẩm.

$$\int_{-3}^0 f(x) dx = -4 \quad \text{và} \quad \int_{-3}^0 g(x) dx = -3$$

Câu 5: Cho . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

$$\int_0^{-3} f(x) dx = -4$$

a)

$$\int_{-3}^0 -3f(x) dx = 12$$

b)

$$\int_{-3}^0 [f(x) + g(x)] dx = -7$$

c)

d) Nếu $\int_{-3}^0 [2f(x) + 3g(x)]dx = -51$ và $\int_{-3}^0 [nf(x) + mg(x)]dx = 20$ thì $m + n = -3$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $\int_0^{-3} f(x)dx = -\int_{-3}^0 f(x)dx \Rightarrow \int_0^{-3} f(x)dx = 4$

b) Đúng: Ta có $\int_{-3}^0 (-3)f(x)dx = (-3) \cdot \int_{-3}^0 f(x)dx = (-3) \cdot (-4) = 12$

c) Đúng: Ta có $\int_{-3}^0 [f(x) + g(x)]dx = \int_{-3}^0 f(x)dx + \int_{-3}^0 g(x)dx = (-4) + (-3) = -7$

d) Sai: Ta có $\int_{-3}^0 [mf(x) + ng(x)]dx = -51$ và $\int_{-3}^0 [nf(x) + mg(x)]dx = 20$

Suy ra
$$\begin{cases} m \int_{-3}^0 f(x)dx + n \int_{-3}^0 g(x)dx = -51 \\ n \int_{-3}^0 f(x)dx + m \int_{-3}^0 g(x)dx = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4m - 3n = -51 \\ -4n - 3m = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 21 \\ n = -11 \end{cases} \Rightarrow m + n = 10$$

Câu 6: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc vào thời gian $t(s)$ là $a(t) = 2t - 7 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Biết vận tốc đầu bằng 6 (m/s) . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(s)$ xác định bởi $v(t) = t^2 - 7t + 10$.

b) Tại thời điểm $t = 7$, vận tốc của chất điểm là 6 .

c) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 7$ là 18 m .

d) Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t = 7$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $v(t) = \int a(t)dt = \int (2t - 7)dt = t^2 - 7t + C$

$v(0) = 6 \Rightarrow C = 6$ nên $v(t) = t^2 - 7t + 6$

b) Đúng: $v(7) = 7^2 - 7 \cdot 7 + 6 = 6$

c) Sai: Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 7$ là

$$S = \int_1^7 v(t)dt = \int_1^7 (t^2 - 7t + 6)dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{7t^2}{2} + 6t \right) \Big|_1^7 = -18$$

d) Sai: Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t là

$$x(t) = \int v(t) dt = \int (t^2 - 7t + 6) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{7t^2}{2} + 6t + C$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $x(t)$ với $t \in [0; 8]$.

Ta có $x'(t) = v(t) = 0$ khi $t = 1$ hoặc $t = 6$.

$$\text{Lại có } x(0) = C, \quad x(1) = \frac{17}{6} + C, \quad x(6) = -18 + C, \quad x(8) = -\frac{16}{3} + C$$

Vậy giá trị lớn nhất của $x(t)$ với $t \in [0; 8]$ đạt được khi $t = 1$.

Câu 7: Một ô tô đang chạy với vận tốc 18 (m/s) thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 18 - 36t \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian được tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu hãm phanh. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau đây:

- Thời gian kể từ lúc hãm phanh đến lúc xe dừng hẳn là $1,5$ giây.
- Quãng đường xe đi được sau $0,3$ giây kể từ lúc hãm phanh là 3 mét.
- Quãng đường kể từ lúc hãm phanh đến lúc xe dừng hẳn là $4,5$ mét.
- Gia tốc tức thời của chuyển động này là $36 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Lời giải

a) Sai: Lúc hãm phanh thì $v(t_1) = 0 \Rightarrow 18 - 36t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0,5$ giây.

b) Sai: Quãng đường xe đi được sau $0,3$ giây kể từ lúc hãm phanh là

$$s = \int_0^{0,3} (18 - 36t) dt = (18t - 18t^2) \Big|_0^{0,3} = 3,78$$

c) Đúng: Với $t_1 = 0,5$ giây thì quãng đường kể từ lúc hãm phanh đến lúc xe dừng hẳn là

$$s_1 = \int_0^{0,5} (18 - 36t) dt = (18t - 18t^2) \Big|_0^{0,5} = 4,5$$

d) Sai: Gia tốc tức thời của chuyển động này là $a = v'(t) = -36 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\square$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 5$ và $\int_1^2 g(x) dx = -\frac{1}{2}$ thì $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = \frac{11}{2}$

b) Nếu $\int_1^3 [g(x) + 2x + 3] dx = 10$ thì $\int_1^3 g(x) dx = 3$

c) Nếu $f(x) = e^{3x}$, $F(0) = \frac{1}{3}$ thì $F\left(\frac{1}{3}\right) = e$.

d) Nếu $f(x) = 2x + 1$; $g(x) = x - 2$ thì $\int_3^5 \frac{f(x)}{g(x)} dx = a + b \ln c$. Khi đó $a + b + c = 11$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^2 f(x) dx - \int_1^2 g(x) dx = 5 - \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{11}{2}$

b) Sai: Ta có $\int_1^3 [g(x) + 2x + 3] dx = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 g(x) dx + \int_1^3 (2x + 3) dx = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 g(x) dx + 14 = 10$
 $\Leftrightarrow \int_1^3 g(x) dx = 10 - 14 = -4$

c) Sai: Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$ và $F(0) = \frac{-1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} e^{3 \cdot 0} + C = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 0$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{3} e^{3x} \Rightarrow F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} e^{3 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} e$

d) Sai: Ta có $\int_3^5 \frac{2x+1}{x-2} dx = \int_3^5 \frac{2(x-2)+5}{x-2} dx = \int_3^5 2 + \frac{5}{x-2} dx$

$= (2x + 5 \ln|x-2|) \Big|_3^5 = (10 + 5 \ln 3) - (6 + 5 \ln 1) = 4 + 5 \ln 3$ nên $a + b + c = 4 + 5 + 3 = 12$.

Câu 9: Một ô tô đang di chuyển với tốc độ $20(m/s)$ thì hãm phanh nên tốc độ (m/s) theo thời gian t được tính theo công thức $v(t) = 20 - 5t (0 \leq t \leq 4)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Sau khi hãm phanh, tốc độ của xe tăng.

b) Tốc độ tại thời điểm 2s sau hãm phanh là $10(m/s)$

c) Sau khi hãm phanh 4s thì xe dừng hẳn.

d) Kể từ khi hãm phanh đến dừng, xe đi được quãng đường 42m

Lời giải

a) Sai: Do $v'(t) = -5 < 0$ nên sau khi hãm phanh tốc độ của xe giảm.

b) Đúng: $v(2) = 10$

c) Đúng: $v = 0 \Leftrightarrow 20 - 5t = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

d) $s = \int_0^4 (20 - 5t) dt = 40$ nên kể từ khi hãm phanh đến dừng xe đi được quãng đường 40m.

Câu 10: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang (chiều dương hướng sang phải) với gia tốc phụ thuộc vào thời gian $t(s)$ là $a(t) = 2t - 7 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Biết vận tốc đầu bằng 6 (m/s) , xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

- Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(s)$ xác định bởi $v(t) = t^2 - 7t + 10$.
- Tại thời điểm $t = 7 \text{ (s)}$, vận tốc của chất điểm là 6 (m/s) .
- Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 7$ là 18 m .
- Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t = 7 \text{ (s)}$.

Lời giải

a) Sai: Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(s)$ xác định bởi $v(t) = t^2 - 7t + 10$.

Ta có $v(t) = \int a(t) dt = \int (2t - 7) dt = t^2 - 7t + C$.

$v(0) = 6 \Rightarrow C = 6$.

Vậy $v(t) = t^2 - 7t + 6 \text{ (m/s)}$.

b) Đúng: Tại thời điểm $t = 7 \text{ (s)}$, vận tốc của chất điểm là 6 (m/s) .

$v(7) = 7^2 - 7 \cdot 7 + 6 = 6 \text{ (m/s)}$.

c) Sai: Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 7$ là 18 m .

Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 7$ là

$$S = \int_1^7 v(t) dt = \int_1^7 (t^2 - 7t + 6) dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{7t^2}{2} + 6t \right) \Big|_1^7 = -18$$

d) Sai: Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t = 7 \text{ (s)}$.

Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t là $x(t) = \int v(t) dt = \int (t^2 - 7t + 6) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{7t^2}{2} + 6t + C$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $x(t)$ với $t \in [0; 8]$.

Ta có $x'(t) = v(t) = 0$ khi $t = 1$ hoặc $t = 6$.

Lại có $x(0) = C$, $x(1) = \frac{17}{6} + C$, $x(6) = -18 + C$, $x(8) = -\frac{16}{3} + C$.

Vậy giá trị lớn nhất của $x(t)$ với $t \in [0; 8]$ đạt được khi $t = 1$.

Câu 11: Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0008x + 10,4$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

a) Lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng công thức

$P(x) = -0,0008x^2 + 10,4x$.

b) Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là 519 triệu đồng.

c) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là $49,79$ triệu đồng.

d) Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 100 .

Lời giải

a) Sai: Lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng công thức

$$P(x) = -0,0008x^2 + 10,4x$$

Ta có: $P(x) = \int P'(x)dx = \int (-0,0008x + 10,4)dx = -0,0004x^2 + 10,4x$

b) Đúng: Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là 519 triệu đồng.

Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là: $P(50) = -0,0004 \cdot 50^2 + 10,4 \cdot 50 = 519$ (triệu đồng).

c) Sai: Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là 49,79 triệu đồng.

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là

$$\begin{aligned} P(55) - P(50) &= \int_{50}^{55} P'(x)dx = \int_{50}^{55} (-0,0008x + 10,4)dx = -\int_{50}^{55} 0,0008x dx + \int_{50}^{55} 10,4 dx \\ &= -0,0004x^2 \Big|_{50}^{55} + 10,4x \Big|_{50}^{55} = -0,0004(55^2 - 50^2) + 10,4(55 - 50) = 51,79 \end{aligned}$$

(triệu đồng).

d) Sai: Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 100.

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm là

$$\begin{aligned} P(a) - P(50) &= \int_{50}^a P'(x)dx = \int_{50}^a (-0,0008x + 10,4)dx = -\int_{50}^a 0,0008x dx + \int_{50}^a 10,4 dx \\ &= -0,0004x^2 \Big|_{50}^a + 10,4x \Big|_{50}^a = -0,0004(a^2 - 50^2) + 10,4(a - 50) = -0,0004a^2 + 10,4a - 519 \end{aligned}$$

Theo bài ra ta có:

$$-0,0004a^2 + 10,4a - 519 > 517 \Leftrightarrow 0,0004a^2 - 10,4a + 1036 < 0 \Leftrightarrow 100 < a < 25900$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của a là 101.

Câu 12: Ở nhiệt độ 37°C , một phản ứng hóa học từ chất đầu A , chuyển hóa thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A \rightarrow B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị $\text{mol } L^{-1}$) tại thời điểm x (giây), $y(x) > 0$ với $x \geq 0$, thỏa mãn hệ thức: $y'(x) = -7 \cdot 10^{-4} y(x)$ với $x \geq 0$. Biết rằng tại $x = 0$, nồng độ (đầu) của A là $0,05 \text{ mol } L^{-1}$. Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \geq 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f'(x) = -7 \cdot 10^{-4}$

b) $f(x) = -7 \cdot 10^{-4}x + \ln(0,05)$

c) $y(30) - y(15) = -6 \cdot 10^{-4}$

d) Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng $0,05$.

Lời giải

a) Đúng: $f'(x) = -7 \cdot 10^{-4}$

Ta có $f'(x) = (\ln y(x))' = \frac{y'(x)}{y(x)} = -7 \cdot 10^{-4}$

b) Đúng: $f(x) = -7 \cdot 10^{-4}x + \ln(0,05)$

Ta có $f(x) = \int f'(x)dx = \int (-7 \cdot 10^{-4})dx = -7 \cdot 10^{-4}x + C$

Theo giả thiết $y(0) = 0,05$ nên $f(0) = \ln y(0) = \ln(0,05)$. Khi đó $C = \ln(0,05)$.

Vậy $f(x) = -7 \cdot 10^{-4}x + \ln(0,05)$.

c) Sai: $y(30) - y(15) = -6 \cdot 10^{-4}$.

Từ $f(x) = \ln y(x) \Rightarrow y(x) = e^{f(x)} = e^{-7 \cdot 10^{-4}x + \ln(0,05)} = \frac{1}{20} e^{-7 \cdot 10^{-4}x}$.

Do đó $y(30) - y(15) = \frac{1}{20} (e^{-7 \cdot 10^{-4} \cdot 30} - e^{-7 \cdot 10^{-4} \cdot 15}) \approx -5,2 \cdot 10^{-4}$.

d) Đúng: Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng 0,05.

Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây là:

$$\frac{1}{30-15} \int_{15}^{30} y(x) dx = \frac{1}{15} \int_{15}^{30} \left(-\frac{1}{7 \cdot 10^{-4}} \right) y'(x) dx = -\frac{10^4}{105} y(x) \Big|_{15}^{30} = -\frac{10^4}{105} [y(30) - y(15)] \approx 0,05.$$

Câu 13: Sau khi xuất phát, ô tô di chuyển với tốc độ $v(t) = 2,01t - 0,025t^2$ ($0 \leq t \leq 10$). Trong đó $v(t)$ tính theo (m/s), thời gian t tính theo s với $t = 0$ là thời điểm xe xuất phát.

a) Quãng đường xe di chuyển được tính theo công thức là $s(t) = 2,01 - 0,05t$ ($0 \leq t \leq 10$)

b) Quãng đường xe di chuyển được trong 3 s là 8,82m.

c) Quãng đường xe di chuyển được trong giây thứ 9 xấp xỉ 15,277m

d) Trong khoảng thời gian không quá 10s đầu, khi vận tốc đạt giá trị lớn nhất thì gia tốc của xe là $1,51 \text{ m/s}^2$

Lời giải

a) Sai: Quãng đường xe di chuyển được phải là nguyên hàm của $v(t)$

Khi đó $v'(t) = 2,01 - 0,05t$ ($0 \leq t \leq 10$) là công thức tính gia tốc của vật.

b) Đúng: Quãng đường xe di chuyển được trong 3s là: $\int_0^3 (2,01t - 0,025t^2) dt = 8,82 \text{ m}$.

c) Đúng: Quãng đường xe di chuyển được trong giây thứ 9

$$s(9) - s(8) = \int_8^9 (2,01t - 0,025t^2) dt \approx 15,277 \text{ m}$$

d) Đúng: $v(t) = 2,01t - 0,025t^2$ ($0 \leq t \leq 10$) $\Rightarrow \max_{[0;10]} v(t) = 17,6 \text{ m/s}$ khi $t = 10 \text{ s}$

Gia tốc vật khi đó là $a(10) = v'(10) = 2,01 - 0,05 \cdot 10 = 1,51 \text{ (m/s}^2\text{)}$

Câu 14: Tại một nhà máy sản xuất một loại phân bón. Gọi $P(x)$ là lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần. Khi đó đạo hàm $P'(x)$ gọi là lợi nhuận cận

biên, cho biết tốc độ tăng lợi nhuận theo lượng sản phẩm bán được. Giả sử lợi nhuận cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức:

$$P'(x) = 17 - 0,025x \quad \text{với } 0 \leq x \leq 100$$

Biết nhà máy lỗ 24 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần.

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Công thức lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần là $P(x) = 17x - 0,0125x^2 + C$ với C là một hằng số bất kỳ
- Có thể tính được lợi nhuận của nhà máy thu được khi bán 120 tấn sản phẩm trong tuần.
- Lợi nhuận nhà máy thu được khi bán 80 tấn sản phẩm trong tuần là 1 tỉ 256 triệu đồng.
- Nếu nhà máy bán được từ 1,3 tấn sản phẩm trên tuần trở lên thì nhà máy luôn có lãi.

Lời giải

- Sai: $C = -24$ không phải C bất kỳ.

$$P(x) = \int P'(x) dx = \int (17 - 0,025x) dx = 17x - 0,0125x^2 + C \quad \text{với } 0 \leq x \leq 100$$

Vì nhà máy lỗ 24 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần nên

$$\text{Với } x = 0 \text{ thì } P(x) = -24 \text{ suy ra } P(0) = -24 \Leftrightarrow C = -24 \Rightarrow P(x) = 17x - 0,0125x^2 - 24$$

- Sai: Chưa có công thức tính $P'(x)$ khi $x > 100$ Công thức $P'(x)$ đề cho chỉ áp dụng được khi $0 \leq x \leq 100$

- Đúng: Khi bán 80 tấn sản phẩm trong tuần thì $x = 80$ và $P(80) = 1256$ triệu đồng.

- Sai: Nhà máy chỉ bắt đầu có lãi khi $P(x) > 0 \Rightarrow 17x - 0,0125x^2 - 24 > 0 \Rightarrow 1,41 < x < 1358,5$

Vậy nếu $1,3 \leq x \leq 1,41$ nhà máy vẫn có thể bị lỗ.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

- Câu 1:** Một ô tô đang chuyển động trên đường với vận tốc $v(t) = 4t + 3$ (m/s), với t là thời gian tính bằng giây. Quãng đường ô tô đi được trong khoảng từ 3 đến 5 giây là bao nhiêu?

Lời giải

$$S = \int_3^5 (4t + 3) dt = 38$$

Quãng đường ô tô đi được trong khoảng từ 3 đến 5 giây là:

- Câu 2:** Một người đang lái xe ô tô với vận tốc 24 (m/s) thì người lái phát hiện phía trước có chướng ngại vật nên cần giảm tốc độ của xe. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -8t + 24$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn, ô tô đi chuyển quãng đường bao nhiêu mét?

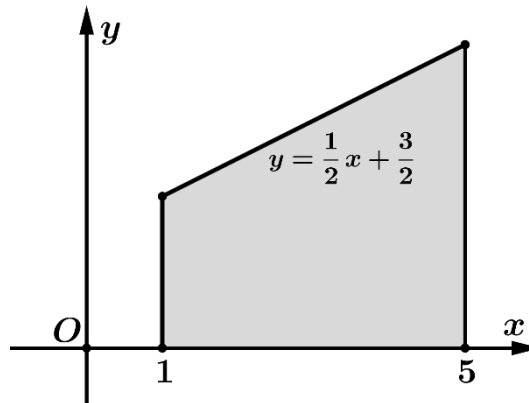
Lời giải

$$\text{Vật dừng lại tại thời điểm } v = 0 \Rightarrow -8t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 3(s)$$

$$S = \int_0^3 v(t) dt = \int_0^3 (-8t + 24) dt = 36$$

Ô tô đi chuyển quãng đường là:

Câu 3: Một khối gỗ khi cắt một bề mặt ta thu được thiết diện được cho bởi hình vẽ bên. Diện tích của thiết diện đó bằng bao nhiêu?



Lời giải

$$S = \int_1^5 \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx = 12$$

Diện tích của thiết diện đó là:

Câu 4: Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ được định nghĩa là

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Giả sử nhiệt độ (tính bằng $^{\circ}\text{C}$) tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở một địa phương vào ngày 27/06/2023 được mô hình hóa bởi hàm số

$$T(t) = 25 + 2(t - 7), 6 \leq t \leq 12$$

Nhiệt độ trung bình ngày 27/6/2023 của địa phương trên là bao nhiêu $^{\circ}\text{C}$?

Lời giải

Nhiệt độ trung bình ngày 27/6/2023 của địa phương trên là:

$$t_0 = \frac{1}{12-6} \cdot \int_6^{12} [25 + (t-7)] dt = \frac{1}{6} \cdot \int_6^{12} (2t + 11) dt = 29^{\circ}\text{C}$$

Câu 5: Cửa hàng thực phẩm của anh An có lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,01x + 2$. Lợi nhuận của sản phẩm trên khi doanh số là 200 với sản phẩm lớn hơn doanh số 150 sản phẩm là bao nhiêu triệu đồng, biết $P(x)$ là lợi nhuận tính bằng triệu đồng?

Lời giải

$$P(200) - P(150) = \int_{150}^{200} P'(x) dx = \int_{150}^{200} (-0,01x + 2) dx = 12,5$$

Lợi nhuận của cửa hàng khi đó là:

Vậy lợi nhuận của sản phẩm hơn nhau $12,5$ triệu đồng.

Câu 6: Một ô tô đang chuyển động trên đường với vận tốc $v(t) = t^2 - 4t + 1$ (m/s), với t là thời gian tính bằng giây. Quãng đường ô tô đi được trong khoảng từ 2 đến 8 giây là bao nhiêu?

Lời giải

Quãng đường ô tô đi được trong khoảng từ 2 đến 8 giây là:

$$S_0 = \int_2^8 v(t) dt = \int_2^8 (t^2 - 4t + 1) dt = 54$$

Câu 7: Chị Hồng đang lái xe với vận tốc 5 m/s thì nhận thấy phía trước đèn giao thông đang chuẩn bị chuyển sang đèn đỏ nên cần giảm tốc độ của xe để đợi đèn đỏ. Sau khi đạp phanh, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -0,5t + 5 \text{ (m/s)}$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn, xe di chuyển quãng đường bao nhiêu mét?

Lời giải

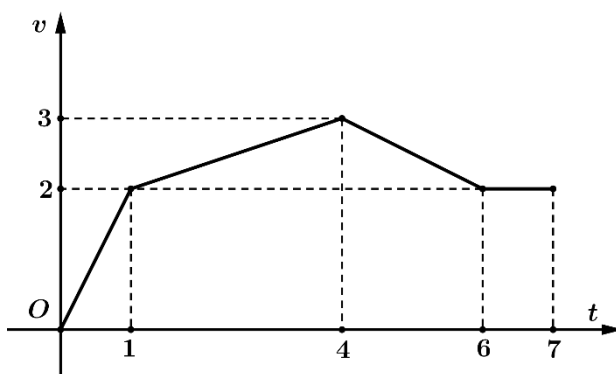
Lúc đạp phanh tại thời điểm: $v = 5 \Rightarrow -0,5t_1 + 5 = 5 \Leftrightarrow t_1 = 0$ giây

Xe dừng ở thời điểm $v = 0 \Leftrightarrow -0,5t_2 + 5 = 0 \Leftrightarrow t_2 = 10$ giây

$$S = \int_0^{10} (-0,5t + 5) dt = 25$$

Khi đó quãng đường xe di chuyển là: mét.

Câu 8: Một chiếc xe chuyển động với đồ thị vận tốc được biểu diễn theo đường gấp khúc được minh họa trên hệ trục Otv như hình vẽ (mỗi đơn vị trên Ot ứng với 1 phút và mỗi đơn vị trên Ov ứng với $0,4 \text{ km/phút}$).



Quãng đường mà xe đã di chuyển trong 7 phút là bao nhiêu km?

Lời giải

Quãng đường mà xe đã di chuyển trong 7 phút là:

$$S = \left(\int_0^7 v(t) dt \right) \cdot 0,4 = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} (2 + 3) \cdot 3 + \frac{1}{2} (2 + 3) \cdot 2 + 1 \cdot 2 \right) \cdot 0,4 = 6,2 \text{ km}$$

Câu 9: Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ được định nghĩa là

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Giả sử lượng mưa trung bình (tính bằng mm) tại thời điểm t ngày trong khoảng thời gian từ ngày 01/10 đến ngày 31/10 ở Thừa Thiên Huế vào tháng 10/2023 được mô hình hóa bởi hàm số:

$$M(x) = 80 + 10(t - 8); 1 \leq t \leq 31$$

Lượng mưa trung bình tháng 10/2023 của Thừa Thiên Huế là bao nhiêu mm?

Lời giải

Lượng mưa trung bình tháng 10/2023 của Thừa Thiên Huế là

$$M_0 = \frac{1}{31-1} \int_1^{31} [80 + 10(t - 8)] dt = 160 \text{ mm.}$$

Câu 10: Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t \text{ (m/s)}$. Đi được 5 (s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc

$a = -35 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?

Lời giải

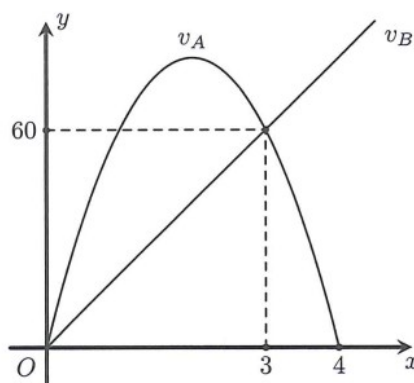
Quãng đường ô tô đi được trong 5 (s) đầu là $s_1 = \int_0^5 7t dt = 7 \frac{t^2}{2} \Big|_0^5 = 87,5 \text{ (mét)}$.

Phương trình vận tốc của ô tô khi người lái xe phát hiện chướng ngại vật là $v_{(2)}(t) = 35 - 35t \text{ (m/s)}$. Khi xe dừng lại hẳn thì $v_{(2)}(t) = 0 \Leftrightarrow 35 - 35t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Quãng đường ô tô đi được từ khi phanh gấp đến khi dừng lại hẳn là $s_2 = \int_0^1 (35 - 35t) dt = \left(35t - 35 \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 17,5 \text{ (mét)}$.

Vậy quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn là $s = s_1 + s_2 = 87,5 + 17,5 = 105 \text{ (mét)}$.

Câu 11: Cho đồ thị biểu diễn vận tốc của hai xe A và B khởi hành cùng một lúc và cùng vạch xuất phát, đi cùng chiều trên một con đường. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc của xe A là một đường parabol và đồ thị biểu diễn vận tốc của xe B là một đường thẳng như hình vẽ bên. Hỏi sau 5 giây kể từ lúc xuất phát thì khoảng cách giữa hai xe là bao nhiêu mét? (Làm tròn đến hàng phần chục và biết rằng xe A sẽ dừng lại khi vận tốc bằng 0).



Lời giải

Đồ thị biểu diễn vận tốc của xe A là (P) có phương trình: $v_A = at^2 + bt + c \text{ (} a \neq 0 \text{)}$ đi qua điểm $(0;0); (3;60); (4;0) \Rightarrow v_A = -20t^2 + 80t$.

Đồ thị biểu diễn vận tốc của xe B là đường thẳng Δ có phương trình: $v_B = mt + n \text{ (} m \neq 0 \text{)}$ đi qua điểm $(0;0); (3;60) \Rightarrow v_B = 20t$.

Ta có $v_A = -20t^2 + 80t = 0 \Rightarrow t = 4$ nên xe A dừng lại sau giây thứ 4.

$$S_A = \int_0^4 (-20t^2 + 80t) dt = \frac{640}{3} (m)$$

Do đó quãng đường xe A đi được sau 4 giây là

$$S_B = \int_0^5 (20t) dt = 250 (m)$$

Quãng đường xe B đi được sau 5 giây đầu là

$$\Delta S = |S_A - S_B| = \frac{110}{3} = 36,7 (m)$$

Khoảng cách giữa hai xe sau 5 giây kể từ lúc xuất phát là

Câu 12: Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động bán kính R không đổi, có thể được mô hình hóa bởi công thức

$$\frac{1}{R-0} \int_0^R k(R^2 - r^2) dr = \frac{1}{R} \left(kR^2 r - k \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{1}{R} \left(kR^3 - k \frac{R^3}{3} \right) = kR^2 - \frac{kR^2}{3} = \frac{2}{3} kR^2.$$

Trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \leq r \leq R$. So sánh vận tốc trung bình với vận tốc lớn nhất.

Lời giải

Vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \leq r \leq R$ là

$$\frac{1}{R-0} \int_0^R k(R^2 - r^2) dr = \frac{1}{R} \left(kR^2 r - k \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{1}{R} \left(kR^3 - k \frac{R^3}{3} \right) = kR^2 - \frac{kR^2}{3} = \frac{2}{3} kR^2.$$

Xét hàm số $v(r) = k(R^2 - r^2)$, $0 \leq r \leq R$. Ta có $v'(r) = -2kr$; $v'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 0$.

Suy ra vận tốc lớn nhất của dòng máu là $v_{CD} = kR^2$.

Vậy vận tốc lớn nhất của dòng máu lớn hơn vận tốc trung bình là 1,5 lần.

Câu 13: Tốc độ tăng trưởng của một đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng kể từ khi người ta thả 100 cá thể đầu tiên vào một khu rừng được ước lượng bởi công thức $P'(t) = 8t + 30$ (con/tháng), với $P(t)$ là số lượng cá thể trong đàn tại thời điểm t tháng tương ứng (nguồn: Chris Kirkpatrick, Barbara Alldred, Crystal Chilvers, Beverly Farahani, Kristina Farentino, Angelo Lillo, Ian Macpherson, John Rodger, Susanne Trew, Advanced Function, Nelson 2012). Dựa vào tốc độ tăng trưởng đã cho, hãy ước tính số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng.

Lời giải

$$P(t) = \int P'(t) dt = \int (8t + 30) dt = 4t^2 + 30t + C.$$

Ta có

Lại có ban đầu người ta thả 100 cá thể gấu mèo:

$$P(0) = 100 \Rightarrow C = 100 \Rightarrow P(t) = 4t^2 + 30t + 100.$$

Vậy số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng là

$$P(3) = 4 \cdot 3^2 + 30 \cdot 3 + 100 = 226 \text{ cá thể.}$$

Câu 14: Nhằm tri ân người dân địa phương đã luôn tin tưởng, đồng hành với doanh nghiệp. Tập đoàn NXS đã tổ chức ngày hội cảm ơn vào ngày 10/07/2024. Trong chuỗi sự kiện đặc biệt này, tất cả người dân địa phương đều được miễn phí vé vào cổng, thỏa thích tận hưởng các trò chơi, tham quan các công trình kỳ thú, ấn tượng tại 05 công viên chủ đề được đầu tư, xây dựng hoành tráng với hàng trăm tiện ích.

Gọi $B(t)$ là hàm số biểu thị số lượng khách tham quan sau t giờ mở cửa. Khi đó tốc độ thay đổi lượng khách tham quan trong ngày được biểu diễn bằng hàm số $B'(t) = 4t^3 - 3t^2 + 200$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 8$), $B'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau 2 giờ đã có 1200 người có mặt. Hỏi sau 6 giờ lượng khách tham quan là bao nhiêu người?

Lời giải

Ta có $B(t) = \int B'(t) dt = t^4 - t^3 + 200t + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow B(2) = 1200 \Rightarrow C = 792$.

Suy ra $B(t) = t^4 - t^3 + 200t + 792$

Sau 6 giờ lượng khách tham quan là $B(6) = 3072$ (người).

Câu 15: Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn cho thuê mỗi gian hàng với giá là x triệu đồng ($x > 0$). Khi đó doanh thu của cửa hàng được biểu diễn theo hàm số $T(x)$. Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số $T'(x) = -10x + 200$, trong đó $T'(x)$ tính bằng triệu đồng. Biết rằng nếu giá thuê cho mỗi gian hàng là 10 triệu đồng thì doanh thu là 1800 triệu đồng. Tìm giá trị của x để người đó có doanh thu là cao nhất?

Lời giải

Ta có: $T(x) = \int T'(x) dx = \int (-10x + 200) dx = -5x^2 + 200x + C, C \in \mathbb{R}$.

Khi giá cho thuê mỗi gian hàng là 10 triệu đồng thì doanh thu là 1800 triệu đồng nên ta có $T(10) = 1800 \Rightarrow C = 300$.

Vậy $T(x) = -5x^2 + 200x + 300 = -5(x - 20)^2 + 2300 \leq 2300$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 20$.

Suy ra doanh thu cao nhất mà chủ trung tâm thương mại có thể thu về là 2300 triệu đồng và khi đó mỗi gian hàng có giá cho thuê là 20 triệu đồng.

Vậy $x = 20$ (triệu đồng).

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_0^3 3x^2 dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$

c) $\int_1^{e^2} \frac{1}{u} du$

- d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$
- e) $\int_{-2}^4 (x+1)(x-1) dx$
- f) $\int_1^2 \frac{x^2 - 2x + 1}{x} dx$
- g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin x - 2) dx$
- h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx$
- i) $\int_1^4 (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2) dx$
- j) $\int_2^3 \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1} dx$
- k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin^2 x + 3) dx$
- l) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \cos 3x}{\cos x} dx$
- m) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x (1 + \tan x)} dx$
- n) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$
- o) $\int_0^1 (2^{2x} \cdot 3^{x-1}) dx$

Lời giải

- a) $\int_0^3 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^3 = 3^3 - 0^3 = 27$
- b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos 0 \right) = \frac{1}{2}$
- c) $\int_1^{e^2} \frac{1}{u} du = \ln |u| \Big|_1^{e^2} = \ln e^2 - \ln 1 = 2$
- d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$
- e) $\int_{-2}^4 (x+1)(x-1) dx = \int_{-2}^4 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{-2}^4 = 18$
- f) $\int_1^2 \frac{x^2 - 2x + 1}{x} dx = \int_1^2 \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x + \ln x \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + \ln 2$
- g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin x - 2) dx = (-3 \cos x - 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) - 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = 3 - \pi$
- h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) dx = (x - \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$
- i) $\int_1^4 (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2) dx = \int_1^4 (x - 4) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 4x \right) \Big|_1^4 = \frac{-9}{2}$
- j) $\int_2^3 \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1} dx = \int_2^3 \left(x - 2 - \frac{1}{x - 1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x - \ln |x - 1| \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{2} - \ln 2$

$$k) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin^2 x + 3) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x + 3) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 - \cos 2x) dx = \left(4x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi$$

$$l) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \cos 3x}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos x \cdot \cos 2x}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos 2x dx = (\sin 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

$$m) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x (1 + \tan x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx = (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = (\tan x + \cot x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = 2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

n)

$$\int_0^1 (2^{2x} \cdot 3^{x-1}) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 12^x dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{12^x}{\ln 12} \Big|_0^1 = \frac{4}{\ln 12} - \frac{1}{3 \ln 12} = \frac{11}{3 \ln 12}$$

o)

Bài tập 2: Tính các tích phân sau đây:

$$a) \int_0^1 (4x^3 + 3x^2 - 2) dx$$

$$b) \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$c) \int_1^3 x^{\sqrt{2}} dx$$

$$d) \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$$

$$e) \int_1^3 x^{\frac{2}{3}} dx$$

$$f) \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx$$

$$g) \int_{-e}^{-1} \frac{2}{x} dx$$

$$h) \int_1^e \frac{7}{3x} dx$$

$$i) \int_0^1 (2 \cdot 3^x - 5e^x) dx$$

Lời giải

$$a) \int_0^1 (4x^3 + 3x^2 - 2) dx = \int_0^1 4x^3 dx + \int_0^1 3x^2 dx - \int_0^1 2 dx = x^4 \Big|_0^1 + x^3 \Big|_0^1 - 2x \Big|_0^1$$

$$= (1^4 - 0^4) + (1^3 - 0^3) - (2 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = 0.$$

$$b) \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} dx = x^{\frac{1}{2}} \Big|_1^4 = \sqrt{x} \Big|_1^4 = \sqrt{4} - \sqrt{1} = 1$$

$$c) \int_1^3 x^{\sqrt{2}} dx = \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} \Big|_1^3 = \frac{3^{\sqrt{2}+1} - 1}{\sqrt{2}+1}.$$

$$d) \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx = \int_1^2 x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} \Big|_1^2 = \frac{2^{-2}}{-2} - \frac{1^{-2}}{-2} = \frac{3}{8}.$$

$$e) \int_1^3 x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \Big|_1^3 = \frac{3}{5} \cdot \left(3^{\frac{5}{3}} - 1 \right) = \frac{3}{5} \cdot (\sqrt[3]{3^5} - 1)$$

$$f) \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx = \int_1^8 x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_1^8 = \frac{3}{4} \cdot \left(8^{\frac{4}{3}} - 1 \right) = \frac{3}{4} (\sqrt[3]{8^4} - 1) = \frac{3}{4} \cdot (16 - 1) = \frac{45}{4}.$$

$$g) \int_{-e}^{-1} \frac{2}{x} dx = 2 \ln|x| \Big|_{-e}^{-1} = 2 \ln|-1| - 2 \ln|-e| = -2.$$

$$h) \int_1^e \frac{7}{3x} dx = \frac{7}{3} \ln|x| \Big|_1^e = \frac{7}{3} \cdot \ln e - \frac{7}{3} \cdot \ln 1 = \frac{7}{3}.$$

$$i) \int_0^1 (2 \cdot 3^x - 5e^x) dx = \left(\frac{2 \cdot 3^x}{\ln 3} - 5e^x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{6}{\ln 3} - 5e \right) - \left(\frac{2}{\ln 3} - 5 \right) = \frac{4}{\ln 3} - 5e + 5.$$

Bài tập 3: Thực hiện các yêu cầu sau đây:

a) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Tính $F(1)$

b) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = 2^x$ và $F(0) = 0$. Tính $F(1)$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_0^1 = \frac{3}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3}$$

$$\text{Suy ra } F(1) = \frac{2}{\ln 3} + F(0) = \frac{2}{\ln 3} + 0 = \frac{2}{\ln 3}$$

$$b) \text{ Ta có } F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^1 = \frac{2^1 - 2^0}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e$$

$$\text{Vậy } F(1) = \log_2 e$$

Bài tập 4: Cho $\int_0^3 f(x) dx = 5$ và $\int_0^3 g(x) dx = 2$. Tính:

$$a) \int_0^3 [f(x) + g(x)] dx$$

$$b) \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx$$

$$c) \int_0^3 3f(x) dx$$

$$d) \int_0^3 [2f(x) - 3g(x)] dx$$

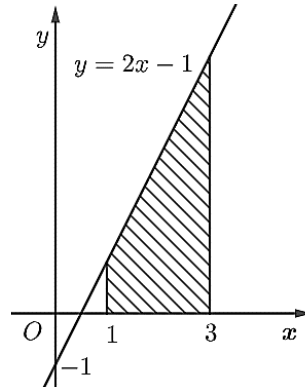
Lời giải

$$a) \int_0^3 [f(x) + g(x)] dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 g(x) dx = 5 + 2 = 7$$

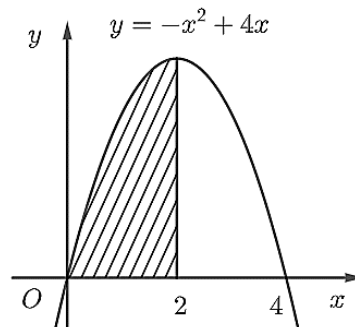
$$\begin{aligned} \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx &= \int_0^3 f(x) dx - \int_0^3 g(x) dx = 5 - 2 = 3 \\ \text{b)} \quad \int_0^3 3f(x) dx &= 3 \int_0^3 f(x) dx = 3 \cdot 5 = 15 \\ \text{c)} \quad \int_0^3 [2f(x) - 3g(x)] dx &= 2 \int_0^3 f(x) dx - 3 \int_0^3 g(x) dx = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 4 \\ \text{d)} \quad \int_0^3 [2f(x) - 3g(x)] dx &= 2 \int_0^3 f(x) dx - 3 \int_0^3 g(x) dx = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

Bài tập 5: Thực hiện các yêu cầu sau:

a) Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$.



b) Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^2 + 4x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$.



c) Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = (x + 2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.

d) Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.

Lời giải

a) Hàm số $y = f(x) = 2x - 1$ liên tục và dương trên đoạn $[1; 3]$ và có một nguyên hàm là $F(x) = x^2 - x$

Do đó diện tích hình thang cong cần tìm là $S = F(3) - F(1) = (3^2 - 3) - (1^2 - 1) = 6$

b) Hàm số $y = f(x) = -x^2 + 4x$ liên tục, không âm trên đoạn $[0; 2]$ và có một nguyên hàm $F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2$

Do đó, diện tích hình thang cong cần tìm là

$$S = F(2) - F(0) = \left(-\frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 \right) - \left(-\frac{0^3}{3} + 2 \cdot 0^2 \right) = \frac{16}{3}$$

c) Hàm số $y = f(x) = (x+2)^2 - 1 = x^2 + 4x + 3$ liên tục và không âm trên đoạn $[1; 2]$ và có một

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x$$

nguyên hàm

Ta có diện tích hình thang cong là:

$$S = F(2) - F(1) = \left(\frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \right) = \frac{34}{3}$$

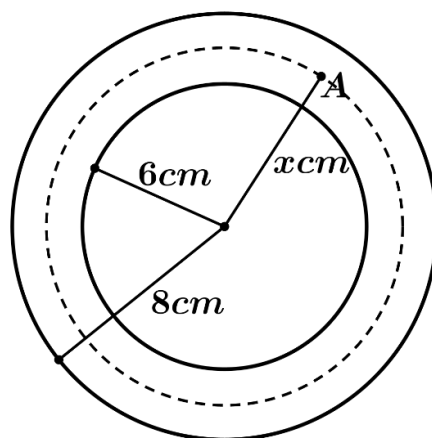
d) Hàm số $y = f(x) = 3^x$ liên tục và không âm trên đoạn $[0; 2]$ và có một nguyên hàm

$$F(x) = \frac{3^x}{\ln 3}$$

$$S = F(2) - F(0) = \left(\frac{3^2}{\ln 3} - \frac{3^0}{\ln 3} \right) = \frac{8}{\ln 3}$$

Ta có diện tích hình thang cong cần tìm là

Bài tập 6: Mặt cắt ngang của một ống dẫn khí nóng là hình vành khuyên như hình minh họa dưới đây:



Khí bên trong ống được duy trì ở 150° . Biết rằng nhiệt độ $T (^\circ C)$ tại điểm A trên thành ống

là hàm số của khoảng cách x (cm) từ A đến tâm của mặt cắt và $T'(x) = -\frac{30}{x}$ ($6 \leq x \leq 8$).
 Tìm nhiệt độ mặt ngoài của ống.

Lời giải

Nhiệt độ $T (^\circ C)$ tại điểm A trên thành ống là:

$$T(x) = \int T'(x) dx = \int -\frac{30}{x} dx = -30 \ln x + C$$

Biết rằng $T(6) = 150 \Leftrightarrow -30 \ln 6 + C = 150 \Leftrightarrow C = 150 + 30 \ln 6$

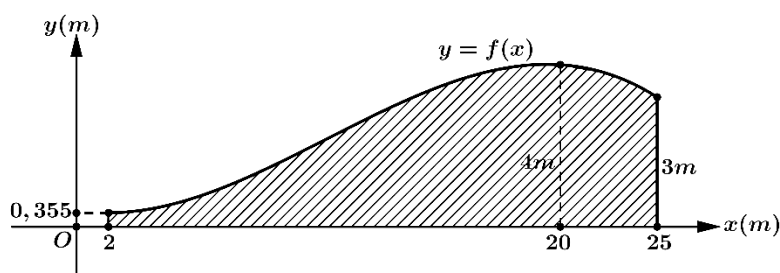
Nhiệt độ mặt ngoài của ống là:

$$T(8) = -30 \ln 8 + C = -30 \ln 8 + 150 + 30 \ln 6 = 150 + 30 \ln \frac{3}{4} \approx 141,4^\circ C$$

Vậy nhiệt độ mặt ngoài của ống khoảng $141,4^{\circ}\text{C}$.

Bài tập 7: Năng lượng gió trên đất liền là một trong những công nghệ năng lượng tái tạo đang được phát triển ở quy mô toàn cầu. Năng lượng gió không trực tiếp phát thải khí nhà kính, không thải ra môi trường chất ô nhiễm khác, cũng như không tiêu thụ nước để làm mát cho các nhà máy. Các Turbine gió thường có ba cánh quay trên một trục ngang, lấy động năng từ quá trình di chuyển dòng không khí (gió) để chuyển đổi thành động năng thông qua một máy phát điện được kết nối với lưới điện. Hình thang cong (bị gạch sọc) trong hình dưới đây mô tả một phần mặt cắt đứng của cánh Turbine, được giới hạn bởi các đường thẳng $x=2, x=25$, trục Ox và đồ thị hàm số.

$$y = f(x) = -\frac{1}{800}(x^3 - 33x^2 + 120x - 400)$$



Hãy tính diện tích hình thang cong đó.

Lời giải

$$I = \int_2^{25} -\frac{1}{800}(x^3 - 33x^2 + 120x - 400)dx$$

Diện tích của hình thang cong được tô màu vàng là:

$$= -\frac{1}{800} \cdot \left(\int_2^{25} x^3 dx - 33 \int_2^{25} x^2 dx + 120 \int_2^{25} x dx - 400 \int_2^{25} 1 dx \right) = -\frac{1}{800} \cdot \left(\frac{x^4}{4} \Big|_2^{25} - 11x^3 \Big|_2^{25} + 60x^2 \Big|_2^{25} - 400x \Big|_2^{25} \right)$$

$$= \frac{184299}{3200} (m^2).$$

Vậy diện tích hình thang cong đó bằng $\frac{184299}{3200} (m^2).$

Dạng 2: Tích phân của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

Phương pháp: Ta thực hiện theo một trong hai cách sau:

Cách 1:

- Cho $f(x) = 0$ tìm nghiệm $\in [a; b]$ giả sử các nghiệm đó là $x_1; x_2; \dots; x_n \in [a; b]$

$$I = \int_a^{x_1} |f(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x)| dx$$

- Khi đó

$$\Leftrightarrow I = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$$

- Tính mỗi tích phân thành phần

Cách 2:

- Cho $f(x) = 0$ tìm nghiệm $\in [a; b]$.
- Xét dấu $f(x)$ trên $[a; b]$.
- Áp dụng công thức phá trị tuyệt đối $|A| = \begin{cases} A & \text{khi } A > 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$ để phá trị tuyệt đối trong $\int_a^b \dots$.
- Tính mỗi tích phân thành phần

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính $\int_0^2 \sqrt{x^2 - 2x + 1} dx$

A. $\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. $\frac{5}{2}$.

D. 1.

Lời giải

Ta có: $\int_0^2 \sqrt{x^2 - 2x + 1} dx = \int_0^2 |x - 1| dx = \int_0^1 (1 - x) dx + \int_1^2 (x - 1) dx = \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 = 1$.

Câu 2: Tính $\int_{-1}^2 |2x + 1| dx$

A. $\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{13}{2}$.

Lời giải

$$\int_{-1}^2 |2x + 1| dx$$

Ta có:

$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} |2x + 1| dx + \int_{-\frac{1}{2}}^2 |2x + 1| dx = - \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (2x + 1) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^2 (2x + 1) dx = \left(x^2 + x \right) \Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \left(x^2 + x \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^2 = \frac{13}{2}$$

Câu 3: Tính $I = \int_0^2 |2x - 2| dx$.

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

$$I = \int_0^1 (2 - 2x) dx + \int_1^2 (2x - 2) dx = \left(2x - x^2 \right) \Big|_0^1 + \left(x^2 - 2x \right) \Big|_1^2 = 1 + 1 = 2.$$

Ta có:

$$I = \int_0^3 |x(2x-4)| dx.$$

Câu 4: Tính

A. $\frac{16}{3}$.

B. 2.

C. $\frac{16}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

$$I = \int_0^3 |x(2x-4)| dx = \int_0^2 x(4-2x) dx + \int_2^3 x(2x-4) dx$$

Ta có:

$$= \int_0^2 (4x-2x^2) dx + \int_2^3 (2x^2-4x) dx = \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 \right) \Big|_2^3 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

Câu 5: Tính tích phân

$$\int_0^8 |x^2 - 6x| dx$$

A. $\frac{152}{3}$.

B. $\frac{64}{3}$.

C. $\frac{-64}{3}$.

D. $\frac{-152}{3}$.

Lời giải

$$\int_0^8 |x^2 - 6x| dx = \int_0^6 |x^2 - 6x| dx + \int_6^8 |x^2 - 6x| dx = \int_0^6 (-x^2 + 6x) dx + \int_6^8 (x^2 - 6x) dx$$

Ta có:

$$= \left(\frac{-x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} \right) \Big|_0^6 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} \right) \Big|_6^8 = \frac{152}{3}$$

Câu 6: Biết

$$I = \int_{-1}^3 |x^2 - 3x + 2| dx = \frac{a}{b}, \text{ với } a, b \in \mathbb{Q}^*, \frac{a}{b} \text{ tối giản. Tính } T = a - b.$$

A. 12.

B. 14.

C. 11.

D. 4.

Lời giải

$$I = \int_{-1}^3 |x^2 - 3x + 2| dx = \int_{-1}^1 (x^2 - 3x + 2) dx - \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_2^3 (x^2 - 3x + 2) dx$$

Ta có:

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-1}^1 - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_2^3$$

$$= \frac{14}{3} - \left(-\frac{1}{6} \right) + \frac{5}{6} = \frac{17}{3}.$$

Ta có: $T = a - b = 17 - 3 = 14.$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = a - \sqrt{b} \quad (a, b \in \mathbb{Q})$$

Câu 7: Biết

A. 5.

B. 8.

C. 10.

D. 7.

. Khi đó $a + 4b$ bằng**Lời giải**

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} |\sin x| dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx = (\cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 - (\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{\frac{3}{4}}$$

Ta có:

$$a = 2, b = \frac{3}{4} \text{ nên } a + 4b = 5 \text{ nên } \int_0^1 |f'(2x-1)| dx = 4$$

Suy ra:

$$I = \int_0^5 \frac{|x^2 - x|}{x+3} dx = \frac{-1}{a} + b \ln \frac{c}{a}, \quad (a, b, c \in \mathbb{Q}^+)$$

Câu 8:

Cho

. Tổng $a + b + c$ bằng**A.** 17.**B.** 15.**C.** 13.**D.** 16.**Lời giải**

$$I = \int_0^5 \frac{|x^2 - x|}{x+3} dx = - \int_0^1 \frac{x^2 - x}{x+3} dx + \int_1^5 \frac{x^2 - x}{x+3} dx = - \int_0^1 \left(x - 4 + \frac{12}{x+3} \right) dx + \int_1^5 \left(x - 4 + \frac{12}{x+3} \right) dx$$

Ta có:

$$\begin{aligned} &= - \int_0^1 (x - 4) dx - \int_0^1 \frac{12}{x+3} dx + \int_1^5 (x - 4) dx + \int_1^5 \frac{12}{x+3} dx \\ &= \frac{7}{2} - 12 \ln(x+3) \Big|_0^1 - 4 + 12 \ln(x+3) \Big|_1^5 = \frac{-1}{2} + 12 \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } a = 2; b = 12; c = 3 \Rightarrow a + b + c = 17$$

Câu 9:Tính tích các giá trị của số thực m để tích phân

$$I = \int_0^1 |2x - m| dx = 2$$

A. 6.**B.** -3.**C.** 2.**D.** -4.**Lời giải****Trường hợp 1:** $m < 0 \Rightarrow 2x - m > 0 \forall x \in [0; 1]$

$$I = \int_0^1 (2x - m) dx = (x^2 - mx) \Big|_0^1 = 1 - m \Rightarrow 1 - m = 2 \Leftrightarrow m = -1.$$

Suy ra

Trường hợp 2: $m > 2 \Rightarrow 2x - m < 0 \forall x \in [0; 1]$

$$I = \int_0^1 (m - 2x) dx = (mx - x^2) \Big|_0^1 = m - 1 \Rightarrow m - 1 = 2 \Leftrightarrow m = 3$$

Suy ra

Trường hợp 3: $0 \leq m \leq 2$

$$I = \int_0^{\frac{m}{2}} (m - 2x) dx + \int_{\frac{m}{2}}^1 (2x - m) dx = (mx - x^2) \Big|_0^{\frac{m}{2}} + (x^2 - mx) \Big|_{\frac{m}{2}}^1 = \frac{m^2}{4} + (1 - m) + \frac{m^2}{4} = \frac{m^2}{2} - m + 1$$

$$\text{Suy ra } \frac{m^2}{2} - m + 1 = 2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 + \sqrt{3} \\ m = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

Tích các giá trị của m là $-1.3 = -3$.

- Câu 10:** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thỏa mãn: $\int_0^m |3x^2 - 2x| dx = m - 10$?
- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Lời giải

Đặt $I = \int_0^m |3x^2 - 2x| dx = m - 10$; $f(x) = 3x^2 - 2x$. Dấu của $f(x)$:

$$\begin{array}{c} + \qquad \qquad \qquad - \qquad \qquad \qquad + \\ \hline \qquad \qquad \qquad 0 \qquad \qquad \qquad \frac{2}{3} \end{array}$$

Xét các trường hợp sau:

Nếu $m < 0$: $I = \int_0^m (3x^2 - 2x) dx = \left(x^3 - x^2 \right) \Big|_0^m = m^3 - m^2 = m - 10$.

Suy ra $m^3 - m^2 - m + 10 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ (thỏa mãn).

Nếu $0 \leq m < \frac{2}{3}$: $I = -\int_0^m (3x^2 - 2x) dx = -\left(x^3 - x^2 \right) \Big|_0^m = -m^3 + m^2 = m - 10$.

Suy ra $m^3 - m^2 + m - 10 = 0 \Leftrightarrow m \approx 2,36$ (loại).

Nếu $m \geq \frac{2}{3}$: $I = -\int_0^{\frac{2}{3}} (3x^2 - 2x) dx + \int_{\frac{2}{3}}^m (3x^2 - 2x) dx = \frac{4}{27} + \left(x^3 - x^2 \right) \Big|_{\frac{2}{3}}^m$

$$= m^3 - m^2 + \frac{8}{27} = m - 10 \Rightarrow m^3 - m^2 - m + \frac{278}{27} = 0 \Leftrightarrow m \approx -2,02.$$

(loại).

Vậy có 1 giá trị thực của tham số m thỏa mãn bài toán.

- Câu 11:** Cho hàm số $y = f(x) = 1$, $y = g(x) = |x|$. Giá trị $I = \int_{-1}^2 \min\{f(x); g(x)\} dx$
- A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. 2. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Xét bất phương trình $|x| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$.

Vậy $\min\{1; |x|\} = 1$ khi $1 < x$ hoặc $x < -1$ mà $\min\{1; |x|\} = |x|$ khi $-1 < x < 1$

Xét $I = \int_{-1}^2 \min\{f(x); g(x)\} dx = \int_{-1}^2 \min\{1; |x|\} dx = \int_{-1}^1 \min\{1; |x|\} dx + \int_1^2 \min\{1; |x|\} dx$

$$I = \int_{-1}^1 |x| dx + \int_1^2 dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx + \int_1^2 dx = \left. \frac{-x^2}{2} \right|_{-1}^0 + \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 + x \Big|_1^2 = 2.$$

$$I = \int_{-1}^a |x| dx$$

Câu 12: Cho a là số thực dương, tính tích phân theo a .

A. $I = \frac{a^2 + 1}{2}$

B. $I = \frac{a^2 + 2}{2}$

C. $I = \frac{-2a^2 + 1}{2}$

D. $I = \frac{|3a^2 - 1|}{2}$

Lời giải

Vì $a > 0$ nên
$$I = -\int_{-1}^0 x dx + \int_0^a x dx = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{1 + a^2}{2}$$

Câu 13: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x) dx = 4$, $\int_0^3 f(x) dx = 6$. Tính $I = \int_{-1}^3 f(|u|) du$.

A. 2.

B. 5.

C. 10.

D. 12.

Lời giải

Ta có
$$I = \int_{-1}^3 f(|u|) du = \int_{-1}^0 f(|u|) du + \int_0^3 f(|u|) du = \int_{-1}^0 f(-u) du + \int_0^3 f(u) du$$

Tính
$$I_1 = \int_{-1}^0 f(-u) du$$

Xét
$$\int_0^1 f(x) dx = 4$$

Đặt $x = -u \Rightarrow dx = -du$.

Khi $x = 0$ thì $u = 0$. Khi $x = 1$ thì $u = -1$ nên
$$4 = \int_0^1 f(x) dx = -\int_0^{-1} f(-u) du = \int_{-1}^0 f(-u) du$$

Tính
$$I_2 = \int_0^3 f(u) du$$

Ta có
$$\int_0^3 f(x) dx = 6 \Rightarrow \int_0^3 f(u) du = 6$$
 nên
$$I = \int_{-1}^0 f(-u) du + \int_0^3 f(u) du = 4 + 6 = 10$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $f(x) = 2x - 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$

b) $\int_{-1}^1 |f(x)| dx = \frac{5}{2}$

c) $\int_{-1}^1 x^2 f(x) dx = -\frac{2}{3}$

d) $\int_{-1}^1 x |f(x)| dx = \frac{4}{3}$

a) Sai: Ta có $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$

b) Đúng: Ta có $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ suy ra $\int_{-1}^1 |2x - 1| dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} |2x - 1| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |2x - 1| dx = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$

c) Đúng: Ta có $\int_{-1}^1 x^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 x^2 (2x - 1) dx = -\frac{2}{3}$

d) Sai: Ta có:

$$\int_{-1}^1 x |f(x)| dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} x |2x - 1| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x |2x - 1| dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} x (1 - 2x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x (2x - 1) dx = -\frac{9}{8} + \frac{5}{24} = -\frac{11}{12}$$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = 2x - 4$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_{-2}^{-2} f(x) dx = 0$

b) $\int_1^4 f^2(x) dx = 7$

c) $\int_{-2}^5 |f(x)| dx = 3^m \cdot 5^n$ với $m^2 + n^2 = 16$

d) $F(a) = \int_0^a f(x) dx$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $a = 2$

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\int_{-2}^{-2} f(x) dx = 0$

b) Sai: Ta có $\int_1^4 f^2(x) dx = \int_1^4 (2x - 4)^2 dx = \int_1^4 (4x^2 - 16x + 16) dx = \left(\frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 16x \right) \Big|_1^4 = 12$

c) Sai: Ta có:

$$\int_{-2}^5 |f(x)| dx = \int_{-2}^5 |2x - 4| dx = \int_{-2}^2 (4 - 2x) dx + \int_2^5 (2x - 4) dx = (4x - x^2) \Big|_{-2}^2 + (x^2 - 4x) \Big|_2^5 = 25 = 3^0 \cdot 5^2$$

Suy ra $m = 0, n = 2 \Rightarrow m^2 + n^2 = 4$

d) Đúng: $F(a) = \int_0^a f(x) dx = \int_0^a (2x - 4) dx = (x^2 - 4x) \Big|_0^a = a^2 - 4a = (a - 2)^2 - 4 \geq -4$

Suy ra $F(a)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4 khi $a = 2$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Nếu $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$ thì $\int_{-1}^1 4f(x) dx = 6$.
- b) Nếu $\int_1^3 f(x) dx = 5$ và $\int_1^5 f(x) dx = 3$ thì $\int_3^5 f(x) dx = -2$.
- c) Nếu $f(x) = x^2 - 2x$, $F(0) = 1$ thì $F(2) = 11$.
- d) Nếu $f(x) = x^2 - 2x$ thì $\int_0^3 |x^2 - 2x| dx = \frac{8}{3}$.

Lời giải

- a) Sai: Ta có $\int_{-1}^1 4f(x) dx = 4 \int_{-1}^1 f(x) dx = 4 \cdot 2 = 8$
- b) Đúng: Ta có $\int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx = \int_1^5 f(x) dx \Leftrightarrow 5 + \int_3^5 f(x) dx = 3 \Leftrightarrow \int_3^5 f(x) dx = -2$
- c) Sai: Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int (x^2 - 2x) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + C$
 $F(0) = 1 \Rightarrow \frac{0^3}{3} - 0^2 + C = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 1 \Rightarrow F(2) = \frac{2^3}{3} - 2^2 + 1 = -\frac{1}{3}$
- d) Đúng: Ta có $\int_0^3 |x^2 - 2x| dx = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx + \int_2^3 |x^2 - 2x| dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = \frac{8}{3}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Nếu $\int_1^3 f(x) dx = 2$ thì $\int_3^1 3f(x) dx = \frac{3}{2}$.
- b) Nếu $\int_2^7 f(x) dx = -3$ và $\int_1^7 f(x) dx = 3$ thì $\int_1^2 f(x) dx = 0$.
- c) Nếu $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(1) = 0$ thì $F(2) = \ln 2$.
- d) Nếu $f(x) = x^3 + 2x^2$ thì $\int_{-3}^{-1} |x^3 + 2x^2| dx = -\frac{9}{2}$.

Lời giải

$$\int_3^1 3f(x)dx = 3 \int_3^1 f(x)dx = -3 \cdot \int_1^3 f(x)dx = -3 \cdot 2 = -6$$

a) Sai: Ta có

$$\int_1^2 f(x)dx + \int_2^7 f(x)dx = \int_1^7 f(x)dx \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx + (-3) = 3 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx = 6$$

b) Sai: Ta có

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

c) Đúng: Ta có

$$F(1) = 2 \Rightarrow \ln(1) + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \ln|x| \Rightarrow F(2) = \ln(2)$$

$$\int_{-3}^{-1} |x^3 + 2x^2|dx = \int_{-3}^{-2} (-x^3 - 2x^2)dx + \int_{-2}^{-1} (x^3 + 2x^2)dx = \frac{9}{2}$$

d) Đúng: Ta có

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = 4x^3 + x$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

$$\int_3^5 f(x)dx = 552$$

a)

$$\text{b) Biết } F(1) = 4 \text{ thì } F(2) = \frac{41}{2}$$

$$\int_0^2 (1 + 2x + f(x))dx = 20$$

c)

$$\int_{-2}^1 |f(x)|dx = \frac{39}{2}$$

d) Biết

Lời giải

$$\int_3^5 (4x^3 + x)dx = 552$$

a) Đúng: Ta có

$$F(x) = \int f(x)dx = \int (4x^3 + x)dx = x^4 + \frac{x^2}{2} + C$$

b) Đúng: Ta có

$$F(1) = 4 \Rightarrow 1^4 + \frac{1^2}{2} + C = 4 \Rightarrow C = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow F(x) = x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2} \Rightarrow F(2) = 2^4 + \frac{2^2}{2} + \frac{5}{2} = \frac{41}{2}$$

$$\int_0^2 (1 + 2x + f(x))dx = \int_0^2 (1 + 2x + 4x^3 + x)dx = \int_0^2 (4x^3 + 3x + 1)dx = \left(x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x \right) \Big|_0^2$$

c) Sai: Ta có

$$= \left(2^4 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 2 \right) - 0 = 24$$

$$\int_{-2}^1 |f(x)| dx = \int_{-2}^1 |4x^3 + x| dx = \int_{-2}^0 (-4x^3 - x) dx + \int_0^1 (4x^3 + x) dx = 18 + \frac{3}{2} = \frac{39}{2}$$

d) Đúng: Ta có

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_0^\pi f(x) dx = 0$

b) Biết $F(0) = \frac{1}{2}$ thì $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - f(x)) dx = 2$

d) Biết $\int_{-\pi}^\pi |f(x)| dx = 4$

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\int_0^\pi \sin 2x dx = \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^\pi = -\frac{1}{2} \cos 2\pi + \frac{1}{2} \cos 0 = 0$

b) Sai: Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$

$$F(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \cos 0 + C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + 1$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 1 = \frac{3}{2}$$

c) Sai: Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin 2x) dx = \left(\sin x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \left(\sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \left(\sin 0 + \frac{1}{2} \cos 0 \right) = 0$$

d) Đúng: Ta có $\int_{-\pi}^\pi |f(x)| dx = 2 \int_0^\pi |\sin 2x| dx = 2 \cdot \int_0^\pi \sin 2x dx = 2 \cdot 2 = 4$

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = |x^2 - 9|$ với $0 \leq x \leq 9$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x) = |x^2 - 9| = \begin{cases} -x^2 + 9, & 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 9, & 3 \leq x \leq 9 \end{cases}$

b) $\int_0^9 f(x) dx = -\int_0^3 f(x) dx + \int_3^9 f(x) dx$

$$c) \int_0^9 f(x) dx - \int_0^3 (x^2 - 9) dx + \int_3^9 (x^2 - 9) dx$$

$$d) \int_0^9 f(x) dx = \int_0^m (x^2 - 9) dx + \int_m^9 (x^2 - 9) dx \quad \forall m \in (0; 9)$$

x	0	3	9
$x^2 - 9$		-	0 +

a) Đúng: Từ bảng xét dấu ta thấy: $x^2 - 9 \leq 0, \forall x \in [0, 3]$ và $x^2 - 9 \geq 0, \forall x \in [3, 9]$

$$b) \text{ Sai vì } \int_0^9 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^9 f(x) dx$$

$$c) \text{ Đúng: Theo bảng xét dấu ta có: } \int_0^9 |x^2 - 9| dx = \int_0^3 |x^2 - 9| dx + \int_3^9 |x^2 - 9| dx$$

$$= \int_0^3 [-(x^2 - 9)] dx + \int_3^9 (x^2 - 9) dx = -\int_0^3 (x^2 - 9) dx + \int_3^9 (x^2 - 9) dx$$

$$d) \text{ Sai: Thế } m = 1 \text{ vào đẳng thức } \int_0^9 f(x) dx = \int_0^m (x^2 - 9) dx + \int_m^9 (x^2 - 9) dx \text{ ta được:}$$

$$\text{Khi đó } \int_0^9 |x^2 - 9| dx = \int_0^1 (x^2 - 9) dx + \int_1^9 (x^2 - 9) dx \quad (1) \quad \text{Ta có: } \begin{cases} VP(1) = 162 \\ VT(1) = 198 \end{cases}$$

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

$$a) f(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} \right)$$

$$b) \int_3^4 f(x) dx > \frac{1}{2}$$

$$c) \int_3^4 f(x) dx = \frac{1}{4} \ln \frac{a}{b} \text{ với } \frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản và } a, b \in \mathbb{N} \text{ thì ta có } a.b = 15$$

$$d) \int_3^4 \left[f(x) + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right] dx = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3} + 7$$

Lời giải

$$a) \text{ Sai: Ta có } f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right)$$

b) Sai: $\int_3^4 f(x) dx = \int_3^4 \frac{1}{(x-2)(x+2)} dx = \frac{1}{4} \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx$

$$= \frac{1}{4} (\ln(x-2) - \ln(x+2)) \Big|_3^4 = \frac{1}{4} \ln \frac{x-2}{x+2} \Big|_3^4 = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3} \quad \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3} < 0,5$$

Ta có

c) Đúng: $\int_3^4 f(x) dx = \frac{1}{4} \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{4} (\ln(x-2) - \ln(x+2)) \Big|_3^4 = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}$

Do đó ta có $a = 5; b = 3$. Vậy $a.b = 15$.

d) Sai: Ta có $\int_3^4 \left[f(x) + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right] dx = \int_3^4 f(x) dx + \int_3^4 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx$ với $\int_3^4 f(x) dx = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}$

Khi đó $\int_3^4 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\frac{1}{f(x)} \Big|_3^4 = -12 + 5 = -7$ nên $\int_3^4 \left[f(x) + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right] dx = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3} - 7$

Câu 9: Xét tính đúng – sai của các phép tính tích phân sau.

a) $I = \int_0^2 |x-1| dx = \int_0^1 (x-1) dx + \int_1^2 (x-1) dx$

b) $I = \int_0^2 |x-1| dx = 1$

c) Cho a là số thực dương thì tích phân $I = \int_{-1}^a |x| dx = \frac{a^2 + 1}{2}$

d) Nếu $I = \int_0^3 |2^x - 4| dx = a + \frac{b}{c \ln 2}$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản thì khi đó ta có giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 = 3$

Lời giải

a) Sai: $I = \int_0^2 |x-1| dx = \int_0^1 |x-1| dx + \int_1^2 |x-1| dx = -\int_0^1 (x-1) dx + \int_1^2 (x-1) dx$

b) Đúng: $I = \int_0^2 |x-1| dx = -\int_0^1 (x-1) dx + \int_1^2 (x-1) dx = -\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 = 1$

c) Đúng: Vì $a > 0$ nên $I = -\int_{-1}^0 x dx + \int_0^a x dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{1+a^2}{2}$

d) Sai: $I = \int_0^3 |2^x - 4| dx = \int_0^2 (4 - 2^x) dx + \int_2^3 (2^x - 4) dx = \left(4x - \frac{1}{\ln 2} 2^x \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{1}{\ln 2} 2^x - 4x \right) \Big|_2^3$

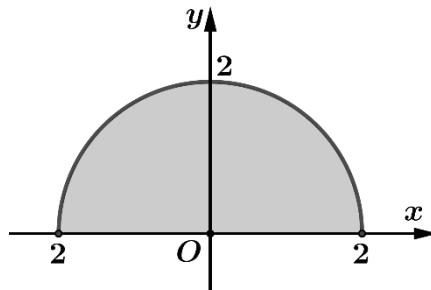
$$= \left(8 - \frac{3}{\ln 2}\right) + \left(\frac{4}{\ln 2} - 4\right) = 4 + \frac{1}{\ln 2} = a + \frac{b}{c \ln 2} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = a^2 + b^2 + c^2 = 4^2 + 1^2 + 1^2 = 18.$$

Câu 10: Cho hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $y = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [0; 2]$ là phương trình một phần tư của đường tròn tâm tại gốc toạ độ O, bán kính bằng 2 và nằm ở góc phần tư thứ I.

b) $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ là một phần hai diện tích hình tròn như hình bên dưới:



c) $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2$

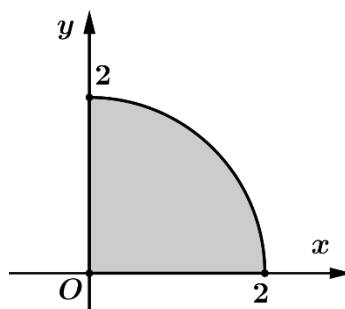
d) $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx = 2\pi$

Lời giải

$$y = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

a) Đúng: suy ra $y = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [0; 2]$ là phương trình một phần tư của đường tròn tâm tại gốc toạ độ O, bán kính bằng 2 và nằm ở góc phần tư thứ I.

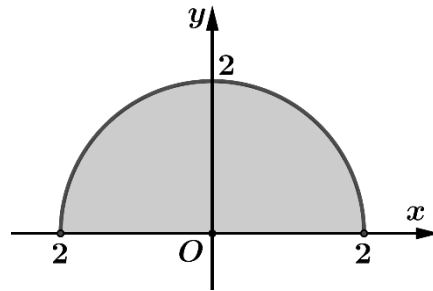
b) Sai: Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân thì $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ là một phần tư diện tích hình tròn như hình bên dưới



$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2$$

c) Đúng: Theo câu b thì

d) Đúng: $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$ là một phần hai diện tích hình tròn như hình bên dưới



Do đó $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 2\pi$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tính tích phân sau: $\int_0^2 |2x-3| dx$

Lời giải

$$\int_0^2 |2x-3| dx = \int_0^{\frac{3}{2}} (3-2x) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 (2x-3) dx = \left(3x - x^2\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}} + \left(x^2 - 3x\right)\Big|_{\frac{3}{2}}^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$

Ta có

Câu 2: Cho $0 \leq m \leq 2$ và tích phân $I = \int_0^m |x-2| dx = 2$. Khi đó giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

Lời giải

Do $x \in [0; m] \Rightarrow x-2 \leq x-m \leq 0 \Rightarrow |x-2| = 2-x$

Vậy $I = \int_0^m (2-x) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^m = 2m - \frac{m^2}{2} = 2 \Rightarrow m = 2$

Câu 3: Biết $I = \int_1^3 \left| \frac{x^2 - 6x + 8}{x+1} \right| dx = \frac{a}{b} + c \ln \frac{d}{e}$ biết a là số nguyên âm và $b, c, d, e \in \mathbb{N}^*$; $(a, b) = 1$, $(d, e) = 1$. Giá trị của $a + b + c + d + e$ bằng:

Lời giải

Ta có $x+1 > 0, \forall x \in [1; 3]$, suy ra $\int_1^3 \left| \frac{x^2 - 6x + 8}{x+1} \right| dx = \int_1^3 \frac{x^2 - 6x + 8}{x+1} dx$

Lại có $x^2 - 6x + 8 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$

Do đó: $I = \int_1^3 \frac{x^2 - 6x + 8}{x+1} dx = \int_1^2 \frac{x^2 - 6x + 8}{x+1} dx - \int_2^3 \frac{x^2 - 6x + 8}{x+1} dx$

$$= \int_1^2 \left(x - 7 + \frac{15}{x+1} \right) dx - \int_2^3 \left(x - 7 + \frac{15}{x+1} \right) dx = \left(-\frac{11}{2} + 15 \ln \frac{3}{2} \right) - \left(-\frac{9}{2} + 15 \ln \frac{4}{3} \right) = -\frac{9}{2} + 15 \ln \frac{9}{8}.$$

$$\begin{cases} a = -9 \\ b = 2 \\ c = 15 \Rightarrow a + b + c + d + e = 25 \\ d = 9 \\ e = 8 \end{cases}$$

Vậy

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và có bảng biến thiên như sau

x	0	2	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	-1	$f(5)$	$-\infty$

Biết rằng $\int_2^5 |f'(x)| dx = 5$. Giá trị của $f(5)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có $x \in [3; 5] \Rightarrow f'(x) \geq 0$ và $x \in [2; 3] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = -1$.

$$\int_2^5 |f'(x)| dx = 5 \Leftrightarrow \int_2^3 |f'(x)| dx + \int_3^5 |f'(x)| dx = 5$$

$$\Leftrightarrow -\int_2^3 f'(x) dx + \int_3^5 f'(x) dx = 5 \Leftrightarrow f(x) \Big|_3^2 + f(x) \Big|_3^5 = 5$$

$$\Leftrightarrow f(2) - f(3) + f(5) - f(3) = 5 \Leftrightarrow f(5) + 2 = 5 \Leftrightarrow f(5) = 3.$$

Câu 5: Biết $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = 4 + a \ln 2 + b \ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a + b$.

Lời giải

Ta có $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x \geq 2 \\ 2-x & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ do đó $I = \int_1^2 \frac{2|x-2|+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx$.

$$= \int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x} dx = \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - 2 \right) dx + \int_2^5 \left(2 - \frac{3}{x} \right) dx$$

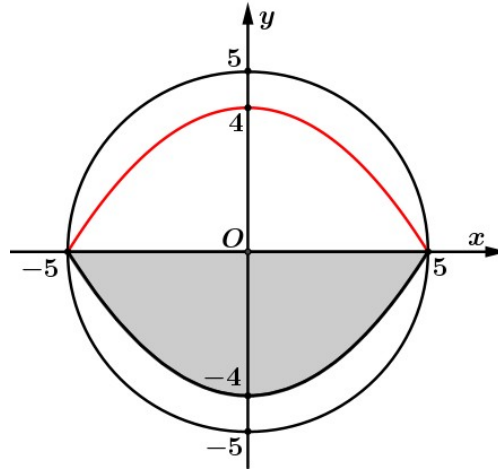
$$= \left(5 \ln |x| - 2x \right) \Big|_1^2 + \left(2x - 3 \ln |x| \right) \Big|_2^5 = 4 + 8 \ln 2 - 3 \ln 5 \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow S = a + b = 5.$$

Câu 6: Khu vực trung tâm một quảng trường có dạng hình tròn đường kính AB bằng 10m. Người ta trang trí khu vực này bằng hai đường Parabol đối xứng nhau qua AB , nằm trong hình tròn, đi

qua các điểm A, B và có đỉnh cách mép hình tròn 1m. Phần giới hạn bởi 2 parabol được trồng hoa với chi phí 200 nghìn đồng 1 mét vuông, phần còn lại được lát gốm sứ với chi phí 800 nghìn đồng 1 mét vuông. Tính tổng chi phí (triệu đồng) để hoàn thành khu vực này (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy) ?

Lời giải

Xét hệ trục độ như hình vẽ.



Phương trình đường tròn là: $x^2 + y^2 = 25$

Phương trình của Parabol có bề lõm hướng lên là: $y = \frac{4}{25}x^2 - 4$

Diện tích phần trồng hoa giới hạn bởi 2 parabol là:

$$S_1 = 2 \int_{-5}^5 \left(\frac{4}{25}x^2 - 4 \right) dx = 4 \int_0^5 \left(\frac{4}{25}x^2 - 4 \right) dx = \frac{160}{3} (m^2).$$

Diện tích toàn bộ phần hình tròn là: $S_2 = 25\pi (m^2)$

Diện tích phần còn lại để trang trí gốm sứ là: $S = S_2 - S_1 = 25\pi - \frac{160}{3} (m^2).$

Vậy tổng chi phí để làm khu vực trung tâm quảng trường là:

$$\frac{160}{3} \cdot 200 + \left(25\pi - \frac{160}{3} \right) \cdot 800 = 30,83 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 7: Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \leq x \leq 100$, biểu thị “sự bất bình đẳng về thu nhập” của một quốc gia. Năm 2009, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$$y = (0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666)^2, 0 \leq x \leq 100$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất. Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ vào năm 2009 bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân đầu tiên sau dấu phẩy)?

Lời giải

Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ vào năm 2009 là diện tích hình phẳng S giới hạn bởi hai đồ thị:

$$\begin{cases} y = x \\ y = (0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666)^2 \\ x = 0; x = 100 \end{cases} \Rightarrow S = \int_0^{100} \left| (0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666)^2 - x \right| dx$$

Sử dụng máy tính cầm tay, ta được $S \approx 2086$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các tích phân sau đây:

a) $A = \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx$

b) $B = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx$

c) $C = \int_{-1}^2 |x^3 - 3x + 2| dx$

d) $D = \int_{-2}^2 |x^4 - 3x^2 - 4| dx$

Lời giải

a) $A = \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx$

Xét $f(x) = x^2 - 1$ trên đoạn $[-2; 2]$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-2; 2] \\ x = 1 \in [-2; 2] \end{cases}$$

Cho

Bảng xét dấu:

x	-2	-1	1	2	
x^2-1	+	0	-	0	+

Do đó: $A = \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{-2}^{-1} + \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^2 = \left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right] + \left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right] + \left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right] = 4.$$

b) $B = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx$

Xét $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ trên $[-2; 1]$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \in [-2; 1] \\ x = 0 \in [-2; 1] \\ x = 1 \in [-2; 1] \end{cases}$$

Cho

Bảng xét dấu:

x	-2	0	1		
f(x)	0	+	0	-	0

Do đó: $B = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx = \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right) \Big|_{-2}^0 - \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right) \Big|_0^1 = -\left(-\frac{8}{3}\right) - \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{37}{12}.$$

c) $C = \int_{-1}^2 |x^3 - 3x + 2| dx$

Xét $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên $[-1; 2]$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in [-1; 2] \\ x = -1 \in [-1; 2] \end{cases}$$

Cho

Bảng xét dấu:

x	-1	2
$x^3 - 3x - 2$		

Do đó: $C = -\int_{-1}^2 (x^3 - 3x + 2) dx = -\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = 6 - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{4}$

d) $D = \int_{-2}^2 |x^4 - 3x^2 - 4| dx$. Xét $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ trên $[-2; 2]$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in [-2; 2] \\ x = -2 \in [-2; 2] \end{cases}$$

Cho

Bảng xét dấu:

x	-2	2
$x^4 - 3x^2 - 4$		

Do đó: $D = -\int_{-2}^2 (x^4 - 3x^2 - 4) dx = -\left(\frac{1}{5}x^5 - x^3 - 4x \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{48}{5} - \left(-\frac{48}{5}\right) = \frac{96}{5}$

Bài tập 2: Tính các tích phân sau đây:

a) $A = \int_{-3}^5 (|x+2| - |x-2|) dx$

b) $B = \int_{-1}^2 (x + |1-x| - |x+2|) dx$

c) $C = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx$

d) $D = \int_0^3 \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} dx$

Lời giải

a) $A = \int_{-3}^5 (|x+2| - |x-2|) dx$

a)

Ta có bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-3	-2	2	5
$ x+2 $	$-x-2$	0	$x+2$	$x+2$
$ x-2 $	$-x+2$		$-x+2$	0
$ x+2 - x-2 $	-4		$2x$	4

$$A = \int_{-3}^5 (|x+2| - |x-2|) dx = \int_{-3}^{-2} -4 dx + \int_{-2}^2 2x dx + \int_2^5 4 dx = -4x \Big|_{-3}^{-2} + x^2 \Big|_{-2}^2 + 4x \Big|_2^5 = 8$$

Khi đó:

$$B = \int_{-1}^2 (x + |1-x| - |x+2|) dx$$

b)

Ta có bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-1	1	2
$ 1-x $	$1-x$	0	$x-1$
$ x+2 $	$x+2$		$x+2$
$x + 1-x - x+2 $	$-x-1$		$x-3$

Khi đó:

$$B = \int_{-1}^2 (x + |1-x| - |x+2|) dx = \int_{-1}^1 (-x-1) dx + \int_1^2 (x-3) dx$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_1^2 = \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left[-4 - \left(-\frac{5}{2} \right) \right] = -\frac{7}{2}.$$

$$C = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx$$

c)

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

Ta có:

Khi đó:

$$I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = \int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x} dx = \int_1^2 \frac{5-2x}{x} dx + \int_2^5 \frac{2x-3}{x} dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - x \right) dx + \int_2^5 \left(2 - \frac{3}{x} \right) dx = (5 \ln|x| - x) \Big|_1^2 + (2x - 3 \ln|x|) \Big|_2^5 = 8 \ln 2 - 3 \ln 5 + 4.$$

$$D = \int_0^3 \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} dx$$

d)

$$D = \int_0^3 \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} dx = \int_0^3 \sqrt{x(x^2 - 2x + 1)} dx = \int_0^3 |x-1| \sqrt{x} dx$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

Ta có:

$$D = \int_0^1 (1-x) \sqrt{x} dx + \int_1^3 (x-1) \sqrt{x} dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} \right) dx + \int_1^3 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \right) dx$$

Khi đó:

$$= \left(\frac{2}{3} x \sqrt{x} - \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} - \frac{2}{3} x \sqrt{x} \right) \Big|_1^3 = \frac{4}{15} + \left[\frac{8\sqrt{3}}{5} - \left(-\frac{4}{15} \right) \right] = \frac{24\sqrt{3} + 8}{15}.$$

Bài tập 3: Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = t^2 - t - 6$ (m/s).

a) Tìm độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$, tức là tính $\int_1^4 v(t) dt$.

b) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này, tức là tính $\int_1^4 |v(t)| dt$.

Lời giải

a) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$ là:

$$\int_1^4 v(t) dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6) dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t \right) \Big|_1^4 = \left(\frac{4^3}{3} - \frac{4^2}{2} - 6 \cdot 4 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} - 6 \right) = -\frac{9}{2}$$

b) Tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$ là:

$$\int_1^4 |v(t)| dt = \int_1^4 |t^2 - t - 6| dt = \int_1^3 (-t^2 + t + 6) dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6) dt = \frac{22}{3} + \frac{17}{6} = \frac{61}{6}$$

Dạng 3: Tích phân của hàm số cho bởi nhiều công thức

Phương pháp: Có hai bài toán trong dạng này

Bài toán 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } x \leq b \\ h(x) & \text{khi } x > b \end{cases}$ liên tục trên D . Tính $J = \int_a^c f(x) dx$. Xét $b \in [a; c]$.

■ **Bước 1:** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x = b$?

Tức là kiểm tra $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = g(b) = f(b) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} h(x) = f(b)$

$$J = \int_a^c f(x) dx = \underbrace{\int_a^b g(x) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_b^c h(x) dx}_{I_2}$$

■ **Bước 2:** Tách cận:

■ **Bước 3:** Tính các tích phân $I_1; I_2$ bằng các phương pháp đã học.

Bài toán 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} g(x; m) & \text{khi } x \leq b \\ h(x; m) & \text{khi } x > b \end{cases}$ liên tục trên D . Tính $J = \int_a^c f(x) dx$.

Xét $b \in [a; c]$.

■ **Bước 1:** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x = b$?

Tức là kiểm tra: $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x; m) = g(b; m) = f(b) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} g(x; m) = \lim_{x \rightarrow b^+} h(x; m) = f(b)$

$$J = \int_a^c f(x) dx = \underbrace{\int_a^b g(x) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_b^c h(x) dx}_{I_2}$$

■ **Bước 2:** Tách cận:

■ **Bước 3:** Tính các tích phân $I_1; I_2$ bằng các phương pháp đã học.

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{khi } x \geq 0 \\ e^{2x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tính phân $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$ có giá trị bằng bao nhiêu?

- A. $I = \frac{3e^2 - 1}{e^2}$. B. $I = \frac{9e^2 - 1}{2e^2}$. C. $I = \frac{11e^2 - 11}{2e^2}$. D. $I = \frac{7e^2 + 1}{2e^2}$.

Lời giải

Ta có:
$$I = \int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 e^{2x} dx + \int_0^2 (x+1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) + \left(\frac{4}{2} + 2 \right) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2e^2} = \frac{9e^2 - 1}{2e^2}$$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x) dx$

- A. $\frac{7}{2}$. B. 1 . C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có:
$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 (4-x) dx = \frac{7}{2}$$

Câu 3: Cho hàm số $\begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x) dx$

- A. $\frac{7}{2}$. B. 1 . C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có
$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 (4-x) dx = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4-x & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 3x^2 & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$

- A. $\frac{21}{2}$. B. $\frac{7}{2}$. C. 7 . D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Ta có
$$I = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (4-x) dx + \int_1^2 3x^2 dx = \frac{21}{2}$$

- Câu 5:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x - \sqrt{4x+9} & \text{khi } x > 0 \\ 4a + \tan^2 x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$, đồng thời $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^4 f(x) dx = \frac{50}{3}$. Tính a .
- A. $a = 1$. B. $a = \frac{1}{2}$. C. $a = \frac{3}{4}$. D. $a = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^4 f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (4a + \tan^2 x) dx + \int_0^4 (4x - \sqrt{4x+9}) dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (4a - 1) dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (1 + \tan^2 x) dx + \int_0^4 (4x - \sqrt{4x+9}) dx$$

$$= (4a - 1) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 + \tan x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 + \left(2x^2 - \frac{\sqrt{(4x+9)^3}}{6} \right) \Big|_0^4 = (4a - 1)\pi + 1 + \frac{47}{3} = \frac{50}{3} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}.$$

- Câu 6:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \geq 0 \\ x^3 + x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tính $\int_0^2 f(x-1) dx$.
- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{5}{4}$. D. $\frac{11}{4}$.

Lời giải

Ta có:

$$\int_0^2 f(x-1) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x^3 + x + 1) dx + \int_0^1 2x dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^0 + x^2 \Big|_0^1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{5}{4}.$$

- Câu 7:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{khi } x \geq \frac{1}{2} \\ 2x + \frac{7}{4} & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) \sin 2x dx$.
- A. $\frac{37}{24}$. B. $-\frac{37}{24}$. C. $\frac{24}{37}$. D. $\frac{17}{24}$.

Lời giải

Ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) \cdot 2 \sin x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cdot f(\sin^2 x) d(\sin x)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) d(\sin^2 x) = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2x + \frac{7}{4}\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x^2 - x + 1) dx = \frac{37}{24}$$

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{khi } -3 \leq x \leq -1 \\ x^2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$ thì $\int_{-3}^3 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{31}{3}$

B. $\frac{28}{3}$

C. $\frac{22}{3}$

D. $\frac{26}{3}$

Lời giải

Ta có $\int_{-3}^3 f(x) dx = \int_{-3}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-3}^{-1} (x+2) dx + \int_{-1}^3 x^2 dx = 0 + \frac{28}{3} = \frac{28}{3}$

$$\int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{28}{3}$$

Vậy

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & \text{khi } x < 0 \\ \sin x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ Tính tích phân $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx$

A. $\frac{13}{6}$

B. $\frac{5}{6}$

C. $-\frac{5}{6}$

D. $\frac{19}{6}$

Lời giải

Ta có: $I = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_{-1}^0 (2x^2 - x) dx + \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{7}{6} + 2 = \frac{19}{6}$

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x^3 + 2x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 4x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(1) = 2$. Giá trị của $2F(-1) + 3F(2)$ bằng.

A. 76

B. 19

C. 21

D. 63

Lời giải

Vì F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên ta có:

$$\begin{cases} \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (4x+1) dx = F(0) - F(-1) = -1 \\ \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (4x^3 + 2x + 1) dx = F(1) - F(0) = 3 \\ \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (4x^3 + 2x + 1) dx = F(2) - F(1) = 19 \\ F(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(0) - F(-1) = -1 \\ F(0) = -1 \\ F(2) = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(-1) = 0 \\ F(2) = 21 \end{cases}$$

Vậy $2F(-1) + 3F(2) = 63$

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + m & \text{khi } x \geq 1 \\ 5 - 2x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ (m là tham số thực). Biết rằng $f(x)$ có nguyên hàm trên R là $F(x)$ thỏa mãn $F(-2) = -10$, khi đó $F(3)$ bằng

A. $36 + 3m$. B. 36 . C. 38 . D. $30 + 3m$.

Lời giải

Ta có
$$F(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + mx + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 5x - x^2 + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

Ta có $F(-2) = 5(-2) - (-2)^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = -10 + 4 = 4$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + x^2 + mx + C_1) = m + 2 + C_1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (5x - x^2 + C_2) = 4 + C_2$

$F(x)$ liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = F(1)$

$\Leftrightarrow m + 2 + C_1 = 4 + C_2 \Leftrightarrow C_1 = 6 - m$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

$\Leftrightarrow m + 5 = 3 \Leftrightarrow m = -2 \Rightarrow C_1 = 8$

Vậy
$$F(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 2x + 8 & \text{khi } x \geq 1 \\ 5x - x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$
 Do đó $F(3) = 38$

Vậy $a + b = 15 + 4 = 19$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2(x^3 + 1)^3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ (với m tham số). Biết hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx = ae - \frac{b}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}^*$; $\frac{a}{b}$ tối giản ($e = 2,718281\dots$). Biểu thức $a + b + c + m$ có giá bằng

A. -11 . B. 35 . C. 13 . D. 36 .

Lời giải

Vì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục tại điểm $x = 0$.

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + m) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2(x^3 + 1)^3) = 1 + m \Leftrightarrow m = -1$

Ta có:
$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 x^2(x^3 + 1)^3 dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx = e - \frac{23}{12}$$

Vậy $\begin{cases} a = 1 \\ b = 23 \\ c = 12 \end{cases} \Rightarrow a + b + c + m = 35.$

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + b & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ thỏa mãn $\int_0^2 f(x) dx = 13$. Tính $T = a + b - ab$?
A. $T = -11$ **B.** $T = -5$ **C.** $T = 1$ **D.** $T = -1$

Lời giải

Để tồn tại $\int_0^2 f(x) dx \Leftrightarrow f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 2] \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 1$

(Vì $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$).

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + 2 = b + 3 \Leftrightarrow a = b + 1 \quad (1)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2 + b) dx + \int_1^2 (2x + a) dx = (x^3 + bx) \Big|_0^1 + (x^2 + ax) \Big|_1^2 \\ &= a + b + 4 \end{aligned}$$

Mà $\int_0^2 f(x) dx = 13 \Rightarrow a + b = 9 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a = 5; b = 4 \Rightarrow T = a + b - ab = -11.$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = \begin{cases} x + m & , x \geq 0 \\ e^{2x} & , x < 0 \end{cases}$ (m là hằng số). Biết

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = a + \frac{b}{e^2} \text{ trong đó } a, b \text{ là các số hữu tỉ. Tính } 2a + 4b^2.$$

A. 10. **B.** 4. **C.** 80. **D.** 40.

Lời giải

Do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m = 1$

Khi đó ta có $\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 e^{2x} dx + \int_0^2 (x + 1) dx$

$$= \frac{e^{2x}}{2} \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2} + 4 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2e^2}.$$

Do đó $a = \frac{9}{2}; b = -\frac{1}{2}$. Vậy $2a + 4b^2 = 10.$

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x + 2 & \text{khi } x \geq 0 \\ 2\cos^2 x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa

mãn $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pi$. Giá trị của $F\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng:

- A. $\frac{1 + \sqrt{3} + 3\pi}{2}$. B. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{13\pi}{12}$. C. $\frac{13\pi + 6 - 6\sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & F\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= F\left(-\frac{\pi}{6}\right) - F(0) + F(0) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) + 3F\left(\frac{\pi}{6}\right) - 3F\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2F\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 f(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx - 3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx - 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx + 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 (\sin x + 2)dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos^2 x dx - 3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2 x dx - 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos^2 x dx + 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 (\sin x + 2)dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x + 1)dx - 3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x + 1)dx - 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2x + 1)dx + 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= -(-\cos x + 2x)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^0 - \left(\frac{1}{2}\sin 2x + x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - 3\left(\frac{1}{2}\sin 2x + x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x + x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}\right) - 3\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{12}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{12}\right) + 2\pi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{13\pi}{12} \end{aligned}$$

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + a & \text{khi } x \geq 0 \\ \sin 2x + \cos x - b & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục và có nguyên hàm F liên tục trên $\mathbb{R}$

thỏa mãn $F(2) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 10$ với a, b là tham số thực. Giá trị $\int_{-\frac{\pi}{6}}^1 f(x)dx = \frac{m}{4}$, với m là một số thực. Khi đó 2^m bằng:

- A. $\frac{9}{2}$. B. $\frac{9}{4}$. C. 9. D. 18.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $a = 1 - b$.

$$F(2) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 10 \Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^2 f(x) dx = 10$$

Mặt khác

$$\Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\sin 2x + \cos x - b) dx + \int_0^2 (3x^2 + a) dx = 10 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x - bx\right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 + (x^3 + ax) \Big|_0^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow 2a - \frac{b\pi}{2} = 2 \quad \text{suy ra} \quad \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a - \frac{b\pi}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ \sin 2x + \cos x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Ta được

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^1 f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 (\sin 2x + \cos x) dx + \int_0^1 (3x^2 + 1) dx = \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x\right) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^0 + (x^3 + x) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

Suy ra $m = 9$ vậy $2m = 18$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \leq 0 \\ x^2-2x+3 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)=0$. Giá trị của $2F(-1)+3F(2)$ bằng

- A. 17. B. 32. C. $-\frac{22}{3}$. D. -35.
- Lời giải**

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 (2x+3) dx + \int_0^2 (x^2-2x+3) dx = (x^2+3x) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right) \Big|_0^2 = 2 + \frac{14}{3} = \frac{20}{3}.$$

Ta có

$$\text{Mà } \int_{-1}^2 f(x) dx = F(x) \Big|_{-1}^2 = F(2) - F(-1) \quad \text{nên} \quad F(2) - F(-1) = \frac{20}{3} \quad (1)$$

$$F(x) = \int f(x) dx = \begin{cases} x^2 + 3x + C_1 & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C_2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

Mặt khác

$$\text{Vì } F(3)=0 \quad \text{nên} \quad 9-9+9+C_2=0 \quad \text{suy ra} \quad C_2=-9.$$

$$\text{Vậy } F(2) = \frac{8}{3} - 2^2 + 3 \cdot 2 - 9 = -\frac{13}{3}. \quad \text{Thay } F(2) = -\frac{13}{3} \text{ vào (1) ta được } F(-1) = -11.$$

$$\text{Suy ra } 2F(-1) + 3F(2) = 2 \cdot (-11) + 3 \cdot \left(-\frac{13}{3}\right) = -35.$$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + 4x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là $\int_0^2 f(x) dx$?

A. 14.

B. 13.

C. 15.

D. 16.

Lời giải

Vì hàm số $F(x)$ liên tục tại $x=1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1)$
 $\Rightarrow 1^2 + 5 \cdot 1 + C_1 = 1^3 + 4 \cdot 1 + C_2$

$$\Rightarrow C_1 - C_2 = -1$$

Ta có: $\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0) = 2^2 + 5 \cdot 2 + C_1 - (0^3 + 4 \cdot 0 + C_2)$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 14 + C_1 - C_2 = 14 - 1 = 13$$

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 - 2x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Giả sử F là 1 nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2020F(-1) + 2021F(2) = -2022$. Giá trị $F(1)$ nằm trong khoảng nào?

A. $(-2; -1)$.B. $(-1; 0)$.C. $(0; 1)$.D. $(1; 2)$.

Lời giải

Ta có $I = 2020 \int_1^{-1} f(x) dx + 2021 \int_1^2 f(x) dx = 2020F(-1) + 2021F(2) - 4041F(1)$

$$\Rightarrow 4041F(1) = 2020F(-1) + 2021F(2) - I.$$

Mà $\int_1^{-1} f(x) dx = - \left[\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \right] = - \left[\int_{-1}^0 (1 - 2x) dx + \int_0^1 (3x^2 - 2x + 1) dx \right] = -3$

và $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (3x^2 - 2x + 1) dx = 5$

Suy ra $I = 2020 \cdot (-3) + 2021 \cdot 5 = 4045$

Vậy $4041F(1) = 2020F(-1) + 2021F(2) - I = -6067 \Rightarrow F(1) = -\frac{6067}{4041}$

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 2x - 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2) = 4$. Giá trị của $F(-2) - 4F(3)$ bằng

A. 16.

B. 8.

C. 18.

D. 2.

Ta có:
$$f(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 2x - 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 3x - x^2 + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + x^2 - 4x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

Vì $F(2) = 4 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 3x - x^2 + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + x^2 - 4x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Hàm số liên tục trên $\square \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - x^2 + 2) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + x^2 - 4x + C_2) \Leftrightarrow 3 - 1 + 2 = 1 + 1 - 4 + C_2 \Leftrightarrow C_2 = 6$

$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 3x - x^2 + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + x^2 - 4x + 6 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Vậy $F(-2) - 4F(3) = 10 - 4 \cdot 2 = 2$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{khi } x \geq 2 \\ x - 2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x - 2) dx$

b) $\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x^2 - 2x) dx$

c) $\int_1^3 f(x) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^3$

d) $\int_1^3 f(x) dx = \frac{5}{6}$

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x - 2) dx$

b) Đúng: Ta có $\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x^2 - 2x) dx$

c) Sai: Ta có
$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 (x-2) dx + \int_2^3 (x^2-2x) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^3$$

d) Đúng :

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 (x-2) dx + \int_2^3 (x^2-2x) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^3 = \left(-2 - \frac{-3}{2} \right) + \left(0 - \frac{-4}{3} \right) = \frac{5}{6}$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = |x^2 - 9|$ với $0 \leq x \leq 9$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x) = |x^2 - 9| = \begin{cases} -x^2 + 9, & 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 9, & 3 \leq x \leq 9 \end{cases}$

b) $\int_0^9 f(x) dx = -\int_0^3 f(x) dx + \int_3^9 f(x) dx$

c) $\int_0^9 f(x) dx = -\int_0^3 (x^2 - 9) dx + \int_3^9 (x^2 - 9) dx$

d) $\int_0^9 f(x) dx = \int_0^m (x^2 - 9) dx + \int_m^9 (x^2 - 9) dx \quad \forall m \in (0, 9)$

Lời giải

x	0	3	9
$x^2 - 9$	—	0	+

a) Đúng: Từ bảng xét dấu ta thấy: $x^2 - 9 \leq 0, \forall x \in [0, 3]$ và $x^2 - 9 \geq 0, \forall x \in [3, 9]$

b) Sai: $\int_0^9 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^9 f(x) dx$

c) Đúng: Theo bảng xét dấu ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^9 |x^2 - 9| dx &= \int_0^3 |x^2 - 9| dx + \int_3^9 |x^2 - 9| dx = \int_0^3 [-(x^2 - 9)] dx + \int_3^9 (x^2 - 9) dx \\ &= -\int_0^3 (x^2 - 9) dx + \int_3^9 (x^2 - 9) dx \end{aligned}$$

d) Sai: Thế $m = 1$ vào đẳng thức $\int_0^9 f(x) dx = \int_0^m (x^2 - 9) dx + \int_m^9 (x^2 - 9) dx$ ta được

$$\int_0^9 |x^2 - 9| dx = \int_0^1 (x^2 - 9) dx + \int_1^9 (x^2 - 9) dx \quad (1)$$

$$\begin{cases} VP(1) = 162 \\ VT(1) = 198 \end{cases}$$

Ta có:

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + m & \text{khi } x \geq 1 \\ 5 - 2x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ (m là tham số thực) liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là $F(x)$ thỏa mãn $F(-2) = -10$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $m = -2$

b) $F(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 2x + 8 & \text{khi } x \geq 1 \\ 5x - x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

c) $F(3) = 83$

d) $\int_1^{e^2} f(\ln x) \frac{1}{x} dx = 3$

Lời giải

a) Đúng: Ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 5 = 3 \Leftrightarrow m = -2$.

b) Đúng: $F(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 2x + 8 & \text{khi } x \geq 1 \\ 5x - x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Ta có $F(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + mx + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 5x - x^2 + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

$F(-2) = 5(-2) - (-2)^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = -10 + 4 = 4$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + x^2 + mx + C_1) = m + 2 + C_1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (5x - x^2 + C_2) = 4 + C_2$

Ta lại có $F(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = F(1) \Leftrightarrow m + 2 + C_1 = 4 + C_2 \Leftrightarrow C_1 = 6 - m$ mà $m = -2$ nên $C_1 = 8$

Vậy $F(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 2x + 8 & \text{khi } x \geq 1 \\ 5x - x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

c) Sai: $F(3) = 83$

Ta có $F(3) = 3^3 + 3^2 - 2 \cdot 3 + 8 = 38$

d) Sai: $\int_1^{e^2} f(\ln x) \frac{1}{x} dx = 3$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

Khi $x = 1 \Rightarrow t = 0$;

Khi $x = e^2 \Rightarrow t = 2$.

Do đó:
$$\int_1^{e^2} f(\ln x) \frac{1}{x} dx = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (5 - 2x) dx + \int_1^2 (3x^2 + 2x - 2) dx = 12$$

Câu 4: Giả sử tốc độ $v(m/s)$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian

$$v(t) = \begin{cases} t; & 0 \leq t \leq 2 \\ 2; & 2 < t \leq 20 \\ 12 - 0,5t; & 20 < t \leq 24 \end{cases}$$

t được cho bởi công thức: . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tốc độ tại thời điểm $t = 2s$ là 2.

b) Gia tốc chuyển động của thang máy tại thời điểm $t = 15s$ là $2(m/s^2)$.

c) Quãng đường chuyển động của thang máy là $42m$.

d) Tốc độ trung bình của thang máy là $1,75(m/s)$.

Lời giải

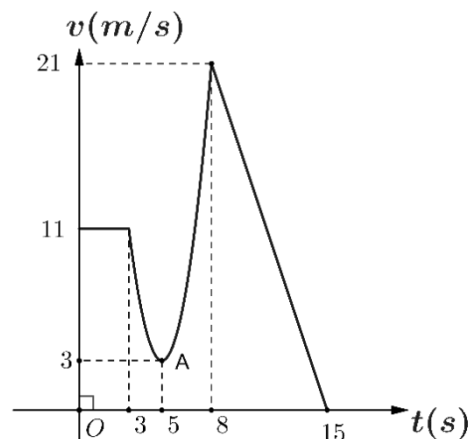
a) Đúng: Ta có $v(2) = 2$.

b) Sai: Tại $t = 15s$ thì $v(t) = 2$ nên gia tốc $a = v' = 0$. Gia tốc của thang máy tại thời điểm $t = 15s$ là $0(m/s^2)$.

c) Đúng:
$$S = \int_0^2 t dt + \int_2^{20} 2 dt + \int_{20}^{24} (12 - 0,5t) dt = 42$$

d) Đúng:
$$v_{tb} = \frac{S}{t} = \frac{42}{24} = 1,75$$

Câu 5: Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường thẳng khi $0 \leq t \leq 3(s)$ và $8 \leq t \leq 15(s)$ và $v(t)$ có dạng đường Parabol khi $3 \leq t \leq 8(s)$ (như hình vẽ)



a) Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 15$ là $v(15) = 21(m/s)$.

$$S_1 = \int_0^3 11 dt (m)$$

b) Quãng đường chất điểm di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là:

c) Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian từ 8 giây đến 15 giây bằng $73,5(m)$

d) Vận tốc trung bình v_{tb} của chất điểm trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây thỏa mãn $v_{tb} < 7(m/s)$.

Lời giải

a) Sai: Dựa vào đồ thị $v(t)$

b) Đúng: Trong 3 giây đầu tiên, vận tốc của chuyển động là $v(t) = 11(m/s)$.

$$S_1 = \int_0^3 11 dt (m)$$

Do đó quãng đường chất điểm chuyển động trong 3 giây đầu tiên là:

c) Đúng: Trong khoảng thời gian từ 8 đến 15 giây, đồ thị $v(t)$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $(8; 21)$ và $(15; 0)$. Ta có: $v(t) = at + b$.

Từ giả thiết ta có hệ:
$$\begin{cases} 8a + b = 21 \\ 15a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 45 \end{cases}$$

Do đó $v(t) = -3t + 45 (8 \leq t \leq 15)$.

Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian này là:

$$S_2 = \int_8^{15} (-3t + 45) dt = -\frac{3t^2}{2} \Big|_8^{15} + 45t \Big|_8^{15} = \frac{147}{2} = 73,5(m)$$

d) Sai: Trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây đồ thị $v(t)$ là một Parabol đi qua các điểm có tọa độ lần lượt là $(3; 11), (5; 3), (8; 21)$ có phương trình dạng: $v(t) = at^2 + bt + c$.

Từ giả thiết ta có:
$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 11 \\ 25a + 5b + c = 3 \\ 64a + 8b + c = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -20 \\ c = 53 \end{cases}$$

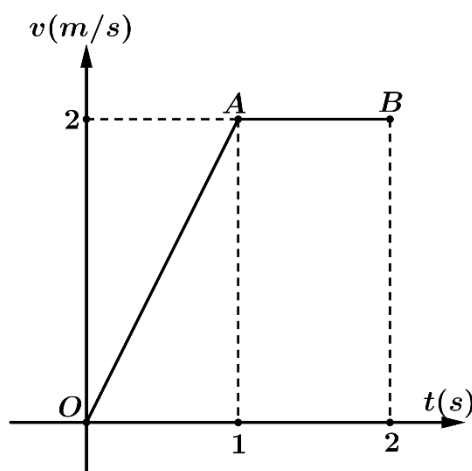
Do đó: $v(t) = 2t^2 - 20t + 53 (3 \leq t \leq 8)$.

Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian này là:

$$S_3 = \int_3^8 v(t) dt = \int_3^8 (2t^2 - 20t + 53) dt = \left(\frac{2t^3}{3} - 10t^2 + 53t \right) \Big|_3^8 = \frac{115}{3} (m)$$

Vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian này là: $v_{tb} = \frac{S_3}{5} = \frac{23}{3} \approx 7,67 (m/s)$.

Câu 6: Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị trong hình sau:



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Vận tốc của vật tại thời điểm t được xác định bởi
$$v(t) = \begin{cases} 2t & \text{ khi } 0 \leq t \leq 1 \\ 2 & \text{ khi } t > 1 \end{cases}$$

b) Quãng đường vật đi được trong 1 giây đầu tiên được xác định bởi công thức
$$s(t) = \int_0^1 v(t) dt$$

c) Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi

công thức
$$s(t) = \int_0^2 v(t) dt$$

d) Quãng đường mà vật đi được trong 2 giây đầu tiên là $3m$.

Lời giải

a) Đúng: Vận tốc của vật tại thời điểm t được xác định bởi
$$v(t) = \begin{cases} 2t & \text{ khi } 0 \leq t \leq 1 \\ 2 & \text{ khi } t > 1 \end{cases}$$

Ta có phương trình đường thẳng đi qua hai điểm OA là $y = 2x$, đường thẳng đi qua hai điểm A, B là $y = 2$.

Do đó ta có công thức hàm vận tốc là:
$$v(t) = \begin{cases} 2t & \text{ khi } 0 \leq t \leq 1 \\ 2 & \text{ khi } t > 1 \end{cases}$$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ a giây đến b giây được xác định bởi công

thức
$$s(t) = \int_a^b v(t) dt$$

b) Đúng: Quãng đường vật đi được trong 1 giây đầu tiên được xác định bởi công thức

$$s(t) = \int_0^1 v(t) dt$$

Do đó quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 0 giây đến 1 giây được xác định bởi

công thức
$$s(t) = \int_0^1 v(t) dt$$

c) Sai: Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi

$$s(t) = \int_0^2 v(t) dt$$

công thức

Do đó quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi

$$s(t) = \int_1^2 v(t) dt$$

công thức

d) Đúng: Quãng đường mà vật đi được trong 2 giây đầu tiên là $3m$.

Quãng đường mà vật đi được trong 2 giây đầu tiên là:

$$s(t) = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^1 2t dt + \int_1^2 2 dt = t^2 \Big|_0^1 + 2t \Big|_1^2 = 1 + 2 = 3m$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x-1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính $J = \int_{-1}^2 f(x) dx$

Lời giải

Ta có: $J = \int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$

Tính $J_1 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (2x-1) dx = (x^2 - x) \Big|_{-1}^1 = 0 - 2 = -2$

Tính $J_2 = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 1 dx = 2 - 1 = 1$. Vậy $J = 1 - 2 = -1$.

Câu 2: Cho số thực a và hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x-x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx$ khi $a = 12$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a(x-x^2)) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x) = 0 \end{cases}$, và $f(0) = 0$ nên hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 2x dx + \int_0^1 a(x-x^2) dx$

$$= (x^2) \Big|_{-1}^0 + a \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = -1 + a \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{a}{6} - 1 \xrightarrow{a=12} \int_{-1}^1 f(x) dx = 1$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tính phân $I = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx$ bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2

Lời giải

Ta có: $I = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx + \int_2^3 (x^2 - 1) dx \right] = \frac{23}{6}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \\ x+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính phân $I = \int_2^0 -3t^2 f(t) dt$ bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2

Lời giải

$$I = -3 \int_2^0 t^2 f(t) dt = 3 \int_0^2 x^2 f(x) dx = 3 \left[\int_0^1 x^2 (x+1) dx + \int_1^2 x dx \right] = \frac{25}{12} \approx 2,08$$

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{khi } x < 0 \\ x - 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - 2x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_{-5}^9 \frac{1}{7} f(t) dt$ bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2

Lời giải

Ta có:

$$I = \frac{1}{7} \int_{-5}^9 f(t) dt = \frac{1}{7} \int_{-5}^9 f(x) dx = \frac{1}{7} \int_{-5}^0 f(x) dx + \frac{1}{7} \int_0^2 f(x) dx + \frac{1}{7} \int_2^9 f(x) dx$$

$$= \frac{1}{7} \int_{-5}^0 (2x^2 - 1) dx + \frac{1}{7} \int_0^2 (x - 1) dx + \frac{1}{7} \int_2^9 (5 - 2x) dx = \frac{109}{21} \approx 5,19$$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết giá trị của $I = \int_{1/e}^{e^2} \frac{f(\ln x - 1)}{x} dx = \frac{a}{b} + ce$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}, b \neq 0$ và $(a, b) = 1$ bằng. Giá trị của $a + b + c$

Lời giải

Xét $I = \int_{1/e}^{e^2} \frac{f(\ln x - 1)}{x} dx$. Đặt $u = \ln x - 1 \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$. Đổi cận $\begin{cases} x = \frac{1}{e} \Rightarrow u = -2 \\ x = e^2 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_{-2}^1 f(u) du = \int_{-2}^1 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$

$$= \int_{-2}^0 (x^2 - 2x + 2) dx + \int_0^1 (e^x + 1) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 - x^2 + 2x \right) \Big|_{-2}^0 + (e^x + x) \Big|_0^1 = \frac{32}{3} + e$$

$$\begin{cases} a = 32 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 36$$

Vậy

Câu 7: Biết rằng tốc độ v (km / phút) của một canô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) được cho

$$v(t) = \begin{cases} \frac{t}{3} & \text{khi } 0 \leq t < 3 \\ 1 & \text{khi } 3 \leq t < 10 \\ 5 - 0,4t & \text{khi } 10 \leq t \leq 18 \end{cases}$$

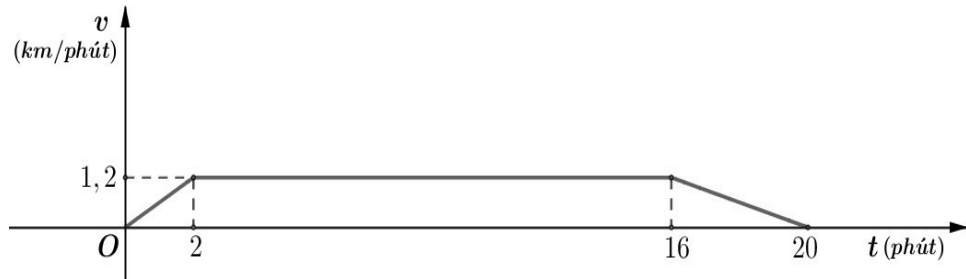
bởi công thức sau:

Quãng đường canô di chuyển được trong khoảng từ 0 đến 18 phút là bao nhiêu km?

Quãng đường canô di chuyển được trong khoảng từ 0 đến 18 phút là:

$$S_0 = \int_0^{18} v(t) dt = \int_0^3 v(t) dt + \int_3^{10} v(t) dt + \int_{10}^{18} v(t) dt = \int_0^3 \frac{t}{3} dt + \int_3^{10} 1 dt + \int_{10}^{18} (5 - 0,4t) dt = 3,7 \text{ (km)}$$

Câu 8: Tốc độ v (km/phút) của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) như đồ thị ở hình vẽ sau



Tính tốc độ trung bình của cano trong khoảng thời gian 20 phút đầu tiên.

Lời giải

$$v(t) = \begin{cases} 0,6t & \text{khi } 0 \leq t < 2 \\ 1,2 & \text{khi } 2 \leq t < 16 \\ 6 - 0,3t & \text{khi } 16 \leq t \leq 20 \end{cases}$$

Từ đồ thị, ta có tốc độ của ca nô được tính theo công thức:

Quãng đường cano di chuyển được trong 20 phút đầu tiên là

$$s = \int_0^2 0,6t dt + \int_2^{16} 1,2 dt + \int_{16}^{20} (6 - 0,3t) dt = \frac{6}{5} + \frac{84}{5} + \frac{12}{5} = \frac{102}{5} \text{ (km)}$$

Tốc độ trung bình của cano trong 20 phút đầu tiên là $v_{tb} = \frac{s}{20} = \frac{102}{100} = 1,02 \text{ (km/phút)}$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Biết rằng tốc độ v (km/phút) của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) như sau:

$$v(t) = \begin{cases} 0,5t, & 0 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < 15 \\ 4 - 0,2t, & 15 \leq t \leq 20 \end{cases}$$

Tính quãng đường ca nô di chuyển được trong khoảng thời gian từ 0 tới 20 phút.

Lời giải

$$S = \int_0^{20} v(t) dt = \int_0^2 (0,5t) dt + \int_2^{15} 1 dt + \int_{15}^{20} (4 - 0,2t) dt$$

Quãng đường chuyển động của ca nô là:

$$= \frac{t^2}{4} \Big|_0^2 + (t) \Big|_2^{15} + \left(4t - \frac{1}{10} t^2 \right) \Big|_{15}^{20} = 1 + 15 - 2 + 40 - 37,5 = 16,5 \text{ (km)}$$

Bài tập 2: Tốc độ $v(m/s)$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức:

$$v(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 2, & 2 < t \leq 20 \\ 12 - 0,5t, & 20 < t \leq 24 \end{cases}$$

Tính quãng đường chuyển động và tốc độ trung bình của thang máy.

Lời giải

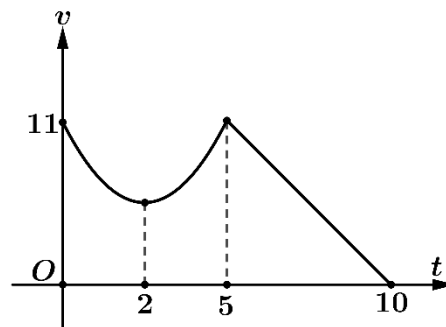
$$S = \int_0^{24} v(t) dt = \int_0^2 t dt + \int_2^{20} 2 dt + \int_{20}^{24} (12 - 0,5t) dt$$

Quãng đường chuyển động của thang máy là:

$$= \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^2 + (2t) \Big|_2^{20} + \left(12t - \frac{1}{4}t^2 \right) \Big|_{20}^{24} = 2 + 40 - 4 + 144 - 140 = 42(m)$$

Tốc độ trung bình của thang máy là: $v_{tb} = \frac{S}{t} = \frac{42}{24} = 1,75(m/s)$.

Bài tập 3: Một chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parabol khi $0 \leq t \leq 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \leq t \leq 10(s)$. Biết đỉnh Parabol là $I(2,3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \leq t \leq 10(s)$ là bao nhiêu mét?



Lời giải

Gọi Parabol $(P): y = at^2 + bt + c$ là phương trình thể hiện vận tốc của chất điểm khi $0 \leq t \leq 5(s)$

Do (P) có đỉnh $I(2,3)$ và đi qua $A(0;11)$ nên

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ y(0) = 11 \\ y(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ c = 11 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ c = 11 \end{cases} \Rightarrow y = 2t^2 - 8t + 11$$

Gọi $d: y = at + b$ là phương trình đường thẳng thể hiện vận tốc của chất điểm khi $5 \leq t \leq 10(s)$ do d đi qua điểm $B(5;21)$ và $C(10;0)$ nên:

$$\begin{cases} 5a + b = 11 \\ 10a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{11}{5} \\ b = 22 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-11}{5}t + 22$$

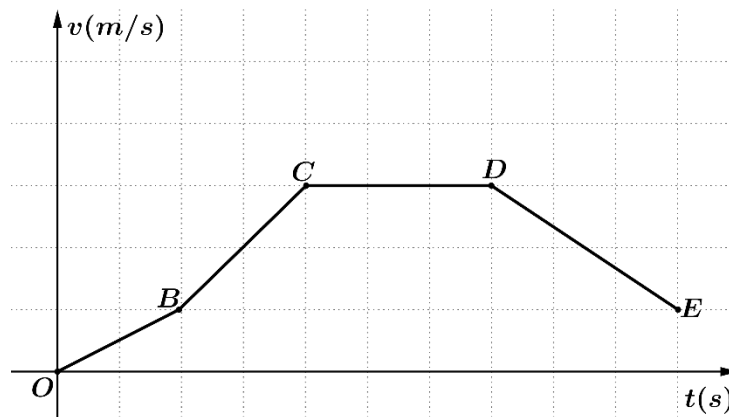
$$v(t) = \begin{cases} 2t^2 - 8t + 11, & 0 \leq t \leq 5 \\ \frac{-11}{5}t + 22, & 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

Như vậy phương trình biểu thị vận tốc của chất điểm là

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $0 \leq t \leq 10(s)$ là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^5 (2t^2 - 8t + 11) dt + \int_5^{10} \left(\frac{-11}{5}t + 22 \right) dt \\ &= \left(\frac{2t^3}{3} - 4t^2 + 11t \right) \Big|_0^5 + \left(\frac{-11t^2}{10} + 22t \right) \Big|_5^{10} = \frac{115}{3} + \frac{55}{2} = \frac{395}{6} (m) \end{aligned}$$

Bài tập 4: Cho hình vẽ dưới đây là đồ thị vận tốc $v(t)$ của một vật ($t = 0$ là thời điểm vật bắt đầu chuyển động). Tính quãng đường chuyển động và vận tốc trung bình của vật 10 giây đầu tiên.



Lời giải

Phương trình đường thẳng $OB: v = \frac{1}{2}t$

Phương trình đường thẳng $BC: v = t - 1$

Phương trình đường thẳng $CD: v = 3$

Phương trình đường thẳng $DE: v = -\frac{2}{3}t + \frac{23}{3}$

$$v(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t, & 0 \leq t \leq 2 \\ t - 1, & 2 < t \leq 4 \\ 3, & 4 < t \leq 7 \\ -\frac{2}{3}t + \frac{23}{3}, & 7 < t \leq 10 \end{cases}$$

Suy ra:

Quãng đường chuyển động của vật trong 10 giây là:

$$S = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^2 v(t) dt + \int_2^4 v(t) dt + \int_4^7 v(t) dt + \int_7^{10} v(t) dt$$

$$S = \int_0^2 \frac{1}{2} t dt + \int_2^4 (t-1) dt + \int_4^7 3 dt + \int_7^{10} \left(-\frac{2}{3} t + \frac{23}{3} \right) dt = 20 \text{ (m)}$$

Vận tốc trung bình của chuyển động là: $v_{tb} = \frac{S}{10} = 2 \text{ (m/s)}$.

Bài tập 5: Khảo sát chuyển động của xe khách A trong 30 phút trên một quãng đường ta thu được kết quả: vận tốc $v \text{ (m/phút)}$ của xe khách theo thời gian $t \text{ (phút)}$ được biểu diễn bởi hàm số:

$$v(t) = \begin{cases} 100t, & 0 \leq t \leq 10 \\ 20t + 800, & 10 < t \leq 20 \\ -10t + 1400, & 20 < t \leq 30 \end{cases}$$

Tính quãng đường chuyển động và vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút đã khảo sát.

Lời giải

Quãng đường chuyển động của xe khách trong 30 phút khảo sát là:

$$S = \int_0^{30} v(t) dt = \int_0^{10} v(t) dt + \int_{10}^{20} v(t) dt + \int_{20}^{30} v(t) dt$$

$$S = \int_0^{10} 100t dt + \int_{10}^{20} (20t + 800) dt + \int_{20}^{30} (-10t + 1400) dt = 27500 \text{ (m)}$$

Vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút khảo sát là: $v_{tb} = \frac{S}{30} = \frac{2750}{3} \approx 917 \text{ (m/phút)}$.

Bài tập 6: Giả sử tốc độ $v \text{ (m/s)}$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian

$$v(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 2, & 2 < t \leq 20 \\ 12 - 0,5t, & 20 < t \leq 24 \end{cases}$$

$t \text{ (giây)}$ được cho bởi công thức: $t \text{ (giây)}$. Tính quãng đường chuyển động và tốc độ trung bình của thang máy.

Lời giải

Gọi $s(t)$ là quãng đường thang máy di chuyển được đến thời gian $t \text{ (giây)}$. Quãng đường

$$s = s(20) - s(0) = \int_0^{20} v(t) dt$$

thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất là

$$= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^{20} v(t) dt + \int_{20}^{24} v(t) dt = \int_0^2 t dt + \int_2^{20} 2 dt + \int_{20}^{24} (12 - 0,5t) dt$$

$$= \left(\frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^2 + 2(t) \Big|_2^{20} + \left(12t - \frac{0,5t^2}{2} \right) \Big|_{20}^{24} = 42 \text{ (m)}$$

Vận tốc trung bình của thang máy là $v_{tb} = \frac{s}{t} = \frac{42}{24} = 1,75 \text{ (m/s)}$.

