

BÀI 17. HÀM SỐ LIÊN TỤC**PHẦN I. TRẮC NGHIỆM 4 LỰA CHỌN****Đơn vị kiến thức 1. Hàm số liên tục tại một điểm**

Câu 1. [NB] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng chứa x_0 . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(x)$ liên tục tại x_0 khi $f(x_0) = 0$.
- B. $f(x)$ liên tục tại x_0 khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ tồn tại.
- C. $f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- D. $f(x)$ liên tục tại x_0 khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Câu 2. [NB] Cho $f(x) = x^3 - 2x + 1$. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 3. [TH] Cho $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2, \\ k, & x = 2. \end{cases}$. Để $f(x)$ liên tục tại $x = 2$ thì k bằng

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

Câu 4. [TH] Cho $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4}, & x \neq 4, \\ a, & x = 4. \end{cases}$. Để $f(x)$ liên tục tại $x = 4$ thì a bằng

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{9}$. D. 6.

Câu 5. [TH] Cho $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x < 2, \\ ax + 3, & x \geq 2. \end{cases}$. Để $f(x)$ liên tục tại $x = 2$ thì a bằng

A. -1. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 6. [TH] Cho $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0, \\ 2, & x = 0, \\ x^2 + 1, & x > 0. \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.
- B. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ không tồn tại.
- C. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ nhưng $f(x)$ không liên tục tại $x = 0$.
- D. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Câu 7. [VD] Cho $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + (m-1)x - m}{x-1}, & x \neq 1, \\ 4, & x = 1. \end{cases}$. Để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ thì m bằng

A. -3. B. 1. C. 2. D. 3.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, & x \neq 2, \\ a + 1, & x = 2. \end{cases}$$

Câu 8. [VD] Cho

A. 3.

B. 7.

C. 11.

D. 12.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x-2}, & x \neq 2, \\ 0, & x = 2. \end{cases}$$

Câu 9. [VD] Cho

A. $f(2)$ không xác định.

B. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$.

C. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$.

D. $f(x)$ không liên tục tại $x = 2$.

Đơn vị kiến thức 2. Hàm số liên tục trên một khoảng, một đoạn

Câu 10. [NB] Hàm số nào sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{1}{x-1}$.

B. $y = x^4 - 3x + 2$.

C. $y = \sqrt{x-2}$.

D. $y = \tan x$.

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$$

Câu 11. [TH] Cho

A. $(-\infty; 3)$.

B. $(-3; 3)$.

C. $[-3; 3]$.

D. $(-3; +\infty)$.

Câu 12. [TH] Hàm số $f(x) = \sqrt{5-2x}$ liên tục trên nửa khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right]$.

B. $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

C. $(-\infty; 5]$.

D. $[0; +\infty)$.

Câu 13. [TH] Khoảng lớn nhất chứa 0 mà hàm số $y = \tan x$ liên tục là

A. $(-\pi; \pi)$.

B. $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

C. $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

D. $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$$

Câu 14. [TH] Hàm số

A. $(-2; 1)$.

B. $[-2; +\infty)$.

C. $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

D. $[-2; 1) \cup (1; +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x < 1, \\ 3-x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Câu 15. [TH] Cho

A. $f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$.

B. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

C. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

D. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & -1 \leq x < 1, \\ 3x - 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Câu 16. [VD] Cho

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 17. [TH] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

- A. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$. B. $f(a) = f(b)$.
 C. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$. D. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Câu 18. [VD] Một dịch vụ vận chuyển tính cước theo quãng đường x (km) như bảng sau:

Quãng đường	Số tiền phải trả
$0 \leq x \leq 10$	$8000x$ đồng
$x > 10$	$80000 + 10000(x - 10)$ đồng

Gọi $C(x)$ là số tiền phải trả. Khẳng định đúng là

- A. $C(x)$ gián đoạn tại $x = 0$. B. $C(x)$ gián đoạn tại $x = 10$.
 C. $C(x)$ liên tục tại $x = 10$. D. $\lim_{x \rightarrow 10^+} C(x) = 100000$.

Đơn vị kiến thức 3. Một số tính chất cơ bản của hàm số liên tục

Câu 19. [NB] Cho $f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại x_0 . Để $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 , điều kiện cần thêm là

A. $f(x_0) = 0$. B. $g(x_0) \neq 0$. C. $f(x_0) = g(x_0)$. D. $g(x_0) = 0$.

Câu 20. [TH] Hàm số $h(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$ không liên tục tại điểm nào sau đây?

A. $x = -1$. B. $x = 0$. C. $x = 2$. D. $x = 3$.

Câu 21. [TH] Cho $f(x)$ liên tục trên $[1; 2]$, biết $f(1) = -3$ và $f(2) = 5$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. Phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên $(1; 2)$.
 B. Phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm trên $(1; 2)$.
 C. Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(1; 2)$.
 D. $f(x) = 0$ tại $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Câu 22. [TH] Xét phương trình $x^3 + x - 1 = 0$. Dựa vào tính liên tục của đa thức, có thể khẳng định phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng

- A. $(-2; -1)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 1)$. D. $(1; 2)$.

Câu 23. [VD] Xét hàm số $f(x) = x^5 + 2x - 4$. Khoảng nào sau đây chứa ít nhất một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$?

- A. $(-1; 0)$. B. $(1; 2)$. C. $(2; 3)$. D. $(3; 4)$.

Câu 24. [VD] Với tham số m , xét hàm số $f(x) = x^2 - m$ trên $[1; 3]$. Điều kiện nào sau đây đảm bảo định lý về giá trị trung gian cho phép kết luận phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(1; 3)$?

- A. $1 < m < 9$. B. $m < 1$. C. $m > 9$. D. $m = 1$ hoặc $m = 9$.

Câu 25. [TH] Hàm số $h(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x+3}$ liên tục trên

- A. $(-2; 2)$. B. $[-2; 2]$. C. $[-3; 2]$. D. $(-3; 2]$.

Câu 26. [VD] Xét phương trình $x^3 - 4x + 1 = 0$. Dựa vào các giá trị của hàm số tại $-3, -2, 0, 1, 2$, có thể khẳng định phương trình có ít nhất bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 27. [VD] Nhiệt độ $T(t)$ của một thiết bị thay đổi liên tục theo thời gian trên khoảng $0 \leq t \leq 10$ phút. Biết $T(0) = 18^\circ\text{C}$ và $T(10) = 26^\circ\text{C}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Có thời điểm nhiệt độ bằng 30°C .
 B. Có ít nhất một thời điểm $t \in (0; 10)$ mà $T(t) = 22^\circ\text{C}$.
 C. Nhiệt độ tăng đều trong suốt 10 phút.
 D. Chỉ có đúng một thời điểm nhiệt độ bằng 22°C .

Câu 28. [VD] Cho $f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại x_0 , với $f(x_0) = 2$ và $g(x_0) = a$. Hàm số $h(x) = \frac{f(x)+1}{g(x)-3}$ liên tục tại x_0 khi

- A. $a = 0$. B. $a = 2$. C. $a = 3$. D. $a \neq 3$.

PHẦN II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG - SAI

Đơn vị kiến thức 1. Hàm số liên tục tại một điểm

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

Câu 1. [TH] Xét

- a) $f(1) = 2$.
 b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.
 c) $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.
 d) $x = 1$ là điểm gián đoạn của $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Câu 2. [TH] Xét

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$.
 b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ tồn tại.
 d) $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Câu 3. [VD] Cho $f(x) = \begin{cases} mx + 1, & x < 1, \\ x^2 + m, & x \geq 1, \end{cases}$ với m là tham số thực.

- a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = m + 1$.

- b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = m + 1$.
- c) $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ với mọi $m \in \mathbb{R}$.
- d) $f(x)$ chỉ liên tục tại $x = 1$ khi $m = 0$.

Đơn vị kiến thức 2. Hàm số liên tục trên một khoảng, một đoạn

Câu 4. [TH] Xét $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$.

- a) Tập xác định của $f(x)$ là $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2, x \neq 2\}$.
- b) $f(x)$ liên tục trên $(-2; 2)$.
- c) $f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$.
- d) $f(x)$ liên tục trên $(2; +\infty)$.

Câu 5. [TH] Xét $f(x) = \sqrt{x+1}$.

- a) Tập xác định của $f(x)$ là $[-1; +\infty)$.
- b) $f(x)$ liên tục trên tập xác định của nó.
- c) $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; -1)$.
- d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$.

Câu 6. [VD] Cho $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

- a) $f(x)$ liên tục trên $(0; 1)$.
- b) $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.
- c) $f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$.
- d) $f(x)$ gián đoạn tại $x = 2$.

Đơn vị kiến thức 3. Một số tính chất cơ bản của hàm số liên tục

Câu 7. [TH] Cho $f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại x_0 .

- a) $f(x) + g(x)$ liên tục tại x_0 .
- b) $f(x)g(x)$ liên tục tại x_0 .
- c) $\frac{f(x)}{g(x)}$ luôn liên tục tại x_0 .
- d) Nếu $g(x_0) \neq 0$ thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 .

Câu 8. [TH] Xét $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

- a) $f(x)$ liên tục trên $[-1; 0]$.
- b) $f(-1) \cdot f(0) < 0$.

- c) Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1; 0)$.
- d) $f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$ và $f(0)f(2) > 0$ nên phương trình không có nghiệm trên $(0; 2)$.

Câu 9. [TH] Cho $f(x)$ liên tục trên $[0; 4]$, biết $f(0) = -2$ và $f(4) = 6$.

- a) Tồn tại $c \in (0; 4)$ sao cho $f(c) = 0$.
- b) Tồn tại $c \in (0; 4)$ sao cho $f(c) = 3$.
- c) Tồn tại $c \in (0; 4)$ sao cho $f(c) = 10$.
- d) Nếu giả sử $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in (0; 4)$ thì mâu thuẫn với định lý về giá trị trung gian.

Câu 10. [VD] Cước vận chuyển $C(x)$ (đồng), với x tính bằng km, được cho bởi

$$C(x) = \begin{cases} 10000, & 0 \leq x \leq 0,5, \\ 10000 + 12000(x - 0,5), & 0,5 < x \leq 10, \\ 124000 + 10000(x - 10), & x > 10. \end{cases}$$

- a) $C(0,5) = 10000$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 0,5^+} C(x) = 10000$.
- c) $C(x)$ liên tục tại $x = 10$.
- d) $C(x)$ gián đoạn trên miền $x \geq 0$.

PHẦN III. CÂU TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. [TH] Tính $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3, \\ m - 1, & x = 3. \end{cases}$$

Câu 2. [VD] Cho

Tìm m để $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2, & x < 1, \\ 3x - a, & x \geq 1. \end{cases}$$

Câu 3. [VD] Cho . Tìm a để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Đơn vị kiến thức 2. Hàm số liên tục trên một khoảng, một đoạn

$$f(x) = \frac{x+2}{(x+1)(x-2)}$$

Câu 4. [TH] Hàm số có bao nhiêu khoảng liên tục lớn nhất?

Câu 5. [TH] Tìm số nguyên lớn nhất k sao cho hàm số $f(x) = \sqrt{7-x}$ liên tục trên đoạn $[0; k]$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + m, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Câu 6. [VD] Cho . Tìm m để $f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$.

ĐÁP ÁN

Phần I. Trắc nghiệm 4 lựa chọn

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	C	C	B	B	C	C	D	C	A	B

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Câu	1	12	1	14	1	16	1	18	1	20
Đáp án	B	A	C	D	A	B	D	C	B	C
Câu	2	22	2	24	2	26	2	28	2	30
Đáp án	C	C	B	A	B	C	B	D		

Phần II. Trắc nghiệm Đúng - Sai

Câu	a)	b)	c)	d)
1	Đúng	Đúng	Đúng	Sai
2	Đúng	Đúng	Sai	Sai
3	Đúng	Đúng	Đúng	Sai
4	Đúng	Đúng	Sai	Đúng
5	Đúng	Đúng	Sai	Đúng
6	Đúng	Đúng	Đúng	Sai
7	Đúng	Đúng	Sai	Đúng
8	Đúng	Đúng	Đúng	Sai
9	Đúng	Đúng	Sai	Đúng
10	Đúng	Đúng	Đúng	Sai

Phần III. Câu trả lời ngắn

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	1	7	0,5	3	7
Câu	6	7	8	9	10
Đáp án	2	2	1	3	11

LỜI GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM 4 LỰA CHỌN

Đơn vị kiến thức 1. Hàm số liên tục tại một điểm

Câu 1. [NB] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng chứa x_0 . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(x)$ liên tục tại x_0 khi $f(x_0) = 0$.
- B. $f(x)$ liên tục tại x_0 khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ tồn tại.
- C. $f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- D. $f(x)$ liên tục tại x_0 khi $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Lời giải

Theo định nghĩa, hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
Vì vậy phương án đúng là C.

Câu 2. [NB] Cho $f(x) = x^3 - 2x + 1$. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ là

- A. 3.
- B. 4.
- C. 5.
- D. 6.

Lời giải

Vì $f(x) = x^3 - 2x + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

Vậy chọn C.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2, \\ k, & x = 2. \end{cases}$$

Câu 3. [TH] Cho $f(x)$ liên tục tại $x = 2$ thì k bằng

- A. 2.
- B. 4.
- C. 6.
- D. 8.

Lời giải

Với $x \neq 2$,

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$.

Để $f(x)$ liên tục tại $x = 2$ cần $f(2) = 4$, tức là $k = 4$.

Vậy chọn B.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4}, & x \neq 4, \\ a, & x = 4. \end{cases}$$

Câu 4. [TH] Cho $f(x)$ liên tục tại $x = 4$ thì a bằng

- A. $\frac{1}{3}$.
- B. $\frac{1}{6}$.
- C. $\frac{1}{9}$.
- D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Ta khử dạng $\frac{0}{0}$ bằng cách nhân với biểu thức liên hợp: $\frac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4} = \frac{x + 5 - 9}{(x - 4)(\sqrt{x+5} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x+5} + 3}$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}$.

Muốn liên tục tại $x = 4$ thì $a = f(4) = \frac{1}{6}$.
 Vậy chọn **B**.

Câu 5. [TH] Cho $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x < 2, \\ ax+3, & x \geq 2. \end{cases}$. Để $f(x)$ liên tục tại $x = 2$ thì a bằng

- A. -1 .
- B. 0 .
- C. 1 .
- D. 2 .

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \cdot 2 - 1 = 5,$$

Tại $x = 2$,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 2a + 3.$$

còn

Hàm số liên tục tại $x = 2$ khi $2a + 3 = 5 \Rightarrow a = 1$.

Vậy chọn **C**.

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ 2, & x = 0, \\ x^2+1, & x > 0. \end{cases}$$

Câu 6. [TH] Cho . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.
- B. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ không tồn tại.
- C. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ nhưng $f(x)$ không liên tục tại $x = 0$.
- D. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Lời giải

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1, \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2+1) = 1.$$

Vì hai giới hạn một bên bằng nhau nên $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Nhưng $f(0) = 2 \neq 1$, do đó $f(x)$ không liên tục tại $x = 0$.

Vậy chọn **C**.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + (m-1)x - m}{x-1}, & x \neq 1, \\ 4, & x = 1. \end{cases}$$

Câu 7. [VD] Cho . Để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ thì m bằng

- A. -3 .
- B. 1 .
- C. 2 .
- D. 3 .

Lời giải

Ta phân tích tử số: $x^2 + (m-1)x - m = (x-1)(x+m)$.

Với $x \neq 1$, $f(x) = x + m$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 + m$.

Để liên tục tại $x = 1$ cần $1 + m = f(1) = 4 \Rightarrow m = 3$.

Vậy chọn **D**.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, & x \neq 2, \\ a + 1, & x = 2. \end{cases}$$

Câu 8. [VD] Cho $f(x)$ liên tục tại $x = 2$ thì a bằng

A. 3.

B. 7.

C. 11.

D. 12.

Lời giải

Với $x \neq 2$, $\frac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 2x + 4$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 12$.

Điều kiện liên tục tại $x = 2$ là $a + 1 = 12 \Rightarrow a = 11$.

Vậy chọn **C**.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x-2}, & x \neq 2, \\ 0, & x = 2. \end{cases}$$

Câu 9. [VD] Cho $f(x)$ không xác định không xác định là Sai?

A. $f(2)$ không xác định.

B. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$.

C. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$.

D. $f(x)$ không liên tục tại $x = 2$.

Lời giải

$f(2) = 0$ nên $f(2)$ không xác định không xác định là Sai.

Vậy chọn **A**.

Đơn vị kiến thức 2. Hàm số liên tục trên một khoảng, một đoạn

Câu 10. [NB] Hàm số nào sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{1}{x-1}$.

B. $y = x^4 - 3x + 2$.

C. $y = \sqrt{x-2}$.

D. $y = \tan x$.

Lời giải

Hàm đa thức liên tục trên toàn bộ $\mathbb{R}$. Trong bốn phương án, chỉ có $y = x^4 - 3x + 2$

là hàm đa thức xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
 Vậy chọn **B**.

Câu 11. [TH] Cho $f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$. Khoảng lớn nhất chứa 0 mà trên đó $f(x)$ liên tục là

- A. $(-\infty; 3)$.
- B. $(-3; 3)$.
- C. $[-3; 3]$.
- D. $(-3; +\infty)$.

Lời giải

Hàm phân thức hữu tỉ liên tục trên tập xác định.

Ta có $x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3, x \neq 3$.

Vì vậy các khoảng liên tục lớn nhất là $(-\infty; -3), (-3; 3), (3; +\infty)$.

Khoảng lớn nhất chứa 0 là $(-3; 3)$.

Vậy chọn **B**.

Câu 12. [TH] Hàm số $f(x) = \sqrt{5-2x}$ liên tục trên nửa khoảng nào sau đây?

- A. $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right]$.
- B. $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.
- C. $(-\infty; 5]$.
- D. $[0; +\infty)$.

Lời giải

Điều kiện xác định của căn thức là $5-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$.

Hàm căn liên tục trên tập xác định của nó, nên $f(x) = \sqrt{5-2x}$ liên tục trên $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right]$.
 Vậy chọn **A**.

Câu 13. [TH] Khoảng lớn nhất chứa 0 mà hàm số $y = \tan x$ liên tục là

- A. $(-\pi; \pi)$.
- B. $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.
- C. $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- D. $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm $y = \tan x$ liên tục tại mọi điểm mà $\cos x \neq 0$, tức là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Hai điểm gần đoạn gần 0 nhất là $-\frac{\pi}{2}$ và $\frac{\pi}{2}$.

Vì vậy khoảng liên tục lớn nhất chứa 0 là $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Vậy chọn C.

Câu 14. [TH] Hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$ liên tục trên tập nào sau đây?

- A. $(-2; 1)$.
- B. $[-2; +\infty)$.
- C. $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
- D. $[-2; 1) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$, và $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$.

Do tử và mẫu đều liên tục trên miền xác định, hàm số liên tục trên $[-2; 1) \cup (1; +\infty)$.
Vậy chọn D.

Câu 15. [TH] Cho $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x < 1, \\ 3-x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$. Khẳng định đúng là

- A. $f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$.
- B. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.
- C. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.
- D. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 2$.

Lời giải

Trên $[0; 1)$, $f(x) = x+1$ là hàm đa thức nên liên tục. Trên $[1; 2]$, $f(x) = 3-x$ cũng liên tục.

Chỉ cần kiểm tra tại điểm $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 = f(1).$$

Tại hai đầu mút, các giới hạn một phía cũng bằng giá trị hàm.

Do đó $f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$.

Vậy chọn A.

Câu 16. [VD] Cho $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & -1 \leq x < 1, \\ 3x - 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$. Để $f(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ thì a bằng

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.

Lời giải

Hai nhánh đều liên tục trên các khoảng tương ứng, nên chỉ cần kiểm tra tại $x = 1$.

Từ bên trái: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + a$.

Từ bên phải và tại $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2.$$

Muốn liên tục trên $[-1; 2]$ cần $1 + a = 2 \Rightarrow a = 1$.

Vậy chọn **B**.

Câu 17. [TH] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

A. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.

B. $f(a) = f(b)$.

C. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.

D. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Lời giải

Theo định nghĩa liên tục trên đoạn $[a; b]$, hàm số phải liên tục trên $(a; b)$ và thỏa mãn điều kiện một phía tại hai đầu mút:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a),$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

Vậy chọn **D**.

Câu 18. [VD] Một dịch vụ vận chuyển tính cước theo quãng đường x (km) như bảng sau:

Quãng đường	Số tiền phải trả
$0 \leq x \leq 10$	$8000x$ đồng
$x > 10$	$80000 + 10000(x - 10)$ đồng

Gọi $C(x)$ là số tiền phải trả. Khẳng định đúng là

A. $C(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

B. $C(x)$ gián đoạn tại $x = 10$.

C. $C(x)$ liên tục tại $x = 10$.

D. $\lim_{x \rightarrow 10^+} C(x) = 100000$.

Lời giải

Tại $x = 10$, theo công thức thứ nhất,

$$C(10) = 8000 \cdot 10 = 80000.$$

Giới hạn bên phải:

$$\lim_{x \rightarrow 10^+} C(x) = 80000 + 10000(10 - 10) = 80000.$$

Giới hạn bên trái cũng bằng 80000 .

Do đó $\lim_{x \rightarrow 10} C(x) = C(10) = 80000$, nên $C(x)$ liên tục tại $x = 10$.

Vậy chọn **C**.

Đơn vị kiến thức 3. Một số tính chất cơ bản của hàm số liên tục

Câu 19. [NB] Cho $f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại x_0 . Để $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 , điều kiện cần thêm là

- A. $f(x_0) = 0$.
- B. $g(x_0) \neq 0$.
- C. $f(x_0) = g(x_0)$.
- D. $g(x_0) = 0$.

Lời giải

Nếu f và g liên tục tại x_0 thì thương $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 với điều kiện mẫu không bằng 0 tại điểm đó, tức là $g(x_0) \neq 0$.

Vậy chọn B.

Câu 20. [TH] Hàm số $h(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$ không liên tục tại điểm nào sau đây?

- A. $x = -1$.
- B. $x = 0$.
- C. $x = 2$.
- D. $x = 3$.

Lời giải

Hàm phân thức $h(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$

liên tục tại mọi điểm thuộc tập xác định. Mẫu số bằng 0 khi $x = 2$, nên đây là điểm duy nhất trong các phương án mà hàm không liên tục.

Vậy chọn C.

Câu 21. [TH] Cho $f(x)$ liên tục trên $[1; 2]$, biết $f(1) = -3$ và $f(2) = 5$. Kết luận nào sau đây đúng?

- A. Phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên $(1; 2)$.
- B. Phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm trên $(1; 2)$.
- C. Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(1; 2)$.
- D. $f(x) = 0$ tại $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Lời giải

Vì $f(x)$ liên tục trên $[1; 2]$ và $f(1) = -3 < 0 < 5 = f(2)$, theo định lý về giá trị trung gian, tồn tại ít nhất một $c \in (1; 2)$ sao cho $f(c) = 0$.

Định lý không khẳng định nghiệm là duy nhất.

Vậy chọn C.

Câu 22. [TH] Xét phương trình $x^3 + x - 1 = 0$. Dựa vào tính liên tục của đa thức, có thể khẳng định phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng

- A. $(-2; -1)$.

- B. $(-1; 0)$.
 C. $(0; 1)$.
 D. $(1; 2)$.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^3 + x - 1$.

Đây là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$f(0) = -1 < 0,$$

$$f(1) = 1 > 0.$$

Vì $f(0)f(1) < 0$, theo định lý giá trị trung gian, phương trình có ít nhất một nghiệm trong $(0; 1)$.

Vậy chọn C.

Câu 23. [VD] Xét hàm số $f(x) = x^5 + 2x - 4$. Khoảng nào sau đây chứa ít nhất một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$?

- A. $(-1; 0)$.
 B. $(1; 2)$.
 C. $(2; 3)$.
 D. $(3; 4)$.

Lời giải

Đặt

$$f(x) = x^5 + 2x - 4.$$

Hàm f là đa thức nên liên tục. Ta tính

$$f(1) = 1 + 2 - 4 = -1 < 0,$$

$$f(2) = 32 + 4 - 4 = 32 > 0.$$

Do $f(1)f(2) < 0$, phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(1; 2)$.

Vậy chọn B.

Câu 24. [VD] Với tham số m , xét hàm số $f(x) = x^2 - m$ trên $[1; 3]$. Điều kiện nào sau đây đảm bảo định lý về giá trị trung gian cho phép kết luận phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(1; 3)$?

- A. $1 < m < 9$.
 B. $m < 1$.
 C. $m > 9$.
 D. $m = 1$ hoặc $m = 9$.

Lời giải

Với $f(x) = x^2 - m$,

ta có $f(1) = 1 - m$, $f(3) = 9 - m$.

Để định lý giá trị trung gian bảo đảm có nghiệm trong $(1; 3)$, cần $(1 - m)(9 - m) < 0$.

Bất đẳng thức này đúng khi $1 < m < 9$.

Vậy chọn A.

Câu 25. [TH] Hàm số $h(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x+3}$ liên tục trên

A. $(-2; 2)$.

B. $[-2; 2]$.

C. $[-3; 2]$.

D. $(-3; 2]$.

Lời giải

Với căn thức, $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Trên đoạn này, $x+3 \neq 0$. Do đó cả hai hàm $\sqrt{4-x^2}$ và $\frac{1}{x+3}$ đều liên tục trên $[-2; 2]$, nên chúng liên tục trên $[-2; 2]$.

Vậy chọn B.

Câu 26. [VD] Xét phương trình $x^3 - 4x + 1 = 0$. Dựa vào các giá trị của hàm số tại $-3, -2, 0, 1, 2$, có thể khẳng định phương trình có ít nhất bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^3 - 4x + 1$.

Ta có $f(-3) = -14 < 0, f(-2) = 1 > 0$ nên có ít nhất một nghiệm trong $(-3; -2)$.

Tiếp theo, $f(0) = 1 > 0, f(1) = -2 < 0$, nên có ít nhất một nghiệm trong $(0; 1)$.

Cuối cùng, $f(1) = -2 < 0, f(2) = 1 > 0$ nên có ít nhất một nghiệm trong $(1; 2)$.

Ba khoảng trên đôi một không giao nhau, vì vậy có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt.

Vậy chọn C.

Câu 27. [VD] Nhiệt độ $T(t)$ của một thiết bị thay đổi liên tục theo thời gian trên khoảng $0 \leq t \leq 10$ phút.

Biết $T(0) = 18^\circ\text{C}$ và $T(10) = 26^\circ\text{C}$. Khẳng định nào sau đây chắc chắn đúng?

A. Có thời điểm nhiệt độ bằng 30°C .

B. Có ít nhất một thời điểm $t \in (0; 10)$ mà $T(t) = 22^\circ\text{C}$.

C. Nhiệt độ tăng đều trong suốt 10 phút.

D. Chỉ có đúng một thời điểm nhiệt độ bằng 22°C .

Lời giải

Nhiệt độ $T(t)$ thay đổi liên tục trên $[0; 10]$ và $T(0) = 18, T(10) = 26$.

Số 22 nằm giữa 18 và 26. Theo định lý giá trị trung gian, tồn tại ít nhất một $t \in (0; 10)$ sao cho $T(t) = 22$.

Không thể kết luận nhiệt độ tăng đều hoặc thời điểm đó là duy nhất.

Vậy chọn B.

Câu 28. [VD] Cho $f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại x_0 , với $f(x_0) = 2$ và $g(x_0) = a$. Hàm số $h(x) = \frac{f(x)+1}{g(x)-3}$ liên tục tại x_0 khi

A. $a = 0$.

B. $a = 2$.

C. $a = 3$.

D. $a \neq 3$.

Lời giải

Vì f và g liên tục tại x_0 , tử số $f(x)+1$ và mẫu số $g(x)-3$ đều liên tục tại x_0 .

$$h(x) = \frac{f(x)+1}{g(x)-3}$$

Thương liên tục tại x_0 khi mẫu khác 0 tại x_0 : $g(x_0)-3 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 3$.

Vậy chọn D.

PHẦN II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG - SAI

Đơn vị kiến thức 1. Hàm số liên tục tại một điểm

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

Câu 1. [TH] Xét

a) $f(1) = 2$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

c) $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

d) $x = 1$ là điểm gián đoạn của $f(x)$.

Lời giải

Với $x \neq 1$, $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$.

Do đó:

a) **Đúng**, vì theo định nghĩa của hàm số, $f(1) = 2$.

b) **Đúng**, vì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$.

c) **Đúng**, vì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2$.

d) **Sai**, vì f liên tục tại $x = 1$.

Kết luận: a) Đúng; b) Đúng; c) Đúng; d) Sai.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Câu 2. [TH] Xét

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ tồn tại.
- d) $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Lời giải

Với $x < 0$, $|x| = -x$ nên $f(x) = -1$. Với $x > 0$, $|x| = x$ nên $f(x) = 1$.

- a) **Đúng**, vì $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$.
- b) **Đúng**, vì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.
- c) **Sai**, vì hai giới hạn một bên khác nhau nên $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ không tồn tại.
- d) **Sai**, vì điều kiện đầu tiên để liên tục là giới hạn hai phía phải tồn tại.
- Kết luận: **a)** Đúng; **b)** Đúng; **c)** Sai; **d)** Sai.

$$f(x) = \begin{cases} mx + 1, & x < 1, \\ x^2 + m, & x \geq 1, \end{cases} \text{ với } m \text{ là tham số thực.}$$

Câu 3. [VD] Cho

- a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = m + 1$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = m + 1$.
- c) $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ với mọi $m \in \mathbb{R}$.
- d) $f(x)$ chỉ liên tục tại $x = 1$ khi $m = 0$.

Lời giải

Ta xét tại điểm $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = m + 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1^2 + m = m + 1,$$

$$\text{và } f(1) = 1 + m.$$

Vì ba giá trị luôn bằng nhau với mọi $m \in \mathbb{R}$, hàm số liên tục tại $x = 1$ với mọi m .

- a) **Đúng**.
- b) **Đúng**.
- c) **Đúng**.
- d) **Sai**.

Kết luận: **a)** Đúng; **b)** Đúng; **c)** Đúng; **d)** Sai.

Đơn vị kiến thức 2. Hàm số liên tục trên một khoảng, một đoạn

Câu 4. [TH] Xét $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$.

- a) Tập xác định của $f(x)$ là $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2, x \neq 2\}$.
- b) $f(x)$ liên tục trên $(-2; 2)$.
- c) $f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$.
- d) $f(x)$ liên tục trên $(2; +\infty)$.

Lời giải

Ta có $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, nên mẫu bằng 0 tại $x = -2$ và $x = 2$.

- a) **Đúng**, vì tập xác định là $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2, x \neq 2\}$.
 - b) **Đúng**, vì hàm phân thức liên tục trên $(-2; 2)$.
 - c) **Sai**, vì hàm không xác định tại hai đầu mút -2 và 2 .
 - d) **Đúng**, vì $(2; +\infty)$ nằm hoàn toàn trong tập xác định.
- Kết luận: **a)** Đúng; **b)** Đúng; **c)** Sai; **d)** Đúng.

Câu 5. [TH] Xét $f(x) = \sqrt{x+1}$.

- a) Tập xác định của $f(x)$ là $[-1; +\infty)$.
- b) $f(x)$ liên tục trên tập xác định của nó.
- c) $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; -1)$.
- d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Hàm căn liên tục trên tập xác định.

- a) **Đúng**, tập xác định là $[-1; +\infty)$.
- b) **Đúng**, f liên tục trên tập xác định.
- c) **Sai**, vì trên $(-\infty; -1)$ hàm không xác định.
- d) **Đúng**, vì $\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x+1} = 0 = f(-1)$.

Kết luận: **a)** Đúng; **b)** Đúng; **c)** Sai; **d)** Đúng.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Câu 6. [VD] Cho

- a) $f(x)$ liên tục trên $(0;1)$.
 b) $f(x)$ liên tục tại $x=1$.
 c) $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$.
 d) $f(x)$ gián đoạn tại $x=2$.

Lời giải

Trên mỗi khoảng con, hàm số là đa thức nên liên tục. Tại $x=1$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 - 1 = 1 = f(1).$$

Tại $x=0$ và $x=2$, các giới hạn một phía tương ứng cũng bằng giá trị hàm.

a) **Đúng.**

b) **Đúng.**

c) **Đúng**, hàm liên tục trên $[0;2]$.

d) **Sai**, hàm liên tục tại đầu mút $x=2$ theo giới hạn bên trái.

Kết luận: a) Đúng; b) Đúng; c) Đúng; d) Sai.

Đơn vị kiến thức 3. Một số tính chất cơ bản của hàm số liên tục

Câu 7. [TH] Cho $f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại x_0 .

a) $f(x) + g(x)$ liên tục tại x_0 .

b) $f(x)g(x)$ liên tục tại x_0 .

c) $\frac{f(x)}{g(x)}$ luôn liên tục tại x_0 .

d) Nếu $g(x_0) \neq 0$ thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 .

Lời giải

Dựa vào các tính chất của hàm liên tục:

a) **Đúng**, tổng của hai hàm liên tục tại x_0 vẫn liên tục tại x_0 .

b) **Đúng**, tích của hai hàm liên tục tại x_0 vẫn liên tục tại x_0 .

c) **Sai**, thương chỉ liên tục khi mẫu khác 0 tại x_0 .

d) **Đúng**, nếu $g(x_0) \neq 0$ thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 .

Kết luận: a) Đúng; b) Đúng; c) Sai; d) Đúng.

Câu 8. [TH] Xét $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

a) $f(x)$ liên tục trên $[-1; 0]$.

b) $f(-1) \cdot f(0) < 0$.

c) Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1; 0)$.

d) $f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$ và $f(0)f(2) > 0$ nên phương trình không có nghiệm trên $(0; 2)$.

Lời giải

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$
Xét

a) **Đúng.** Vì $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó $f(x)$ liên tục trên $[-1; 0]$.

b) **Đúng.** Ta có $f(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 + 1 = -2$ và $f(0) = 1$.

$f(-1) \cdot f(0) = (-2) \cdot 1 = -2 < 0$
Suy ra

c) **Đúng.** Vì $f(x)$ liên tục trên $[-1; 0]$ và $f(-1) \cdot f(0) < 0$, nên theo định lý giá trị trung gian, phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1; 0)$.

d) **Sai.** Ta có $f(0) = 1$ và $f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$, nên $f(0)f(2) = 1 > 0$.

Tuy nhiên, từ $f(0)f(2) > 0$ không thể kết luận phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên $(0; 2)$.

Thực tế, $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0$, $x = 1 \in (0; 2)$, nên $x = 1$ là một nghiệm.

Kết luận: a) Đúng; b) Đúng; c) Đúng; d) Sai.

Câu 9. [TH] Cho $f(x)$ liên tục trên $[0; 4]$, biết $f(0) = -2$ và $f(4) = 6$.

a) Tồn tại $c \in (0; 4)$ sao cho $f(c) = 0$.

b) Tồn tại $c \in (0; 4)$ sao cho $f(c) = 3$.

c) Tồn tại $c \in (0; 4)$ sao cho $f(c) = 10$.

d) Nếu giả sử $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in (0; 4)$ thì mâu thuẫn với định lý về giá trị trung gian.

Lời giải

Vì f liên tục trên $[0; 4]$, nó nhận mọi giá trị nằm giữa $f(0) = -2$ và $f(4) = 6$.

a) Đúng, vì $0 \in (-2; 6)$.

b) Đúng, vì $3 \in (-2; 6)$.

c) Sai, vì 10 không nằm giữa -2 và 6 .

d) Đúng, vì nếu $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in (0; 4)$ thì trái với kết luận bắt buộc của định lý giá trị trung gian.
Kết luận: **a) Đúng; b) Đúng; c) Sai; d) Đúng**.

Câu 10. [VD] Cước vận chuyển $C(x)$ (đồng), với x tính bằng km, được cho bởi

$$C(x) = \begin{cases} 10000, & 0 \leq x \leq 0,5, \\ 10000 + 12000(x - 0,5), & 0,5 < x \leq 10, \\ 124000 + 10000(x - 10), & x > 10. \end{cases}$$

a) $C(0,5) = 10000$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0,5^+} C(x) = 10000$.

c) $C(x)$ liên tục tại $x = 10$.

d) $C(x)$ gián đoạn trên miền $x \geq 0$.

Lời giải

Ta kiểm tra hai điểm đổi công thức.

Tại $x = 0,5$: $C(0,5) = 10000$, $\lim_{x \rightarrow 0,5^+} C(x) = 10000 + 12000(0,5 - 0,5) = 10000$.

Tại $x = 10$: $C(10) = 10000 + 12000(10 - 0,5) = 124000$,

và $\lim_{x \rightarrow 10^+} C(x) = 124000 + 10000(10 - 10) = 124000$.

Vậy hàm cước liên tục tại cả hai điểm ghép.

a) Đúng.

b) Đúng.

c) Đúng.

d) Sai, vì $C(x)$ liên tục trên miền $x \geq 0$.

Kết luận: **a) Đúng; b) Đúng; c) Đúng; d) Sai**.

PHẦN III. CÂU TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. [TH] Tính $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$.

Lời giải

Ta phân tích: $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$.

Với $x \neq 5$, $\frac{x^2 - 25}{x - 5} = x + 5$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$.

Đáp án: 10.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3, \\ m - 1, & x = 3. \end{cases}$$

Câu 2. [VD] Cho

Tìm m để $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

Lời giải

Với $x \neq 3$, $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$.

Để liên tục tại $x = 3$ cần $f(3) = m - 1 = 6$.

Vậy $m = 7$.

Đáp án: 7.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2, & x < 1, \\ 3x - a, & x \geq 1. \end{cases}$$

Câu 3. [VD] Cho

Tìm a để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Lời giải

Điều kiện liên tục tại $x = 1$ là $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + 2$,

và $f(1) = 3 - a$.

Do đó $a + 2 = 3 - a \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} = 0,5$.

Đáp án: 0,5.

Đơn vị kiến thức 2. Hàm số liên tục trên một khoảng, một đoạn

$$f(x) = \frac{x + 2}{(x + 1)(x - 2)}$$

Câu 4. [TH] Hàm số có bao nhiêu khoảng liên tục lớn nhất?

Lời giải

Hàm phân thức liên tục tại mọi điểm mà mẫu khác 0.

Ta có $(x + 1)(x - 2) = 0$.

Suy ra $x = -1$ hoặc $x = 2$.

Hai điểm này chia trục số thành ba khoảng liên tục lớn nhất: $(-\infty; -1)$, $(-1; 2)$, $(2; +\infty)$.

Vậy có 3 khoảng.

Đáp án: 3.

Câu 5. [TH] Tìm số nguyên lớn nhất k sao cho hàm số $f(x) = \sqrt{7 - x}$ liên tục trên đoạn $[0; k]$.

Lời giải

Hàm $f(x) = \sqrt{7-x}$

xác định và liên tục khi $7-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 7$.

Để liên tục trên đoạn $[0; k]$ cần $k \leq 7$. Số nguyên lớn nhất thỏa mãn là 7.

Đáp án: 7.

Câu 6. [VD] Cho $f(x) = \begin{cases} x^2 + m, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$. Tìm m để $f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$.

Lời giải

Mỗi nhánh đều liên tục trên khoảng của nó. Chỉ cần kiểm tra điểm ghép $x = 1$.

Từ bên trái và tại $x = 1$: $f(1) = 1 + m$.

Từ bên phải: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$.

Điều kiện liên tục: $1 + m = 3 \Rightarrow m = 2$.

Đáp án: 2.