111 ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 4- ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT VÀ BỘI CHUNG NHỎ NHẤT

CHỦ ĐỀ 3: CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM ƯCLN, BCNN

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Kiến thức cần nhớ

1. Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.

2. Ước chung lớn nhất (ƯCLN) của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong các ước chung của các số đó.

3. Muốn tìm ƯCLN của hai hay nhiều số lớn hơn 1, ta thực hiện ba bước sau:

- Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.

- Chọn ra các thừa số nguyên tố chung.

- Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất của nó. Tích đó là ƯCLN phải tìm.

4. Để tìm ước chung của nhiều số, ta có thể tìm ƯCLN của các số đó rồi tìm ước của ƯCLN đó.

5. Bội chung của hai hay nhiều số là bội của tất cả các số đó.

6. Bội chung nhỏ nhất (BCNN) của hai hay nhiều số là số nhỏ nhất khác 0 trong các bội chung của các số đó.

7. Muốn tìm BCNN của hai hay nhiều số lớn hơn 1, ta thực hiện ba bước sau:

- Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.

- Chọn ra các thừa số nguyên tố chung và riêng.

- Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ lớn nhất của nó. Tích đó là BCNN phải tìm.

8. Để tìm bội chung của nhiều số, ta có thể tìm BCNN của các số đó rồi nhân BCNN đó lần lượt với $0,1,2,3,\ldots$

2. Các tính chất

1. Khi cần kí hiệu gọn, ta có thể viết ƯCLN (a,b) là (a,b), viết $BCNN(a,b)$ là $[a,b]$

2. Nếu $ab \vdots c$ và $(b,c)=1$ thì $a \vdots c$.

3. Nếu $a \vdots m$ và $a \vdots n$ thì $a \vdots BCNN(m,n)$. Đặc biệt, nếu $a \vdots m, a \vdots n$ và $(m,n)=1$ thì $a \vdots mn$

4. Nếu ƯCLN $(a,b)=d$ thì $a=dm, b=dn$ với $(m,n)=1$.

5. Nếu $BCNN(a,b)=c$ thì $c=am, c=bn$ với $(m,n)=1$.

6. ƯCLN $(a,b)\cdot BCNN(a,b)=a.b$.

7. Người ta chứng minh được rằng:

Cho hai số tự nhiên a và b trong đó $a>b$.

+ Nếu a chia hết cho b thì ƯCLN $(a,b)=b$.

+ Nếu a không chia hết cho b thì ƯCLN (a,b) bằng ƯCLN của b và số dư trong phép chia a cho b.

Từ đó, ta có thuật toán Euclide tìm ƯCLN của hai số mà không cần phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố như sau:

- Chia số lớn cho số nhỏ.

- Nếu phép chia còn dư, lấy số chia đem chia cho số dư.

- Nếu phép chia này còn dư, lại lấy số chia mới chia cho số dư mới.

- Cứ tiếp tục làm như vậy cho đến khi được số dư bằng 0 thì số chia cuối cùng là ƯCLN phải tìm.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Phương pháp phân tích ra các thừa số nguyên tố

I. Phương pháp giải

Muốn tìm ƯCLN, BCNN của hai hay nhiều số ta làm như sau

Bước 1: Phân tích các số ra thừa số nguyên tố với số mũ tương ứng

Bước 2: Tìm các thừa số chung và riêng

Bước 3: ƯCLN là tích các thừa số nguyên tố chung với số mũ nhỏ nhất

BCNN là tích của các thừa số nguyên tố chung và riêng với số mũ lớn nhất

II. Bài toán

Bài 1: Tìm số tự nhiên n lớn nhất sao cho khi chia $364,414,539$ cho n, ta được ba số dư bằng nhau.

Lời giải:

$364,414,539$ chia cho n có cùng số dư nên các hiệu của hai số trong ba số ấy chia hết cho n.

Ta có:

$539-414\vdots n$, tức là $125\vdots n$,

$539-364\vdots n$, tức là $175\vdots n$,

$414-364 \vdots n$ $50 \vdots n$, tức là .

Để n lớn nhất thì n là ƯCLN $(125, 175, 50)$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố:

$125 = 5^3$

$175 = 5^2.7$

$50 = 5^2.2$

ƯCLN $(125, 175, 50) = 5^2 = 25$

Vậy $n = 25$

Bài 2: Tìm số tự nhiên n nhỏ hơn 30 để các số $3n+4$ và $5n+1$ có ước chung khác 1.

Lời giải:

Gọi d là một ước chung của $3n+4$ và $5n+1$.

Ta có $3n+4 \vdots d$ và $5n+1 \vdots d$ nên $5(3n+4)-3(5n+1) \vdots d$, tức là $17 \vdots d$

Suy ra $d \in \{1;17\}$.

Để $3n+4$ và $5n+1$ có ước chung khác 1, ta phải có $3n+4 \vdots 17$ tức là $3n+4-34 \vdots 17$ hay $3(n-10) \vdots 17$

Ta lại có $(3,17)=1$ nên $n-10 \vdots 17$.

Do $n<30$ nên $n=10$ hoặc $n=27$.

Thử lại $n=10$, $n=27$ thỏa mãn. Vậy $n=10$,

Bài 3: Tổng của năm số tự nhiên bằng 156. Ước chung lớn nhất của chúng có thể nhận giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải:

Gọi năm số tự nhiên đã cho là a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ước chung lớn nhất của chúng là d.

Ta có: $a_1 = dk_1, a_2 = dk_2, a_3 = dk_3, a_4 = dk_4, a_5 = dk_5$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=d\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5\right)$

nên

$156=d\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5\right)$

do đó

Suy ra d là ước của 156.

Ta lại có $k_1+k_2+k_3+k_4+k_5\geq 5$ nên $5d\leq 156$, suy ra $d\leq 31$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố: $156=2^2.3.13$.

Ước lớn nhất của 156 không vượt quá 31 là 26.

Giá trị lớn nhất của d là 26, xảy ra khi chẳng hạn $a_1=a_2=a_3=a_4=26$ và $a_5=52$ hoặc các hoán vị của chúng.

Bài 4: Có ba đèn tín hiệu, chúng phát sáng cùng một lúc vào 8 giờ sáng. Đèn thứ nhất cứ 4 phút phát sáng một lần, đèn thứ hai cứ 6 phút phát sáng một lấn, đèn thứ ba cứ 7 phút phát sáng một lần. Thời gian đầu tiên để cả ba đèn cùng phát sáng sau 12 giờ trưa là lúc mấy giờ?

Lời giải:

Gọi thời gian ít nhất để sau đó, cả ba đèn lại cùng phát sáng là a (phút).

Ta có a là $BCNN(4,6,7)$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố: $4.=2^2,6=2.3,7=7$ nên $BCNN(4,6,7)=2^2\cdot 3.7=84$

Sau 84 phút, cả ba đèn cùng phát sáng. Chúng cùng phát sáng vào lúc 9 giờ 24 phút, 10 giờ 48 phút, 12 giờ 12 phút. . .

Thời gian đầu tiên sau 12 giờ trưa để cả ba đèn cùng phát sáng là lúc 12 giờ 12 phút.

Bài 5: Điền các chữ số thích hợp vào dấu * để số $A=\overline{679^{***}}$ chia hết cho tất cả các số $5,6,7,9$

Lời giải:

Điều kiện để A chia hết cho tất cả các số $5,6,7,9$ là A chia hết cho $BCNN(5,6,7,9)$

$BCNN(5,6,7,9)=2.3^2\cdot 5.7=630$

Ta thấy 679999 chia 630 được 1079, dư 229 nên $679999-229=679770$ chia hết cho 630, $679770-630=679140$ chia hết cho 630.

Đáp số: 679770 và 679140.

Bài 6: Tìm các số tự nhiên a và b $(a<b)$ biết ƯCLN $(a,b)=12, BCNN(a,b)=240$

Lời giải:

Ta có $ab=(a,b).BCNN(a,b)=12.240=2880$ (1)

ƯCLN $(a,b)=12$ nên $a=12\text{m}, b=12n$ trong đó $(m,n)=1$

Suy ra $ab=12\text{m}.12n=144mn.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $144mn=2880$ hay $mn=20$.

Ta có $a<b$ nên $m<n$. Các số m,n nguyên tố cùng nhau và có tích bằng 20 nên

m	1	4
n	20	5

Suy ra

a	12	48
b	240	60

Bài 7: Cho $a=24, b=70, c=112.$ Tìm $(a,b);(a,b,c);[a,b];[a,b,c].$ Từ đó kiểm tra công thức ƯCLN $(a,b,c)=$ ƯCLN(ƯCLN $(a,b),c);\ BCNN(a,b,c)=BCNN(BCNN(a,b),c)$

Lời giải:

Ta có: $a=24=2^3.3; b=70=2.5.7; c=112=24.7; (a,b)=2; (a,b,c)=2; [a,b]=2^3.35.7=840$

$[a,b,c]=2^4.3.5.7=1680$

ƯCLN $(a,b,c)=2$; ƯCLN $(a,b)=2 \Rightarrow$ ƯCLN(ƯCLN $(a,b),c)=$ ƯCLN $(2,112)=2$

$BCNN(a,b,c)=1680; BCNN(BCNC(a,b),c)= BCNN(840,112)=1680$

Bài 8: Tìm ƯCLN, BCNN của các số sau

a) $793016,308,3136$

b) $1323,19845,1287,315$

Lời giải:

a) Ta có: $793016=2^3.7^3.17^2$; $308=2^2.7.11$; $3136=2^6.7^2$

$\Rightarrow$ ƯCLN $(793016,308,3136)=2^2.7=28;\ BCNN=2^6.7^3.11=17^2$

b) Ta có

$1323=3^3.7^2$; $19845=3^4.5.7^2$; $1287=3^2.11.13$; $315=3^2.5.7$

$\Rightarrow$ ƯCLN $(1323,19845,1287,315)=3^2=9;\ BCNN=3^4.5.7^2.11.13$

Bài 9: Một trường tổ chức cho khoảng 700 và 800 học sinh đi tham quan. Tính số học sinh biết rằng nếu xếp 40 người hoặc 50 người lên xe ô tô thì vừa đủ.

Lời giải:

Gọi số học sinh của trường là: $n\left(n\in N^*\right)$

Theo bài ta có: $700\le n\le 800$

Vì $n\vdots 45; n\vdots 40 \Rightarrow n\in BC(40,45) \Rightarrow n\in B(BCNN(40,45))$

Ta có: $40=2^3.5; 45=3^2.5$

$BCNN(40,45)=2^3.3^2.5=360$

$\Rightarrow \begin{cases} n\in B(360) \\ 700\le n\le 800 \end{cases} \Rightarrow n=700$

Vậy Số học sinh là 700.

Dạng 2: Thuật toán EUCLID để tìm ƯCLN

Trong toán học, giải thuật Euclid (hay thuật toán Euclid) là một giải thuật để tính ước chung lớn nhất (ƯCLN) của hai số nguyên, là số lớn nhất có thể chia được bởi hai số nguyên đó với số dư bằng không. Giải thuật này được đặt tên theo nhà toán học người Hy Lạp cổ đại Euclid, người đã viết nó trong bộ *Cơ sở* của ông (khoảng năm 300 TCN). Nó là một ví dụ về *thuật toán*, một chuỗi các bước tính toán theo điều kiện nhất định và là một trong số những thuật toán lâu đời nhất được sử dụng rộng rãi.

Giải thuật Euclid dựa trên nguyên tắc là ước chung lớn nhất của hai số nguyên không thay đổi khi thay số lớn hơn bằng hiệu của nó với số nhỏ hơn. Chẳng hạn, 21 là ƯCLN của 252 và 105 (vì $252 = 21 .12$ và $105 = 21 .5$) và cũng là ƯCLN của 105 và $252 - 105 = 147$. Khi lặp lại quá trình trên thì hai số trong cặp số ngày càng nhỏ đến khi chúng bằng nhau, và khi đó chúng là ƯCLN của hai số ban đầu. Bằng cách đảo ngược lại các bước, ƯCLN này có thể được biểu diễn thành tổng của hai số hạng, mỗi số hạng bằng một trong hai số đã cho nhân với một số nguyên dương hoặc âm (đồng nhất thức Bézout), chẳng hạn, $21 = 5.105 + (-2). 252.$

Dạng ban đầu của giải thuật như trên có thể tốn nhiều bước thực hiện phép trừ để tìm ƯCLN nếu một trong hai số lớn hơn rất nhiều so với số còn lại. Một dạng khác của giải thuật rút ngắn lại các bước này, thay vào đó thế số lớn hơn bằng số dư của nó khi chia cho số nhỏ hơn (dừng lại khi số dư bằng không). Dạng thuật toán này chỉ tốn số bước nhiều nhất là năm lần số chữ số của số nhỏ hơn trên hệ thập phân. Gabriel Lamé chứng minh được điều này vào năm 1844, đánh dấu sự ra đời của lý thuyết độ phức tạp tính toán. Nhiều phương pháp khác để tăng hiệu quả của thuật toán cũng đã được phát triển trong thế kỷ 20.

Giải thuật Euclid có rất nhiều ứng dụng trong lý thuyết và thực tế. Nó được dùng để rút gọn phân số về dạng tối giản và thực hiện phép chia trong số học module. Thuật toán cũng là một thành phần then chốt trong giao thức mật mã để bảo mật kết nối Internet và được dùng để phá vỡ hệ thống mật mã này qua phân tích số nguyên. Nó cũng được áp dụng để giải phương trình Diophantine, chẳng hạn như tìm một số thỏa mãn nhiều biểu thức đồng dư theo định lý số dư Trung Quốc, để xây dựng liên phân số hay tìm xấp xỉ gần đúng nhất cho số thực. Cuối cùng, nó là công cụ cơ bản để chứng minh nhiều định lý trong lý thuyết số như định lý bốn số chính phương của Lagrange và tính duy nhất của phân tích số nguyên ra thừa số nguyên tố. Thuật toán Euclid ban đầu chỉ được giới hạn về số tự nhiên và độ dài hình học (số thực), nhưng đến thế kỷ 19 đã được mở rộng cho nhiều dạng số khác như số nguyên Gauss và đa thức một biến, dẫn đến các khái niệm về đại số trừu tượng như miền Euclid.

Giải thuật Euclid dùng để tính ước chung lớn nhất (ƯCLN) của hai số tự nhiên a và b. Ước chung lớn nhất g là số lớn nhất chia được bởi cả a và b mà không để lại số dư và được ký hiệu là ƯCLN (a,b) hoặc (a,b).

Nếu ƯCLN $(a,b) = 1$ thì a và b được gọi là hai số nguyên tố cùng nhau. Tính chất này không khẳng định b là số nguyên tố. Chẳng hạn, 6 và 35 đều không phải là số nguyên tố vì chúng đều có thể được phân tích thành tích của các thừa số nguyên tố: $6 = 2.3$ và $35 = 5.7$. Tuy nhiên, 6 và 35 nguyên tố cùng nhau vì chúng không có một thừa số chung nào.

Gọi $g = \text{ƯCLN}(a,b)$. Vì a và b đều là bội của g nên chúng có thể được viết thành $a = mg$ và $b = ng$, và không tồn tại số $G > g$ nào để các biểu thức trên đúng. Hai số tự nhiên m và n phải nguyên tố cùng nhau vì có thể phân tích bất kỳ thừa số chung nào từ m và n để g lớn hơn. Do đó, một số c bất kỳ được chia bởi a và b cũng được chia bởi g. Ước chung lớn nhất g của a và b là ước chung (dương) duy nhất của chúng có thể chia được bởi một ước chung c bất kỳ.

ƯCLN có thể được minh họa như sau: Xét một hình chữ nhật có kích thước là $a \times b$ và một ước chung c bất kỳ có thể chia được hết cả a và b. Cả hai cạnh của hình chữ nhật có thể được chia thành các đoạn thẳng bằng nhau có độ dài là c để chia hình chữ nhật thành các hình vuông có cạnh bằng c. Ước chung lớn nhất g chính là giá trị lớn nhất của c để điều này có thể xảy ra. Chẳng hạn, một hình chữ nhật có kích thước 24×60 có thể được chia thành các hình vuông có cạnh là $1, 2, 3, 4, 6$ hoặc 12, nên 12 là ước chung lớn nhất của 24 và 60, tức là hình chữ nhật trên có hai hình vuông nằm trên một cạnh ($\frac{24}{12} = 2$) và năm hình vuông nằm trên cạnh còn lại ($\frac{60}{12} = 5$).

Ước chung lớn nhất của hai số a và b là tích của các thừa số nguyên tố chung của hai số đã cho, trong đó một thừa số có thể được nhân lên nhiều lần, chỉ khi tích của các thừa số đó chia được cả a và b. Chẳng hạn, ta phân tích được $1386 = 2.3.3.7.11$ và $3213 = 3.3.3.7.17$ nên ước chung lớn nhất 1386 và 3213 bằng $63 = 3.3.7$ (là tích của các thừa số nguyên tố chung). Nếu hai số không có một thừa số nguyên tố chung nào thì ước chung lớn nhất của chúng bằng 1 (một trường hợp của tích rỗng), hay nói cách khác chúng nguyên tố cùng nhau. Một ưu điểm quan trọng của giải thuật Euclid là nó có thể tính được ƯCLN đó mà không cần phân tích ra thừa số nguyên tố. Bài toán phân tích các số nguyên lớn là rất khó và tính bảo mật của nhiều giao thức mật mã phổ biến được dựa trên tính chất này.

ƯCLN của ba số trở lên bằng tích của các thừa số nguyên tố chung của cả ba số đã cho, nhưng nó cũng có thể được tính bằng cách tìm ƯCLN của từng cặp số trong ba số đó. Chẳng hạn,

ƯCLN

$$(a,b,c) = \text{CLN}(a, \text{CLN}(b,c)) = \text{CLN}(\text{CLN}(a,b),c) = \text{CLN}(\text{CLN}(a,c),b).$$

ư Vì vậy, giải thuật Euclid, vốn dùng để tính ƯCLN của hai số nguyên cũng có thể được áp dụng để tính ƯCLN của một số lượng số nguyên bất kỳ.

Giải thuật Euclid gồm một dãy các bước mà trong đó, đầu ra của mỗi bước là đầu vào của bước kế tiếp. Gọi k là số nguyên dùng để đếm số bước của thuật toán, bắt đầu từ số không (khi đó bước đầu tiên tương ứng với $k = 0$, bước tiếp theo là $k = 1$,...)

Mỗi bước bắt đầu với hai số dư không âm r_{k-1} và r_{k-2}. Vì thuật toán giúp đảm bảo số dư luôn giảm dần theo từng bước nên r_{k-1} nhỏ hơn r_{k-2}. Mục tiêu của bước thứ k là tìm thương q_k và số dư r_k thỏa mãn $r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k$ và $0 \le r_k < r_{k-1}$. Nói cách khác, từ số lớn hơn r_{k-2}, trừ đi bội của số nhỏ hơn r_{k-1} đến khi phần dư r_k nhỏ hơn r_{k-1}.

Ở bước đầu tiên ($k = 0$), số dư r_{k-2} và r_{k-1} bằng a và b, hai số cần tìm ƯCLN. Đến bước kế tiếp ($k = 1$), hai số dư lần lượt bằng b và số dư r_0 ở bước đầu tiên,... Do đó, thuật toán có thể được viết thành một dãy các bước:

$$a = q_0 b + r_0$$
$$b = q_1 r_0 + r_1$$
$$r_0 = q_2 r_1 + r_2$$
$$r_1 = q_3 r_2 + r_3$$
$$\dots$$

Nếu a nhỏ hơn b thì thuật toán đảo ngược vị trí của hai số. Chẳng hạn, nếu $a < b$ thì thương q_0 bằng không và số dư r_0 bằng a. Do đó, r_k luôn nhỏ hơn r_{k-1} với mọi $k \ge 0$.

Vì các số dư luôn giảm dần theo từng bước nhưng không thể là số âm nên số dư sau cùng r_n phải bằng không và thuật toán dừng lại tại đó. Số dư khác không cuối cùng r_{n-1} chính là ước chung lớn nhất của a và b. Số n không thể là vô hạn vì chỉ có một số lượng hữu hạn các số nguyên dương nằm giữa số dư ban đầu r_0 và 0.

Tính đúng đắn của giải thuật Euclid có thể được chứng minh qua hai bước lập luận.

Bước thứ nhất, cần chứng minh số dư khác không cuối cùng r_{n-1} chia được cả a và b. Vì r_{n-1} là một ước chung nên nó phải nhỏ hơn hoặc bằng với ước chung lớn nhất g.

Bước thứ hai, cần chứng minh rằng bất kỳ ước chung nào của a và b, trong đó có g cần phải chia được r_{n-1}; từ đó, g phải nhỏ hơn hoặc bằng r_{n-1}. Hai kết luận trên là mâu thuẫn trừ khi $r_{n-1} = g$.

Để chứng tỏ r_{n-1} chia được cả a và b, cần biết r_{n-1} chia được số dư liền trước r_{n-2}: $r_{n-2} = q_n r_{n-1}$ vì số dư cuối cùng r_n bằng không. r_{n-1} cũng chia được số dư r_{n-3}: $r_{n-3} = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1}$ vì nó chia được cả hai số hạng trong vế phải của phương trình. Chứng minh tương tự, r_{n-1} cũng chia được tất cả số dư liền trước nó kể cả a và b. Không có số dư liền trước r_{n-2}, r_{n-3},... chia bởi a và b cho số dư bằng không. Vì r_{n-1} là ước chung của a và b nên $r_{n-1} \le g$.

Trong bước thứ hai, một số tự nhiên c bất kỳ chia được cả a và b (là ước chung của a và b) cũng chia được số dư r_k. Theo định nghĩa thì a và b có thể được viết thành bội của c: $a = mc$ và $b = nc$ với m và n là các số tự nhiên. Ta có $r_0 = a - q_0 b = mc - q_0 nc = (m - q_0 n)c$ nên c là một ước của số dư ban đầu r_0.

Chứng minh như bước thứ nhất, ta thấy c cũng là ước của các số dư liền sau $r_1, r_2, \ldots$ Từ đó, ước chung lớn nhất g là ước của r_{n-1} hay $g \le r_{n-1}$. Kết hợp hai kết luận thu được, ta có $g = r_{n-1}$. Vậy g là ước chung lớn nhất của tất cả cặp số liền sau:

$$g = |\ \text{CLN}(a,b) = |\ \text{CLN}(b,r_0) = |\ \text{CLN}(r_0,r_1) = \ldots = |\ \text{CLN}(r_{n-2},r_{n-1}) = r_{n-1}.$$

I. Phương pháp giải

Muốn tìm ƯCLN của a và b (giả sử $a \ge b$)

Bước 1: Chia a cho b có số dư là r

Bước 2:

+ Nếu $r = 0$ thì ƯCLN $(a,b) = b$. Việc tìm ƯCLN dừng lại.

+ Nếu $r > 0$, ta chia tiếp b cho r, được số dư r_1

- Nếu $r_1 = 0$ thì $r_1 = |\ \text{CLN}(a,b)$. Dừng lại việc tìm ƯCLN

- Nếu $r_1 > 0$ thì ta thực hiện phép chia r cho r_1 và lập lại quá trình như trên.

ƯCLN (a,b) ***là số dư khác*** 0 ***nhỏ nhất trong dãy phép chia nói trên.***

II. Bài toán

Bài 1: Hãy tìm ƯCLN $(1575, 343)$ bằng thuật toán Ơclide

Lời giải:

Ta có: $1575 = 343.4 + 203$

$343 = 203.1 + 140$

$203 = 140.1 + 63$

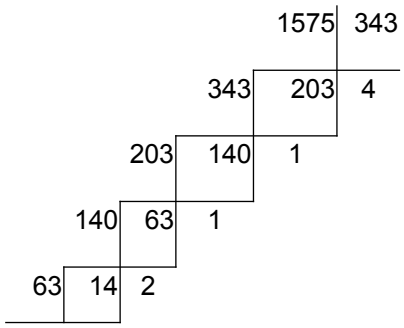
$140 = 63.2 + 14$

$63 = 14.4 + 7$

$14 = 7.2 + 0$ (chia hết)

Vậy ƯCLN $(1575, 343) = 7$

Trong thực hành làm như sau:



Vậy ƯCLN $(1575, 343) = 7$

Bài 2: Tìm ƯCLN $(58005, 2835)$ bằng thuật toán Euclide

Lời giải:

Ta có: $58005 = 20.2835 + 1305 \Rightarrow (58005, 2835) = (2835, 1305); 2835 = 2.1305 + 225; 1305 = 5.225 + 180$

$225 = 1.180 + 45; 180 = 4.45 \Rightarrow$ ƯCLN $= 45$.

Bài 3: Chứng minh rằng ƯCLN $(n+1, 3n+4) = 1, n \in \mathbb{N}$.

Lời giải:

Cách 1:

Gọi $d = UCLN(n+1, 3n+4), d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \begin{cases} 3n+4 \vdots d \\ n+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow (3n+4) - 3(n+1) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$.

Vậy ƯCLN $(n+1, 3n+4) = 1, n \in \mathbb{N}$.

Cách 2:

Ta có: $3n+4=3n+3+1=3(n+1)+1$

Mà $3(n+1)\vdots(n+1)\Rightarrow 3(n+1)+1$ chia cho $(n+1)$ dư 1

Suy ra ƯCLN $(n+1,3n+4)=(n+1;1)=1,n\in\mathbb{N}$

Bài 4: Chứng minh rằng $2n+1$ và $2n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Cách 1:

Gọi $d=UCLN(2n+1,2n+3),d\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\begin{cases}2n+1\vdots d\\2n+3\vdots d\end{cases}\Rightarrow(2n+3)-(2n+1)\vdots d\Rightarrow 2\vdots d\Rightarrow d\in\{1;2\}$.

Mà $2n+1\vdots d$ và $2n+1$ lẻ nên d lẻ. Suy ra $d=1$.

Vậy $2n+1$ và $2n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Cách 2:

Ta có: $2n+3=2n+1+2\Rightarrow 2n+3$ chia cho $2n+1$ dư 2

Suy ra ƯCLN $(2n+3,2n+1)=(2n+1;2)=1,n\in\mathbb{N}$ (Vì $2n+1$ lẻ, 2 là số chẵn).

Vậy $2n+1$ và $2n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 5: Biết số A gồm 2015 chữ số 2 và B gồm 8 chữ số 2. Hãy tìm ƯCLN (A,B)

Lời giải:

Ta có $A=\underbrace{22...2}_{2015}=\underbrace{2.2.....2}_{2008}\underbrace{0....0}_{7}+\underbrace{2.2.....2}_{7\,chu\,so\,2}$

Vì $\underbrace{2.2.....2}_{2008}\underbrace{0....0}_{7}\vdots\underbrace{2.2.....2}_{8}\rightarrow(A,B)=(\underbrace{2.2.....2}_{8},\underbrace{2.2.....2}_{7})$

Ta có: $\underbrace{2.2.....2}_{8}=\underbrace{2.2.....2}_{7}0+2\rightarrow(\underbrace{2.2.....2}_{8},\underbrace{2.2.....2}_{7})=(\underbrace{2.2.....2}_{7},2)=2\Rightarrow(A,B)=2$

Bài 6: Số X gồm 2002 chữ số 9, Y gồm 9 chữ số 9. Tìm ƯCLN (X,Y)

Lời giải:

Có: $2002=222.9+4;X=\underbrace{99....9}_{2002}=\underbrace{99....9}_{1998}\underbrace{0000}_{4}+\underbrace{9999}_{4};X=BS(Y)+9999(1)$

$Y = \underbrace{9999....9}_{9} = \underbrace{9999....90}_{8\ \ 1} + 9 \to Y = BS(9999) + 9(2); 9999 = BS(9)(3)$

Từ $(1)(2)(3) \Rightarrow$ ƯCLN $(X,Y) = 9$

Bài 7: Tìm số tự nhiên n, biết rằng khi chia 239 và 373 cho n thì số dư lần lượt là 14 và 23

Lời giải:

Theo đầu bài ta có:

$$\left.\begin{array}{l} 239 - 14 = 225 \vdots n \\ 373 - 23 = 350 \vdots n \end{array}\right\} \Rightarrow n \in UC(225,350) \Rightarrow n \in U(UCLN(225,350)); 225 = 3^2.5^2; 350 = 2.5^2.7$$

ƯCLN $(225,350) = 25 \Rightarrow n \in UC(25)$

Vì 373 chia cho n dư 23 $\Rightarrow \begin{cases} n > 23 \\ n \in U(25) \end{cases} \Rightarrow n = 25$

Vậy $n = 25$

Bài 8: Người ta đếm số trứng trog một rổ. Nếu đếm theo từng chục cũng như theo tá hoặc theo từng 15 quả thì lần nào cũng dư 1 quả. Tính số trứng trong rổ, biết rằng số trứng đó lớn hơn 150 và nhỏ hơn 200 quả.

Lời giải:

Gọi số trứng trong rổ là n ($n \in N^*$)

Ta có: $150 < n < 200(1); (n-1) \vdots 10,12,15 \Rightarrow (n-1) \in BC(10,12,15) \Rightarrow n - 1 \in B(60)$

Theo $(1) \Rightarrow 149 < n - 1 < 199 \Rightarrow n - 1 = 180 \Rightarrow n = 181$

Vạy số trứng trong rổ là 181 quả

Bài 9: Một trường học có số lượng học sinh không quá 1000. Khi xếp hàng $20, 25, 30$ thì đều dư 15. Nhưng khi xếp hàng 41 thì vừa đủ. Tính số học sinh của trường?

Lời giải:

Gọi số học sinh của trường là: n ($n \in N^*$)

Theo bài ra ta có: $n \le 1000$

Lại có: $n - 15 \vdots 20, 25, 30; n \vdots 41; n - 15 \in BC(20,25,30) \in B(BCNN(20,25,30) = 300 \Rightarrow n - 15 \in B(300)$

$$n-15\le 1000-15=985\Rightarrow n-1\in\{300,600,900\}\Rightarrow\begin{cases}n\in\{315,615,915\}\\ n\vdots 41\end{cases}\Rightarrow n=615$$

Mà

Vậy số học sinh của trường là 615 (học sinh).

Bài 10: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng khi chia số đó cho $12,18,23$ thì số dư lần lượt là $11,17,9$

Lời giải:

Gọi số tự nhiên cần tìm là: a ($a\in N$)

Theo bài ta có: $a=12k+1=18q+17=2.3.p+9(k,p,q\in N)$

Ta tìm số b sao cho: $a+b\vdots 12,18,23$

Nhận thấy: $a+37=12k+48\vdots 12;a+37=18q+54\vdots 18;a+37=23p+46\vdots 23\Rightarrow a+37\in BC(12,18,23)$

Vì a nhỏ nhất

$\Rightarrow a+37=BCNN(12,18,23);12=2^2.3;18=2.3^2;23=23\Rightarrow BCNN(12,18,23)=2^2.3^2.23=828$

$\Rightarrow a=828-37=791$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 791.

Bài 11: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia cho 11 dư 6, chia cho 4 dư 1, chia cho 19 dư 11

Lời giải:

Gọi số cần tìm là a, ta có: $(a-6)\vdots 11;(a-1)\vdots 4;(a-11)\vdots 19$

$\Rightarrow(a-6+33)\vdots 11;(a-1+28)\vdots 4;(a-11+38)\vdots 19$

$\Rightarrow(a+27)\vdots 11;(a+27)\vdots 4;(a+27)\vdots 19$

Mà a nhỏ nhất $\Rightarrow(a+27)$ nhỏ nhất $\Rightarrow(a+27)=BCNN(11,4,9)$

Do ƯCLN $(4;11;9)=1\Rightarrow BCNN(11;4;9)=11.14.9=396$

$\Rightarrow a+27=396\Rightarrow a=369$

Vậy số tự nhiên cần tìm là: 369.

Bài 12: Cho a,b là các số tự nhiên khác 0 sao cho $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ là số tự nhiên. Gọi d là ƯCLN của a,b. Chứng minh rằng: $a+b\geq d^2$

Lời giải:

$d=(a,b)$, đặt $a=dm, b=dn; \frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab}\in N\rightarrow \begin{cases} a^2+b^2+a+b \vdots ab \\ ab=d^2.mn \vdots d^2 \end{cases} \rightarrow a^2+b^2+a+b \vdots d^2$

$\left.\begin{matrix} a^2=d^2m^2 \vdots d^2 \\ b^2=d^2n^2 \vdots d^2 \end{matrix}\right\} \rightarrow a+b \vdots d^2 \rightarrow a+b\geq d^2 \rightarrow dpcm$

Bài 13: Một số tự nhiên chia cho 7 dư 5, chia cho 13 dư 4. Nếu đem số đó chia cho 91 thì dư bao nhiêu?

Lời giải:

Gọi số đó là a

Vì a chia cho 7 dư 5, chia cho 13 dư 4 $\Rightarrow a+9 \vdots 7; a+9 \vdots 13$

mà ƯCLN $(7,13)=1$ nên $\Rightarrow (a+9) \vdots 7.13=91$

$\Rightarrow (a+9)=91k \Rightarrow a=91k-9=91k-91+82=91(k-1)+82(k\in N)$

Vậy a chia cho 91 dư 82.

Bài 14: Tìm số tự nhiên a biết rằng khi chia 355 cho a ta được số dư là 13 và khi chia 836 cho a có số dư là 8.

Lời giải:

Theo đề khi chia 355 cho a ta được số dư là 13 nên ta có $355=am+13$ với $m\in N^*$ và $a>13$ hay $am=342=18.19$ (1) và khi chia 836 cho a có số dư là 8 $\Rightarrow 836=an+8 \Rightarrow an=828=18.46$ với $n\in N^*$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a=18$ là số tự nhiên cần tìm.

Bài 15: Một số chia cho 7 dư 3, chia cho 17 dư 12, chia cho 23 dư 7. Hỏi số đó chia cho 2737 dư bao nhiêu?

Lời giải:

Gọi số đã cho là A. Theo bài ra ta có: $A=7a+3=17b+12=23c+7$

$$A+39=7a+3+39=17b+12+39=23c+7+39=7(a+6)=17(b+3)=23(c+2)$$

Mặt khác:

Như vậy $A+39$ đồng thời chia hết cho $7,17$ và 23.

Nhưng ƯCLN $(7,17,23)=1 \Rightarrow (A+39)\vdots 7.17.23 \Rightarrow (A+39)\vdots 2737 \Rightarrow A+39=2737.k$

$$\Rightarrow A=2737k-39=2737(k-1)+2698$$

Do $2698<2737$ nên 2698 là số dư của phép chia số A cho 2737.

Bài 16: Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số, sao cho chia nó cho 8 thì dư 7 và chia nó cho 31 thì dư 28.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là a ($a\in N, 100\le a\le 999$)

Vì a chia cho 8 thì dư 7 và chia nó cho 31 thì dư 28 nên:

$$\begin{cases} a-7\vdots 8 \\ a-28\vdots 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-7+8\vdots 8 \\ a-28+31\vdots 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1\vdots 8 \\ a+3\vdots 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1+64\vdots 8 \\ a+3+62\vdots 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+65\vdots 8 \\ a+65\vdots 31 \end{cases}$$

Vì $(8,31)=1 \Rightarrow (a+65)\vdots 248 \Leftrightarrow a=248k-65\left(k\in N^*\right)$

Vì a là số có 3 chữ số lớn nhất nên $k=4$, khi đó $a=248.4-65=927$

Vậy số cần tìm là 927.

Bài 17: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có 3 chữ số biết rằng số đó chia cho $4,6,7$ đều dư 3.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là a. điều kiện $a\in N, a\ge 100$

Vì a chia cho $4,6,7$ đều dư $3 \Rightarrow (a-3)\vdots 4,6,7$

Mà a nhỏ nhất nên $a-3$ nhỏ nhất $\Rightarrow a-3=BCNN(4,6,7)$

Mà ƯCLN $(4,6,7)=1 \Rightarrow BCNN(4,6,7)=4.6.7=168$

$$\Rightarrow a-3=168 \Leftrightarrow a=171$$

Vậy số cần tìm là 171.

Bài 18: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho a chia cho 5 thì dư 3, a chia cho 7 thì dư 4.

Lời giải:

Ta có a chia cho 5 thì dư 3, a chia cho 7 thì dư 4

$\Rightarrow (a-3)\vdots 5$ và $(a-4)\vdots 7 \Rightarrow \Rightarrow (a-3+20)\vdots 5$ và $(a-4+21)\vdots 21$

$\Rightarrow (a+17)\vdots 5$ và $\Rightarrow (a+17)\vdots 7 \Rightarrow a+17$ là bội chung của 5 và 7

Vì a là số tự nhiên nỏ nhất nên $a+17 = BCNN(5,7) = 35 \Rightarrow a = 18.$

Bài 19: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng số đó khi chia cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 đều dư là 2, còn chia cho 7 thì dư 3.

Lời giải:

Gọi số tự nhiên cần tìm là a $(a \in N, a > 3)$

Ta có khi chia a cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 đều dư là 2

$\Rightarrow a-2 \in BC(3;4;5;6) = \{60;120;180;240;....\}$

Nên a nhận các giá trị $62;122;182;242;...$

Mặt khác a là số nhỏ nhất chia cho 7 thì dư 3 tức là $(a-3)$ là số nhỏ nhất chia hết cho 7

$\Rightarrow a = 122$ (vì $a = 62$ thì $62-3 = 59$ không chia hết cho 7).

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 84 và ƯCLN bằng 6.

Lời giải:

Gọi 2 số cần tìm là a và b, giả sử $a < b$ $(a, b \in ¥^*)$

Vì ƯCLN $(a;b) = 6$

Ta có $a + b = 84 \Rightarrow 6m + 6n = 84 \Rightarrow m + n = 14$

Lập bảng:

m	1	3	5
n	13	11	9
a	6	18	30
b	78	30	54

Vậy hai số cần tìm là 6 và 78 ; 18 và 66 ; 30 và 54 .

Bài 2: Tìm số tự nhiên n biết $(3n+14)$ chia hết cho $(n+1)$.

Lời giải:

Ta có $(3n+14)=3(n-1)+7$

Vì $3(n-1)\vdots(n-1)$ nên để $(3n+14)\vdots(n-1)$ thì $7\vdots(n-1)$

$\Rightarrow(n-1)$ phải là ước của 7 $\Rightarrow n-1\in\{-7;-1;1;7\}\Rightarrow n\in\{-6;0;2;8\}$

Mà $n\in N,$ nên $n\in\{0;2;8\}$

Vậy $n\in\{0;2;8\}$ thì $(3n+14)$ chia hết cho $(n+1)$.

Bài 3: Tìm số tự nhiên n biết $\dfrac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Lời giải:

Để $\dfrac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên thì $(n+15)$ chia hết cho $(n+3)$

$\Rightarrow\left[(n+15)-(n+3)\right]$ chia hết cho $(n+3)\Leftrightarrow 12$ chia hết cho $(n+3)$

Mà $n\in N$ nên $(n+3)$ phải là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 3 và đồng thời là ước của 12

$\Rightarrow n+3\in\{3;4;6;12\}\Rightarrow n\in\{0;1;3;9\}$

Vậy $n\in\{0;1;3;9\}$ thì $\dfrac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Bài 4: Tìm số tự nhiên n biết $(n^2+3n+6)\vdots(n+3)$

Lời giải:

Ta có $n^2+3n+6=n(n+3)+6$

Vì $n(n+3)\vdots(n+3),$ nên để $(n^2+3n+6)\vdots(n+3)$ thì $6\vdots(n+3)$

Mà $n \in N,$ nên $(n+3)$ phải là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 3 và đồng thời là ước của 6

$\Rightarrow (n+3) \in \{3;6\} \Rightarrow n \in \{0;3\}$

Vậy $n \in \{0;3\}$ thì $(n^2+3n+6) \vdots (n+3)$

Bài 5: Tìm số tự nhiên n biết $\dfrac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên

Lời giải:

Ta có $\dfrac{n+1}{n-2}$ là một số nguyên khi $(n+1) \vdots (n-2)$

Ta có $n+1=(n-2)+3,$ do đó $(n+1) \vdots (n-2)$ khi $3 \vdots (n-2)$

$\Rightarrow (n-2)$ là ước của 3

$\Rightarrow (n-2) \in \{-3;-1;1;3\} \Rightarrow n \in \{-1;1;3;5\}$

Vậy $n \in \{-1;1;3;5\}$ thì $\dfrac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên.

Bài 6: Tìm hai số tự nhiên biết hiệu của chúng bằng 84 , ƯCLN của chúng bằng 28 và các số đó trong khoảng từ 300 đến 400 .

Lời giải:

Gọi hai số tự nhiên cần tìm là a,b và giả sử $a>b$

Đặt ƯCLN $(a,b)=d \Rightarrow a=md; b=nd$ với $m,n \in Z^+; UCLN(m,n)=1, m>n \Rightarrow BCNN(a,b)=dmn$

Mà ƯCLN $(a,b)+BCNN(a,b)=23$ nên $d(mn+1)=23 \Rightarrow d$ là ước của 23 hay $d \in \{1;23\}$

Xét $d=1,$ ta có $mn+1=23 \Leftrightarrow mn=22$ với ƯCLN $(m,n)=1$ nên ta có các trường hợp của m, n như sau:

Trường hợp 1: $m=22, n=1 \Rightarrow a=22, b=1$

Trường hợp 2: $m=11, n=2 \Rightarrow a=11, b=2$

Trường hợp 3: $m=11, n=2 \Rightarrow a=11, b=2$

Xét $d=3,$ ta có $mn+1=1\Leftrightarrow mn=0$ (không thỏa mãn)

Bài 7: Cho $n\in N^*.$ Tìm ƯCLN của $2n-1$ và $9n+4$

Lời giải:

$$d=(2n-1,9n+4)(d\in N^*)\Rightarrow\begin{cases}2n-1\vdots d(1)\\9n+4\vdots d(2)\end{cases}\Rightarrow 2(9n+4)-9(2n-1)\vdots d\Rightarrow 17\vdots d\Rightarrow\left[\begin{array}{l}d=1\\d=17\end{array}\right.$$

Gọi

-Nếu $d=17\Rightarrow(9n+4)-4(2n-1)=n+8\vdots 17\Rightarrow n=17+9k(k\in N)\Rightarrow 9n+4=9(17k+9)+4=9.17k+85\vdots 17$

$2n-1=2(17k+9)-1=2.17k+17\vdots 17$

Vậy nếu n có dạng $17k+9(k\in N)$ thì $UCLN(2n-1;9n+4)=17$

Bài 8: Tìm ƯCLN $(1+2+3+...+n,2n+1)$ với $n\in N,n\geq 2$

Lời giải:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2},2n+1\right)=d\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{n(n+1)}{2}\\2n+1\vdots d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n(n+1)\vdots d\\2n+1\vdots d\end{cases}$$

Giả sử $d>1$, p là ước nguyên tố của d

$$\Rightarrow n(n+1)\vdots d\Rightarrow\left[\begin{array}{l}n\vdots p\\n+1\vdots p\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}n+1\vdots p\\n\vdots p\end{array}\right.\Rightarrow(n+1)-n=1\vdots p\Rightarrow 1\vdots p$$ (vô lý) $\Rightarrow d=1$

Bài 9: Tìm ƯCLN của $9n+24$ và $3n+4$

Lời giải:

Gọi ƯCLN $(9n+24;3n+4)=d\Rightarrow d\in N^*$

$$\begin{cases}9n+24\vdots d\\3n+4\vdots d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9n+24\vdots d\\9n+12\vdots d\end{cases}\Rightarrow(9n+24)-(9n+12)=d\Rightarrow 12\vdots d$$

Khi đó ta có:

$$\Rightarrow d\in U(12)=\{\pm 1;\pm 2;\pm 3;\pm 4;\pm 6;\pm 12\}$$

Do $(3n+4)\vdots d,$ mà $3n+4$ không chia hết cho 3, nên $d=3;6;13$ (loại)

Do đó $d\in\{1;2;4\}$

- Để $d=2$ thì n phải chẵn

- Để $d=4$ thì n phải chia hết cho 4

- Để $d=1$ thì n là số lẻ

Vậy $n=4k+2(k\in N)$ thì ƯCLN $(9n+24;3n+4)=2$

$n=4k\,(k\in N)$ thì ƯCLN $(9n+24;3n+4)=4$

$n=2k+1(k\in N)$ thì ƯCLN $(9n+24;3n+4)=1$.

Bài 10: Biết $(a,b)=95$. Tìm $(a+b,a-b)$

Lời giải:

Gọi ƯCLN $(a+b,a-b)=d\Rightarrow d\in N^*$

$\begin{cases}a+b\vdots d\\ a-b\vdots d\end{cases}\Rightarrow 2b\vdots d\Rightarrow d\in U(2)$ hoặc $d\in U(b)$

và $\begin{cases}a+b\vdots d\\ a-b\vdots d\end{cases}\Rightarrow 2a\vdots d\Rightarrow$ hoặc $d\in U(2)$ hoặc $d\in U(a)$

mà ƯCLN $(a,b)=95,$ nên $d=95$ hoặc $d=2$

Vậy ƯCLN $(a+b,a-b)=2$ hoặc $d=95$.

Bài 11: Học sinh khối 6 khi xếp hàng; nếu xếp hàng 10, hàng 12, hàng 15 đều dư 3 học sinh. Nhưng khi xếp hàng 11 thì vừa đủ. Biết số học sinh khối 6 chưa đến 400 học sinh. Tính số học sinh khối 6?

Lời giải:

Gọi số học sinh khối 6 là $a\ (3<a<400)$

Vì khi xếp hàng 10, hàng 12, hàng 15 đều dư 3 học sinh

$\Rightarrow a-3\vdots 10;12;15$

$\Rightarrow a-3\in BC(10,12,15)$

Ta có: $BCNN(10;12;15)=60$

$\Rightarrow a-3\in\{60;120;180;240;300;360;420;....\}$

$\Rightarrow a\in\{63;123;183;243;303;363;423;...\}$

mà $a\vdots 11; a<400\Rightarrow a=363$

Vậy số học sinh khối 6 là 363 học sinh.

Bài 12: Một người bán năm giỏ xoài và cam. Mỗi giỏ chỉ đựng một loại quả với số lượng là: $65kg$; $71kg$; $58kg$; $72kg$; $93kg$. Sau khi bán một giỏ cam thì số lượng xoài còn lại gấp ba lần số lượng cam còn lại. Hãy cho biết giỏ nào đựng cam, giỏ nào đựng xoài?

Lời giải:

Tổng số xoài và cam lúc đầu: $65+71+58+72+93=359(kg)$

Vì số xoài còn lại gấp ba lần số cam còn lại nên tổng số xoài và cam còn lại là số chia hết cho 4, mà 359 chia cho 4 dư 3 nên giỏ cam bán đi có khối lượng chia cho 4 dư 3.

Trong các số $65;71;58;72;93$ chỉ có 71 chia cho 4 dư 3.

Vậy giỏ cam bán đi là giỏ $71kg$.

Số xoài và cam còn lại: $359-71=288(kg)$

Số cam còn lại: $288:4=72(kg)$

Vậy: các giỏ cam là giỏ đựng $71kg$; $72kg$.

Các giỏ xoài là giỏ đựng $65kg;58kg;93kg$.

Bài 13: Hai lớp 6A; 6B cùng thu nhặt một số giấy vụn bằng nhau. Lớp 6A có 1 bạn thu được $26kg$ còn lại mỗi bạn thu được $11kg$. Lớp 6B có 1 bạn thu được $25kg$ còn lại mỗi bạn thu được $10kg$. Tính số học sinh mỗi lớp biết rằng số giấy mỗi lớp thu được trong khoảng $200kg$ đến $300kg$.

Lời giải:

Gọi số giấy mỗi lớp thu được là $x(kg) \Rightarrow (x-26) \vdots 11$ và $(x-25) \vdots 10$

Do đó $(x-15) \in BC(10;11)$ và $200 < x < 300 \Rightarrow x-15 = 220 \Rightarrow x = 235$

Số học sinh lớp 6A là: $(266-26):11+1 = 20$ (học sinh)

Số học sinh lớp 6B là: $(235-25):10+1 = 22$ (học sinh)

Bài 14: Số học sinh khối 6 của một trường chưa đến 400 bạn, biết khi xếp hàng $10;12;15$ đều dư 3 nhưng nếu xếp hàng 11 thì không dư. Tính số học sinh khối 6 của trường đó.

Lời giải:

Gọi số học sinh là $a\left(a \in N^*\right)$

Vì số học sinh khi xếp hàng $10;12;15$ đều dư 3 $\Rightarrow a-3 \in BC(10;12;15)$

Mà $BCNN(10;12;15) = 60 \Rightarrow a-3 = 60k\left(k \in N^*\right) \Rightarrow a = 6kk+3$

Ta có bảng sau:

k	1	2	3	4	5	6	7
a	63	123	183	243	303	363	423

Vì số học sinh chưa đến 400 bạn và khi xếp hàng 11 thì không dư nên $a < 400$ và $a \vdots 11$

Trong các giá trị trên, chỉ có $a = 363$ thỏa mãn bài toán

Vậy số học sinh cần tìm là 363 học sinh.

Bài 15: Một đơn vị bộ đội khi xếp hàng, mỗi hàng có 20 người, hoặc 25 người, hoặc 30 người đều thừa 15 người. Nếu xếp mỗi hàng 41 người thì vừa đủ (không có hàng nào thiếu, không có ai ở ngoài hàng). Hỏi đơn vị có bao nhiêu người, biết rằng số người của đơn vị chưa đến 1000 ?

Lời giải:

Gọi số người của đơn vị bộ đội là $x\left(x \in N^*; 41 < x < 100\right)$

Ta có $a:20$ dư $15 \Rightarrow (x-15) \vdots 20$

$a:25$ dư $15 \Rightarrow (x-15) \vdots 25$

$a:30$ dư $15 \Rightarrow (x-15) \vdots 30$

$\Rightarrow (x-15) \in BC(20,25,35)$

Ta có $20 = 2^2.5; 25 = 5^2; 30 = 2.3.5 \Rightarrow BCNN(20,25,30) = 2^2.5^2.3 = 300$

$\Rightarrow BC(20,25,35) = 300k\,(k \in N) \Rightarrow x-15 = 300k \Leftrightarrow x = 300k+15$

Mà $x < 1000$ nên chỉ xét $k \in \{1;2;3\}$, khi đó $x \in \{315;615;915\}$

Vì số bộ đội khi xếp mỗi hàng 41 người thì vừa đủ tức là: $x \vdots 41,$ do đó có $x = 615$ thỏa mãn bài toán

Vậy đơn vị bộ đội có 615 người.

Bài 16: Cho m,n là hai số tự nhiên. Gọi A là tập hợp các ước chung của m và n. B là tập hợp các ước số chung của $11m+5n$ và $9m+4n$. Chứng minh rằng $A = B.$

Lời giải:

Gọi $d = ¦ \text{CLN}(11m+5n, 9m+4n) \Rightarrow d \in N^*$

$$\begin{cases} 11m+5n \vdots d \\ 9m+4n \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9(11m+5n) \vdots d \\ 11(9m+4n) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 99m+45n \vdots d \\ 99m+44n \vdots d \end{cases} \Rightarrow n \vdots d \qquad (1)$$

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} 11m+5n \vdots d \\ 9m+4n \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(11m+5n) \vdots d \\ 5(9m+4n) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 44m+20n \vdots d \\ 45m+20n \vdots d \end{cases} \Rightarrow m \vdots d \qquad (2)$$

Tương tự ta có:

Từ (1) và (2) ta có: $d \in ¦ \text{C}(m;n) \Rightarrow d \in A \Rightarrow B \subset A$

Mà $A \subset B$

Suy ra $A = B$.

HẾT