CÁC DẠNG TOÁN BÀI GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC LƯỢNG GIÁC

Dạng 1: Đổi đơn vị giữa độ và radian. Độ dài cung tròn

- Sử dụng công thức chuyển đổi giữa số đo độ và số đo radian:

$1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{rad}$ $\quad$ $1\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$

- Xét đường tròn có bán kính R
  - Cung tròn có số đo $\alpha (0 \le \alpha \le 2\pi)$ thì có độ dài là $l = R.\alpha$
  - Cung tròn có số đo $a^\circ (0 \le a \le 360^\circ)$ thì có độ dài là $l = \frac{\pi.a}{180}.R$

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Đổi số đo của các góc sau ra radian:

a) 72° b) 600° c) $-37^\circ 45'30''$

Lời giải

$1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{rad}$ $\quad 72^\circ = 72.\frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}$; $\quad 600^\circ = 600.\frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{3}$

a) Vì nên

$$-37^\circ 45'30'' = -37^\circ - \left(\frac{45}{60}\right)^\circ - \left(\frac{30}{60.60}\right)^\circ = \left(\frac{4531}{120}\right)^\circ = \frac{4531}{120}.\frac{\pi}{180} \approx 0,6587$$

.

Bài tập 2: Đổi số đo của các góc sau ra độ:

a) $\frac{5\pi}{18}$ b) $\frac{3\pi}{5}$ c) -4

Lời giải

$1\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ $\quad \frac{5\pi}{18} = \left(\frac{5\pi}{18}.\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 50^\circ$; $\quad \frac{3\pi}{5} = \left(\frac{3\pi}{5}.\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 108^\circ$

Vì nên

$$-4 = -\left(4.\frac{180}{\pi}\right)^\circ = -\left(\frac{720}{\pi}\right)^\circ \approx -2260^\circ 48'$$

.

Bài tập 3: Trả lời các câu hỏi được nêu ra trong các trường hợp sau:

a) Trên đường tròn bán kính $r = 5$. Tìm độ dài của cung đo $\frac{\pi}{8}$

b) Trên đường tròn bán kính $r = 15$. Tìm độ dài của cung có số đo 50°

c) Một cung tròn có độ dài bằng 2 lần bán kính. Tìm số đo radian của cung tròn đó

d) Một đường tròn có $r = 30$. Tìm độ dài của một cung trên đường tròn có số đo $1,5$ rad

e) Một đường tròn có bán kính $R = \frac{10}{\pi}$ cm. Tìm độ dài của cung $\frac{\pi}{2}$ trên đường tròn.

f) Một đường tròn có bán kính $R=10$ cm. Tìm độ dài cung 40° trên đường tròn đó

Lời giải

a) Độ dài cung AB có số đo cung AB bằng n độ: $l=r.n=5.\frac{\pi}{8}$.

b) $l=\frac{\pi.r.n^\circ}{180^\circ}=\frac{\pi 15.50}{180}=\frac{25\pi}{6}$.

c) Ta có, cung tròn có độ dài bằng bán kính thì có số đo 1 radian. Vậy cung tròn đó có số đo là 2 radian.

d) Áp dụng công thức $l=\alpha R$ nên ta được độ dài cung tròn là 45 cm.

e) Độ dài cung có số đo α là $\ell=\alpha.R \Rightarrow \ell=\frac{\pi}{2}.\frac{10}{\pi}=5$ (cm).

f) Đổi đơn vị $40^\circ \Rightarrow \frac{40.\pi}{180}=\frac{2\pi}{9}$ $\Rightarrow$ độ dài cung $\ell=\frac{2\pi}{9}.10=\frac{20\pi}{9}=6,9813$ (cm).

Bài tập 4: Một bánh xe máy có đường kính 60. Nếu xe chạy với vận tốc 50(km/h) thì trong 5 giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng.

Lời giải

Trong một phút bánh xe quay được: $\left[\frac{50.1000}{3600}:(0,6.\pi)\right].5 \approx 36,9$.

Bài tập 5: Một đu quay ở công viên có bán kính bằng 10m. Tốc độ của đu quay là 3 vòng/phút. Hỏi mất bao lâu để đu quay quay được góc 270°?

Lời giải

Tính được: $270^\circ=\frac{270}{180}\pi=\frac{3}{2}\pi=\frac{3}{4}.2\pi$. Vậy đu quay quay được góc 270° khi nó quay được $\frac{3}{4}$ vòng. Đu quay quay được 1 vòng trong $\frac{1}{3}$ phút. Đu quay quay được $\frac{3}{4}$ vòng trong $\frac{3}{4}.\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$ phút.

Bài tập 6: Một đồng hồ treo tường có kim giờ dài $10,25$ cm, kim phút dài $13,25$ cm. Trong 30 phút kim giờ vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu?

Lời giải

Trong 6 giờ kim giờ vạch nên một cung có số đo là $\pi(\text{rad})$, vậy trong 30 phút kim giờ vạch nên cung có số đo là $\frac{\pi}{12}(\text{rad})$. Khi đó độ dài cung tròn mà kim giờ vạch ra trong 30 phút là:

$l = R.\alpha \Rightarrow l = 10,25.\frac{\pi}{12} = 2,68(\text{cm})$.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trên đường tròn bán kính 7 cm, lấy cung có số đo 54°. Độ dài l của cung tròn bằng

A. $\frac{21}{10}\pi\ (\text{cm})$. **B.** $\frac{11}{20}\pi\ (\text{cm})$. **C.** $\frac{63}{20}\pi\ (\text{cm})$. **D.** $\frac{20}{11}\pi\ (\text{cm})$.

Lời giải

Ta có $l = 7.\left(\frac{54^\circ}{180^\circ}.\pi\right) = \frac{21}{10}\pi\ (\text{cm})$.

Câu 2: Trên đường tròn đường kính 8cm, tính độ dài cung tròn có số đo bằng $1,5\,\text{rad}$.

A. 12cm. **B.** 4cm. **C.** 6cm. **D.** 15cm.

Lời giải

Tính được: $l = \alpha.R = 1,5.\frac{8}{2} = 6(cm)$.

Câu 3: Một đường tròn có bán kính $15(cm)$. Tìm độ dài cung tròn có góc ở tâm bằng 30° là:

A. $\frac{5\pi}{2}$. **B.** $\frac{5\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi}{5}$. **D.** $\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

$l = \frac{\pi a.R}{180} = \frac{\pi.30.15}{180} = \frac{5\pi}{2}$

Câu 4: Một đường tròn có bán kính 10, độ dài cung tròn 40° trên đường tròn gần bằng

A. 7. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 13.

Lời giải

$l = \frac{\pi a.R}{180} = \frac{\pi.40.10}{180} = \frac{20\pi}{9} \approx 7$

Câu 5: Một đường tròn có bán kính $R = \frac{10}{\pi}$, độ dài cung tròn $\frac{\pi}{2}$ là

A. 5. **B.** 5π. **C.** $\frac{5}{\pi}$. **D.** $\frac{\pi}{5}$.

Lời giải

$l = \alpha.R = \frac{10}{\pi}.\frac{\pi}{2} = 5$

Câu 6: Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. Cung tròn có bán kính $R = 5$ cm và có số đo $1,5$ rad thì có độ dài là $7,5$ cm.

B. Cung tròn có bán kính $R = 8$ cm và có độ dài 8 cm thi có số đo độ là $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

C. Độ dài cung tròn phụ thuộc vào bán kính của nó.

D. Góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo dương thì mọi góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo âm.

Lời giải

$(Ou, Ov) = 330^\circ; (Ov, Ou) = 30^\circ$

Câu góc lượng giác

Câu 7: Cho đường tròn có bán kính $6\ cm$. Tìm số đo của cung có độ dài là $3cm$:

A. 0,5. **B.** $\frac{0,5}{\pi}$. **C.** $0,5\pi$. **D.** 1.

Lời giải

$l = \alpha.R \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{3}{6} = 0,5$

Câu 8: Cung tròn bán kính bằng $8,43$ cm có số đo $3,85$ rad có độ dài là

A. $32,46$ cm. **B.** $32,45$ cm. **C.** $32,47$ cm. **D.** $32,5$ cm.

Lời giải

$l = \alpha.R = 3,85.8,43 \approx 32,46$

Câu 9: Một đồng hồ treo tường, kim giờ dài $10,57cm$. Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài là

A. $2,77cm$. **B.** $2,78cm$. **C.** $2,76cm$. **D.** $2,8cm$.

Lời giải

$\frac{2\pi.0,5}{12} = \frac{\pi}{12} \Rightarrow l = \alpha.R = \frac{\pi}{12}.10,57 \approx 2,77$

Trong 30 phút mũi kim giờ quét được một góc là

Câu 10: Bánh xe đạp có bán kính $50\,\text{cm}$. Một người quay bánh xe 5 vòng quanh trục thì quãng đường đi được là

A. $250\pi\,(\text{cm})$. **B.** $1000\pi\,(\text{cm})$. **C.** $500\pi\,(\text{cm})$. **D.** $200\pi\,(\text{cm})$.

Lời giải

Ta có $r = 50\,\text{cm}$ suy ra $l = 50.2\pi.5 = 500\pi\,(\text{cm})$.

Câu 11: Một đu quay ở công viên có bán kính bằng 10m. Tốc độ của đu quay là 3 vòng/phút. Hỏi mất bao lâu để đu quay quay được góc 270°?

A. $\frac{1}{3}$ phút. **B.** $\frac{1}{6}$ phút. **C.** $\frac{1}{4}$ phút. **D.** $1,5$ phút.

Lời giải

Tính được: $270^\circ = \frac{270}{180}\pi = \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{4}.2\pi$

Vậy đu quay quay được góc 270° khi nó quay được $\frac{3}{4}$ vòng

Ta có: Đu quay quay được 1 vòng trong $\frac{1}{3}$ phút

Đu quay quay được $\frac{3}{4}$ vòng trong $\frac{3}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ phút.

Câu 12: Một đường tròn có bán kính $15\ \text{cm}$. Tìm độ dài cung tròn có góc ở tâm bằng 30° là

A. $\frac{5\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi}{5}$. **D.** $\frac{5\pi}{3}$.

Lời giải

Cung tròn có góc ở tâm bằng 30° nên số đo của cung tròn bằng $n^\circ = 30^\circ$. Khi đó độ dài của cũng tròn là: $l = \frac{\pi.R.n^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi.15.30^\circ}{180^\circ} = \frac{5\pi}{2}$.

Câu 13: Một đồng hồ treo tường có kim giờ dài $10,57cm.$ Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1057}{1200}\pi(cm)$. **B.** $\frac{1057}{2400}\pi(cm)$. **C.** $\frac{1057}{600}\pi(cm)$. **D.** $\frac{1057}{4800}\pi(cm)$.

Lời giải

Trong 1 giờ mũi kim giờ vạch lên 1 cung có số đo là $\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$ nên trong 30 phút kim giờ vạch lên 1 cung có số đo là $\frac{1}{12}\pi$.

Vậy độ dài cung tròn mà mũi kim giờ vạch là $l=R\alpha=10,57\times\frac{\pi}{12}=\frac{1057}{1200}\pi$

Câu 14: Bánh xe đạp có đường kính $55\,\text{cm}$ (kể cả lốp). Nếu chạy với vận tốc $40\,\text{km/h}$ thì trong $25\,\text{s}$ bánh xe quay được số vòng gần bằng với kết quả nào dưới đây?

A. 52. **B.** 161. **C.** 322. **D.** 200.

Lời giải

Ta có $r=\frac{55}{2}\text{cm}=\frac{0,55}{2}\text{m}$; $40\,\text{km/h}=\frac{40000}{3600}\text{m/s}$.

Gọi l là quãng đường đi được trong 25 giây.

Gọi x là số vòng bánh xe quay được trong 25 giây.

Khi đó $l=2\pi.r.x$.

Mà $l=\frac{25.40000}{3600}=\frac{2500}{9}$ suy ra $x=\frac{l}{2\pi r}=160,7\approx 161$ vòng.

Câu 15: Kim giờ của đồng hồ dài 8 cm, kim phút dài 10 cm. Tổng quãng đường mũi kim phút, kim giờ đi được trong 30 phút bằng

A. $\frac{25}{3}\pi$. **B.** $\frac{37}{3}\pi$. **C.** $\frac{20}{3}\pi$. **D.** $\frac{32}{3}\pi$.

Lời giải

Trong 30 phút, kim phút quay được một góc là π rad.

Quãng đường kim phút đi được là $S_1=\pi.10=10\pi\,(\text{cm})$

Trong 30 phút kim giờ quay được một góc là $\frac{\pi}{12}$ rad.

Quãng đường kim giờ đi được là $S_2=\frac{\pi}{12}.8=\frac{2\pi}{3}\,(\text{cm})$

Vậy tổng quãng đường cần tìm là $S=S_1+S_2=10\pi+\frac{2\pi}{3}=\frac{32}{3}\pi\,(\text{cm})$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Đổi số đo của các góc sang độ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\frac{\pi}{9}\text{ rad} = 20^\circ$

b) $\frac{5\pi}{4}\text{ rad} = 225^\circ$

c) $\frac{3\pi}{5}\text{ rad} = 120^\circ$

d) $\frac{7\pi}{12}\text{ rad} = 155^\circ$

Lời giải

$$n = \frac{\alpha.180}{\pi}$$

.

Áp dụng công thức đổi rad sang độ

a) Đúng: $n = \frac{\pi}{9}.\frac{180^\circ}{\pi} = 20^\circ$.

b) Đúng: $n = \frac{5\pi}{4}.\frac{180^\circ}{\pi} = 225^\circ$

c) Sai: $n = \frac{3\pi}{5}.\frac{180^\circ}{\pi} = 108^\circ$

d) Sai: $n = \frac{3\pi}{5}.\frac{180^\circ}{\pi} = 105^\circ$

Câu 2: Đổi số đo của các góc sang rađian. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $120^\circ = \frac{2\pi}{9}\text{ rad}$

b) $250^\circ = \frac{25\pi}{18}\text{rad}$

c) $135^\circ = \frac{3\pi}{4}\text{rad}$

d) $300^\circ = \frac{5\pi}{3}\text{rad}$

Lời giải

a) Sai: Ta có: $120^0 = \frac{120^0.\pi}{180^0} = \frac{2\pi}{3}$.

b) Đúng: Ta có $250^\circ = \frac{250.\pi}{180} = \frac{25\pi}{18}$.

c) Đúng: Ta có: $135^\circ = \frac{135.\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$.

d) Đúng: Ta có: $300^\circ = \frac{300.\pi}{180} = \frac{5\pi}{3}$.

Câu 3: Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Đường tròn có bán kính bằng 9 cm thì số đo (theo radian) của cung có độ dài 3π cm bằng $\frac{\pi}{3}$ rad

b) Đường tròn có bán kính 30cm thì độ dài của cung tròn trên đường tròn đó có số đo $2,5$ rad bằng $7,5$ cm.

c) Bán kính của đường tròn bằng 10 cm thì cung có số đo $\frac{5}{3}$ rad dài 24 cm.

d) Đường tròn có bán kính 6 cm thì số đo (rad) của cung có độ dài 3 cm bằng $\frac{1}{2}$ rad

Lời giải

a) Đúng: $l = R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{3\pi}{9} = \frac{\pi}{3}$.

b) Sai: $R = 30; \alpha = 2,5\text{rad} \Rightarrow$ Độ dài l của cung tròn là $l = R\alpha = 30.2,5 = 75$ cm.

c) Sai: Áp dụng công thức $l = \alpha.\text{R}$ ta có $R = \frac{l}{\alpha} = \frac{24}{\left(\frac{5}{3}\right)} = 14,4$ cm.

d) Đúng: Đường tròn có bán kính $R = 6$ cm và cung có độ dài $l = 3$ cm.

Số đo của cung là $\alpha = \frac{l}{R} = \frac{1}{2}$ (rad).

Câu 4: Một vận động viên đi xe đạp trên đường, bánh xe đạp của vận động viên này quay được 11 vòng trong 5 giây. Biết rằng đường kính của bánh xe đạp là 680 mm.

a) Góc (theo độ rađian) mà bánh xe quay được trong 1 giây là 792°

b) Góc (theo rađian) mà bánh xe quay được trong 1 giây là $\frac{2\pi}{5}(\text{rad})$

c) Trong một phút bánh xe quay được 130 vòng

d) Quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút khoảng 282 m

Lời giải

a) Đúng: Trong 1 giây, bánh xe đạp quay được $\frac{11}{5}$ vòng.

Vì một vòng ứng với góc bằng 360° nên góc mà bánh quay xe quay được trong 1 giây là

$$\frac{11}{5}\cdot 360 = 792^\circ$$

.

b) Sai: Vì một vòng ứng với góc bằng 2π nên góc mà bánh quay xe quay được trong 1 giây là

$$\frac{11}{5}\cdot 2\pi = \frac{22\pi}{5}(\text{rad})$$

.

c) Sai: Ta có: 1 phút = 60 giây.

$$60\cdot\frac{11}{5} = 132$$

Trong 1 phút bánh xe quay được 132 vòng.

d) Đúng: Chu vi của bánh xe đạp là: $C = 680\pi(\text{mm})$.

Quãng đường mà người đi xe đạp đã đi được trong một phút là $S = 132.680\pi \approx 282$ m

Câu 5: Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh X chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng 9200 km. Sau 2 giờ thì vệ tinh X hoàn thành hết một vòng di chuyển.

a) Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ là $\approx 28902,65$ km

b) Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1,5 giờ là $\approx 43353,98$ km

c) Sau khoảng 5,3 giờ thì X di chuyển được quãng đường 240000 km

d) Giả sử vệ tinh di chuyển theo chiều dương của đường tròn, sau 4,5 giờ thì vệ tinh vẽ nên một góc $\frac{9\pi}{2}$ rad?

Lời giải

a) Đúng: Một vòng di chuyển của X chính là chu vi đường tròn:

$$C = 2\pi R = 2\pi.9200 = 18400\pi$$ (km)

Sau 1 giờ, vệ tinh di chuyển nửa đường tròn với quãng đường là:

$$\frac{1}{2}C = 9200\pi \approx 28902,65$$ (km)

b) Đúng: Sau 1,5 giờ, vệ tinh di chuyển được $\frac{1,5.1}{2}$ đường tròn (hay $\frac{3}{4}$ đường tròn), quãng đường là: $\frac{3}{4}C = \frac{3}{4}\cdot 18400\pi = 13800\pi \approx 43353,98$ (km).

c) Sai: Số giờ để vệ tinh X thực hiện quãng đường $240000\,km$ là: $\frac{240000}{9200\pi} \approx 8,3$ (giờ).

d) Đung:Sau 4,5 giờ thì số vòng tròn mà vệ tinh X di chuyển được là: $\frac{4,5}{2} = \frac{9}{4}$ (vòng).

Số đo góc lượng giác thu được là: $\frac{9}{4}.2\pi = \frac{9\pi}{2}\text{rad}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Đổi số đo của góc $40^0 25'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần trăm.

Lời giải

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a.\pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Trước tiên ta đổi $40^0 25' = \left(40 + \frac{25}{60}\right)^0$.

Áp dụng công thức, ta được $\alpha = \dfrac{\left(40 + \dfrac{25}{60}\right).\pi}{180} = \dfrac{97\pi}{432} = 0,705403906.$

Câu 2: Bánh xe đạp của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 2 giây, bánh xe quay được 1 góc bao nhiêu (tính theo độ)?

Lời giải

Trong 2 giây bánh xe đạp quay được $\dfrac{2.2}{5} = \dfrac{4}{5}$ vòng tức là quay được cung có độ dài là $l = \dfrac{4}{5}.2\pi R = \dfrac{8}{5}\pi R$. Ta có $l = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{l}{R} = \dfrac{\dfrac{8}{5}\pi R}{R} = \dfrac{8}{5}\pi = 288^\circ$

Câu 3: Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là:

Lời giải

Ta có: 72 răng có chiều dài là $2\pi R$ nên 10 răng có chiều dài $l = \dfrac{10.2\pi R}{72} = \dfrac{5\pi}{18}R$.

Theo công thức $l = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{l}{R} = \dfrac{\dfrac{5}{18}\pi R}{R} = \dfrac{5}{18}\pi$ mà $a = \dfrac{180\alpha}{\pi} = \dfrac{180.\dfrac{5}{18}\pi}{\pi} = 50^0$.

Cách khác: 72 răng tương ứng với 360^0 nên 10 răng tương ứng với $\dfrac{10.360}{72} = 50^0$.

Câu 4: Trong 20 giây bánh xe của xe gắn máy quay được 60 vòng.Tính độ dài quãng đường xe gắn máy đã đi được trong vòng 3 phút,biết rằng bán kính bánh xe gắn máy bằng $6,5$ cm

Lời giải

Trong 3 phút xe đi được $\dfrac{3.60}{20}.60 = 540$ vòng.

Độ dài 1 vòng bằng chu vi bánh xe là $2\pi R = 2.3,1416.6,5 = 40,8408$.

Vậy quãng đường xe đi được là $540 \times 40,8408 = 22054,032$ cm

Câu 5: Một đồng hồ treo tường, kim giờ dài $10,57cm$ và kim phút dài $13,34cm$.Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài là

Lời giải

Trong 6 giờ thì kim giờ vạch lên 1 cung có số đo π nên 30 phút kim giờ vạch lên 1 cung có số đo là $\dfrac{1}{12}\pi$ suy ra độ dài cung tròn mà nó vạch lên là $l = R\alpha = 10,57 \times \dfrac{3,14}{12} \approx 2,77$

Câu 6: Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất. Giả sử vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong $2h$ theo chiều kim đồng hồ. Khi vệ tinh chuyển động được

$3h$, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

Lời giải

Theo giả thiết, vệ tinh chuyển động theo chiều kim đồng hồ nên sau $2h$, bán kính của vòng quay khi vệ tinh chuyển động quét được một góc lượng giác bằng $-2\pi(rad)$.

Vậy khi vệ tinh chuyển động được $3h$ thì bán kính của vòng quay quét được một góc lượng giác bằng -3π (rad).

Câu 7: Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 175 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều dương. Sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

Lời giải

Sau 1 giây, cánh quat quay được $\frac{175}{60}=\frac{35}{12}$ (vòng) theo chiều dương.

Suy ra sau 1 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35}{12}\cdot 2\pi=\frac{35\pi}{6}$.

Vậy sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35\pi}{6}\cdot 5=\frac{175\pi}{6}$.

Câu 8: Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 175 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều dương. Sau thời gian bao lâu cánh quạt quay được một góc có số đo 42π?

Lời giải

Sau 1 giây, cánh quat quay được $\frac{175}{60}=\frac{35}{12}$ (vòng) theo chiều dương.

Suy ra sau 1 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35}{12}\cdot 2\pi=\frac{35\pi}{6}$.

Thời gian để cánh quạt quay được một góc có số đo 42π là $42\pi:\frac{35\pi}{6}=7,2$ giây.

Câu 9: Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe.

Sau 1 phút, van V đó quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

Lời giải

Sau 1 giây, van V của bánh xe quay được $\frac{30}{8}=3,75$ (vòng).

Sau 1 phút, van V của bánh xe quay được $3,75.60=225$ (vòng).

Suy ra sau 1 phút, van V của bánh xe quay được một góc có số đo là $225.2\pi=450\pi$.

Câu 10: Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe. Biết rằng bán kính của bánh xe là $35cm$. Độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là bao nhiêu mét?

Lời giải

Sau 1 giây, van V của bánh xe quay được $\frac{30}{8}=3,75$ (vòng).

Sau 1 phút, van V của bánh xe quay được $3,75.60=225$ (vòng).

Suy ra sau 1 phút, van V của bánh xe quay được một góc có số đo là $225.2\pi=450\pi$.

Mỗi góc ở tâm với số đo 1 rad chắn một cung có độ dài bằng bán kính bánh xe $r=0,35m$.

Do đó độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là

$$450\pi.0,35 \approx 494,8$$

m.

Dạng 2: Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác. Hệ thức Chasles

Để biểu diễn cung lượng giác có số đo trên đường tròn lượng giác ta thực hiện như sau:

- Chọn điểm $A(1;0)$ làm điểm đầu của cung.
- Xác định điểm cuối M của cung sao cho $\overset{\frown}{AM} = \alpha$

Lưu ý:

- Số đo của các cung lượng giác có cùng điểm đầu và điểm cuối sai khác nhau một bội của 2π là:

$$sđ\overset{\frown}{AM} = \alpha + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$$

- Ngoài ra, ta cũng có thể viết số đo bằng độ:

$$sđ\overset{\frown}{AM} = x^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

- Nếu ta có $\overset{\frown}{AM} = \alpha + k\frac{2\pi}{n}; k, n \in \mathbb{Z}$ thì sẽ có n điểm ngọn.

Hệ thức Chasles: Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì thì ta có:

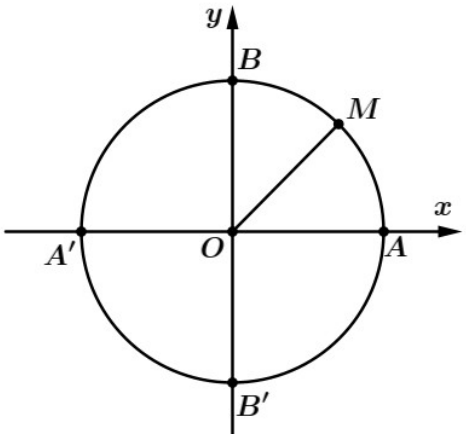
$$sd(Ou,Ov) + sd(Ov,Ow) = sd(Ou,Ow) + k.360^0 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- Từ đó ta có thể suy ra: $sd(Ou,Ov) = sd(Ou,Ow) - sd(Ov,Ow) + k.360^0 \quad (k \in \mathbb{Z})$

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là $\frac{25\pi}{4}$

Lời giải



Ta có:

$$sđ\overset{\frown}{AM} = \frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{24\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 6\pi = \frac{\pi}{4} + 2.3.\pi$$

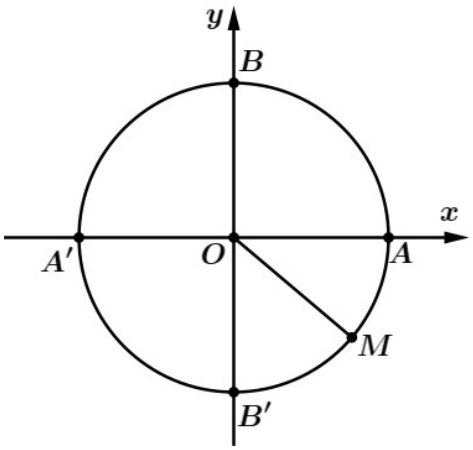
Vậy điểm cuối M của cung $\overset{\frown}{AM}$ sẽ trùng với điểm ngọn của cung $\frac{\pi}{4}$. Suy ra M là điểm chính giữa của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$.

Bài tập 2: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là -1485°

Lời giải

Ta có $\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = -1485^\circ = -45^\circ + (-4).360^\circ$

Vậy điểm cuối M của cung $\overset{\frown}{AB}$ sẽ trùng với điểm ngọn của cung -45°.



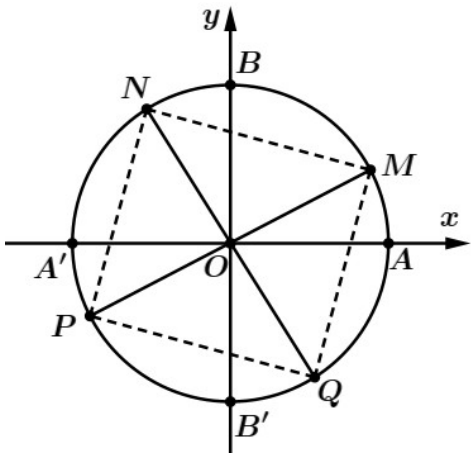
Suy ra M là điểm chính giữa của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB'}$.

Bài tập 3: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là:

$$\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

Lời giải

Ta có $\text{sđ}\overset{\frown}{AM} = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{4}$ nên có 4 điểm ngọn trên đường tròn lượng giác.



Với $k = 0 \Rightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{AM} = \frac{\pi}{6}$ có điểm ngọn là M

Với $k = 1 \Rightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{AN} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$ có điểm ngọn là N

Với $k = 2 \Rightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{AP} = \frac{\pi}{6} + \pi$ có điểm ngọn là P

Với $k = 3 \Rightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{AQ} = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}$ có điểm ngọn là Q

Với $k=4\Rightarrow sđ\overset{\frown}{AR}=\frac{\pi}{6}+2\pi$ có điểm ngọn là R. Lúc này điểm ngọn R trùng với M

Vậy bốn điểm M,N,P,Q tạo thành một hình vuông nội tiếp đường tròn lượng giác

Bài tập 4: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là

$$k\frac{\pi}{3};k\in\mathbb{Z}$$

Lời giải

Ta có $sđ\overset{\frown}{AM}=k\frac{2\pi}{6}$ nên có 6 điểm ngọn trên đường tròn lượng giác.

Với $k=0\Rightarrow sđ\overset{\frown}{AM}=0$ có điểm ngọn là M

Với $k=1\Rightarrow sđ\overset{\frown}{AN}=\frac{\pi}{3}$ có điểm ngọn là N

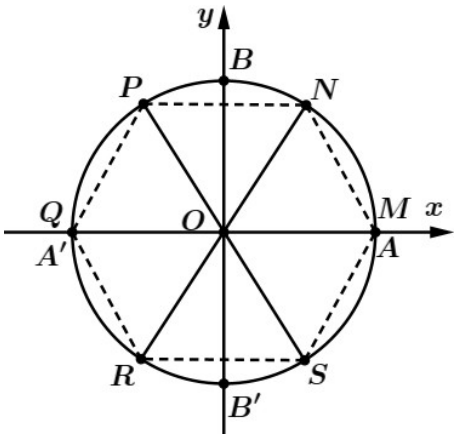
Với $k=2\Rightarrow sđ\overset{\frown}{AP}=\frac{2\pi}{3}$ có điểm ngọn là P

Với $k=3\Rightarrow sđ\overset{\frown}{AQ}=\pi$ có điểm ngọn là Q

Với $k=4\Rightarrow sđ\overset{\frown}{AR}=\frac{4\pi}{3}$ có điểm ngọn là R

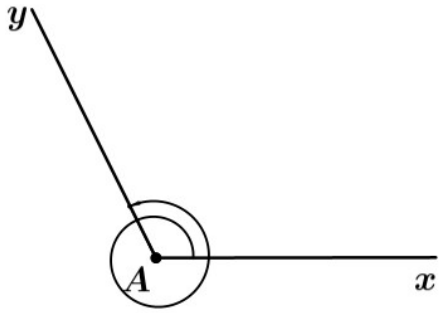
Với $k=5\Rightarrow sđ\overset{\frown}{AS}=\frac{5\pi}{3}$ có điểm ngọn là S

Với $k=6\Rightarrow sđ\overset{\frown}{AT}=2\pi$ có điểm ngọn là T

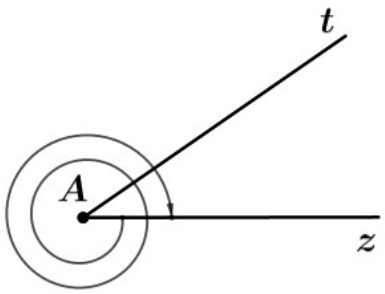


Lúc này điểm ngọn T trùng với M. Vậy sáu điểm $M;N;P;Q;R;S$ tạo thành một lục giác đều nội tiếp đường tròn lượng giác.

Bài tập 5: Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong mỗi hình dưới đây.



a) $\widehat{xAy}=102^\circ$



b) $\widehat{zBt}=\frac{\pi}{5}$

Lời giải

Số đo của góc lượng giác (Ax,Ay) trong hình a) bằng: $102^\circ+360^\circ=462^\circ$.

Số đo của góc lượng giác (Bt,Bz) trong hình b) bằng $-\frac{\pi}{5}-2.2\pi=-\frac{21\pi}{5}$.

Bài tập 6: Thực hiện các yêu cầu sau:

a) Hãy tìm số đo α của góc lượng giác (Oa,Ob), với $0\le\alpha<2\pi$. Biết một góc lượng giác cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob có số đo là $\frac{25\pi}{6}$.

b) Hãy tìm số đo a° của góc lượng giác (Om,On), với $0\le a<360$. Biết một góc lượng giác cùng tia đầu Om và tia cuối On có số đo là -875°.

Lời giải

a) Số đo α của các góc lượng giác bất kì có cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob sai khác nhau một bội nguyên của 2π nên có dạng là $\alpha=\frac{25\pi}{6}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ta có $0\le\alpha<2\pi$ suy ra $-\frac{25\pi}{6}\le k2\pi<2\pi-\frac{25\pi}{6}$ suy ra $-\frac{25}{12}\le k<-\frac{13}{12}$.

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=-2$. Vậy $\alpha=\frac{25\pi}{6}+(-2).2\pi=\frac{\pi}{6}$.

b) Số đo a° của các góc lượng giác có cùng tia đầu Om và tia cuối On sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có dạng là $a^\circ=-875^\circ+k360^\circ\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ta có $0\le a<360$ suy ra $875\le k360<360+875$ suy ra $\frac{175}{72}\le k<\frac{247}{72}$ vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=3$.

Vậy $a^\circ=-875^\circ+3.360^\circ=205^\circ$.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "**đường tròn định hướng**"?

A. Mỗi đường tròn là một đường tròn định hướng.

B. Mỗi đường tròn đã chọn một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.

C. Mỗi đường tròn đã chọn một chiều chuyển động và một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.

D. Mỗi đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương và chiều ngược

lại được gọi là chiều âm là một đường tròn định hướng.

Lời giải

Mỗi đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương và chiều ngược lại được gọi là chiều âm là một đường tròn định hướng.

Câu 2: Quy ước chọn chiều dương của một đường tròn định hướng là:

A. Luôn cùng chiều quay kim đồng hồ.

B. Luôn ngược chiều quay kim đồng hồ.

C. Có thể cùng chiều quay kim đồng hồ mà cũng có thể là ngược chiều quay kim đồng hồ.

D. Không cùng chiều quay kim đồng hồ và cũng không ngược chiều quay kim đồng hồ.

Lời giải

Luôn ngược chiều quay kim đồng hồ.

Câu 3: Trên đường tròn định hướng, mỗi cung lượng giác AB xác định:

A. Một góc lượng giác tia đầu OA, tia cuối OB.

B. Hai góc lượng giác tia đầu OA, tia cuối OB.

C. Bốn góc lượng giác tia đầu OA, tia cuối OB.

D. Vô số góc lượng giác tia đầu OA, tia cuối OB.

Lời giải

Vô số góc lượng giác tia đầu OA, tia cuối OB.

Câu 4: Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "**góc lượng giác**"?

A. Trên đường tròn tâm O bán kính $R=1$, góc hình học AOB là góc lượng giác.

B. Trên đường tròn tâm O bán kính $R=1$, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.

C. Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB là góc lượng giác.

D. Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.

Lời giải

Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.

Câu 5: Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "**đường tròn lượng giác**"?

A. Mỗi đường tròn là một đường tròn lượng giác.

B. Mỗi đường tròn có bán kính $R=1$ là một đường tròn lượng giác.

C. Mỗi đường tròn có bán kính $R=1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.

D. Mỗi đường tròn định hướng có bán kính $R=1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.

Lời giải

Mỗi đường tròn định hướng có bán kính $R=1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.

Câu 6: Cho góc lượng giác $(Ox,Oy)=22^{0}30'+k360^{0}.$ Với giá trị k bằng bao nhiêu thì góc $(Ox,Oy)=1822^{0}30'$?

A. $k\in\varnothing.$ **B.** $k=3.$ **C.** $k=-5.$ **D.** $k=5.$

Lời giải

Theo đề $(Ox,Oy)=1822^0 30' \Rightarrow 22^0 30'+k.360^0=1822^0 30' \Rightarrow k=5.$

Câu 7: Một chiếc đồng hồ, có kim chỉ giờ OG chỉ số 9 và kim phút OP chỉ số 12. Số đo của góc lượng giác (OG,OP) là

A. $\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

B. $-270^0+k360^0, k\in\mathbb{Z}$.

C. $270^0+k360^0, k\in\mathbb{Z}$.

D. $\frac{9\pi}{10}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

Góc lượng giác (OG,OP) chiếm $\frac{1}{4}$ đường tròn. Số đo là $\frac{1}{4}.2\pi+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Câu 8: Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là A. Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 45^0. Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục Ox, số đo cung lượng giác AN bằng

A. -45^0.

B. 315^0.

C. 45^0 hoặc 315^0.

D. $-45^0+k360^0, k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

Vì số đo cung AM bằng 45^0 nên $\widehat{AOM}=45^0$, N là điểm đối xứng với M qua trục Ox nên $\widehat{AON}=45^0$.

Do đó số đo cung AN bằng 45^o nên số đo cung lượng giác AN có số đo là $-45^o+k360^o, k\in\mathbb{Z}$

Câu 9: Trên đường tròn với điểm gốc là A. Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 60^0. Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua trục Oy, số đo cung AN là:

A. 120^o.

B. -240^0.

C. -120^0 hoặc 240^0.

D. $120^0+k360^0, k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

Ta có $\widehat{AOM}=60^0$, $\widehat{MON}=60^0$

Nên $\widehat{AON}=120^0$. Khi đó số đo cung AN bằng 120^0.

Câu 10: Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc là A. Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 75^0. Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ O, số đo cung lượng giác AN bằng:

A. 255^0.

B. -105^0.

C. -105^0 hoặc 255^0. **D.** $-105^0+k360^0,\ k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

Ta có $\widehat{AOM}=75^0$, $\widehat{MON}=180^0$

Nên cung lượng giác AN có số đo bằng $-105^0+k360^0,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 11: Cho bốn cung (trên một đường tròn định hướng): $\alpha=-\frac{5\pi}{6},\ \beta=\frac{\pi}{3}\ \gamma=\frac{25\pi}{3},\ \delta=\frac{19\pi}{6}$, . Các cung nào có điểm cuối trùng nhau?

A. α và β; γ và δ. **B.** β và γ; α và δ. **C.** α,β,γ. **D.** β,γ,δ.

Lời giải

Cách 1 : Ta có $\delta-\alpha=4\pi\Rightarrow$ hai cung α và δ có điểm cuối trùng nhau.

Và $\gamma-\beta=8\pi\Rightarrow$ hai cung β và γ có điểm cuối trùng nhau.

Cách 2 : Gọi $A,\ B,\ C,\ D$ là điểm cuối của các cung $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$

Biểu diễn các cung trên đường tròn lượng giác ta có $B\equiv C,\ A\equiv D.$

Câu 12: Các cặp góc lượng giác sau ở trên cùng một đường tròn đơn vị, cùng tia đầu và tia cuối. Hãy nêu kết quả **sai** trong các kết quả sau đây:

A. $\frac{\pi}{3}$ và $-\frac{35\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{10}$ và $\frac{152\pi}{5}$. **C.** $-\frac{\pi}{3}$ và $\frac{155\pi}{3}$. **D.** $\frac{\pi}{7}$ và $\frac{281\pi}{7}$.

Lời giải

Cặp góc lượng giác a và b ở trên cùng một đường tròn đơn vị, cùng tia đầu và tia cuối. Khi đó $a=b+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ hay $k=\frac{a-b}{2\pi}$.

Câu 13: Trên đường tròn lượng giác gốc A, cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành tam giác đều?

A. $\frac{k2\pi}{3}$. **B.** $k\pi$. **C.** $\frac{k\pi}{2}$. **D.** $\frac{k\pi}{3}$.

Lời giải

Tam giác đều có góc ở đỉnh là 60^o nên góc ở tâm là 120^o tương ứng $\frac{k2\pi}{3}$.

Câu 14: Trên đường tròn lượng giác gốc A, cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành hình vuông?

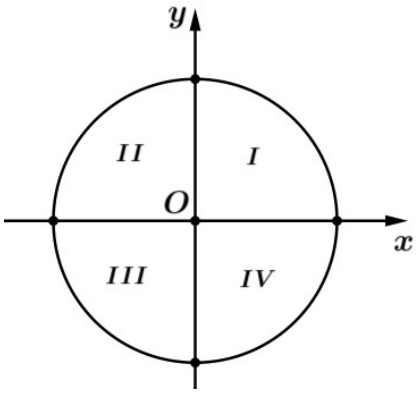
A. $\frac{k\pi}{2}$. **B.** $k\pi$. **C.** $\frac{k2\pi}{3}$. **D.** $\frac{k\pi}{3}$.

Lời giải

Hình vuông $CDEF$ có góc $\widehat{DCE}$ là 45^o nên góc ở tâm là 90^o tương ứng $\frac{k\pi}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác. Khi đó:



a) 125° là điểm M thuộc góc phần tư thứ thứ II

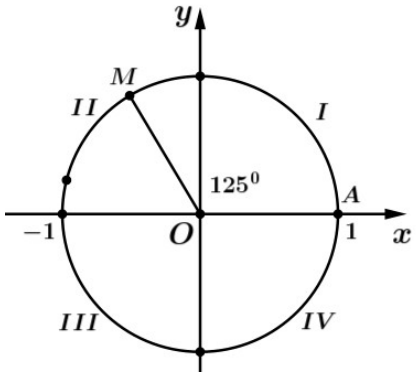
b) 405° là điểm N thuộc góc phần tư thứ III

c) $\frac{19\pi}{3}$ là điểm P thuộc góc phần tư thứ II

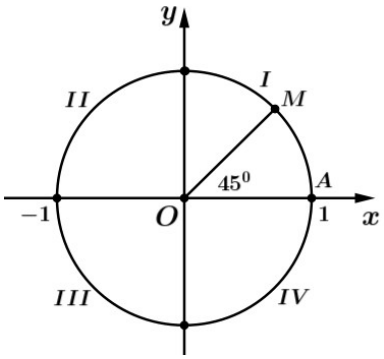
d) $-\frac{13\pi}{6}$ là điểm Q thuộc góc phần tư thứ IV

Lời giải

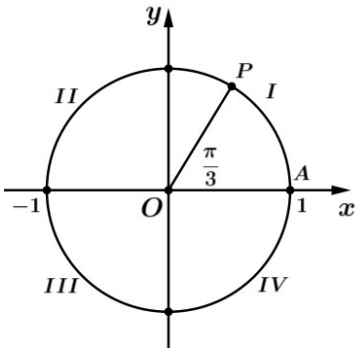
a) Đúng: Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo 125° là điểm M thuộc góc phần tư thứ thứ II của đường tròn lượng giác thoả mãn $AOM = 125^\circ$



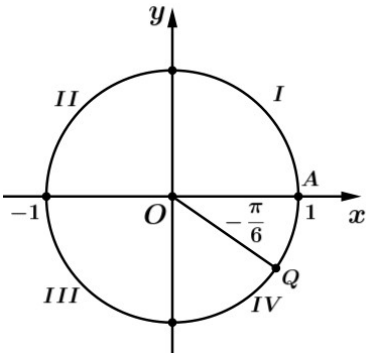
b) Sai: Ta có: $405^\circ = 45^\circ + 360^\circ$. Vì vậy điểm biểu diễn của góc lượng giác 405° là điểm N thuộc góc phần tư thứ I của đường tròn lượng giác và thoả mãn $AON = 45^\circ$



c) Sai: Ta có: $\frac{19\pi}{3}=\frac{18\pi+\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+3.2\pi$. Vì vậy điểm biểu diễn của góc lượng giác $\frac{19\pi}{3}$ là điểm P thuộc góc phần tư thứ I của đường tròn lượng giác và thoả mãn $\widehat{AOP}=\frac{\pi}{3}$



d) Đúng: Ta có: $-\frac{13\pi}{6}=\frac{-12\pi-\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}-2\pi$. Vì vậy điểm biểu diễn của góc lượng giác $-\frac{13\pi}{6}$ là điểm Q thuộc góc phần tư thứ IV của đường tròn lượng giác và thoả mãn $\widehat{AOQ}=\frac{\pi}{6}$



Câu 2: Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $36^\circ+k360^\circ, k\in\mathbb{Z}$ là điểm M thuộc góc phần tư thứ II

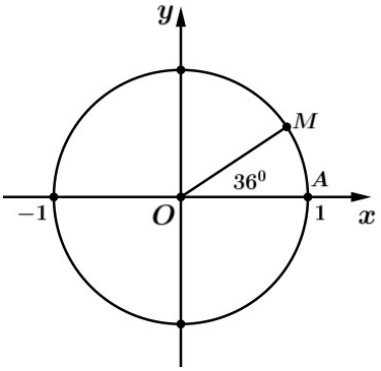
b) $-60^\circ+k180^\circ, k\in\mathbb{Z}$ là các điểm M_1, M_2 thuộc góc phần tư thứ II và IV

c) $-\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ là M thuộc góc phần tư thứ III

d) $-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ là bốn điểm M,N,P,Q thuộc góc phần tư thứ I, II, III, IV

Lời giải

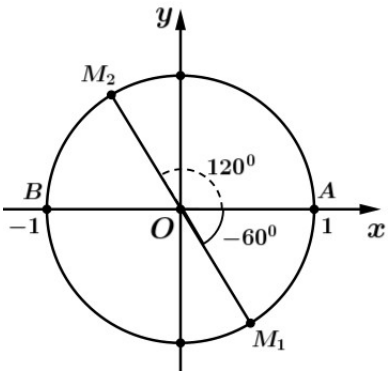
a) Sai: Xét góc lượng giác $k360^\circ$, dù k là số chẵn hay số lẻ thì góc này cũng có điểm biểu diễn là điểm A (điểm gốc trên đường tròn lượng giác).



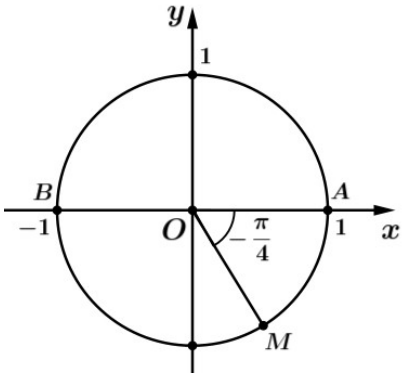
Vì vậy, góc lượng giác $36^\circ+k360^\circ$ có điểm biểu diễn là điểm M thuộc góc phần tư thứ I của đường tròn lượng giác và $\widehat{AOM}=36^\circ$.

b) Đúng: Xét góc lượng giác $k180^\circ$. Nếu k chẵn thì góc này có điểm biểu diễn là $A(1;0)$, nếu k lẻ thì góc này có điểm biểu diễn là điểm $B(-1;0)$.

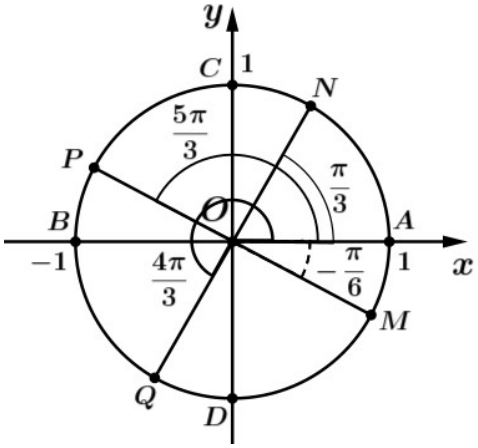
Vì vậy $-60^\circ+k180^\circ$ có các điểm biểu diễn là M_1 và M_2 như hình vẽ bên.



c) Sai: Ta biết góc lượng giác $k2\pi$ luôn có điểm biểu diễn là $A(1;0)$, vì vậy góc lượng giác $-\frac{\pi}{4}+k2\pi$ có điểm biểu diễn là M thuộc góc phần tư thứ IV và thoả mãn $\widehat{AOM}=\frac{\pi}{4}$.



d) Đúng: Xét góc lượng giác $k\frac{\pi}{2}$.



Khi $k=0$ thì $k\frac{\pi}{2}=0$, góc này có điểm biểu diễn là điểm $A(1;0)$.

Khi $k=1$ thì $k\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ góc này có điểm biểu diễn là điểm $C(0;1)$.

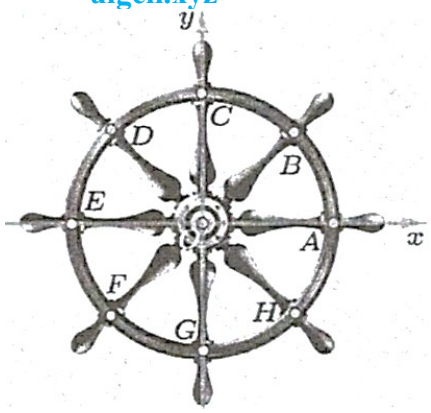
Khi $k=2$ thì $k\frac{\pi}{2}=\pi$ góc này có điểm biểu diễn là điểm $B(-1;0)$.

Khi $k=3$ thì $k\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$ góc này có điểm biểu diễn là điểm $D(0;-1)$.

Nếu $k=4,5,6,\ldots$ thì ta thấy rằng các điểm biểu diễn có được vẫn là sự lặp lại của A,B,C,D.

Vì vậy điểm biểu diễn của $-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}$ là bốn điểm M,N,P,Q trên đường tròn lượng giác (xem hình vẽ trên).

Câu 3: Trong hình vẽ bên, ta xem hình ảnh đường tròn trên một bánh lái tàu thuỷ tương ứng với một đường tròn lượng giác.



a) Công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác (OA,OB) theo đơn vị radian:

$$(OA,OB)=\frac{\pi}{4}+k2\pi(k\in\mathbb{Z});$$

b) Công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với bốn điểm biểu diễn là A,C,E,G theo đơn vị radian là $k\frac{\pi}{3}(k\in\mathbb{Z})$

c) Công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với hai điểm biểu diễn là A,E theo đơn vị độ là $k180^\circ(k\in\mathbb{Z})$

d) Công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác $(OA,OC)+(OC,OH)$ theo đơn vị radian:

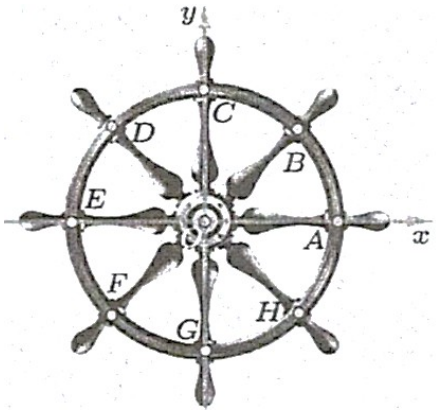
$$\frac{\pi}{4}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$$

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $(OA,OB)=\frac{\pi}{4}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$;

b) Sai:Ta thấy A,C,E,G lần lượt biểu diễn cho các góc lượng giác: $0\,\text{rad};\ \frac{\pi}{2}\,\text{rad};\ \pi\,\text{rad};\ \frac{3\pi}{2}\,\text{rad};$ $2\pi\,\text{rad}$, $\frac{5\pi}{2}\,\text{rad},..$.

Tất cả các góc này theo thứ tự chênh lệch nhau $\frac{\pi}{2}$ rad. Vì vậy công thức duy nhất biểu diễn cho các góc lượng giác ấy là $k\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$.



c) Đúng: Ta thấy hai điểm A, E lần lượt biểu diễn cho các góc lượng giác $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ, ...$

Tất cả các góc này theo thứ tự chênh lệch nhau 180°. Vì vậy công thức duy nhất biểu diễn cho các góc lượng giác ấy là $k180^\circ(k\in\mathbb{Z})$.

d) Sai: Theo hệ thức Salơ, ta có:

$$(OA,OB)+(OB,OC)=(OA,OC)=\frac{\pi}{2}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$$

$$(OA,OC)+(OC,OH)=(OA,OH)=-\frac{\pi}{4}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$$

Câu 4: Biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau đây trên đường tròn lượng giác. Khi đó:

a) Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo 218° là điểm M thuộc góc phần tư thứ III của đường tròn lượng giác thoả mãn $\widehat{AOM}=218^\circ$

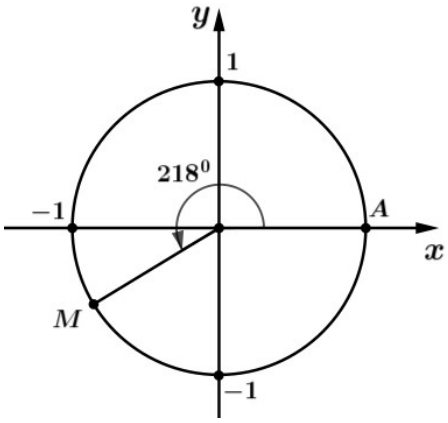
b) Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo -405° là điểm N thuộc góc phần tư thứ IV của đường tròn lượng giác thoả mãn $\widehat{AON}=-45^\circ$

c) Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo $\frac{25\pi}{4}$ là điểm P thuộc góc phần tư thứ I của đường tròn lượng giác thoả mãn $\widehat{AOP}=\frac{\pi}{4}$

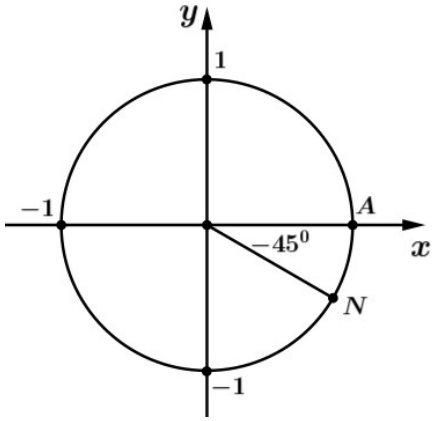
d) Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo $\frac{15\pi}{2}$ là điểm $Q(0;-1)$ thuộc đường tròn lượng giác thoả mãn $\widehat{AOQ}=-\frac{\pi}{2}$

Lời giải

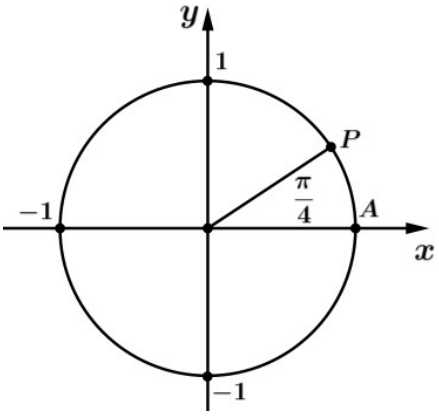
a) Đúng: Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo 218° là điểm M thuộc góc phần tư thứ III của đường tròn lượng giác thoả mãn $\widehat{AOM}=218^\circ$



b) Sai: Ta có: $-405^\circ=-45^\circ-360^\circ$. Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo -405° là điểm N thuộc góc phần tư thứ IV của đường tròn lượng giác thoả mãn $\widehat{AON}=45^\circ$



c) Đúng: Ta có: $\frac{25\pi}{4}=\frac{\pi+24\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+6\pi$. Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo $\frac{25\pi}{4}$ là điểm P thuộc góc phần tư thứ I của đường tròn lượng giác thoả mãn $\widehat{AOP}=\frac{\pi}{4}$



d) Sai: Ta có: $\frac{15\pi}{2}=\frac{16\pi-\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+8\pi$. Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo $\frac{15\pi}{2}$ là điểm $Q(0;-1)$ thuộc đường tròn lượng giác thoả mãn $\widehat{AOQ}=\frac{\pi}{2}$.

Câu 5: Cho một góc lượng giác (Ox,Ou) có số đo 250° và một góc lượng giác (Ox,Ov) có số đo -270°.

a) Số đo góc lượng giác (Ou,Ox) bằng $-250^\circ+k360^\circ$, $k\in\mathbb{Z}$.

b) Số đo góc lượng giác (Ov,Ox) bằng $270^\circ+k360^\circ$, $k\in\mathbb{Z}$.

c) Số đo một góc lượng giác (Ou,Ov) bằng -20°.

d) Số đo một góc lượng giác (Ou,Ov) theo đơn vị radian bằng $\frac{\pi}{9}$.

Lời giải

a) Đúng: sđ $(Ou,Ox)=-$ sđ $(Ox,Ou)=-250^\circ+k360^\circ$, $k\in\mathbb{Z}$.

b) Đúng: sđ $(Ov,Ox)=-$ sđ $(Ov,Ox)=270^\circ+k360^\circ$, $k\in\mathbb{Z}$.

c) Sai: sđ $(Ou,Ov)=$ sđ $(Ou,Ox)+$ sđ $(Ox,Ov)+k360^\circ=-250^\circ-270^\circ+k360^\circ$

$=-520^\circ+k360^\circ=-160^\circ+m360^\circ\ (k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z},m=k-1)$.

Số đo một góc lượng giác (Ou,Ov) bằng -160°.

d) Sai: Số đo một góc lượng giác (Ou,Ov) theo đơn vị radian bằng $-160\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{-8\pi}{9}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trên đường tròn lượng giác vớ điểm gốc là A. Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 75°. Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ O, số đo cung lượng giác AN bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Ta có $\overline{AOM}=75^0$, $\overline{MON}=180^0$ nên cung lượng giác AN có số đo bằng

$$\overline{AN}=-105^0+k360^0, k\in\mathbf{Z}$$

.

Câu 2: Biết một số đo của góc $(Ox,\ Oy)=\dfrac{3\pi}{2}+2001\pi$. Giá trị tổng quát của góc $(Ox,\ Oy)$ là bao nhiêu

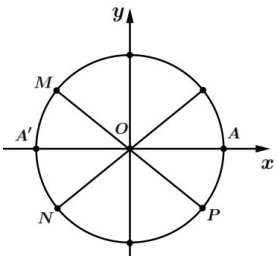
Lời giải

Ta có :

$$(Ox,\ Oy)=\frac{3\pi}{2}+2001\pi=\frac{\pi}{2}+2002\pi=\frac{\pi}{2}+k2\pi.$$

Câu 3: Biết OMB' và ONB' là các tam giác đều. Cung α có mút đầu là A và mút cuối trùng với B hoặc M hoặc N. Tính số đo của α ?

Lời giải

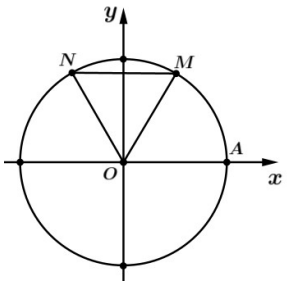


Cung α có mút đầu là A và mút cuối trùng với B nên $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

Cung $\overline{AM}=\overline{AB}+\dfrac{2\pi}{3}$, $\overline{AN}=\overline{AM}+\dfrac{2\pi}{3}$ nên chu kì của cung α là $\dfrac{2\pi}{3}$.

Câu 4: Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là A. Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 45^0. Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục Ox, số đo cung lượng giác AN bằng bao nhiêu?

Lời giải



Vì số đo cung AM bằng 45^0 nên $AOM = 45^0$, N là điểm đối xứng với M qua trục Ox nên $AON = 45^0$.

Do đó số đo cung AN bằng 45^0 nên số đo cung lượng giác AN có số đo là $-45^0 + k360^0, k \in \mathbb{Z}$

Câu 5: Nếu góc lượng giác có sđ $(Ox, Oz) = -\frac{63\pi}{2}$ thì Ox và Oz tạo với nhau một góc bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Ta có $-\frac{63\pi}{2} = -32\pi + \frac{\pi}{2}$ vì vậy Ox và Oz vuông góc nên tạo với nhau một góc $90°$

Câu 6: Cho hai góc lượng giác có sđ $(Ox, Ou) = 45^0 + m360^0, m \in \mathbf{Z}$ và sđ $(Ox, Ov) = -135^0 + n360^0, n \in \mathbf{Z}$.

Hai tia Ou và Ov hợp với nhau một góc bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

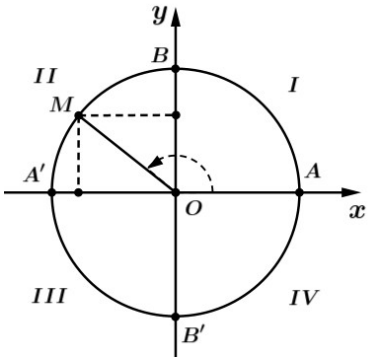
Sđ $(Ou, Ov) = 45^0 + 135° + (m-n)360^0 = 180° + l360°, l \in \mathbb{Z}$ suy ra 2 tia Ou và Ov đối nhau nên tạo với nhau một góc bằng $180°$.

Dạng 3: Giá trị lượng giác của góc lượng giác

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp: Sử dụng nhóm công thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác để tính toán

Chú ý: Nếu đề bài có giới hạn miền của góc α thì ta cần xem trên miền đó các tỉ số lượng giác tương ứng sẽ mang dấu như thế nào, cụ thể như sau:



Giá trị lượng giác	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

Bài tập 1: Tính các giá trị lượng giác của góc α, biết:

a) $\cos\alpha = \frac{1}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

b) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

c) $\tan\alpha = \sqrt{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

c) $\cot\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Lời giải

a) Vì $0 < a < \frac{\pi}{2}$ nên $a > 0$ sin .

Mặt khác, từ $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ suy ra $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2 \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

Do đó và .

b) Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha < 0$.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

Mặt khác từ suy ra .

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{-\frac{2\sqrt{5}}{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

Do đó . và .

$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ $\alpha<0$

c) Ta có: . Do nên cos .

$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}}=-\sqrt{\frac{1}{1+\left(\sqrt{5}\right)^2}}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$

Mặt khác từ suy ra

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\tan\alpha.\cot\alpha=\sqrt{5}.\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=-\frac{\sqrt{30}}{6}$

Mà ta có .

$\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}=\frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}=-\sqrt{2}$

d) Ta có: .

$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ $\cos\alpha>$

Vì nên 0.

$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{1+\left(-\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Mặt khác từ suy ra .

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\tan\alpha.\cot\alpha=-\sqrt{2}.\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

Mà ta có .

Bài tập 2: Tính các giá trị lượng giác của góc α, biết:

a) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ và $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$

b) $\cos\alpha=-0,7$ và $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

c) $\tan\alpha=2$ và $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

c) $\cot\alpha=\frac{7}{3}$ và $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

a) Ta có $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$. Vì $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\cos\alpha > 0$.

Do đó $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ suy ra $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ và $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = 2\sqrt{2}$.

b) Ta có $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-(-0,7)^2 = \frac{51}{100}$. Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin\alpha < 0$.

Do đó $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{51}}{10}$ suy ra $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{51}}{10}}{-0,7} = \frac{\sqrt{51}}{7}$ và $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{7\sqrt{51}}{51}$.

c) Ta có $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{2}; \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha = 1+2^2 = 5$.

Suy ra $\cos^2\alpha = \frac{1}{5}$. Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha > 0$. Do đó $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Suy ra $\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

d) Ta có $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \frac{3}{7}; \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1+\cot^2\alpha = 1+\left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{58}{9}$.

Suy ra $\sin^2\alpha = \frac{9}{58}$. Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin\alpha < 0$. Do đó $\sin\alpha = -\frac{3\sqrt{58}}{58}$.

Suy ra $\cos\alpha = \cot\alpha\sin\alpha = \frac{7}{3}\cdot\left(-\frac{3\sqrt{58}}{58}\right) = -\frac{7\sqrt{58}}{58}$.

Bài tập 3: Hãy thực hiện các yêu cầu trong mỗi trường hợp sau:

a) Biểu diễn $\sin\left(-\frac{29\pi}{3}\right)$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$;

b) Biểu diễn $\tan 973^\circ$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0° đến 45°.

Lời giải

a) $\sin\left(-\frac{29\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{29\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{3}+8\pi\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\right) = \sin\frac{2\pi}{3}$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}.$

b) $\tan 973^\circ = \tan(73^\circ + 5.180^\circ) = \tan 73^\circ = \tan(90^\circ - 17^\circ) = \cot 17^\circ$.

Bài tập 4: Tính các giá trị lượng giác của mỗi góc sau:

a) $\frac{\pi}{3} + k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$ b) $\frac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

a) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\tan\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}; \cot\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) $\tan\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ không xác định; $\cot\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \cot\frac{\pi}{2} = 0$.

Với $k = 2l\,(l \in \mathbb{Z})$:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + l2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1; \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + l2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0;$

Với $k = 2l + 1\,(l \in \mathbb{Z})$:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi + l2\pi\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi + l2\pi\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$;

Bài tập 5: Bằng cách sử dụng giá trị lượng giác của các góc liên quan đặc biệt, hãy tính:

a) $\cos\frac{-15\pi}{4}$ b) $\cot(-675^\circ)$ c) $\sin\frac{11\pi}{3}$

Lời giải

a) $\cos\frac{-15\pi}{4} = \cos\frac{15\pi}{4} = \cos\left(3\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\cot(-675^\circ) = \cot(45^\circ - 720^\circ) = \cot 45^\circ = 1$.

c) $\sin\frac{11\pi}{3} = \sin\left(3\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các hệ thức sau đây, hệ thức nào đúng?

A. $\sin x^2+\cos x^2=1$ **B.** $\sin x+\cos x=1$

C. $\sin 2x+\cos 2x=1$. **D.** $\sin^2 x+\cos x^2=1$.

Lời giải

Theo công thức: $\sin x^2+\cos x^2=1$.

Câu 2: Tìm khẳng định **sai**? (với điều kiện các hệ thức đã xác định)

A. $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$. **B.** $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$.

C. $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$. **D.** $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$.

Lời giải

Khẳng định $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$ là sai.

Câu 3: Cho góc α thỏa mãn $2\pi<\alpha<\frac{5\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\tan\alpha<0$. **B.** $\cot\alpha>0$. **C.** $\sin\alpha>0$. **D.** $\cos\alpha>0$.

Lời giải

Với $2\pi<\alpha<\frac{5\pi}{2}$ ta có $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$, $\tan\alpha>0$, $\cot\alpha>0$.

Câu 4: Cho $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Kết quả đúng là

A. $\sin\alpha>0,\ \cos\alpha>0$. **B.** $\sin\alpha<0,\ \cos\alpha<0$.

C. $\sin\alpha>0,\ \cos\alpha<0$. **D.** $\sin\alpha<0,\ \cos\alpha>0$.

Lời giải

Vì $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ nên α nằm trong góc phần tư thứ 2 nên $\sin\alpha>0,\cos\alpha<0$.

Câu 5: Cho $2\pi<\alpha<\frac{5\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha>0;\ \cot\alpha>0.$ **B.** $\tan\alpha<0;\ \cot\alpha<0.$

C. $\tan\alpha>0;\ \cot\alpha<0.$ **D.** $\tan\alpha<0;\ \cot\alpha>0.$

Lời giải

Ta có $2\pi<\alpha<\frac{5\pi}{2}\Rightarrow$ điểm cuối cung $\alpha-\pi$ thuộc góc phần tư thứ $I\Rightarrow\begin{cases}\tan\alpha>0\\ \cot\alpha>0\end{cases}$.

Câu 6: Cho $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\sin(\alpha-\pi)\ge 0.$ **B.** $\sin(\alpha-\pi)\le 0.$

C. $\sin(\alpha-\pi)<0.$ **D.** $\sin(\alpha-\pi)<0.$

Lời giải

Ta có $0<\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow -\pi<\alpha-\pi<-\frac{\pi}{2}$

Điểm cuối cung $\alpha-\pi$ thuộc góc phần tư thứ $III\Rightarrow \sin(\alpha-\pi)<0.$

Câu 7: Cho $0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cot\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)>0.$ **B.** $\cot\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\ge 0.$

C. $\tan(\alpha+\pi)<0.$ **D.** $\tan(\alpha+\pi)>0.$

Lời giải

Ta có $\begin{cases}0<\alpha<\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}<\alpha+\frac{\pi}{2}<\pi\Rightarrow\cot\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)<0\\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\to\pi<\alpha+\pi<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\tan(\alpha+\pi)>0\end{cases}.$

Câu 8: Cho $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi.$ Giá trị lượng giác nào sau đây luôn dương?

A. $\sin(\pi+\alpha).$ **B.** $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$ **C.** $\cos(-\alpha).$ **D.** $\tan(\pi+\alpha).$

Lời giải

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha;\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha;\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha;\ \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha.$

Do $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha>0\\ \cos\alpha<0\\ \tan\alpha<0\end{cases}$

Câu 9: Cho $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}.$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)<0.$ **B.** $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)>0.$

C. $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\le 0.$ **D.** $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\ge 0.$

Lời giải

$$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\to 0<\frac{3\pi}{2}-\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)>0\\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)>0\end{cases}\Rightarrow\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)>0.$$

Ta có

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

Câu 10: Cho . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\sin(\alpha+\pi)<0$. **B.** $\cos(\alpha+\pi)>0$.

C. $\tan(\pi-\alpha)>0$. **D.** $\cot(\pi-\alpha)<0$.

Lời giải

$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha<0\,\forall\,\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

Ta có:

$$\frac{7\pi}{4}<\alpha<2\pi$$

Câu 11: Cho . Xét câu nào sau đây đúng?

A. $\cos\alpha>0$. **B.** $\sin\alpha>0$. **C.** $\tan\alpha>0$. **D.** $\cot\alpha>0$.

Lời giải

$$\frac{7\pi}{4}<\alpha<2\pi\Leftrightarrow\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}<\alpha<2\pi$$

Ta có: nên α thuộc cung phần tư thứ IV.

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Câu 12: Cho Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\tan\alpha>0,\cot\alpha>0.$ **B.** $\tan\alpha>0,\cot\alpha<0.$

C. $\tan\alpha<0,\cot\alpha<0.$ **D.** $\tan\alpha<0,\cot\alpha>0.$

Lời giải

Điểm biểu diễn cung lượng giác α nằm góc phần tư thứ nhất nên $\tan\alpha>0,\cot\alpha>0.$

$$\tan\alpha=\frac{1}{2}$$

Câu 13: Cho biết . Tính $\cot\alpha$

A. $\cot\alpha=2$. **B.** $\cot\alpha=\frac{1}{4}$. **C.** $\cot\alpha=\frac{1}{2}$. **D.** $\cot\alpha=\sqrt{2}$.

Lời giải

$$\Rightarrow\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$\tan\alpha.\cot\alpha=1$

Ta có: .

Câu 14: Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau đây?

A. $\tan 45^\circ<\tan 60^\circ$. **B.** $\cos 45^\circ\le\sin 45^\circ$.

C. $\sin 60^\circ<\sin 80^\circ$. **D.** $\cos 35^\circ>\cos 10^\circ$.

Lời giải

Khi $\alpha \in (0^\circ;90^\circ)$ hàm $\cos\alpha$ là hàm giảm nên $\cos 35^\circ < \cos 10^\circ$ suy ra D sai.

Câu 15: Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$. **C.** $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

$$\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Khẳng định đúng là:

Câu 16: Giá trị của $\tan\frac{\pi}{6}$ là

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $-\sqrt{3}$.

Lời giải

Trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\square xOM = \frac{\pi}{6}$ khi đó $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ nên $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17: Cho $\sin\alpha = \frac{3}{5}\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$. giá trị của $\cos\alpha$ bằng

A. $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{2}{5}$. **D.** $\cos\alpha = -\frac{2}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

Mà $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

Câu 18: Hãy chọn kết quả sai trong các kết quả sau đây:

A. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. **B.** $\sin(\pi+\alpha) = \sin\alpha$.

C. $\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$. **D.** $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$.

Lời giải

Ta có $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$.

Câu 19: Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, ta được:

A. $\cos\alpha$. **B.** $\sin\alpha$. **C.** $-\cos\alpha$. **D.** $-\sin\alpha$.

Lời giải

Ta có: $A=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$.

Câu 20: Giá trị của biểu thức $S=3-\sin^2 90^\circ+2\cos^2 60^\circ-3\tan^2 45^\circ$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 3

Lời giải

Ta có $S=3-\sin^2 90^\circ+2\cos^2 60^\circ-3\tan^2 45^\circ=3-1^2+2.\left(\frac{1}{2}\right)^2-3.1^2=-\frac{1}{2}$.

Câu 21: Cho a là số thực bất kỳ. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. $\sin a+\cos a=1$. **B.** $\sin^3 a+\cos^3 a=1$.

C. $\sin^4 a+\cos^4 a=1$. **D.** $\sin^2 a+\cos^2 a=1$.

Lời giải

Ta có: $\sin^2 a+\cos^2 a=1\ ;\forall a\in\mathbb{R}$ nên D đúng.

Câu 22: Cho $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sin(\pi+\alpha)<0$. **B.** $\sin(\pi-\alpha)<0$.

C. $\cos(\pi-\alpha)<0$. **D.** $\cos(\pi+\alpha)<0$.

Lời giải

Ta có $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow 2\pi<\alpha+\pi<\frac{5\pi}{2}\Rightarrow\sin(\pi+\alpha)>0;\cos(\pi+\alpha)>0$

$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow-\frac{\pi}{2}<\pi-\alpha<0\Rightarrow\sin(\pi-\alpha)<0;\cos(\pi-\alpha)>0.$

Câu 23: Cho $\sin\alpha=\frac{4}{5}\ \left(90^0<\alpha<180^0\right)$, . Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$. **B.** $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{5}{3}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\frac{9}{25}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{3}{5}$.

Vì $90^0<\alpha<180^0$ nên $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

Câu 24: Cho $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ với $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Tính $\cos\alpha$?

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $-\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

Câu 25: Các đẳng thức nào sau đây đồng thời xảy ra?

A. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$; $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{5}$; $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $\sin\alpha=\frac{4}{5}$; $\cos\alpha=\frac{-3}{5}$. **D.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$; $\cos\alpha=\frac{1}{4}$.

Lời giải:

Áp dụng công thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Câu 26: Cho góc α thỏa $\cot\alpha=\frac{3}{4}$ và $0^O<\alpha<90^O$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\cos\alpha=\frac{4}{5}$. **B.** $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. **C.** $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$. **D.** $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

Lời giải

Áp dụng công thức: $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\Leftrightarrow 1+\frac{9}{16}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\Leftrightarrow\sin^2\alpha=\frac{16}{25}$

Do $0^\circ<\alpha<90^\circ\Rightarrow\sin\alpha>0\Rightarrow\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Tính được các giá trị lượng giác của góc $\alpha=\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$

c) $\tan\alpha=\sqrt{3}$

d) $\cot\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

a) Sai:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

b) Sai:

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

c) Đúng:

$$\cot\left(\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)=\cot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

d) Sai:

Câu 2: Tính được các giá trị lượng giác của góc $\alpha=-\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi$ (biết $k\in\square$). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\tan\alpha=-1$

d) $\cot\alpha=-1$

Lời giải

$$\sin\left[-\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi\right]=\sin\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi+\pi\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\right)=-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

a) Đúng:

b) Đúng:

$$\cos\left[-\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi\right]=\cos\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi+\pi\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\right)=-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left[-\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi\right]=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$$

c) Sai:

$$\cot\left[-\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi\right]=\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\cot\frac{\pi}{4}=-1$$

d) Sai:

Câu 3: Cho $0^\circ<\alpha<90^\circ$. Xét được dấu của các biểu thức sau. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) $A=\sin(\alpha+90^\circ)>0$

b) $B=\cos(\alpha-45^\circ)>0$

c) $C=\tan(270^\circ-\alpha)<0$

d) $D=\cos(2\alpha+90^\circ)>0$

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $0^\circ<\alpha<90^\circ\Rightarrow 90^\circ<\alpha+90^\circ<180^\circ\Rightarrow\sin(\alpha+90^\circ)>0$

b) Đúng: Ta có: $0^\circ<\alpha<90^\circ\Rightarrow -45^\circ<\alpha-45^\circ<45^\circ\Rightarrow\cos(\alpha-45^\circ)>0$

c) Sai: Ta có: $0^\circ<\alpha<90^\circ\Rightarrow -90^\circ<-\alpha<0^\circ\Rightarrow 270^\circ+(-90^\circ)<270^\circ+(-\alpha)<270^\circ+0^\circ$

$\Rightarrow 180^\circ<270^\circ-\alpha<270^\circ\Rightarrow\tan(270^\circ-\alpha)>0$

d) Sai: Ta có: $0^\circ<\alpha<90^\circ\Rightarrow 90^\circ<2\alpha+90^\circ<270^\circ\Rightarrow\cos(2\alpha+270^\circ)<0$

Câu 4: Tính được các giá trị lượng giác còn lại của góc x, biết: $\sin x=-\frac{3}{5}$ với $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\cos x>0$

b) $\cos x=-\frac{4}{5}$

c) $\tan x=\frac{3}{4}$

d) $\cot x=\frac{4}{3}$

Lời giải

a) Sai: Do $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ nên $\cos x<0$

b) Đúng: Ta có: $\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\Rightarrow\cos x=-\frac{4}{5}$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4}$$

c) Đúng:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{4}{3}$$

d) Đúng:

Câu 5: Tính được các giá trị lượng giác còn lại của góc x, biết: $\cos x = \frac{1}{4}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin x < 0$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

c) $\tan x = \sqrt{15}$

d) $\cot x = -\frac{1}{\sqrt{15}}$

Lời giải

a) Sai: Do $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin x > 0$

b) Sai: Ta có: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$

c) Đúng: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{15}$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

d) Sai:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Câu 6: Cho . Xét được dấu của các biểu thức sau. Khi đó:

a) $A = \cos(\alpha + \pi) < 0$

b) $B = \tan(\alpha - \pi) > 0$

c) $C = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) < 0$

d) $D = \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right) < 0$

Lời giải

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\pi<\alpha+\pi<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\cos(\alpha+\pi)<0$$

a) Đúng: Vì

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow-\pi<\alpha-\pi<-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan(\alpha-\pi)>0$$

b) Đúng: Vì

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{2\pi}{5}<\alpha+\frac{2\pi}{5}<\frac{9\pi}{10}\Rightarrow\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{5}\right)>0$$

c) Sai: Vì

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow-\frac{3\pi}{8}<\alpha-\frac{3\pi}{8}<\frac{\pi}{8}\Rightarrow\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{8}\right)>0$$

d) Sai: Vì

Câu 7: Tính được các giá trị lượng giác còn lại của góc x biết: $\cos x=-\frac{5}{13}$ với $180^\circ<x<270^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin x<0$

b) $\tan x=\frac{12}{5}$

c) $\cot x=\frac{5}{12}$

d) $\sin x-\cos x=-\frac{12}{13}$

Lời giải

a) Đúng: Do $180^\circ<x<270^\circ\Rightarrow\sin x<0$

b) Đúng: Ta có:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}$$

$$\Rightarrow\sin x=-\frac{12}{13};\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{12}{5}$$

c) Đúng:

$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{5}{12}$$

d) Sai:

$$\sin x-\cos x=-\frac{7}{13}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho góc lượng giác $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Tìm k để $10\pi < \alpha < 11\pi$.

Lời giải

Ta có $10\pi < \alpha < 11\pi \longrightarrow \frac{19\pi}{2} < k2\pi < \frac{21\pi}{2} \longrightarrow k = 5.$

Câu 2: Tính giá trị của $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right]$.

Lời giải

Ta có $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi + k2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$

Câu 3: Cho $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Khi đó $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$ bằng

Lời giải

Ta có $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha = \frac{1}{3}.$

Câu 4: Biết rằng $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{13\pi}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ thì giá trị đúng của $\cos x$ là

Lời giải

Ta có $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$ và $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$

Kết hợp với giá trị $\sin\frac{13\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 6\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$

Suy ra $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{13\pi}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -\cos x + 1 = \cos x \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}.$

Câu 5: Cho góc α thỏa mãn $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos\alpha.$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \pm\frac{5}{13} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos\alpha = -\frac{5}{13} \approx -0,38$

Câu 6: Cho góc α thỏa mãn $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan\alpha.$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\dfrac{2}{3} \\ \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow sin\alpha = -\dfrac{2}{3} \longrightarrow \tan\alpha = \dfrac{sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,89$

Câu 7: Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha = -\dfrac{4}{3}$ và $\dfrac{2017\pi}{2} < \alpha < \dfrac{2019\pi}{2}$. Tính $\sin\alpha$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} 1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \\ \dfrac{2017\pi}{2} < \alpha < \dfrac{2019\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \\ \dfrac{\pi}{2} + 504.2\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2} + 504.2\pi \end{cases}$

$\longrightarrow \cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$. Mà $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow -\dfrac{4}{3} = \dfrac{\sin\alpha}{-\dfrac{3}{5}} \longrightarrow \sin\alpha = \dfrac{4}{5}$.

Câu 8: Cho góc α thỏa mãn $\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$ Tính $\tan\alpha$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\dfrac{5}{13} \\ \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi. \end{cases} \longrightarrow \sin\alpha = \dfrac{5}{13} \longrightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{5}{12} \approx -0,42$.

Câu 9: Độ dài của ngày từ lúc Mặt Trời mọc đến lúc Mặt Trời lặn ở một thành phố X trong ngày thứ t của năm được tính xấp xỉ bởi công thức

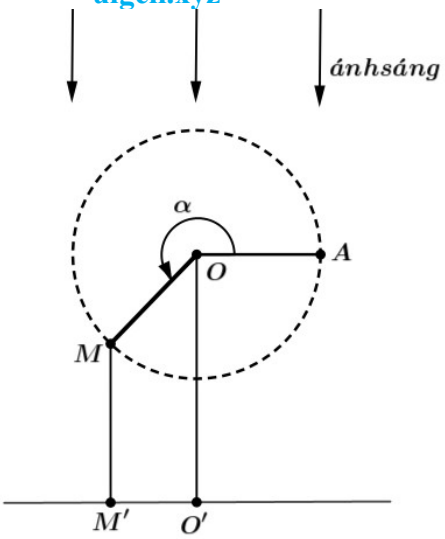
$$d(t) = 4\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right] + 12 \ (t \in \mathbb{Z} \text{ và } 1 \le t \le 365).$$

Thành phố X vào ngày 31 tháng 1 có bao nhiêu giờ có Mặt Trời chiếu sáng? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

Ta có: $d(31) = 9,01$ giờ.

Câu 10: Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như hình bên. Vị trí ban đầu của thanh là OA. Hỏi độ dài bóng $O'M$ của OM khi thanh quay được $\dfrac{60}{13}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 10 cm? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Lời giải

Ta có $\alpha = \frac{60}{13}\cdot 2\pi = \frac{120\pi}{13}$. Suy ra $O'M' = |OM\cos\alpha| = \left|10\cos\frac{120\pi}{13}\right| \approx 7,5 \text{ cm}$.

Dạng 4: Áp dụng tính chất của các giá trị lượng giác

Phương pháp: Sử dụng nhóm công thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác để tính toán

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Thực hiện các yêu cầu trong các trường hợp sau:

a) Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ và $\tan\alpha + \cot\alpha < 0$

b) Cho $3\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \frac{1}{2}$. Tính $A = 2\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$.

Lời giải

a) Ta có $\cot^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 25 \Rightarrow \cot^2\alpha = 24$ hay $\cot\alpha = \pm 2\sqrt{6}$

Vì $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ cùng dấu và $\tan\alpha + \cot\alpha < 0$ nên $\tan\alpha < 0, \cot\alpha < 0$

Do đó $\cot\alpha = -2\sqrt{6}$. Ta lại có $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \cot\alpha\sin\alpha = -2\sqrt{6}.\frac{1}{5} = \frac{-2\sqrt{6}}{5}$$

b) Ta có $3\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\sin^4\alpha - \left(1-\sin^2\alpha\right)^2 = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 6\sin^4\alpha - 2\left(1 - 2\sin^2\alpha + \sin^4\alpha\right) = 1 \Leftrightarrow 4\sin^4\alpha + 4\sin^2\alpha - 3 = 0$$

$\Leftrightarrow \left(2\sin^2\alpha-1\right)\left(2\sin^2\alpha+3\right)=0 \Leftrightarrow 2\sin^2\alpha-1=0$ (Do $2\sin^2\alpha+3>0$) suy ra $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$.

Ta lại có $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ suy ra $A=2\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Bài tập 2: Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=1-\sin\alpha\cos\alpha$ b) $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}+\frac{1+\cot\alpha}{1-\cot\alpha}=0$

Lời giải

a) $\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)\left(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha\right)}{\sin\alpha+\cos\alpha}$

$=\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=1-\sin\alpha\cos\alpha.$

b) $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}+\frac{1+\cot\alpha}{1-\cot\alpha}=\frac{\tan\alpha\cot\alpha+\tan\alpha}{\tan\alpha\cot\alpha-\tan\alpha}+\frac{1+\cot\alpha}{1-\cot\alpha}$

$=\frac{\tan\alpha\left(\cot\alpha+1\right)}{\tan\alpha\left(\cot\alpha-1\right)}+\frac{1+\cot\alpha}{1-\cot\alpha}=\frac{\cot\alpha+1}{\cot\alpha-1}-\frac{1+\cot\alpha}{\cot\alpha-1}=0.$

Bài tập 3: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sin^2\left(3\pi-\alpha\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)$ b) $\left[1+\tan^2\left(-\alpha+11\pi\right)\right].\sin^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$

Lời giải

a) Ta có: $\sin\left(3\pi-\alpha\right)=\sin\left(\pi-\alpha+2\pi\right)=\sin\left(\pi-\alpha\right)=\sin\alpha$;

$\sin\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+2\pi\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\alpha\right)=\cos\alpha.$

Suy ra $\sin^2\left(3\pi-\alpha\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

b) Ta có: $\tan\left(-\alpha+11\pi\right)=\tan\left(-\alpha\right)=-\tan\alpha$;

$\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}-2\pi\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\alpha\right)=\cos\alpha.$

Suy ra $\left[1+\tan^2\left(-\alpha+11\pi\right)\right].\sin^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=\left(1+\tan^2\alpha\right).\cos^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.\cos^2\alpha=1.$

Bài tập 4: Tính giá trị của các biểu thức sau đây:

a) $A=\sin^2 5^\circ+\sin^2 10^\circ+\sin^2 15^\circ+\ldots+\sin^2 85^\circ$ (17 số hạng).

b) $B=\cos 5^\circ+\cos 10^\circ+\cos 15^\circ+\ldots+\cos 175^\circ$ (35 số hạng).

Lời giải

a) Vận dụng: $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$ $\sin 85^\circ=\cos 5^\circ, \sin 80^\circ=\cos 10^\circ$, ta có:
$\sin 75^\circ=\cos 15^\circ,\ldots,\sin 50^\circ=\cos 40^\circ$

.

$$A=\left(\sin^2 5^\circ+\cos^2 5^\circ\right)+\left(\sin^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ\right)+\ldots+\left(\sin^2 40^\circ+\cos^2 40^\circ\right)+\sin^2 45^\circ$$

Vậy

$$=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{8\text{ số }1}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{17}{2}$$

b) Vận dụng: $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos 175^\circ=-\cos 5^\circ, \cos 170^\circ=-\cos 10^\circ$ ta có:

$\cos 165^\circ=-\cos 15^\circ,\ldots,\cos 95^\circ=-\cos 85^\circ$

$$B=\left(\cos 5^\circ+\cos 175^\circ\right)+\left(\cos 10^\circ+\cos 170^\circ\right)+\ldots+\left(\cos 85^\circ+\cos 95^\circ\right)+\cos 90^\circ$$

Vậy

$$=\underbrace{0+0+\ldots+0}_{17\text{ số }1}+\cos 90^\circ=0$$

.

Bài tập 5: Chứng minh các đẳng thức sau(giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\cos^4 x+2\sin^2 x=1+\sin^4 x$

b) $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin^3 x}=\cot^3 x+\cot^2 x+\cot x+1$

c) $\dfrac{\cot^2 x-\cot^2 y}{\cot^2 x.\cot^2 y}=\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 y}{\cos^2 x.\cos^2 y}$

d) $\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}=3\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$

Lời giải

a) Đẳng thức tương đương với $\cos^4 x=1-2\sin^2 x+\left(\sin^2 x\right)^2\Leftrightarrow\cos^4 x=\left(1-\sin^2 x\right)^2$ (*)

Mà $\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow\cos^2 x=1-\sin^2 x$. Do đó (*) $\Leftrightarrow\cos^4 x=\left(\cos^2 x\right)^2$ (đúng).

b) Ta có $VT=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin^3 x}=\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$ mà $\cot^2 x+1=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ và $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ nên

$$VT=\cot^2 x+1+\cot x\left(\cot^2 x+1\right)=\cot^3 x+\cot^2 x+\cot x+1=VP.$$

c) Ta có $VT=\dfrac{\cot^2 x-\cot^2 y}{\cot^2 x.\cot^2 y}=\dfrac{1}{\cot^2 y}-\dfrac{1}{\cot^2 x}=\tan^2 y-\tan^2 x$

$$=\left(\frac{1}{\cos^2 y}-1\right)-\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)=\frac{1}{\cos^2 y}-\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x-\cos^2 y}{\cos^2 x.\cos^2 y}=VP.$$

d) $VT=\sqrt{\sin^4 x+4\left(1-\sin^2 x\right)}+\sqrt{\cos^4 x+4\left(1-\cos^2 x\right)}$

$$=\sqrt{\left(\sin^2 x\right)^2-4\sin^2 x+4}+\sqrt{\left(\cos^2 x\right)^2-4\cos^2 x+4}=\sqrt{\left(\sin^2 x-2\right)^2}+\sqrt{\left(\cos^2 x-2\right)^2}$$

$$=\left(2-\sin^2 x\right)+\left(2-\cos^2 x\right)=4-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=3$$

Mặt khác vì $\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ nên

$$VP=3\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=3\Rightarrow VT=VP.$$

Bài tập 6: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x.

a) $A=\dfrac{\sin^6 x+\cos^6 x+2}{\sin^4 x+\cos^4 x+1}$

b) $B=\dfrac{1+\cot x}{1-\cot x}-\dfrac{2+2\cot^2 x}{\left(\tan x-1\right)\left(\tan^2 x+1\right)}$

c) $C=\sqrt{\sin^4 x+6\cos^2 x+3\cos^4 x}+\sqrt{\cos^4 x+6\sin^2 x+3\sin^4 x}$

Lời giải

a) Ta có Ta có $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\left(\sin^2\alpha\right)^3+\left(\cos^2\alpha\right)^3=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)$$

$$=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

Do đó $A=\dfrac{1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha+2}{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+1}=\dfrac{3\left(1-\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)}{2\left(1-\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)}=\dfrac{3}{2}$

Vậy A không phụ thuộc vào x.

b) Ta có $B=\dfrac{1+\dfrac{1}{\tan x}}{1-\dfrac{1}{\tan x}}-\dfrac{2+\dfrac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}}{(\tan x-1)\dfrac{1}{\sin^2 x}}=\dfrac{\tan x+1}{\tan x-1}-\dfrac{2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\tan x-1}=\dfrac{\tan x+1-2}{\tan x-1}=1$

Vậy B không phụ thuộc vào x.

c) $C=\sqrt{\left(1-\cos^2 x\right)^2+6\cos^2 x+3\cos^4 x}+\sqrt{\left(1-\sin^2 x\right)^2+6\sin^2 x+3\sin^4 x}$

$=\sqrt{4\cos^4 x+4\cos^2 x+1}+\sqrt{4\sin^4 x+4\sin^2 x+1}=\sqrt{\left(2\cos^2 x+1\right)^2}+\sqrt{\left(2\sin^2 x+1\right)^2}$

$=2\cos^2 x+1+2\sin^2 x+1=3$

Vậy C không phụ thuộc vào x.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đơn giản biểu thức $A=\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$, ta được:

A. $\cos\alpha$. **B.** $\sin\alpha$. **C.** $-\cos\alpha$. **D.** $-\sin\alpha$.

Lời giải

Ta có: $A=\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$.

Câu 2: Giá trị của biểu thức $S=3-\sin^2 90^\circ+2\cos^2 60^\circ-3\tan^2 45^\circ$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 3

Lời giải

Ta có $S=3-\sin^2 90^\circ+2\cos^2 60^\circ-3\tan^2 45^\circ=3-1^2+2.\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-3.1^2=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 3: Các đẳng thức nào sau đây đồng thời xảy ra?

A. $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3};\ \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{5};\ \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $\sin\alpha=\dfrac{4}{5};\ \cos\alpha=\dfrac{-3}{5}$. **D.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{4};\ \cos\alpha=\dfrac{1}{4}$.

Lời giải:

Áp dụng công thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Câu 4: Cho $\tan\alpha=\frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $P=\frac{\sin\alpha}{2\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}$ là

A. $\frac{5}{26}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{5}{26}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải:

$$P=\frac{\sin\alpha}{2\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}=\frac{\sin\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)}{2\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}=\frac{\tan^3\alpha+\tan\alpha}{2\tan^3\alpha+8}=\frac{5}{26}$$

Câu 5: Rút gọn biểu thức $M=\sin^6 x+\cos^6 x.$

A. $M=1+3\sin^2 x\cos^2 x.$ **B.** $M=1-3\sin^2 x.$

C. $M=1-\frac{3}{2}\sin^2 2x.$ **D.** $M=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x.$

Lời giải

Ta có $M=\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3$

$$=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

Câu 6: Rút gọn biểu thức $M=\tan^2 x-\sin^2 x.$

A. $M=\tan^2 x.$ **B.** $M=\sin^2 x.$ **C.** $M=\tan^2 x.\sin^2 x.$ **D.** $M=1.$

Lời giải

Ta có $M=\tan^2 x-\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\sin^2 x=\sin^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)=\sin^2 x.\tan^2 x.$

Câu 7: Rút gọn biểu thức $M=\cot^2 x-\cos^2 x.$

A. $M=\cot^2 x.$ **B.** $M=\cos^2 x.$ **C.** $M=1.$ **D.** $M=\cot^2 x.\cos^2 x.$

Lời giải

Ta có $M=\cot^2 x-\cos^2 x=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\cos^2 x=\cos^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)=\cos^2 x.\cot^2 x.$

Câu 8: Rút gọn biểu thức $M=\left(1\sin^2 x\right)\cot^2 x+\left(1\cot^2 x\right).$

A. $M=\sin^2 x.$ **B.** $M=\cos^2 x.$ **C.** $M=\sin^2 x.$ **D.** $M=\cos^2 x.$

Lời giải

Ta biến đổi: $M=\left(\cot^2 x-\cos^2 x\right)+\left(1-\cot^2 x\right)=1-\cos^2 x=\sin^2 x.$

Câu 9: Rút gọn biểu thức $M=\sin^2\alpha\tan^2\alpha+4\sin^2\alpha-\tan^2\alpha+3\cos^2\alpha.$

A. $M=1+\sin^2\alpha.$ **B.** $M=\sin\alpha.$ **C.** $M=2\sin\alpha.$ **D.** $M=3.$

Lời giải

Ta có $M=\tan^2\alpha\left(\sin^2\alpha-1\right)+4\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$

$=\tan^2\alpha\left(-\cos^2\alpha\right)+4\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$

$=-\sin^2\alpha+4\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha=3\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=3.$

Câu 10: Rút gọn biểu thức $M=\left(\sin^4x+\cos^4x-1\right)\left(\tan^2x+\cot^2x+2\right).$

A. $M=-4.$ **B.** $M=-2.$ **C.** $M=2.$ **D.** $M=4.$

Lời giải

Ta có $M=\left(1-2\sin^2x.\cos^2x-1\right)\left(\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x}+\dfrac{\cos^2x}{\sin^2x}+2\right)$

$=\left(-2\sin^2x.\cos^2x\right)\left(\dfrac{\sin^4x+\cos^4x+2\sin^2x.\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}\right)=(-2).\left(\sin^2x+\cos^2x\right)^2=-2.$

Câu 11: Đơn giản biểu thức $P=\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}.$

A. $P=1+2\tan^2\alpha.$ **B.** $P=1-2\tan^2\alpha.$

C. $P=-1+2\tan^2\alpha.$ **D.** $P=-1-2\tan^2\alpha.$

Lời giải

Ta có $P=\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{1+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\tan^2\alpha=1+2\tan^2\alpha.$

Câu 12: Đơn giản biểu thức $P=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{1}{1+\cos\alpha}.$

A. $P=-\dfrac{2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$ **B.** $P=\dfrac{2}{\sin^2\alpha}.$ **C.** $P=\dfrac{2}{1+\cos\alpha}.$ **D.** $P=0.$

Lời giải

Ta có $P=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{1}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}-\dfrac{1}{1+\cos\alpha}.$

$=\dfrac{1-\cos\alpha}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}-\dfrac{1}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1}{1+\cos\alpha}-\dfrac{1}{1+\cos\alpha}=0.$

Câu 13: Đơn giản biểu thức $P=\dfrac{1-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\cos^2\alpha.$

A. $P=\tan^2\alpha.$ **B.** $P=1.$ **C.** $P=-\cos^2\alpha.$ **D.** $P=\cot^2\alpha.$

Lời giải

$P=\dfrac{1-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1-\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha.$

Câu 14: Đơn giản biểu thức $P=\dfrac{2\cos^2 x-1}{\sin x+\cos x}$.

A. $P=\cos x+\sin x.$ **B.** $P=\cos x-\sin x.$

C. $P=\cos 2x-\sin 2x.$ **D.** $P=\cos 2x+\sin 2x.$

Lời giải

Ta có $P=\dfrac{2\cos^2 x-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\sin x+\cos x}=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}=\cos x-\sin x.$

Câu 15: Đơn giản biểu thức $P=\dfrac{\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)^2-1}{\cot\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}$.

A. $P=2\tan^2\alpha.$ **B.** $P=\dfrac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}.$ **C.** $P=2\cot^2\alpha.$ **D.** $P=\dfrac{2}{\cos^2\alpha}.$

Lời giải

Ta có $P=\dfrac{\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)^2-1}{\cot\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha.\cos\alpha+\cos^2\alpha-1}{\cos\alpha.\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)}$

$=\dfrac{1+2\sin\alpha.\cos\alpha-1}{\cos\alpha.\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}}=\dfrac{2\sin\alpha.\cos\alpha}{\dfrac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}}=\dfrac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\tan^2\alpha.$

Câu 16: Đơn giản biểu thức $P=\left(\dfrac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+1}\right)^2+1.$

A. $P=2.$ **B.** $P=1+\tan\alpha.$ **C.** $P=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}.$ **D.** $P=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}.$

Lời giải

Ta có $\dfrac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+1}=\dfrac{\sin\alpha\left(1+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha+1}=\dfrac{\sin\alpha\left(\dfrac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha+1}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha.$

Suy ra $P=\tan^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}.$

Câu 17: Đơn giản biểu thức $P=\tan\alpha\left(\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right).$

A. $P=2.$ **B.** $P=2\cos\alpha.$ **C.** $P=2\tan\alpha.$ **D.** $P=2\sin\alpha.$

Lời giải

Ta có $P=\tan\alpha\left(\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right).$

$$= \frac{1}{\cos\alpha} + \cos\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\left(1-\sin^2\alpha\right)+\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = 2\cos\alpha.$$

Câu 18: Đơn giản biểu thức $P = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}.$

A. $P = 1.$ **B.** $P = -1.$ **C.** $P = \frac{1}{2}.$ **D.** $P = -\frac{1}{2}.$

Lời giải

Ta có $\frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} = 1 - \frac{\cos^2 x}{\cot^2 x} = 1 - \cos^2 x.\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 - \sin^2 x.$

Và $\frac{\sin x.\cos x}{\cot x} = \sin x.\cos x.\frac{\sin x}{\cos x} = \sin^2 x$. Suy ra. $P = 1 - \sin^2 x + \sin^2 x = 1.$

Câu 19: Tính $S = \sin^2 5^0 + \sin^2 10^0 + \sin^2 15^0 + ...\sin^2 8^0 + \sin^2 85^0$

A. $\frac{19}{2}$. **B.** 8. **C.** $\frac{17}{2}$. **D.** 9.

Lời giải

$$S = \sin^2 5^0 + \sin^2 10^0 + \sin^2 15^0 + ...\sin^2 80^0 + \sin^2 85^0$$

$$= \left(\sin^2 5^0 + \sin^2 85^0\right) + \left(\sin^2 10^0 + \sin^2 80^0\right) + ...\left(\sin^2 15^0 + \sin^2 75^0\right) + \sin^2 45^0 = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}.$$

Câu 20: Với mọi góc α, biểu thức $\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) + ... + \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right)$ nhận giá trị bằng

A. 10 **B.** -10 **C.** 1 **D.** 0

Lời giải

Có 10 số hạng, chia thành 5 cặp.

Có $\alpha + \frac{9\pi}{5} = \pi + \left(\alpha + \frac{4\pi}{5}\right) \Rightarrow \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{5}\right)$

Tương tự $\cos\left(\alpha + \frac{8\pi}{5}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{5}\right)$; $\cos\left(\alpha + \frac{7\pi}{5}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right)$;

$\cos\left(\alpha + \frac{6\pi}{5}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right)$; $\cos(\alpha + \frac{5\pi}{5}) = -\cos\alpha$. Do đó $P = 0$

Câu 21: Biết $\tan x = 2$, giá trị của biểu thức $M = \frac{3\sin x - 2\cos x}{5\cos x + 7\sin x}$ bằng:

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $-\frac{4}{9}$. **C.** $\frac{4}{19}$. **D.** $-\frac{4}{19}$.

Lời giải

Cách 1: Chia cả tử và mẫu của M cho $cosx$ ta có: $M=\frac{3\frac{\sin x}{\cos x}-2}{5+7\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{3.2-2}{5+7.2}=\frac{4}{19}$.

Cách 2: Ta có: $\tan x=2\Leftrightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=2\Leftrightarrow\sin x=2\cos x$ thay $\sin x=2\cos x$ vào M:

$$M=\frac{3.2\cos x-2\cos x}{5\cos x+7.2\cos x}=\frac{4\cos x}{19\cos x}=\frac{4}{19}.$$

Câu 22: Cho $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Tính $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$

A. $-\frac{2}{\cos\alpha}$. **B.** $\frac{2}{\cos\alpha}$. **C.** $\frac{2}{\sin\alpha}$. **D.** $-\frac{2}{\sin\alpha}$.

Lời giải

Đặt $A=\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$

$$A^2=\left(\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\right)^2=\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}+\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}+2=\frac{4}{1-\sin^2\alpha}=\frac{4}{\cos^2\alpha}$$

Khi đó

Vì $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha>0$ do đó $A=\frac{2}{\cos\alpha}$.

Câu 23: Cho các góc α, β thỏa mãn $\frac{\pi}{2}<\alpha$, $\beta<\pi$, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$. Tính $\sin(\alpha+\beta)$.

A. $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{2+2\sqrt{10}}{9}$. **B.** $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{10}-2}{9}$.

C. $\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{9}$. **D.** $\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Do $\frac{\pi}{2}<\alpha$, $\beta<\pi\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha<0\\ \sin\beta>0\end{cases}$.

$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Ta có .

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta = \frac{1}{3}.\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right).\frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{2+2\sqrt{10}}{9}$

Suy ra .

$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{2+2\sqrt{10}}{9}$

Vậy .

Câu 24: Với mọi $\alpha \in \square$ thì $\tan(2017\pi+\alpha)$ bằng

A. $-\tan\alpha.$ **B.** $\cot\alpha.$ **C.** $\tan\alpha.$ **D.** $-\cot\alpha.$

Lời giải

Ta có $\tan(2017\pi+\alpha) = \tan\alpha.$

$5\cos\alpha + 12\sin\alpha = 0$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} 5\cos\alpha + 12\sin\alpha = 0 \\ 3\cos\alpha + 2\sin\alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = -\frac{5}{13} \\ \cos\alpha = \frac{12}{13} \end{cases}.$

Câu 25: Rút gọn biểu thức $M = (\sin x+\cos x)^2 + (\sin x-\cos x)^2.$

A. $M=1.$ **B.** $M=2.$ **C.** $M=4.$ **D.** $M = 4\sin x.\cos x.$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} (\sin x+\cos x)^2 = \sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x.\cos x = 1+2\sin x.\cos x \\ (\sin x-\cos x)^2 = \sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x.\cos x = 1-2\sin x.\cos x \end{cases}$

Suy ra $M=2.$

Câu 26: Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\alpha-\pi)$, ta được

A. $A = \cos\alpha+\sin\alpha.$ **B.** $A = 2\sin\alpha.$ **C.** $A = \sin\alpha\cos\alpha.$ **D.** $A=0.$

Lời giải

Ta có $A = \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\alpha-\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha-\sin\alpha = 0.$

Câu 27: Rút gọn biểu thức $S = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(\pi-x)$ ta được

A. $S=0.$ **B.** $S = \sin^2 x-\cos^2 x.$ **C.** $S = 2\sin x\cos x.$ **D.** $S=1.$

Lời giải

Ta có $S=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right).\sin(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).\cos(\pi-x)$

$=\sin x.\sin x-\cos x.(-\cos x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1.$

Câu 28: Cho $P=\sin(\pi+\alpha).\cos(\pi-\alpha)$ và $Q=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).$ Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $P+Q=0.$ **B.** $P+Q=-1.$ **C.** $P+Q=1.$ **D.** $P+Q=2.$

Lời giải

Ta có $P=\sin(\pi+\alpha).\cos(\pi-\alpha)=-\sin\alpha.(-\cos\alpha)=\sin\alpha.\cos\alpha.$

Và $Q=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha.(-\sin\alpha)=-\sin\alpha.\cos\alpha.$

Khi đó $P+Q=\sin\alpha.\cos\alpha-\sin\alpha.\cos\alpha=0.$

Câu 29: Giá trị biểu thức $P=\left[\tan\frac{17\pi}{4}+\tan\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)\right]^2+\left[\cot\frac{13\pi}{4}+\cot(7\pi-x)\right]^2$ bằng

A. $\frac{1}{\sin^2 x}.$ **B.** $\frac{1}{\cos^2 x}.$ **C.** $\frac{2}{\sin^2 x}.$ **D.** $\frac{2}{\cos^2 x}.$

Lời giải

Ta có $\tan\frac{17\pi}{4}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+4\pi\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$ và $\tan\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)=\cot x.$

Và $\cot\frac{13\pi}{4}=\cot\left(\frac{\pi}{4}+3\pi\right)=\cot\frac{\pi}{4}=1;\cot(7\pi-x)=-\cot x.$

Suy ra $P=(1+\cot x)^2+(1-\cot x)^2=2+2\cot^2 x=\frac{2}{\sin^2 x}.$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $\tan x=-2$. Tính được các biểu thức $A_1=\frac{5\cot x+4\tan x}{5\cot x-4\tan x}, A_2=\frac{2\sin x+\cos x}{\cos x-3\sin x}$, khi đó:

a) $\cot x=-\frac{1}{2}$

b) Vì $\tan x=-2$ nên $\cos x=0$

c) $A_1=-\frac{21}{11}$

d) $A_2=\frac{3}{7}$

Lời giải

$$\tan x = -2 \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2}$$

a) Đúng: Ta có:

b) Sai: Ta có $\tan x = -2$ nên $\cos x \neq 0$

$$A_1 = \frac{-\frac{5}{2} + 4.(-2)}{-\frac{5}{2} - 4.(-2)} = -\frac{21}{11}$$

c) Đúng:

d) Sai: Chia tử và mẫu của biểu thức A_2 cho $\cos x$, ta được:

$$A_2 = \frac{\frac{2\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{3\sin x}{\cos x}} = \frac{2\tan x + 1}{1 - 3\tan x} = \frac{2.(-2)+1}{1-3.(-2)} = -\frac{3}{7}$$

Câu 2: Cho $\cot x = 2$. Tính được các biểu thức $B_1 = \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x - 2\cos x}, B_2 = \frac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x}$, khi đó:

a) Vì $\cot x = 2$ nên $\sin x \neq 0$.

b) $B_1 = -8$

c) $B_2 = -5$

d) $B_1 + B_2 = -13$

Lời giải

a) Đúng: Vì $\cot x = 2$ nên $\sin x \neq 0$

b) Đúng: Chia cả tử và mẫu của biểu thức B_1 cho $\sin x$, ta được:

$$B_1 = \frac{2\frac{\sin x}{\sin x} + 3\frac{\cos x}{\sin x}}{3\frac{\sin x}{\sin x} - 2\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{2 + 3\cot x}{3 - 2\cot x} = \frac{2 + 3\cdot 2}{3 - 2\cdot 2} = -8$$

c) Sai: Chia cả tử và mẫu của biểu thức B_2 cho $\sin^2 x$, ta được:

$$B_2 = \frac{\frac{2}{\sin^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x}} = \frac{2\left(1 + \cot^2 x\right)}{\cot^2 x - \cot x} = \frac{2\left(1 + 2^2\right)}{2^2 - 2} = 5$$

$B_1 + B_2 = -8 + 5 = -3$

d) Sai:

Câu 3: Cho góc lượng giác α thỏa mãn $\cos\alpha = \frac{3}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) Giá trị $\sin$ của góc lượng giác α âm.

b) Giá trị $\tan$ của góc lượng giác α dương.

c) Giá trị của biểu thức $P = \sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha = \frac{2}{25}$.

d) Giá trị của biểu thức $Q = \tan\alpha + \cot\alpha > 2$.

Lời giải

a) Sai: Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin\alpha > 0$

b) Đúng: Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin\alpha > 0, \cos\alpha > 0 \Rightarrow \tan\alpha > 0$

c) Vì $\cos\alpha = \frac{3}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{4}{5} \Rightarrow P = \sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha = \frac{16}{25} - \frac{18}{25} = -\frac{2}{25}$.

d) Đúng: $Q = \tan\alpha + \cot\alpha = \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12} > 2$

Câu 4: Cho $\tan\alpha = 2$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) $\cot\alpha = \frac{1}{2}$.

b) Khi $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ thì $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

c) Giá trị của biểu thức $B = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha + 2\sin\alpha} = \frac{5}{31}$

d) Cho $\frac{\sin^4\alpha}{a} + \frac{\cos^4\alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$. Giá trị của biểu thức: $A = \frac{\sin^8\alpha}{a^3} + \frac{\cos^8\alpha}{b^3} = \frac{1}{a^3+b^3}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $\tan\alpha.\cot\alpha = 1 \Rightarrow \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{2}$.

b) Sai: Ta có: $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{1}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$;

Mà $0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

c) Đúng: $B=\dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos^3\alpha}}{\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}+\dfrac{3\cos^3\alpha}{\cos^3\alpha}+\dfrac{2\sin\alpha}{\cos^3\alpha}}=\dfrac{\tan\alpha\left(\tan^2\alpha+1\right)-\left(\tan^2\alpha+1\right)}{\tan^3\alpha+3+2\tan\alpha\left(\tan^2\alpha+1\right)}$

Suy ra $B=\dfrac{2(4+1)-(4+1)}{8+3+2.2(4+1)}=\dfrac{5}{31}$.

d) Sai: Đặt $\cos^2\alpha=t\Rightarrow\dfrac{(1-t)^2}{a}+\dfrac{t^2}{b}=\dfrac{1}{a+b}$

$\Leftrightarrow b(1-t)^2+at^2=\dfrac{ab}{a+b}\Leftrightarrow at^2+bt^2-2bt+b=\dfrac{ab}{a+b}\Leftrightarrow(a+b)t^2-2bt+b=\dfrac{ab}{a+b}$

$\Leftrightarrow(a+b)^2t^2-2b(a+b)t+b^2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{b}{a+b}$.

Suy ra $\cos^2\alpha=\dfrac{b}{a+b};\sin^2\alpha=\dfrac{a}{a+b}$.

Vậy: $\dfrac{\sin^8\alpha}{a^3}+\dfrac{\cos^8\alpha}{b^3}=\dfrac{a}{(a+b)^4}+\dfrac{b}{(a+b)^4}=\dfrac{1}{(a+b)^3}$.

Câu 5: Cho góc α thỏa mãn $\dfrac{-\pi}{2}<\alpha<0$ và $\cot\alpha=-3$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) $\sin\alpha>0$

b) $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

c) $\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos^3\alpha+3\sin^3\alpha+2\cos\alpha}=\dfrac{10}{21}$

d) $\left[\tan\dfrac{17\pi}{4}+\tan\left(\dfrac{7\pi}{2}-\alpha\right)\right]^2+\left[\cot\dfrac{13\pi}{4}+\cot(7\pi-\alpha)\right]^2=20$

Lời giải

a) Sai: Do $\frac{-\pi}{2}<\alpha<0$ nên $\sin\alpha<0$.

b) Đúng: $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$ do $\frac{-\pi}{2}<\alpha<0$ nên $\sin\alpha<0$

Từ hệ thức $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, suy ra $\sin\alpha=-\sqrt{\frac{1}{1+\cot^2\alpha}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

c) Đúng: $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos^3\alpha+3\sin^3\alpha+2\cos\alpha}=\frac{10}{21}$. Xét biểu thức $P=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos^3\alpha+3\sin^3\alpha+2\cos\alpha}$

Chia cả tử và mẫu cho $\sin^3\alpha$ ta được:

$$P=\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}-\frac{1}{\sin^2\alpha}}{\frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}+3+2\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}}=\frac{\cot\alpha.\left(1+\cot^2\alpha\right)-\left(1+\cot^2\alpha\right)}{\cot^3\alpha+3+2.\cot\alpha.\left(1+\cot^2\alpha\right)}$$

Thay $\cot\alpha=-3$ vào P ta được $P=\frac{10}{21}$.

d) Đúng: $\left[\tan\frac{17\pi}{4}+\tan\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)\right]^2+\left[\cot\frac{13\pi}{4}+\cot\left(7\pi-\alpha\right)\right]^2=20$

Ta có $\tan\frac{17\pi}{4}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+4\pi\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$ và $\tan\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha.$

Và $\cot\frac{13\pi}{4}=\cot\left(\frac{\pi}{4}+3\pi\right)=\cot\frac{\pi}{4}=1$; $\cot\left(7\pi-\alpha\right)=-\cot\alpha$

Suy ra $\left[\tan\frac{17\pi}{4}+\tan\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)\right]^2+\left[\cot\frac{13\pi}{4}+\cot\left(7\pi-\alpha\right)\right]^2$

$=\left(1+\cot x\right)^2+\left(1-\cot x\right)^2=2+2\cot^2 x=2+2.\left(-3\right)^2=20$.

Do đó, mệnh đề $\left[\tan\frac{17\pi}{4}+\tan\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)\right]^2+\left[\cot\frac{13\pi}{4}+\cot\left(7\pi-\alpha\right)\right]^2=20$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Rút gọn biểu thức $A=2\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+3\sin^2 x$.

Lời giải

$A = 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x$

$= \cos^4 x - \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x + 3\sin^2 x$

$= 2\cos^2 x + 2\sin^2 x = 2$

Câu 2: Cho góc α thỏa mãn $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ và $\sin\alpha - 2\cos\alpha = 1$. Tính $P = 2\tan\alpha - \cot\alpha.$

Lời giải

Với $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ suy ra $\begin{cases}\sin\alpha < 0\\ \cos\alpha < 0\end{cases}$.

Ta có $\begin{cases}\sin\alpha - 2\cos\alpha = 1\\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\end{cases} \Rightarrow (1 + 2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow 5\cos^2\alpha + 4\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha = 0\ (loaii)\\ \cos\alpha = -\dfrac{4}{5}\end{array}\right.$.

Từ hệ thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, suy ra $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$ (do $\sin\alpha < 0$) $\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3}{4}$

và $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{4}{3}.$

Thay $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$ và $\cot\alpha = \dfrac{4}{3}$ vào P, ta được $P = \dfrac{1}{6} \approx 0{,}17$

Câu 3: Cho góc α thỏa mãn $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ Tính $P = \tan^2\alpha + \cot^2\alpha.$

Lời giải

Ta có $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha = -\dfrac{1}{4}.$

Khi đó $P = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}$

$= \dfrac{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} = \dfrac{1 - 2(\sin\alpha\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha\cos\alpha)^2} = 14.$

Câu 4: Cho góc α thỏa mãn $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\tan\alpha - \cot\alpha = 1$. Tính $P = \tan\alpha + \cot\alpha.$

Lời giải

Ta có: $\tan\alpha-\cot\alpha=1\Leftrightarrow\tan\alpha-\dfrac{1}{\tan\alpha}=1\Leftrightarrow\tan^2\alpha-\tan\alpha-1=0\Leftrightarrow\tan\alpha=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$

Do $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ suy ra $\tan\alpha<0$ nên $\tan\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{2}{1-\sqrt{5}}.$

Thay $\tan\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ và $\cot\alpha=\dfrac{2}{1-\sqrt{5}}$ vào P ta được $P=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{2}{1-\sqrt{5}}=-\sqrt{5}\approx-2,24$

Câu 5: Cho góc α thỏa mãn $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{12}{25}$ và $\sin\alpha+\cos\alpha>0.$ Tính $P=\sin^3\alpha+\cos^3\alpha.$

A. $P=\dfrac{91}{125}.$ **B.** $P=\dfrac{49}{25}.$ **C.** $P=\dfrac{7}{5}.$ **D.** $P=\dfrac{1}{9}.$

Lời giải

Áp dụng $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, ta có

$P=\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^3-3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha).$

Ta có $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=1+\dfrac{24}{25}=\dfrac{49}{25}.$

Vì $\sin\alpha+\cos\alpha>0$ nên ta chọn $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{7}{5}.$

Thay $\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{7}{5}\\ \sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{12}{25}\end{cases}$ vào P, ta được $P=\left(\dfrac{7}{5}\right)^3-3.\dfrac{12}{25}.\dfrac{7}{5}=\dfrac{91}{125}\approx0,73$

Câu 6: Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha=2.$ Tính $P=\dfrac{2\sin^2\alpha+3\sin\alpha.\cos\alpha+4\cos^2\alpha}{5\sin^2\alpha+6\cos^2\alpha}.$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos^2\alpha$ ta được

$P=\dfrac{2\tan^2\alpha+3\tan\alpha+4}{5\tan^2\alpha+6}=\dfrac{2.2^2+3.2+4}{5.2^2+6}=\dfrac{9}{13}\approx0,69$

Câu 7: Huyện lị Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện lị Cái Nước tỉnh Cà Mau cùng nằm ở $105°$ kinh đông, nhưng Quản Bạ ở $23°$ vĩ bắc, Cái Nước ở vĩ độ $9°$ bắc. Hãy tính độ dài của cung kinh tuyến nối hai huyện lị đó (khoảng cách theo đường chim bay), coi Trái Đất có bán kính $6278km$.

Lời giải

Góc ở tâm chắn cung kinh tuyến nối huyện Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện Cái Nước tỉnh Cà Mau có số đo bằng $23°-9°=14°$.

$$\frac{6378.14.\pi}{180} \approx 1558(km)$$

Vậy độ dài cung kinh tuyến đó bằng