

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM. (6,0 điểm).

Câu 1: Rút gọn biểu thức $P = \frac{4xy^2}{x^2 - y^2} \sqrt{\frac{x^2 - 2xy + y^2}{16x^2y^4}}$ với $x < y < 0$ ta được

- A. $P = \frac{-1}{x-y}$. B. $P = \frac{-1}{x+y}$. C. $P = \frac{1}{x-y}$. D. $P = \frac{1}{x+y}$.

Câu 2: Cho đường tròn (O) có dây cung $AB = 28$. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB . Biết khoảng cách từ M đến dây AB bằng 2. Bán kính của đường tròn (O) là

A. 40. B. 50. C. 30. D. 45.

Câu 3: Cho hình thang $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$, $AD = 3$, $DB \perp DC$. Diện tích S của hình thang $ABCD$ là

- A. $S = \frac{7\sqrt{3}}{2}$. B. $S = \frac{7\sqrt{3}}{4}$. C. $S = 14\sqrt{3}$. D. $S = 7\sqrt{3}$.

Câu 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y = (5m-6)x - 15m + 25$ (m là tham số) có đồ thị là đường thẳng d . Gọi m_0 là giá trị của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 26$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $m_0 < -3$. B. $-3 \leq m_0 < -1$. C. $m_0 \geq 1$. D. $-1 \leq m_0 < 1$.

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 8$. Gọi A, B là các giao điểm của (d) và (P) . Tọa độ tất cả các điểm trên (P) cách đều hai điểm A, B là

- A. $\left(\frac{7}{2}; \frac{49}{4}\right), (-3; 9)$. B. $\left(\frac{-7}{2}; \frac{49}{4}\right), (-3; 9)$. C. $\left(\frac{-7}{2}; \frac{49}{4}\right), (3; 9)$. D. $\left(\frac{7}{2}; \frac{49}{4}\right), (3; 9)$.

Câu 6: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và M là điểm di động trên đường tròn ($M \neq A, B$). Kẻ MH vuông góc với AB tại H . Diện tích tam giác MOH lớn nhất bằng

- A. $\frac{R^2}{4}$. B. $\frac{R^2}{6}$. C. $\frac{R^2}{3}$. D. $\frac{R^2\sqrt{2}}{4}$.

Câu 7: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \leq 3, y \geq 0$ và $x^2 - y^2 = 2x - 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-3y+3}$ bằng

- A. $\sqrt{7}$. B. $2\sqrt{5}$. C. $\sqrt{14}$. D. $\sqrt{10}$.

Câu 8: Cho biểu thức $P = \frac{20}{10-5\sqrt{3}}$. Khi rút gọn P về dạng $P = a + b\sqrt{3}$, với a và b là các số nguyên, tính ab

- A. $ab = -8$. B. $a \cdot b = 8$. C. $ab = -32$. D. $ab = 32$.

Câu 9: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính BC , điểm A thay đổi trên nửa đường tròn (A không trùng với B và C). Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Gọi I, K lần lượt là các điểm đối xứng với H qua AB và AC . Diện tích tứ giác $BIKC$ lớn nhất bằng

A. $\frac{3R^2}{4}$. B. $2R^2$. C. $\frac{2R^2}{3}$. D. R^2 .

Câu 10: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 5m - 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ (m là tham số). Số giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - 2y = -2$ là

A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 11: Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và hai điểm $A(-2; 2), B(4; 8)$ nằm trên (P) . Gọi M là điểm thay đổi trên (P) và có hoành độ là $m (-2 < m < 4)$. Khi tam giác ABM có diện tích lớn nhất, độ dài của đoạn thẳng OM là

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{5}$. D. 0.

Câu 12: Tích các giá trị của tham số m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng $y = 2x + m - 1$ bằng 1 là

A. -4. B. 6. C. 24. D. -24.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để các hàm số $y = \frac{3}{\sqrt{2m+3}}x + m^2 + 1$ và $y = (3 - 2m)x + \frac{5}{m} - m$ cùng đồng biến trên $\square$?

A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 14: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Rút gọn biểu thức

$Q = \frac{(b+c)\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)}}$, ta được

A. $Q = \frac{a+b+c}{\sqrt{3}}$. B. $Q = 1$. C. $Q = 3bc$. D. $Q = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Câu 15: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = m + 1 \\ mx + y = 3m - 1 \end{cases}$ (m là tham số). Tổng bình phương các số nguyên m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ mà x, y đều là số nguyên là

A. 14. B. 9. C. 13. D. 0.

Câu 16: Cho tam giác ABC cân tại A và $AB = 5, BC = 6$. Kẻ đường cao BH của tam giác ABC. Tỉ số $\frac{AH}{AC}$ bằng

A. $\frac{7}{25}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{3}{10}$. D. $\frac{2}{7}$.

Câu 17: Cho phương trình: $x^2 + (m - 2)x - m^2 + 2m - 3 = 0$ (x là ẩn, m là tham số). Tổng tất cả các giá trị

A. 12. B. 3. C. 18. D. 15.

$a - \sqrt{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $2a + b = 19$. B. $2a + b = 17$. C. $2a + b = 8$. D. $2a + b = 14$.

Câu 19: Cho đường tròn $(0, 4\sqrt{3})$ có hai dây AB và CD vuông góc với nhau. Khi đó $AD^2 + BC^2$ bằng

A. 80. B. 96. C. 192. D. $48\sqrt{3}$.

Câu 20: Cho phương trình $x^2 - 3(m + 1)x + 2m^2 + 5m + 2 = 0$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn $|x_1 + x_2| = 2|x_1 - x_2|$?

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

II. PHẦN TỰ LUẬN. (14,0 điểm).

Câu 1. (5,0 điểm)

$$P = \frac{x-4\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} + \frac{1-3\sqrt{x}+x}{x^2+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}}, \text{ với } x > 0.$$

1. Rút gọn biểu thức

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: y = (m-1)x + m - 2 (m \neq 1)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.

3. Giải phương trình $8x^3 + 26x^2 + 3\sqrt{5x+1} = 13x + 3$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Tìm các số nguyên dương a, b để $a^2b^2 - 4a - 4b$ là số chính phương. Chứng minh $4f(-2-\sqrt{7})+3$ là một số nguyên tố.

2. Cho đa thức $f(x) = x^{2024} + a_{2023}x^{2023} + a_{2022}x^{2022} + \dots + a_1x + a_0$ ($a_0, a_1, \dots, a_{2023} \in \mathbb{Q}$) có $f(\sqrt{7}-2) = 20$.

Chứng minh $4f(-2-\sqrt{7})+3$ là một số nguyên tố.

Câu 3. (4,0 điểm) Cho đường tròn (O, R) có dây BC cố định ($BC \neq 2R$). Trên cung lớn BC của đường tròn lấy điểm A sao cho $AC > AB > BC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. Các tia BI, CI cắt DE theo thứ tự tại M, N.

1. Chứng minh tứ giác BIND là tứ giác nội tiếp

2. Qua điểm M kẻ đường thẳng song song với AB cắt cạnh BC tại điểm P. Gọi F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN. Chứng minh $MN \cdot PF = 2MF \cdot NP$.

3) Khi điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho $AC > AB > BC$, chứng minh $\frac{AB+BC+CA}{MN+MD+NE}$ không đổi.

Câu 4. (1,0 điểm) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2}{\sqrt{15x^2 + 26xy + 8y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{15y^2 + 26yz + 8z^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{15z^2 + 26zx + 8x^2}}.$$

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Cán bộ coi thi số 1 (Họ tên và chữ ký)

Cán bộ coi thi số 2 (Họ tên và chữ ký)

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC GIANG

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 03 trang)

HDC ĐỀ THI CHÍNH THỨC
HƯỚNG DẪN CHẤM TỰ LUẬN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH
GIỎI VĂN HÓA CẤP TỈNH
Năm học 2024-2025
MÔN THI: TOÁN - LỚP 9
Bản hướng dẫn chấm có 07 trang

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM. (6 điểm – Mỗi đáp án đúng được 0,3 điểm).

Mã đề thi: 191

1.D	2.B	3.A	4.C	5.C	6.A	7.D	8.D	9.B	10.B
11.A	12.A	13.D	14.B	15.C	16.A	17.B	18.D	19.C	20.C

II. PHẦN TỰ LUẬN. (14,0 điểm).

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1.		5,00
1.	Rút gọn biểu thức $P = \frac{x-4\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} + \frac{1-3\sqrt{x}+x}{x^2+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}}$, với $x > 0$.	2,00
(2,0 Điểm)	Với $x > 0$, ta có: $P = \frac{x-4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} + \frac{1-3\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(x-\sqrt{x}+1)}$	0,50
	$= \frac{\sqrt{x}(x-4\sqrt{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} + \frac{1-3\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} + \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$	0,50
	$= \frac{x\sqrt{x}-2x-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(x-2\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$	0,50
	$= \frac{\sqrt{x}(x+1)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-3}{x-\sqrt{x}+1}$	0,50
2.	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: y = (m-1)x + m - 2 (m \neq 1)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.	1,50
	d cắt trục Ox tại $A\left(\frac{2-m}{m-1}; 0\right)$, d cắt trục Oy tại $B(0; m-2)$	0,25

(1,5 điểm)	$OA = \left \frac{2-m}{m-1} \right , OB = m-2 $ Tam giác AOB vuông tại O , có	0,25
	$S_{AOB} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} OA \cdot OB = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left \frac{2-m}{m-1} \right \cdot m-2 = 2$	0,25
	$\Leftrightarrow (m-2)^2 = 4 m-1 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 = 4(m-1) & (1) \\ (m-2)^2 = -4(m-1) & (2) \end{cases}$	0,25
	$+ (1) \Leftrightarrow m^2 - 8m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = 4 \pm 2\sqrt{2}$ (thỏa mãn)	0,25
	$+ (2) \Leftrightarrow m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn).	0,25
	Vậy các giá trị cần tìm của m là $m = 0, m = 4 \pm 2\sqrt{2}$.	
3.	Giải phương trình $8x^3 + 26x^2 + 3\sqrt{5x+1} = 13x + 3$.	1,50
(1,5 điểm)	Điều kiện xác định: $5x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{5} (*)$	0,25
	Phương trình đã cho tương đương với $(8x^3 + 26x^2 - 7x) - (6x + 3) + 3\sqrt{5x+1} = 0$	
	$\Leftrightarrow x(4x-1)(2x+7) - 3[(2x+1) - \sqrt{5x+1}] = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow x(4x-1)(2x+7) - \frac{3(4x^2-x)}{(2x+1)+\sqrt{5x+1}} = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow x(4x-1) \left(2x+7 - \frac{3}{(2x+1)+\sqrt{5x+1}} \right) = 0$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{4} \\ 2x+7 - \frac{3}{2x+1+\sqrt{5x+1}} = 0 \end{cases}$ Nhận thấy $x=0$ và $x=\frac{1}{4}$ là các giá trị thỏa mãn.	0,25
	Xét phương trình (2): $2x+7 - \frac{3}{2x+1+\sqrt{5x+1}} = 0$	
	$x \geq -\frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq \frac{3}{5} \\ \sqrt{5x+1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2x+1+\sqrt{5x+1}} \Rightarrow 5 \\ 2x+7 \geq \frac{33}{5} \end{cases} \Rightarrow 2x+7 - \frac{3}{2x+1+\sqrt{5x+1}} \geq \frac{8}{5} > 0$	0,25
	Do đó (2) vô nghiệm.	
	Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $\left\{ 0; \frac{1}{4} \right\}$.	0,25
Câu 2.		4,00
1.	Tìm các số nguyên dương a, b để $a^2b^2 - 4a - 4b$ là số chính phương. Chứng minh $4f(-2-\sqrt{7})+3$ là một số nguyên tố.	2,00
	Ta có $a^2b^2 - 4a - 4b$ là số chính phương, suy ra $a^2b^2 - 4a - 4b = m^2$ (*) với m là một	0,5

(2,0 điểm)	số tự nhiên. Do a, b là các số nguyên dương nên $a^2b^2 - 4a - 4b < a^2b^2$, hay $m^2 < a^2b^2 = (ab)^2$ (1).	
	Ta thấy nếu $ab = 1$ khi $(a; b) = (1; 1)$ hoặc $ab = 2$ khi $(a; b) = (1; 2), (2; 1)$ đều không thỏa mãn $a^2b^2 - 4a - 4b$ là số chính phương, nên có $ab > 2 \Rightarrow ab - 2 > 0$. Xét hiệu $m^2 - (ab - 2)^2 = 4ab - 4a - 4b - 4$ Nếu $4ab - 4a - 4b - 4 > 0$ thì $m^2 > (ab - 2)^2$, kết hợp với (1) ta được $(ab - 2)^2 < m^2 < (ab)^2$	0,25
	Suy ra $m^2 = (ab - 1)^2$ (vì $ab - 2 > 0$) Khi đó ta có $(ab)^2 - 4a - 4b = (ab - 1)^2 \Leftrightarrow 2ab - 4a - 4b = 1$ (vô lý do $2ab - 4a - 4b$ luôn chẵn).	0,25
	Do đó $m^2 - (ab - 2)^2 = 4ab - 4a - 4b - 4 \leq 0 \Rightarrow 4ab - 4a - 4b - 4 \leq 0$ $\Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (a - 1)(b - 1) \leq 2$ (vì a, b là các số nguyên dương) Xét các trường hợp TH1: $(a - 1)(b - 1) = 1$ dễ thấy $(a; b) = (2; 2)$ thỏa mãn bài toán. TH2: $(a - 1)(b - 1) = 2$ dễ thấy $(a; b) = (2; 3), (3; 2)$ thỏa mãn bài toán.	0,5
	TH3: $(a - 1)(b - 1) = 0$ suy ra $a = 1$ hoặc $b = 1$. Với $a = 1$, từ (*) ta có $b^2 - 4b - 4 = m^2 \Leftrightarrow (b - 2)^2 - 8 = m^2 \Leftrightarrow (b - 2)^2 - m^2 = 8(2^*)$ Từ (2^*) và b nguyên dương ta thấy $b - 2 > m (m \in \mathbb{N}^*)$ hay $b - 2 - m > 0$ và có $(2^*) \Leftrightarrow (b - 2 - m) \cdot (b - 2 + m) = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} b - 2 - m = 1 \\ b - 2 + m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{13}{2} \\ m = \frac{7}{2} \end{cases}$ không thỏa mãn. hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases} b - 2 - m = 2 \\ b - 2 + m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ m = 1 \end{cases}$, ta được $(a; b) = (1; 5)$. Với $b = 1$, tương tự ta có $(a; b) = (5; 1)$. Vậy các cặp số $(a; b)$ nguyên dương thỏa mãn là: $(1; 5), (5; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 2)$.	0,5
2.	Cho đa thức $f(x) = x^{2024} + a_{2002}x^{2023} + a_{2022}x^{2022} + \dots + a_1x + a_0$, với $a_0, a_1, \dots, a_{2023} \in \mathbb{Q}$ và $f(\sqrt{7} - 2) = 20$. Chứng minh $4f(-2 - \sqrt{7}) + 3$ là một số nguyên tố.	2,00
(2,0 điểm)	Đặt $g(x) = f(x) - 20$, ta có $g(\sqrt{7} - 2) = f(\sqrt{7} - 2) - 20 = 0$. Dễ thấy $g(x)$ là một đa thức bậc 2024 với các hệ số nguyên. Giả sử khi chia đa thức $g(x)$ cho đa thức $x^2 + 4x - 3$ được thương là đa thức $h(x)$ và đa thức dư có dạng $ax + b (a, b \in \mathbb{Q})$	0,50
	$\Rightarrow g(x) = (x^2 + 4x - 3) \cdot h(x) + ax + b (a, b \in \mathbb{Q})$. Thay $x = \sqrt{7} - 2$ ta có: $0 = 0h(\sqrt{7} - 2) + a(\sqrt{7} - 2) + b \Leftrightarrow a(\sqrt{7} - 2) + b = 0 \Leftrightarrow a\sqrt{7} + (b - 2a) = 0$ (1)	0,50
	Vì $\sqrt{7}$ là số vô tỉ và a, b là các số hữu tỉ nên từ (1) suy ra	0,50

	$\begin{cases} a = 0 \\ b - 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$ <p>. Từ đó, $g(x) = (x^2 + 4x - 3)h(x)$</p>	
	<p>Thay $x = -2 - \sqrt{7}$ ta được $g(-2 - \sqrt{7}) = 0.h(-2 - \sqrt{7})$ $\Leftrightarrow f(-2 - \sqrt{7}) - 20 = 0 \Leftrightarrow f(-2 - \sqrt{7}) = 20 \Rightarrow 4f(-2 - \sqrt{7}) + 3 = 4.20 + 3 = 83$. Vì 83 là số nguyên tố nên ta có điều phải chứng minh.</p>	0,50
Câu 3.	<p>Đường tròn (O, R) có dây BC cố định ($BC \neq 2R$). Trên cung lớn BC của đường tròn lấy điểm A sao cho $AC > AB > BC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. Các tia BI, CI cắt DE theo thứ tự tại M, N.</p>	4,00
1.	<p>Chứng minh tứ giác BIND là tứ giác nội tiếp.</p>	1,50
	<p>Ta có $\angle BIN$ là góc ngoài của tam giác IBC $\Rightarrow \angle BIN = \angle IBC + \angle ICB = \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle ACB}{2} = \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2}$ (1) (do IB, IC lần lượt là các tia phân giác của góc $\angle ABC, \angle ACB$)</p>	0,50
(1,5 điểm)	<p>AD, AE là tiếp tuyến của đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên $AD = AE \Rightarrow \angle ADE$ cân tại A $\Rightarrow \angle ADE = \angle AED$ Xét hai tam giác ABC, ADE có chung góc $\angle BAC$ nên $\angle ABC + \angle ACB = 2\angle ADE \Rightarrow \angle ADE = \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2}$ (2) Từ (1), (2) suy ra $\angle BIN = \angle ADE$ hay $\angle BIN = \angle ADN$ (3) Do hai góc $\angle BDN, \angle ADN$ là hai góc kề bù nên $\angle BDN + \angle ADN = 180^\circ$ (4)</p>	0,50

	Từ (3), (4) ta có $\angle BDN + \angle BIN = 180^\circ$ Xét tứ giác BDNI có $\angle BDN + \angle BIN = 180^\circ$ và hai góc $\angle BDI, \angle BIN$ ở vị trí đối diện nên tứ giác BDNI là tứ giác nội tiếp một đường tròn.	0,50
2.	Qua điểm M kẻ đường thẳng song song với AB cắt cạnh BC tại điểm P. Gọi F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN. Chứng minh $MN \cdot PF = 2MF \cdot NP$.	1,50
(1,5 điểm)	Tương tự phần a. ta có tứ giác BDNI nội tiếp $\Rightarrow \angle BNI = \angle BDI$ mà $\angle BDI = 90^\circ$ ($ID \perp AB$) nên $\angle BNI = 90^\circ \Rightarrow \angle BNI$ vuông tại N. Chứng minh tương tự ta được $\angle CMI$ vuông tại M. Gọi J là trung điểm của BC suy ra $JM = JN = JB = JC = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \angle MB$ cân tại J nên $\angle JMB = \angle JBM$, mặt khác $\angle JBM = \angle JBA$ (do BM là phân giác góc $\angle ABC$) $\angle JMB = \angle MBA \Rightarrow JM \parallel AB$ (2 góc ở vị trí so le trong) $\Rightarrow J \equiv P$	0,25
	Theo trên ta có $PM = PN$ (1) Mà F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN nên $FM = FN$ $MP \parallel AB \Rightarrow \angle BMP = \angle ABM \Rightarrow \angle BMP = \angle MBP$ (do BI là phân giác của $\angle ABC$) Suy ra tam giác PBM cân tại P nên $PM = PB$ (2) Từ (1), (2) suy ra FP là đường trung trực của đoạn thẳng MN. Gọi H là trung điểm của MN thì $NH \perp FP$	0,25
	Gọi Q là giao của BN và CM Ta có $BM \perp CQ, CN \perp BQ$ nên giao điểm I của hai đường BM, CN là trực tâm của tam giác BCQ suy ra $QI \perp BC \Rightarrow \angle QBC + \angle BQI = 90^\circ$ mà $\angle QBC = \angle BNP$ nên $\angle BNP + \angle BQI = 90^\circ$ (3)	0,25
	Tứ giác MINQ nội tiếp đường tròn đường kính IQ (vì $\angle IMQ = \angle INQ = 90^\circ$) mà F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN nên F là trung điểm của IQ suy ra $\angle NQF = \angle FNQ$ hay $\angle BQI = \angle FNQ$ (4)	0,25
	Thay (4) vào (3) ta được: $\angle BNP + \angle FNQ = 90^\circ \Rightarrow \angle PNF = 90^\circ \Rightarrow \angle FNP$ vuông tại N	0,25
	$\angle FNP$ vuông tại N, có NH là đường cao nên $NH \cdot PF = NF \cdot NP \Rightarrow \frac{1}{2}MN \cdot PF = MF \cdot NP \Rightarrow MN \cdot PF = 2MF \cdot NP$ ($MF = NF$)	0,25
3.	Khi điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho $AC > AB > BC$, chứng minh $\frac{AB + BC + CA}{MN + MD + NE}$ không đổi.	1,00
	Ta có $\frac{AB + BC + CA}{MN + MD + NE} = \frac{AB}{NE} = \frac{BC}{MN} = \frac{CA}{MD}$ $\angle BNC = \angle CMB = 90^\circ$ nên tứ giác BCMN nội tiếp $\Rightarrow \angle MNI = \angle MBC, \angle IMN = \angle ICB$ $\Rightarrow \angle IBC \sim \angle INM (g \cdot g) \Rightarrow \frac{BC}{MN} = \frac{IB}{IN}$ (1)	0,25
	Ta có tứ giác BDNI nội tiếp $\angle NBI = \angle IDN$ Mà $\angle IDN = \angle DAI$ (cùng phụ với góc $\angle ADN$) suy ra $\angle IBN = \angle DAI$ Xét hai tam giác vuông NBI, DAI tại N và D có $\angle IBN = \angle DAI$ nên	0,25

(1,0 điểm)	$\square NBI \sim \square DAI(g \cdot g) \Rightarrow \frac{IB}{IN} = \frac{IA}{ID} \quad (2)$ $\Rightarrow \frac{BC}{MN} = \frac{IA}{ID} \quad (3)$ Từ (1) và (2) ta có	
	Tứ giác BCMN nội tiếp suy ra $\square MNC = \square MBC = \square IBA$ (IB là phân giác góc $\square ABC$) Do $\square HDA = \square IEA = 90^\circ$ nên tứ giác ADIE nội tiếp suy ra $\square IEN = \square IAB$ $\square IAB \sim \square IEN(g \cdot g) \Rightarrow \frac{AB}{NE} = \frac{IA}{IE} = \frac{IA}{ID} \quad (IE = ID) \quad (4)$ Suy ra $\Rightarrow \frac{AC}{MD} = \frac{IA}{ID} \quad (5)$ Chứng minh tương tự ta cũng có	0,25
	Từ (3), (4), (5) ta có $\Rightarrow \frac{AB+BC+CA}{MN+MD+NF} = \frac{IA}{ID} \quad (5)$ $\sin \square DAI = \frac{ID}{IA}$ Tam giác IAD vuông tại I, nên Trong đường tròn (O, R), có góc nội tiếp $\square BAC$ chắn cung BC cố định suy ra $\square BAC = 2\square IAB$ không đổi $\Rightarrow \sin \square DAI = \frac{ID}{IA}$ không đổi $\Rightarrow \frac{AB+BC+CA}{MN+MD+NF}$ không đổi.	0,25
Câu 4.	Câu 4. (1,0 điểm) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2}{\sqrt{15x^2+26xy+8y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{15y^2+26yz+8z^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{15z^2+26zx+8x^2}}$	1,00
(1,0 điểm)	Với mọi $x, y, z > 0$: Ta có $\sqrt{15x^2+26xy+8y^2} = \sqrt{(4x+3y)^2 - (x-y)^2} \leq \sqrt{(4x+3y)^2} = 4x+3y$ $\Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{15x^2+26xy+8y^2}} \geq \frac{x^2}{4x+3y} \quad (1)$	0,25
	Tương tự ta cũng có $\frac{y^2}{\sqrt{15y^2+26yz+8z^2}} \geq \frac{y^2}{4y+3z} \quad (2)$ và $\frac{z^2}{\sqrt{15z^2+26zx+8x^2}} \geq \frac{z^2}{4z+3x} \quad (3) \Rightarrow P \geq \frac{x^2}{4x+3y} + \frac{y^2}{4y+3z} + \frac{z^2}{4z+3x} \quad (1^*)$	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{x^2}{4x+3y} + \frac{4x+3y}{49} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{4x+3y} \cdot \frac{4x+3y}{49}} = \frac{2x}{7} \quad (4)$ $\frac{y^2}{4y+3z} + \frac{4y+3z}{49} \geq \frac{2y}{7} \quad (5)$ và $\frac{z^2}{4z+3x} + \frac{4z+3x}{49} \geq \frac{2z}{7} \quad (6)$ Cộng hai vế của (4), (5), (6) ta được $\frac{x^2}{4x+3y} + \frac{y^2}{4y+3z} + \frac{z^2}{4z+3x} + \frac{7(x+y+z)}{49} \geq \frac{2(x+y+z)}{7}$ $\Leftrightarrow \frac{x^2}{4x+3y} + \frac{y^2}{4y+3z} + \frac{z^2}{4z+3x} \geq \frac{x+y+z}{7} = \frac{3}{7} \quad (2^*)$	0,25
	Từ (1*) và (2*) ta suy ra $P \geq \frac{3}{7}, \forall x, y, z > 0$. Dấu bằng xảy ra khi (1), (2), (3), (4), (5), (6), (1*), (2*) cùng thỏa mãn, ta được $x = y = z = 1$.	0,25

	Vậy $\min P = \frac{3}{7}$ khi $x = y = z = 1$.	
		14,00

Lưu ý khi chấm bài:

- Trên đây chỉ là so lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác vẫn đúng thì vẫn được điểm theo thang điểm tương ứng.
- Với bài toán hình học nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không cho điểm phần tương ứng.

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NAM**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI CHỌN HSG CẤP TỈNH THCS
NĂM HỌC 2024-2025**

Môn thi: TOÁN**Thời gian: 150 phút****(không kể thời gian giao đề)****Khóa thi ngày: 12/9/2024**

Câu 1. (4,5 điểm)

a) Cho biểu thức
$$A = \frac{2x - 8\sqrt{x} + 3}{x + \sqrt{x} - 6} + \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3}, \text{ với } x > 4$$

Rút gọn biểu thức A và tìm tất cả các số nguyên x thỏa mãn
$$A \geq \frac{x - \sqrt{x}}{12}.$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn
$$x^3 + \frac{x^2}{2} + 2xy - 2x + y - 4 = 0.$$

Câu 2. (4,5 điểm)

a) Giải phương trình
$$\frac{3x}{\sqrt{3x+1}+1} = \sqrt{x+4}$$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2(x+1)(2y+1) + x + 2 = 0 \\ 4xy^2 + 4y^2 + 4xy - x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Đường tròn đường kính AC cắt đoạn thẳng BH tại M. Trên đoạn thẳng HC lấy điểm N sao cho $AM = AN$.

a) Chứng minh $EB \cdot EH = ED \cdot EF$.

b) Chứng minh N thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có hai đường cao AE, BD cắt nhau tại H. Đường trung trực của đoạn thẳng DH cắt AE tại M, cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại P và Q (P nằm giữa M và Q).

a) Chứng minh MD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

b) Chứng minh $\angle APM + \angle AQM = \angle CBD$

c) Đường thẳng AQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại F (F khác Q).

Chứng minh $\angle APB = \angle FPB$

Câu 5. (4,0 điểm)

a) Cho p là số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên dương b sao cho nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - bx + bp = 0$ là số nguyên.

b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = xy \left(x^2 + y^2 - \frac{1}{z} \right) + yz \left(y^2 + z^2 - \frac{1}{x} \right) + zx \left(z^2 + x^2 - \frac{1}{y} \right).$$

ĐÁP ÁN

Câu 1:

a) Ta có: $\frac{2x - 8\sqrt{x} + 3}{x + \sqrt{x} - 6} = \frac{2x - 8\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)}$ và

$$\frac{\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1}}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{x} - 1)^2}}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2x - 8\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)} + \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} \\ &= \frac{2x - 8\sqrt{x} + 3 + (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3) - 2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2x - 8\sqrt{x} + 3 + x + 3\sqrt{x} - \sqrt{x} - 3 - 2x + 4\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{x - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} \end{aligned}$$

$$A \geq \frac{x - \sqrt{x}}{12} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} \geq \frac{x - \sqrt{x}}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \geq \frac{\sqrt{x} - 1}{12}$$

$$\Leftrightarrow 12 \geq (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)$$

$$\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x} - 15 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 5) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq 9$$

Kết hợp với $x > 4$ suy ra các số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán là: 5; 6; 7; 8; 9

b) Giả sử tồn tại cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn
$$x^3 + \frac{x^2}{2} + 2xy - 2x + y - 4 = 0. \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 2x^3 + x^2 + 4xy - 4x + 2y - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(2x+1) + 2y(2x+1) - 2(2x+1) = 6$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(x^2 + 2y - 2) = 6$$

Suy ra số nguyên $2x + 1$ là ước của 6. Do $2x + 1$ không chia hết cho 2 nên

$$2x+1 \in \{3; -3; 1; -1\}$$

TH1:
$$\begin{cases} 2x+1=3 \\ x^2+2y-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\text{Loại})$$

TH2:
$$\begin{cases} 2x+1=-3 \\ x^2+2y-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ 2y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases} \quad (\text{Thỏa mãn})$$

TH3:
$$\begin{cases} 2x+1=1 \\ x^2+2y-2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn})$$

TH4:
$$\begin{cases} 2x+1=-1 \\ x^2+2y-2=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 2y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\text{Loại})$$

Vậy có hai cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán: $(x; y) = (-2; -2); (x; y) = (0; 4)$

Câu 2:

a) Điều kiện:
$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}.$$

Phương trình (1) tương đương với
$$\frac{(\sqrt{3x+1})^2 - 1^2}{\sqrt{3x+1} + 1} = \sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{3x+1} + 1)(\sqrt{3x+1} - 1)}{\sqrt{3x+1} + 1} = \sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - 1 = \sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = \sqrt{x+4} + 1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1})^2 = (\sqrt{x+4} + 1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = x - 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+4 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x=0 \\ x=5 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{Nhận})$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm: $x = 5$.

b) Hệ PT (1) tương đương với

$$\begin{cases} 2(x+1)(2y+1) + (x+1) + 1 = 0 \\ (4xy^2 + 4y^2) + (4xy + 4y) + (x+1) - 2x - 6y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+1)(2y+1) + (x+1) + 1 = 0 \\ 4y^2(x+1) + 4y(x+1) + (x+1) - 2(x+1) - 3(2y+1) - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+1)(2y+1) + (x+1) + 1 = 0 \\ (x+1)(2y+1)^2 - 2(x+1) - 3(2y+1) - 2 = 0 \end{cases}$$

Đặt $a = x + 1$; $b = 2y + 1$ ta có hệ $\begin{cases} 2ab + a + 1 = 0 \\ ab^2 - 2a - 3b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab + (a+1) = 0 \\ ab^2 - 2(a+1) - 3b = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab + a + 1 = 0 \\ ab^2 + 4ab - 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab + a + 1 = 0 \\ \begin{cases} b = 0 \\ ab + 4a - 3 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

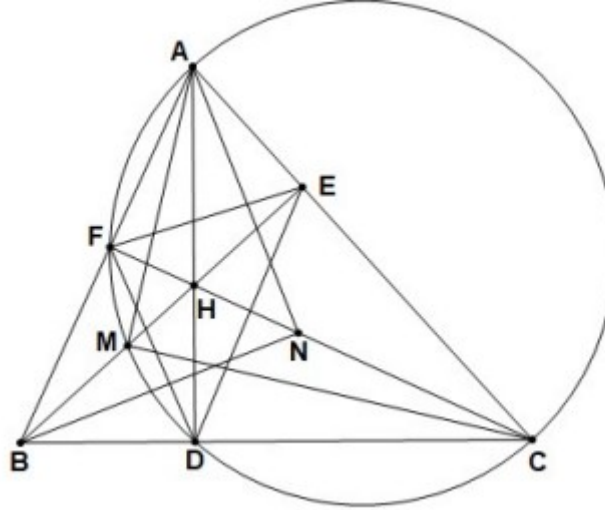
$$\begin{cases} 2ab + a + 1 = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{Thỏa mãn})$$

$$\begin{cases} 2ab + a + 1 = 0 \\ ab + 4a - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm:

Câu 3:



a) Ta có: $\angle BED = \angle BAD$ (vì tứ giác ABDE nội tiếp)

$$\angle FEH = \angle BAD \text{ (vì tứ giác AEHF nội tiếp)}$$

Suy ra: $\angle BED = \angle FEH$ (1)

Ta có: $\angle EBD = \angle EFH$ (2) (vì tứ giác BCEF nội tiếp)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle EBD$ và $\triangle EFH$ đồng dạng.

$$\text{Do đó: } \frac{EB}{EF} = \frac{ED}{EH} \Leftrightarrow EB \cdot EH = ED \cdot EF$$

b) Ta có: $AN^2 = AM^2 = AE \cdot AC$ (3) (vì $\triangle AMC$ vuông tại M có đường cao ME)

Ta có: $\angle EAF = \angle BAC$

$$\angle AEF = \angle ABC \text{ (vì tứ giác BCEF nội tiếp)}$$

Suy ra $\triangle AEF$ và $\triangle ABC$ đồng dạng.

$$\text{Do đó: } \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Leftrightarrow AE \cdot AC = AF \cdot AB \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } AN^2 = AF \cdot AB \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{AF}{AN}$$

Lại có $\angle NAB = \angle FAN$ nên $\triangle ABN$ và $\triangle ANF$ đồng dạng, suy ra $\angle ANB = \angle FNA = 90^\circ$

Do đó N thuộc đường tròn đường kính AB, hay N thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$.

Câu 4:

$$MD = MH = MA = \frac{AH}{2} \Rightarrow \square MDH = \square MHD \quad (1)$$
$$\square MDH = \square BCD \Rightarrow \square MDB = \square BCD = \frac{1}{2} \text{sd} \square DPB$$

Hơn nữa, cung bị chắn bởi dây DB là $\overset{\frown}{DPB}$ nằm bên trong góc $\overset{\frown}{MDB}$

b) Ta có: $\widehat{MDP} = \widehat{MQD}$ (vì MD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$)

$$\square_{MP} = \square_{MD}$$

$$\frac{MP}{MD} = \frac{MD}{MQ} \quad \text{mà } MD = MA \text{ nên } \frac{MP}{MA} = \frac{MA}{MQ}$$

Ta lại có: $\widehat{PMA} = \widehat{AMQ}$ nên $\triangle PMA$ và $\triangle AMQ$ đồng dạng, suy ra $\widehat{PAM} = \widehat{AQM}$

Do đó: $\widehat{APM} + \widehat{AQM} = \widehat{APM} + \widehat{PAM} = \widehat{HMQ}$
 $= 90^\circ - \widehat{MHD} = 90^\circ - \widehat{EHB} = \widehat{CBD}$

Trang 15

$$\begin{aligned}
\angle APB + \angle AQB &= \angle APM + \angle MPB + \angle AQM + \angle MQB \\
&= (\angle APM + \angle AQM) + \angle MPB + \angle MQB \\
&= \angle BMD + 180^\circ - \angle QPB + \angle QPB \\
&= \angle BMD + 180^\circ - \angle QDB + \angle QCB \\
&= \angle BMD + 180^\circ - (90^\circ - \angle QDC) + (\angle BCD - \angle QCP) \\
&= \angle BMD + 180^\circ - (90^\circ - \angle QDP) + (\angle BCD - \angle QDP) \\
&= \angle BMD + 90^\circ + \angle BCD \\
&= 180^\circ
\end{aligned} \tag{3}$$

Vì tứ giác BPFQ nội tiếp nên $\angle QPB + \angle AQB = 180^\circ$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\angle APB = \angle QPB$

Một cách khác chứng minh $\angle APB + \angle AQB = 180^\circ$ như sau:

Ta có: $\angle BDP = \angle CDP = \angle QDP = \angle DQ = \angle BQ = \angle PQ$ (Vì PQ // CD)

$$\angle MPB = \angle BQ + \angle QPB \quad (\text{vì } \angle MPB \text{ là góc ngoài của tam giác BPQ})$$

$$\angle APM + \angle AQM = \angle BMD \quad (\text{ý b})$$

$$\begin{aligned}
\angle APB + \angle AQB &= \angle APM + \angle MPB + \angle AQM + \angle MQB \\
&= (\angle APM + \angle AQM) + \angle MPB + \angle MQB \\
&= \angle BMD + \angle BQ + \angle QPB + \angle QPB \\
&= \angle BMD + \angle BQ + \angle BQ + \angle QPB + \angle QPB \\
&= 2\angle BMD + \angle BQ + \angle QPB + 2\angle QPB \\
&= 2(\angle BMD + \angle BQ + \angle QPB) \\
&= 2(\angle BMD + \angle BCD) \\
&= 2.90^\circ = 180^\circ.
\end{aligned}$$

Câu 5:

a) Giả sử tồn tại số nguyên dương b để phương trình $x^2 - bx + bp = 0$ có hai nghiệm nguyên x_1, x_2

Ta có: $x_1 + x_2b; x_1x_2 = bp$

Vì $b, p > 0$ nên $x_1 > 0, x_2 > 0$

Vì p là số nguyên tố nguyên tố và $x_1 x_2 = bp$ nên $x_1 \vdots p$, hoặc $x_2 \vdots p$

Giả sử $x_1 \vdots p \Rightarrow x_1 = pc (c \in \mathbb{N}^*)$

$$x_2 = b - x_1 = b - pc$$

$$x_1 x_2 = bp \Leftrightarrow pc(b - pc) = bp \Leftrightarrow c(b - pc) = b \Leftrightarrow b(c - 1) = pc^2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow b = \frac{pc^2}{c-1} \quad (2) \text{ (với } c > 1, \text{ vì } c = 1 \text{ không thỏa mãn (1))}$$

Ta có: $(c, c-1) = 1 \Rightarrow (c^2, c-1) = 1$ mà $pc^2 \vdots c-1 \Rightarrow p \vdots c-1$

Do p là số nguyên tố nên $c-1 = 1$ hoặc $c-1 = p$

+) Với $c-1 = 1$ thì $c = 2$ thay vào (2) ta được $b = 4p$.

Thử lại: phương trình $x^2 - 4px + 4p^2 = 0$ có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 2p \in \mathbb{N}^*$

+) Với $c-1 = p$ thì $c = p+1$ thay vào (2) ta được $b = c^2 = (p+1)^2$

Thử lại: phương trình $x^2 - (p+1)^2 x + p(p+1)^2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = p+1 \in \mathbb{N}^*, x_2 = p(p+1) \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy $b = 4p$ hoặc $b = (p+1)^2$

$$b) \quad P = xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2) - \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \right).$$

$$\text{Xét } M = xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2):$$

$$\text{Ta có: } (x-y)^4 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 \geq 0 \quad (1)$$

$$xy(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 \geq 0 \quad (2)$$

Cộng vế theo vế (1) và (2), ta được:

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^3y + 4x^2y^2 - 3xy^3 + y^4 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^4 + 4x^2y^2 + y^4 &\geq 3xy(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (3)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

$$\text{Tương tự: } y^4 + 4y^2z^2 + z^4 \geq 3yz(y^2 + z^2) \quad (4)$$

Đẳng thức xảy ra khi $y = z$.

$$z^4 + 4z^2x^2 + x^4 \geq 3zx(z^2 + x^2) \quad (5)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = z$.

Cộng vế theo vế (3), (4) và (5), ta được:

$$2(x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2) \geq 3[xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2)]$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq 3M$$

$$\Leftrightarrow M \leq \frac{2 \cdot 3^2}{3} = 6$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

$$N = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y};$$

Xét

$$N^2 = \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2x^2$$

Ta có:

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 \geq \frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x} + \frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y} + \frac{zx}{y} \cdot \frac{xy}{z} = y^2 + z^2 + x^2$$

Ta lại có:

(Áp dụng BĐT: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$)

$$\text{Suy ra } N^2 \geq 3y^2 + 3z^2 + 3x^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow N \geq 3.$$

$$\frac{xy}{z} = \frac{yz}{x} = \frac{zx}{y} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\text{Do đó: } P = M - N \leq 6 - 3 = 3.$$

$P = 3$ xảy ra khi $M = 6$ và $N = 3$, hay $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3, đạt được khi $x = y = z = 1$.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH NGHỆ AN

NĂM HỌC 2024-2025

Môn thi: TOÁN - BẢNG A

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (m, n) thỏa mãn: $m^2 + m = 3^{2024n} + 19$.

b) Cho a, b, c, d là các số nguyên biết $a + 3b = c + 2d$.

Chứng minh rằng $a^2 + 9b^2 + c^2 + 4d^2$ viết được dưới dạng tổng ba số chính phương

Câu 2 (7,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y)^3 + (x-y)(xy+x-y) + xy = 0 \\ y(y+2)(y+5)(x+2) = 35x^2 \end{cases}$$

b) Giải phương trình
$$4(x-1)^2\sqrt{x+1} - 4(x-1)\sqrt{x^2-1} = (x^2+2)(x^2-2x)$$

Câu 3 (1,5 điểm). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $2c + 3b = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{5}{b+c-a} + \frac{7}{a+b-c} + \frac{8}{a+c-b}.$$

Câu 4 (7,5 điểm). Cho đường tròn (O; R) cố định và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O; R). Từ điểm A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (O; R) (B, C là các tiếp điểm). Qua A vẽ đường thẳng cố định cắt đường tròn (O; R) tại hai điểm phân biệt I và E (I nằm giữa hai điểm A, E và $\angle BAC < 90^\circ$). Gọi H là giao điểm của AO và BC. Qua H vẽ đường thẳng (d) song song với BE, biết (d) cắt các đường thẳng BI, BA lần lượt tại Q và N. Đường thẳng BE cắt đường thẳng AO tại K. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AQ và BK.

a) Chứng minh rằng
$$\frac{BI}{CI} = \frac{BE}{CE}$$

b) Chứng minh rằng HB là đường phân giác của $\angle NHM$

c) Vẽ đường tròn $(P; R_1)$ thay đổi nhưng luôn đi qua hai điểm I và E. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AD, AJ với đường tròn $(P; R_1)$ (D, J là các tiếp điểm). Gọi T là giao điểm của hai đường thẳng DJ và AE. Chứng minh đường tròn đường kính TP luôn đi qua 2 điểm cố định.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong phòng có 121 người, biết mỗi người quen với ít nhất 81 người khác. Chứng minh rằng trong phòng phải có 4 người từng đôi một quen nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (m, n) thỏa mãn: $m^2 + m = 3^{2024n} + 19$.

Trường hợp 1: với $n < 0$, $m^2 + m$ là số nguyên, $3^{2024n} + 19$ không phải là số nguyên (Loại)

Trường hợp 2: Với $n = 0 \Rightarrow m^2 + m = 20 \Rightarrow m^2 + m - 20 = 0 \Rightarrow (m-4)(m+5) = 0$

Do đó $m = 4$ (thỏa mãn), $m = -5$ (thỏa mãn)

Trường hợp 3: Với $n > 0$ ta có $3^{2024n} + 19$ chia 3 dư 1

Ta có: $m^2 + m = m(m+1)$, nếu $m = 3k, m = 3k+2 \Rightarrow m(m+1) \div 3$

Nếu $m = 3k+1 \Rightarrow m(m+1)$ chia 3 dư 2 $\Rightarrow m^2 + m = 3^{2024n} + 19$ vô lí

Vậy $(m, n) = (4, 0), (m, n) = (-5, 0)$

b) Cho a, b, c, d là các số nguyên biết $a + 3b = c + 2d$.

Chứng minh rằng $a^2 + 9b^2 + c^2 + 4d^2$ viết được dưới dạng tổng ba số chính phương

$$\text{Từ } a + 3b = c + 2d \Rightarrow a + 3b - c - 2d = 0 \Rightarrow 2a(a + 3b - c - 2d) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } a^2 + 9b^2 + c^2 + 4d^2 &= a^2 + 9b^2 + c^2 + 4d^2 + 2a(a + 3b - c - 2d) \\ &= a^2 + 9b^2 + c^2 + 4d^2 + 2a^2 + 6ab - 2ac - 4ad = (a - c)^2 + (a - 2d)^2 + (a + 3b)^2 \end{aligned}$$

(đpcm)

Câu 2 (7,0 điểm).

$$\text{a) Giải hệ phương trình } \begin{cases} (x - y)^3 + (x - y)(xy + x - y) + xy = 0 \\ y(y + 2)(y + 5)(x + 2) = 35x^2 \end{cases}$$

Từ pt (1) ta có

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x - y)^3 + (x - y)^2 + (x - y)xy + xy = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y + 1)(x^2 - xy + y^2) = 0 \end{aligned}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

Trường hợp 1:

thỏa mãn pt (2)

Trường hợp 2: $x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1$ thay vào phương trình (2)

$$\text{Ta có: } (x + 1)(x + 6)(x + 3)(x + 2) = 35x^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 5x + 6) = 35x^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{6}{x} + 7\right)\left(x + \frac{6}{x} + 5\right) = 35$$

(vì $x = 0$ không là nghiệm)

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{6}{x}\right)^2 + 12\left(x + \frac{6}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{6}{x} = 0 \\ x + \frac{6}{x} = -12 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm:

$$(0; 0), (-6 + \sqrt{30}; -5 + \sqrt{30}), (-6 - \sqrt{30}; -5 - \sqrt{30})$$

$$\text{b) Giải phương trình } 4(x - 1)^2 \sqrt{x + 1} - 4(x - 1) \sqrt{x^2 - 1} = (x^2 + 2)(x^2 - 2x)$$

ĐKXĐ: $x = -1$ hoặc $x \geq 1$

Xét $x = -1$ (không thỏa mãn)

Xét $x \geq 1$ ta có pt $\Leftrightarrow 4(x-1)\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x-1}-1) = (x^2+2)(x^2-2x)$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)\sqrt{x^2-1} \cdot \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} = x(x^2+2)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{4(x-1)\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}+1} = x(x^2+2) \end{cases}$$

Ta có $x = 2$ (thỏa mãn)

Với $\frac{4(x-1)\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}+1} = x(x^2+2) \Leftrightarrow 4(x-1)\sqrt{x^2-1} = x(x^2+2)(\sqrt{x-1}+1)$

Ta có: $\sqrt{x-1}+1 > \sqrt{x-1}, x \geq 2\sqrt{x-1}, x^2+2 > 2\sqrt{x^2-1}$ (với $x \geq 1$)

$$\Rightarrow 4(x-1)\sqrt{x^2-1} < x(x^2+2)(\sqrt{x-1}+1) \text{ nên phương trình (*) vô nghiệm}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.

Câu 3 (1,5 điểm). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $2c + 3b = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{5}{b+c-a} + \frac{7}{a+b-c} + \frac{8}{a+c-b}.$$

$$P = 2\left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+b-c}\right) + 3\left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b}\right) + 5\left(\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b}\right)$$

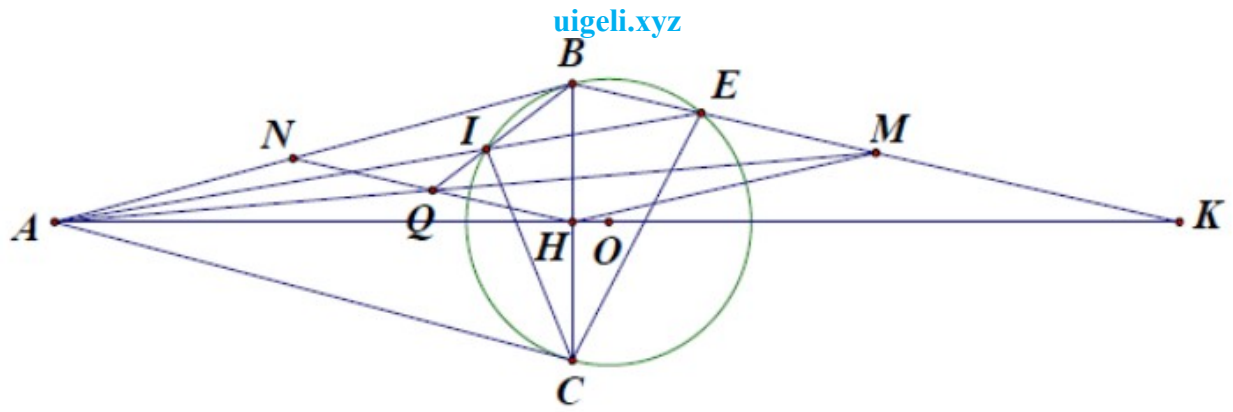
Áp dụng BĐT: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} (x, y > 0) \Rightarrow P \geq \frac{8}{2b} + \frac{12}{2c} + \frac{20}{2a} = 2\left(\frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{5}{a}\right)$

Ta có: $2c + 3b = abc \Rightarrow \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = a.$

$$P \geq 2\left(a + \frac{5}{a}\right) \geq 2 \cdot 2\sqrt{a \cdot \frac{5}{a}} = 4\sqrt{5} \quad (\text{BĐT Cô-si})$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $4\sqrt{5}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{5}$

Câu 4 :



a) Chứng minh rằng $\frac{BI}{CI} = \frac{BE}{CE}$

Xét hai tam giác ABI và tam giác AEB có $\angle BAE$ chung

$$\angle ABI = \angle BEI = \frac{1}{2} \text{sd} \angle I$$

$$\Rightarrow \triangle ABI \sim \triangle AEB (g \cdot g) \Rightarrow \frac{BI}{BE} = \frac{AB}{AE}$$

Tương tự, $\triangle ACI \sim \triangle AEC (g \cdot g) \Rightarrow \frac{CI}{CE} = \frac{AC}{AE}$

Mà $AB = AC$, kết hợp (1), (2) $\Rightarrow \frac{BI}{BE} = \frac{CI}{CE} \Rightarrow \frac{BI}{CI} = \frac{BE}{CE}$ (điều phải chứng minh)

b) Chứng minh rằng HB là đường phân giác của $\angle NHM$

Xét hai $\triangle BQN$ và $\triangle EBI$ có $\angle NBQ = \angle BEI, \angle QNB = \angle EBI$ (so le trong)

$$\Rightarrow \triangle BQN \sim \triangle EBI (g \cdot g) \Rightarrow \frac{BQ}{NQ} = \frac{EB}{IB} \quad (3)$$

Xét $\triangle BHQ$ và $\triangle EIC$ có $\angle QBH = \angle EIC = \frac{1}{2} \text{sd} \angle C$, và $\angle ECI = \angle BQH$ (cùng bù $\angle BE$)

$$\Rightarrow \triangle BHQ \sim \triangle EIC (g \cdot g) \Rightarrow \frac{QB}{QH} = \frac{EC}{IC}$$

Từ (3), (4) kết hợp $\frac{BI}{BE} = \frac{CI}{CE} \Rightarrow QH = QN \Rightarrow$ Q là trung điểm HN

Xét tam giác ABK có $HN \parallel BK$, và Q là trung điểm HN

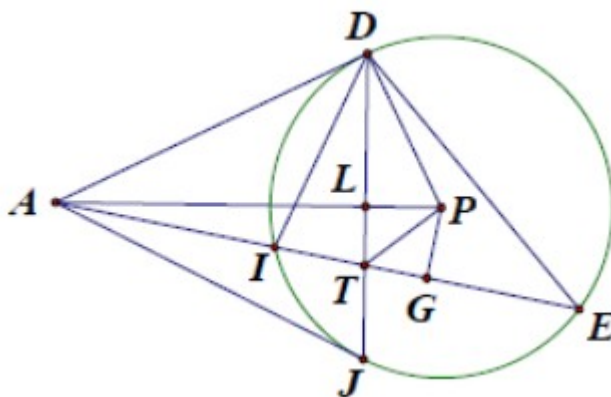
$\Rightarrow$ M là trung điểm BK.

Tam giác BHK vuông tại H có M là trung điểm của BK

$\Rightarrow$ Tam giác BHM cân tại M

$\Rightarrow \angle MBH = \angle MHB$ mà $\angle MBH = \angle NHB \Rightarrow \angle NHB = \angle MHB \Rightarrow$ HB là đường phân giác $\angle NHM$ (điều phải chứng minh)

c) Vẽ đường tròn $(P; R_1)$ thay đổi nhưng luôn đi qua hai điểm I và E. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AD, AJ với đường tròn $(P; R_1)$ (D, J là các tiếp điểm). Gọi T là giao điểm của hai đường thẳng DJ và AE. Chứng minh đường tròn đường kính TP luôn đi qua 2 điểm cố định.



Gọi G là trung điểm của IE $\Rightarrow$ G là điểm cố định, gọi L là giao điểm của AP và DJ

$$\Rightarrow DJ \perp AP$$

Tam giác APG đồng dạng với tam giác ATL (g.g) $\Rightarrow AL \cdot AP = AT \cdot AG$

Tam giác ADP vuông tại D có DL là đường cao $\Rightarrow AL \cdot AP = AD^2$

$\triangle ADI$ và $\triangle AED$ có góc A chung, và $\angle ADI = \angle AED$ (cùng chắn cung DI của đường tròn tâm P)

$$\triangle ADI \sim \triangle AED (g \cdot g) \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AI}{AD} \Rightarrow AD^2 = AI \cdot AE \quad \text{không đổi}$$

Do đó $AT \cdot AG$ không đổi, mà AG không đổi nên AT không đổi $\Rightarrow$ điểm T cố định

Vậy đường tròn đường kính TP luôn đi qua 2 điểm cố định là T và G.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong phòng có 121 người, biết mỗi người quen với ít nhất 81 người khác. Chứng minh rằng trong phòng phải có 4 người từng đôi một quen nhau.

Xét A là một người bất kì trong phòng chứa 121 người đó suy ra A quen với ít nhất 81 người khác. Ta mời tất cả các người không quen A ra khỏi phòng thì số người được mời ra nhiều nhất là $120 - 81 = 39$ (người). Khi đó trong phòng còn chỉ A và 81 người quen A, tức là còn lại trong phòng có ít nhất 82 người.

Gọi B là một người khác A là 1 người trong phòng chứa 82 người. Ta mời tất cả những người không quen B ra khỏi phòng suy ra số người trong phòng còn lại ít nhất là $82 - 38 = 43$ (người). Gọi C là một người khác 2 người A và B trong 43 người còn lại. Ta mời tất cả những người không quen C ra khỏi phòng suy ra số người còn lại ít nhất ở trong phòng là $43 - 39 = 4$ (người). Tức là trong phòng có ít nhất 4 người đôi 1 quen nhau.

THỪA THIÊN HUẾ
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

NĂM HỌC: 2024-2025
Môn: TOÁN
Thời gian làm bài: 120 phút
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1:

a) Rút gọn biểu thức
$$P = \frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1$$

b) Cho a, b, c là các số thực sao cho $a + b + c = 2$ và $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Tính giá trị của biểu thức
$$Q = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}.$$

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho n là số nguyên dương và $3^{n+1} - n^2$ chia hết cho 2. Chứng minh rằng $3^{n+1} - n^2$ chia hết cho 8.

b) Xác định tất cả các cặp số (a; b) với a, b nguyên dương sao cho phương trình $ax^2 - bx + 2a + 3 = 0$ (với x là ẩn số) có hai nghiệm nguyên dương phân biệt.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Chứng tỏ rằng không tồn tại cặp số nguyên dương (x; y) sao cho $x + 1 = 4y$.

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3abc$. Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq 3 \text{ và } \frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{c+1} + \frac{c^2}{a+1} \geq \frac{3}{2}.$$

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; \dots; 20\}$ gồm 20 số tự nhiên từ 1 đến 20. Một tập hợp 4 chỉ chứa các phần tử thuộc X được gọi là “tập tốt” nếu không tồn tại hai phần tử a, b thuộc A sao cho $a < b$ và b chia hết cho a.

a) Hãy tìm một “tập tốt có đúng 10 phần tử.

b) Gọi A là một “tập tốt” bất kỳ có đúng 10 phần tử. Chứng minh rằng với mọi số nhiên m lẻ và $m < 20$, luôn tồn tại a thuộc A sao cho a chia hết cho m.

Câu 5. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O, có đường cao AD và trung tuyến AM. Kẻ đường kính AE, tia EM cắt AD tại H và cắt (O) tại F ($F \neq E$).

a) Chứng minh M là trung điểm EH và $BC^2 = 4ME.MF$.

b) Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác FBH.

c) Chứng minh tứ giác AFDM nội tiếp và $\angle BFD = \angle MAC$.

ĐÁP ÁN

Câu 1:

$$P = \frac{2x+1+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

a) Ta có:

$$\text{Hay } P = \frac{2x+1+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{2x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}.$$

$$\text{Vậy } P = \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$$

$$\text{b) Do } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1 \text{ nên } \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 = 4$$

$$\text{Hay } (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) = 4.$$

$$\text{Mà } a+b+c=2 \text{ suy ra } Q = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} = 2.$$

Câu 2:

a) Do $3^{n+1} - n^2$ chia hết cho 2 nên n là số lẻ

Khi đó $n^2 \equiv 1 \pmod{8}, 3^{n+1} \equiv 1 \pmod{8}$ (do n + 1 là số chẵn)

Vậy $3^{n+1} - n^2$ chia hết cho 8.

$$\text{b) Từ giả thiết suy ra } P = \frac{2a+3}{a} \in \mathbb{Z} \text{ hay } a \text{ là ước nguyên dương của } 3.$$

Nếu a = 1 khi đó P = 5 = 1.5 suy ra b = 6.

Nếu a = 3 khi đó P = 3 = 1.3 suy ra b = 12.

Câu 3:

$$\text{a) từ giả thiết suy ra } x^3 = (2y-1)(2y+1)$$

Do $2y-1$ và $2y+1$ là hai số lẻ liên tiếp nên nguyên tố cùng nhau

$$\text{Hay tồn tại } a, b \in \mathbb{N}^* \text{ và } b > a \text{ sao cho } \begin{cases} 2y-1 = a^3 \\ 2y+1 = b^3 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } b^3 - a^3 = 2 \Rightarrow (b-a)(b^2 + ab + a^2) = 2$$

Mà $b^2 + ab + a^2 > 3$ nên $b-a \notin \mathbb{N}$ vô lí

Hay ta có điều phải chứng minh.

b) Ta có: $3abc = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt{a^2 b^2 c^2}$ suy ra $abc \geq 1$

Mà $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ nên $a+b+c \geq 3$

Ta có: $\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{c+1} + \frac{c^2}{a+1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3}.$

Do $a+b+c \geq 3$ nên $\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3} \geq \frac{3(a+b+c)}{a+b+c+3} \geq \frac{3}{2}$

$$\mathbf{V}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{y} \frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{c+1} + \frac{c^2}{a+1} \geq \frac{3}{2}.$$

Câu 4:

a) Một tập tốt có đúng 10 phần tử là: $\{11; 12; \dots; 20\}$

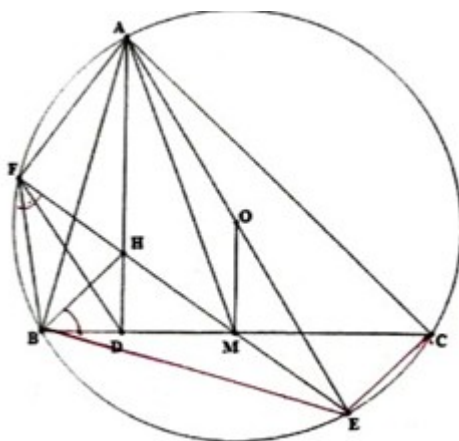
b) Xét a_i với $i = \overline{1, 10}$ là 10 phần tử thuộc A, khi đó a_i luôn biểu diễn dưới dạng $a_i = 2^{s_i} \cdot m_i; s_i \in N, m_i$ lẻ.

Do $a_i \in X \Rightarrow m_i \in T = \{1; 3; 5; \dots; 19\}$ tập T này có đúng 10 phần tử

Do A là tập tốt nên các số m_i là đôi một khác nhau, tức là với mọi m lẻ và $m < 20$ luôn tồn tại $m_i = m$

Hay a_i chia hết cho m .

Câu 5:



a) ta có: $OM \parallel AH$ mà O là trung điểm AE nên M là trung điểm HE

Mà FBEC nội tiếp nên $ME.MF = MC.MB$

Hay $BC^2 = 4.ME.MF$

b) Ta có M là trung điểm EH và $ME.MF = MC.MB$

Nên $MB^2 = MH.MF$

Suy ra tam giác MHB đồng dạng với tam giác MBF hay $\angle MBH = \angle MFB$

Vậy BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác FBH

c) Ta có tam giác AFM vuông tại F nên tứ giác AFDM nội tiếp

Suy ra $\angle AFD = \angle AMC$

Mà tứ giác AFBC nội tiếp nên $\angle AFB + \angle ACM = 180^\circ$

Hay $\angle AMC + \angle BFD + \angle ACM = 180^\circ$

Vậy $\angle BFD = \angle MAC$

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÌNH ĐỊNH**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HSG CẤP TỈNH
LỚP 9 THCS**

KHÓA NGÀY 18 – 9 – 2024

Môn thi: TOÁN

Thời gian: 150 phút

(Không kể thời gian giao đề)

Bài 1:

1. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a^{2021} + b^{2021} = a^{2022} + b^{2022} = a^{2023} + b^{2023}$.

Tính tổng $S = a^{2024} + b^{2024}$.

2. Cho phương trình $x^2 - (2m + 5)x + 3m + 4 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các số nguyên m để phương trình có nghiệm nguyên.

Bài 2:

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2\sqrt{y} + x\sqrt{y} - 2 = x^2 + x - 2\sqrt{y} \\ \sqrt{3xy - y^2 - 1} = 2x - y - 1 \end{cases}; (x, y \in \mathbb{R})$$

2. Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b-c)}{c(a+c)} + \frac{b(c-a)}{a(b+a)} + \frac{c(a-b)}{b(c+b)} \geq 0.$$

Bài 3:

Tìm tất cả các nghiệm nguyên x, y của phương trình:

$$3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 8 = 0.$$

Bài 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), tia phân giác trong AD (D thuộc cạnh BC) cắt đường tròn (O) tại E khác A. Đường tròn đường kính DE cắt lại đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA. Vẽ các đường cao AK, CL của tam giác ABC, hai đường thẳng KL, MN cắt nhau tại T. Chứng minh rằng:

1. Bốn điểm K,T,C,N cùng thuộc một đường tròn và $\widehat{PAB} = \widehat{MAC}$.

2. Ba điểm A, T, F thẳng hàng.

Bài 5. (1,5 điểm)

Người ta viết lên bảng dãy số $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2024}$. Mỗi lần xóa đi hai số bất kì x,y trên bảng và viết thêm số $x + y + xy$. Sau một số lần thực hiện như vậy thì trên bảng còn lại một số.

Tìm số còn lại đó.

ĐÁP SỐ

Bài 1:

1. Với a, b > 0

Đặt $a^{2021} + b^{2021} = a^{2022} + b^{2022} = a^{2023} + b^{2023} = x$. Ta có $x > 0$

$$\text{Và } (a^{2022} + b^{2022})(a + b) = (a^{2021} + b^{2021}) + ab(a^{2021} + b^{2021})$$

$$\Rightarrow x(a + b) = x + abx$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Do $x > 0$ nên $a + b = 1 + ab$

Với a = 1 thay vào (I) thì $1^{2021} + b^{2021} = 1^{2022} + b^{2022} = 1^{2023} + b^{2023}$

$$\Rightarrow b^{2021} = b^{2022} = b^{2023} \text{ nên } \begin{cases} b = 0 \\ b = 1 \end{cases} \text{ mà } b > 0 \text{ nên } b = 1.$$

Tương tự với b = 1 thì a = 1.

Tóm lại a = b = 1.

Với a = b = 1 thì $S = a^{2024} + b^{2024} = 1^{2024} + 1^{2024} = 2$

2. Trước hết $\Delta = (2m + 5)^2 - 4(3m + 4) = 4(m + 1)^2 + 5 > 0, \forall m$.

Do đó phương trình luôn có nghiệm với mọi m

Giả sử tồn tại m = a (a thuộc Z) sao cho phương trình có nghiệm x = b (b thuộc Z)

$$\text{Khi đó: } b^2 - (2a + 5)b + 3a + 4 = 0 \Leftrightarrow b^2 - 2ab - 5b + 3a + 4 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{b^2 - 5b + 4}{2b - 3}$$

Mà b thuộc Z nên

$$\Rightarrow 4a = 2b - 7 - \frac{5}{2b - 3}$$

Do a thuộc Z nên $4a$ thuộc Z

Khi đó $2b - 3 \in U(5)$

$2b - 3$	-5	-1	1	5
b	-1	1	2	4
$4a$	-8	0	-8	0
a	-2	0	-2	0

Vậy các cặp số (a, b) cần tìm là $(-2; -1)$, $(0, 1)$, và $(-2, 2)$, $(0; 4)$

Tóm lại các số nguyên m cần tìm để phương trình có nghiệm nguyên là $m = -2$, $m = 0$.

Bài 2:

1. Với $x, y \in R$ hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + x + 2)(\sqrt{y} - 1) = 0 \\ \sqrt{3xy - y^2 - 1} = 2x - y - 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} - 1 = 0 \\ \sqrt{3xy - y^2 - 1} = 2x - y - 1 \end{cases}$$

(Do $4(x^2 + x + 2) = (2x + 1)^2 + 7 > 0; \forall x$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \sqrt{3x - 2} = 2x - 2 \end{cases} (I)$$

$$\sqrt{3x - 2} = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x - 2 = 4x^2 - 8x + 4 \end{cases}$$

Xét phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x^2 - 11x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 2 \text{ (thỏa mãn)}; x = \frac{3}{4} \text{ (không thỏa mãn)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Tóm lại hệ có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (2; 1)$

2. Với $a, b, c > 0$ ta có $\frac{a(b-c)}{c(a+c)} + \frac{b(c-a)}{a(b+a)} + \frac{c(a-b)}{b(c+b)} \geq 0$ trở thành

$$a^2b(a+b)(b^2-c^2) + b^2c(b+c)(c^2-a^2) + c^2a(c+a)(a^2-b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 + a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 - (a^3bc^2 + b^3ca^2 + c^3ab^2) - 3a^2b^2c^2 \geq 0 (*)$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$a^3b^3 + a^3b^3 + b^3c^3 = b^3(a^3 + a^3 + c^3) \geq b^3 \cdot 3\sqrt[3]{a^3 \cdot a^3 \cdot c^3} = 3a^2b^3c(1)$$

Chứng minh tương tự, ta có $b^3c^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geq 3ab^3c^3$ (2)

Và $a^3b^3 + c^3a^3 + c^3a^3 \geq 3a^3bc^2$ (3)

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta có:

$$\begin{aligned} a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 &\geq a^3bc^2 + b^3ca^2 + c^3ab^2 \\ \Rightarrow a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 - (a^3bc^2 + b^3ca^2 + c^3ab^2) &\geq 0(I) \end{aligned}$$

Mặt khác, ta cũng có:

$$\begin{aligned} a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 &\geq 3\sqrt{a^2b^4b^2c^4c^2a^4} = 3a^2b^2c^2 \\ \Rightarrow a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 &\geq 3a^2b^2c^2 \\ \Rightarrow a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 - 3a^2b^2c^2 &\geq 0(II) \end{aligned}$$

Cộng vế với vế của (I) với (II) ta được:

$$\Leftrightarrow a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 + a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 - (a^3bc^2 + b^3ca^2 + c^3ab^2) - 3a^2b^2c^2 \geq 0$$

Vậy (*) luôn đúng

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3b^3 = b^3c^3 = c^3a^3 \\ a^2b^4 = b^2c^4 = c^2a^4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$$

Dấu “=” xảy ra

Bài 3:

Với $x, y \in \mathbb{Z}$ ta có $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 8 = 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 4x^2 - [(x+y)^2 + 2(x+y) + 1] &= -9 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - (x+y+1)^2 &= -9 \\ \Leftrightarrow (-x+y+1)(3x+y+1) &= 9(t) \end{aligned}$$

Xét các trường hợp:

$$1) \begin{cases} -x+y+1=9 \\ 3x+y+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -x+y+1=-9 \\ 3x+y+1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-8 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} -x+y+1=3 \\ 3x+y+1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} -x+y+1=-3 \\ 3x+y+1=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-4 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} -x + y + 1 = -1 \\ 3x + y + 1 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} -x + y + 1 = 1 \\ 3x + y + 1 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy các cặp số nguyên cần tìm là: $\{(-2; 6), (2; -8), (0; 2), (0; -4), (-2; -4), (2; 2)\}$

Bài 4:



1. Do $AK \perp BC, CL \perp AB$ (do AK, CL là đường cao của tam giác ABC)

Nên $\angle ALC = \angle AKC = 90^\circ$

Do đó ALKC là tứ giác nội tiếp

Do đó $\angle BLT = \angle ACK$ (do cùng bù với $\angle ALK$)

Hay $\angle BLT = \angle NCK$ (1)

Do M, N là trung điểm của BC, CA nên MN là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow MN \parallel AB$

Do đó $\angle BLT = \angle NTK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle TKN = \angle NCK$ (3) nên KNCT là tứ giác nội tiếp

Vì NL là trung tuyến của tam giác vuông ALC nên $LN = NC = NA$

Vì $MN \parallel AB$; $AB \perp CL \Rightarrow MN \perp CL$

Xét tam giác NCL có MN là đường cao nên MN cũng là đường trung trực

$\Rightarrow \angle MLN = \angle NCK$

Kết hợp (3) ta được $\angle MLN = \angle NTK$

Do đó: $\triangle MNL \sim \triangle LNT(g.g)$

Do đó: $\frac{MN}{LN} = \frac{LN}{NT}$ mà $LN = NA$ nên $\frac{MN}{NA} = \frac{NA}{NT}$

Kết hợp $\square_{AMN} = \square_{AMT}$

Do đó $\triangle MNA \sim \triangle ANT(c.g.c)$

$\Rightarrow \square_{MAC} = \square_{NTA}(4)$

Mặt khác $\square_{TAB} = \square_{NTA}$ (5) do $MN \parallel AB$

Từ (4) và (5) suy ra $\square_{TAB} = \square_{MAC}$

2. theo câu 1) $\square_{BAE} = \square_{CAE}$

Do đó $\square_{BE} = \square_{CE} \Rightarrow BE = CE$

Nên O, M, E thẳng hàng (cùng thuộc trung trực của BC)

Kẻ đường kính EU của đường tròn (O)

Gọi V là tâm của đường tròn đường kính DE

Ta có: $\square_{DFE} = 90^\circ$

Và $\square_{FDE} = 90^\circ \Rightarrow DF \perp FE; UF \perp FE \Rightarrow U, D, F$ thẳng hàng

Xét đường tròn (O) có $\square_{PAE} = \square_{PUE}$ (6)

Ta có: $\square_{DAU} = 90^\circ, \square_{DMU} = 90^\circ$ do đó tứ giác AUDM nội tiếp

$\Rightarrow \square_{MUD} = \square_{MAD}$ (7)

Theo câu 1) $\square_{BAT} = \square_{MAC}$ mà $\square_{BAE} = \square_{CAE} \Rightarrow \square_{EAT} = \square_{MAD}$ (8)

Từ (6), (7), (8) ta được $\square_{PAE} = \square_{PAE}$

Lại thuộc cùng nửa mặt phẳng bờ AE nên FA trùng FT

Do đó ba điểm A, T, F thẳng hàng.

Bài 5:

Xét dãy số: $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{n}$

Ta thấy:

$$\left(\frac{1}{1}+1\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{4}+1\right)\dots\left(\frac{1}{n-1}+1\right)\left(\frac{1}{n}+1\right)$$

$$= \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= n+1$$

Đặt

$$S_n = \left(\frac{1}{1}+1\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)\dots\left(\frac{1}{n-1}+1\right)\left(\frac{1}{n}+1\right)$$

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN**

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 9 CẤP TỈNH

Năm học: 2024 – 2025

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 150 phút

(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1:

Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+7}{x-4\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$$

với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$.

a) Rút gọn và tính giá trị của biểu thức A khi $x = 7 - 4\sqrt{3}$

$$\frac{1}{A}$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{1}{A}$.

Câu 2:

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm M(3; 5). Lập phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 30 (đvdt)

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn

$$y^2(x-4)^2 - x^3 + 10x^2 - 32x + 14 = 0.$$

Câu 3:

a) Giải phương trình: $3\sqrt{x-1} - \sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 2x - 3 = 5x - 3$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{xy-2x+y-2} + x+5 = 2y + \sqrt{y-2} \\ xy+3x-6y=18 \end{cases}$$

b) Giải hệ phương trình:

Câu 4:

Cho tam giác nhọn ABC có H, G lần lượt là trực tâm, trọng tâm và HG song song với BC. Tính $\tan B \cdot \tan C$.

Câu 5:

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy điểm H cố định thuộc đoạn thẳng OA (H không trùng với O và A). Đường thẳng vuông góc với AB tại H cắt nửa đường tròn tâm O tại C. Gọi D là điểm đối xứng với H qua C; I, J lần lượt là trung điểm của CH và DH.

a) Chứng minh hai tam giác CHJ và HBI đồng dạng.

b) Gọi Bx là tia tiếp tuyến của nửa đường tròn tâm O. Lấy điểm E di động trên Bx (E không trùng với B). Đường thẳng qua H vuông góc với AE cắt đường thẳng BE tại F. Chứng minh đường tròn đường kính EF luôn đi qua hai điểm cố định khi E di động trên tia Bx.

Câu 6 (2,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = 12(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{4(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} + 2024.$$

ĐÁP ÁN

Câu 1:

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+7}{x-4\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) + \sqrt{x}+7}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)} : \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{x-9-x+1+\sqrt{x}+7}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)} \cdot (\sqrt{x}+1) \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)} \cdot (\sqrt{x}+1) \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

Vậy với $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$.

Ta có: $x = 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 - \sqrt{3}$

Thay $\sqrt{x} = 2 - \sqrt{3}$ vào biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ ta được:

$$A = \frac{2 - \sqrt{3} + 1}{2 - \sqrt{3} - 3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{-1 - \sqrt{3}} = 3 - 2\sqrt{3}$$

Vậy $A = 3 - 2\sqrt{3}$ tại $x = 7 - 4\sqrt{3}$

b) Ta có:

$$\frac{1}{A} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{4}{\sqrt{x}+1}$$

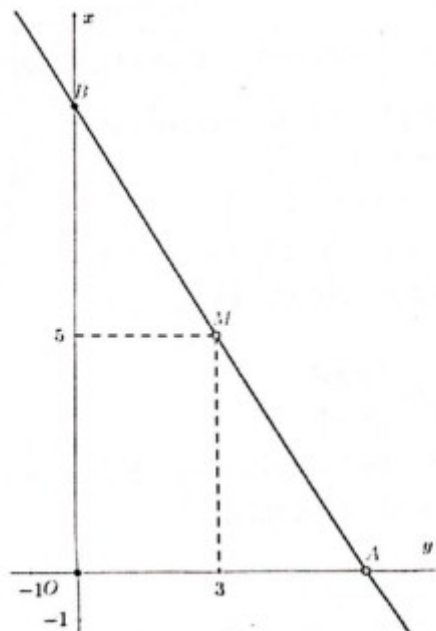
Vì $\sqrt{x}+1 \geq 1$ nên $\frac{4}{\sqrt{x}+1} \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{A} = 1 - \frac{4}{\sqrt{x}+1} \geq 1 - 4 = -3.$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là -3 khi $x = 0$.

Câu 2:

a)



Gọi (d): $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là đường thẳng đi qua M và các tia Ox, Oy tại A, B.

Vì (d) cắt tia Ox tại A nên A có hoành độ dương, tọa độ điểm A là $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$

$$\Rightarrow OA = \left| -\frac{b}{a} \right| = \frac{b}{a} \quad (1)$$

Vì (d) cắt tia Oy tại B nên B có tung độ dương, tọa độ điểm B là (0; b)

$$\Rightarrow OB = |b| = b \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $a < 0$, $b > 0$

Vì (d) đi qua M(3; 5) nên $3a + b = 5$ hay $b = 5 - 3a$ (*)

Vì diện tích tam giác OAB bằng 30 (đvdt) nên ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} OA \cdot OB = 30 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{-b}{a} \cdot b = 30 \Leftrightarrow b^2 = -60a \Leftrightarrow (5 - 3a)^2 = -60a \\ &\Leftrightarrow (3a + 5)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$a = -\frac{5}{3} \quad b = 5 - 3\left(-\frac{5}{3}\right) = 10.$$

Thay vào (*) ta được:

$$(d): y = -\frac{5}{3}x + 10$$

Vậy là đường thẳng cần tìm.

b) Ta có:

$$\begin{aligned} y^2(x-4)^2 - x^3 + 10x^2 - 32x + 14 &= 0 \\ \Rightarrow y^2(x-4)^2 &= x^3 - 10x^2 + 32x - 14 \quad (1) \end{aligned}$$

Với $x = 4$ thì không có giá trị y thỏa mãn

Với $x \neq 4$ thì ta có:

$$(1) \Rightarrow y^2 = \frac{x^3 - 10x^2 + 32x - 14}{(x-4)^2} = \frac{(x^3 - 8x^2 + 16x) - (2x^2 - 16x + 32)}{(x-4)^2} = x - 2 + \frac{18}{(x-4)^2} \text{ Vì}$$

$$x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{18}{(x-4)^2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (x-4)^2 \in U_{18} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 18\}$$

Mà $(x-4)^2$ là số chính phương nên $(x-4)^2 \in \{1; 9\}$

$$(x-4)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=1 \\ x-4=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=3 \end{cases}$$

- TH1:

Với $x=5$ thì $y^2 = 21 \Rightarrow y = \pm\sqrt{21}$ (loại vì $y \in \mathbb{Z}$)

Với $x=3$ thì $y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$ (thỏa mãn)

Vậy $(x, y) \in \{(1, 1); (1, -1)\}$

Câu 3:

$$a) 3\sqrt{x-1} - \sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 2x - 3 = 5x - 3 \quad (1)$$

ĐKXĐ: $x \geq 1$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{x-1} = a \\ \sqrt{x+3} = b \end{cases} (a, b \geq 0) \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 3} = ab$$

$$\text{Ta có: } 5x - 3 = \frac{9}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(x+3) = \frac{9}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

Phương trình (1) trở thành:

$$3a - b + 3ab = \frac{9}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

$$\Leftrightarrow 6a - 2b + 6ab = 9a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow (3a - b)^2 - 2(3a - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3a - b)(3a - b - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = b \\ 3a = b + 2 \end{cases}$$

TH1: $3a = b$ tức là

$$3\sqrt{x-1} = \sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow 9x - 9 = x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (TM)}$$

TH2: $3a = b + 2$ tức là

$$3\sqrt{x-1} = \sqrt{x+3} + 2$$

$$\Leftrightarrow 9x - 9 = x + 7 + 4\sqrt{x+3} + 3$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4 = \sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2 - 16x + 16 = x + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2 - 17x + 13 = 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{3}{2}$ và $x = \frac{13}{4}$

b) ĐK $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 2 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{xy-2x+y-2} + x+5 = 2y + \sqrt{y-2} \\ \frac{xy+3x-6y-18}{x^2-6x+12} = (y-3)(\sqrt{x+3}-3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)(y-2)} + x+5 = 2y + \sqrt{y-2} \quad (1) \\ \frac{(y+3)(x-6)}{x^2-6x+12} = (y-3)(\sqrt{x+3}-3) \quad (2) \end{cases}$$

+ Giải phương trình (1):

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} = a (a \geq 0) \Rightarrow x = a^2 - 1 \\ \sqrt{y-2} = b (b \geq 0) \Rightarrow y = b^2 + 2 \end{cases}$$

Đặt

Khi đó pt (1) trở thành:

$$\begin{aligned} a + ab + a^2 + 4 &= 2(b^2 + 2) + b \\ \Leftrightarrow a^2 - 2b^2 + a - b + ab &= 0 \\ \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (a - b) + (ab - b^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - b)(a + 2b + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a - b = 0 & \text{ (do } a + 2b + 1 > 1 > 0) \\ \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{y-2} &\Leftrightarrow y = x + 3 \end{aligned}$$

+ Thay $y = x + 3$ vào phương trình (2) ta được:

$$\begin{aligned} \frac{(x+6)(x-6)}{x^2-6x+12} &= x(\sqrt{x+3}-3) \\ \Leftrightarrow \frac{(x+6)(x-6)}{x^2-6x+12} &= \frac{x(\sqrt{x+3}-3)(\sqrt{x+3}+3)}{\sqrt{x+3}+3} \\ \Leftrightarrow \frac{(x+6)(x-6)}{x^2-6x+12} &= \frac{x(x-6)}{\sqrt{x+3}+3} \\ \Leftrightarrow (x-6) \left(\frac{x+6}{x^2-6x+12} - \frac{x}{\sqrt{x+3}+3} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-6=0 \\ \frac{x+6}{x^2-6x+12} - \frac{x}{\sqrt{x+3}+3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \text{ (TMĐK)} \\ \frac{x+6}{x^2-6x+12} - \frac{x}{\sqrt{x+3}+3} = 0 \end{cases}$$

+ Giải phương trình (3):

$$(3) \Rightarrow (x+6)(\sqrt{x+3}+3) = x(x^2-6x+12)$$

$$\Leftrightarrow [(\sqrt{x+3})^2+3](\sqrt{x+3}+3) = [(x-3)+3][(x-3)^2+3]$$

Đặt $\sqrt{x+3} = c (c \geq 0); x-3 = d$

Khi đó ta có pt:

$$(c^2+3)(c+3) = (d+3)(d^2+3)$$

$$\Leftrightarrow c^3 + 3c^2 + 3c + 9 = d^3 + 3d^2 + 3d + 9$$

$$\Leftrightarrow c^3 + 3c^2 + 3c + 1 = d^3 + 3d^2 + 3d + 1$$

$$\Leftrightarrow (c+1)^3 = (d+1)^3$$

$$\Leftrightarrow c+1 = d+1 \Leftrightarrow c = d$$

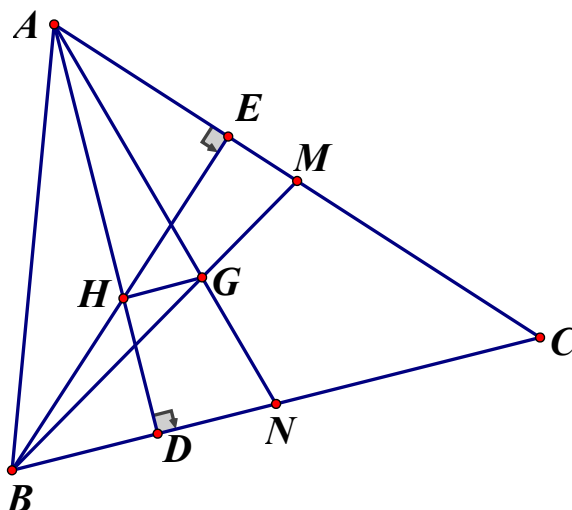
$$\Rightarrow \sqrt{x+3} = x-3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x+3 = x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2-7x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ (x-1)(x-6)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x=1 \text{ (loại)} \\ x=6 \text{ (TMĐK)} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=6 \Rightarrow y=9 \text{ (TM)}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x, y) = (6; 9)$

Câu 4:



Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $AM = 3GM$

$$\frac{AD}{HD} = \frac{AM}{GM} = 3$$

Vì $HG \parallel BC$, áp dụng định lý Thales vào tam giác ADM có

Ta có:

$$\begin{cases} \angle HBC + \angle BHD = 90^\circ \\ \angle HBC + \angle ACB = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle BHD = \angle ACB \Rightarrow \tan \angle ACB = \tan \angle BHD = \frac{BD}{HD}$$

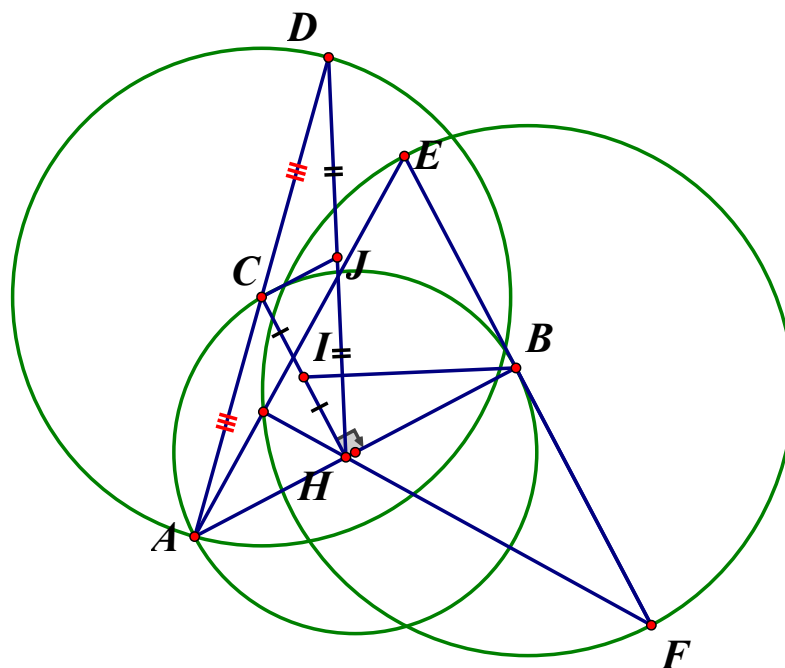
$$\tan \angle ABC = \frac{AD}{BD}$$

Lại có:

$$\tan \angle ABC \cdot \tan \angle ACB = \frac{AD}{HD} = 3$$

Từ đó, ta có

Câu 5:



a) Vì D là điểm đối xứng với A qua C nên $CA = CD$

Xét tam giác DAH có:

$$\left. \begin{matrix} AC = CD \\ DJ = IH \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{CJ là đường trung bình của tam giác DAH}$$

$$\Rightarrow CJ \parallel AH \text{ và } CJ = \frac{1}{2} AH$$

$$\text{Mà } AH \perp CH \Rightarrow CJ \perp CH \Rightarrow \angle HCJ = 90^\circ$$

Vì $\angle ACB$ nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\angle ACB = 90^\circ$

Áp dụng hệ thức cạnh và đường cao vào tam giác ACB vuông tại C có $CH \perp AB$:

$$CH^2 = AH \cdot HB$$

$$\Rightarrow \frac{CH}{AH} = \frac{HB}{CH}$$

$$\frac{CH}{CJ} = \frac{HB}{HI}$$

Mà $AH = 2CJ$, $HB = 2HI$ nên

Xét tam giác CHJ và tam giác HBI ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \angle H CJ = \angle B HI = 90^\circ \\ \frac{CH}{CJ} = \frac{HB}{HI} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta CHI \sim \Delta HBI \text{ (c.g.c)}$$

b) Gọi Q là giao điểm của HF và AE $\Rightarrow QF \perp QE$

Gọi M, N là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác QEF với AB

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \angle A Q M + \angle M Q E = 180^\circ \\ \angle M Q E + \angle A N E = \frac{1}{2} sđ \widehat{MFE} + \frac{1}{2} sđ \widehat{MCE} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A Q M = \angle A N E$$

Xét tam giác AQM và tam giác ANE có

$\angle E A N$ chung

$\Rightarrow \Delta A Q M \sim \Delta A N E$ (g - g)

$$\frac{AQ}{AB} = \frac{AH}{AE} \Rightarrow AB \cdot AH = AQ \cdot AE = AM \cdot AN$$

Mà AB, AH cố định nên AM.AN cố định

Vì $EF \perp MN$ tại B, EF là đường kính nên BM = BN

$$\Rightarrow AM \cdot AN = (AB - BM)(AB + BN) = AB^2 - BM^2$$

Vì AM.AN, AB cố định nên BM cố định

Do đó M cố định, kéo theo N cố định

Câu 6:

Ta có:

$$A = 12(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{4(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} + 2024.$$

$$A = 12(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} + 2022$$

$$A = 12(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{18}{a^2 + b^2 + c^2} + 2022$$

$$A = 2(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{18}{a^2 + b^2 + c^2} + 10(a^2 + b^2 + c^2) + 2022(1)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{18}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 2\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2) \cdot \frac{18}{a^2 + b^2 + c^2}} = 12$$

Lại có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3 \Rightarrow 10(a^2 + b^2 + c^2) \geq 30$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$A = 2(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{18}{a^2 + b^2 + c^2} + 10(a^2 + b^2 + c^2) + 2022 \geq 12 + 30 + 2022 = 2064$$

Dấu

“=” xảy ra khi

$$\begin{cases} 2(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{18}{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow a = b = c = 1 \\ 3(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)^2 \end{cases}$$

Vậy $A_{\min} = 2064$ khi $a = b = c = 1$.

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS THÀNH PHỐ LÀO CAI NĂM HỌC 2024-2025

Môn: Toán

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Ngày thi 03 tháng 12 năm 2024

(Đề thi gồm 06 câu, in trong 01 trang)

Câu 1 (5,0 điểm)

1.1. Cho biểu thức:

$$A = \left(2 - \frac{2\sqrt{xy} + 1}{1 + \sqrt{xy}} + \frac{1 + \sqrt{xy} + 2\sqrt{x}}{1 - xy} \right) : \left(\frac{\sqrt{xy} - \sqrt{x}}{\sqrt{xy} + 1} - \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}{\sqrt{xy} - 1} \right) \quad \text{với}$$

$x > 0, y > 0, xy \neq 1, (2)$

a) Rút gọn biểu thức A.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 12$$

b) Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 12$, tìm giá trị lớn nhất của A.

1.2. Xét ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{c^2 + 1}}{b} - \frac{ac}{c + \sqrt{c^2 + 1}}$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{ab} + a\sqrt{bc} + 1} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{b} + 1} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{c} + 1}$$

Câu 2 (2,0 điểm). Khởi động một giờ học, cô An cho lớp chơi trò chơi "Quay số nhận quà". Vòng quay số gồm 6 ô gắn các số tự nhiên từ 1 đến 6 (mỗi số gắn trên một ô). Người chơi được quay số 3 lần. Sau 3 lần quay, nếu kết quả nhận được có đủ các chữ số 3, 1, 2 thì sẽ được nhận quà. Hãy tính xác suất để người chơi được nhận quà.

Câu 3 (2,0 điểm). Bình khởi hành từ thành phố Lào Cai về huyện Bảo Thắng. Sau đó 5 phút, Minh và An khởi hành từ huyện Bảo Thắng về thành phố Lào Cai. Trên đường đi Bình gặp Minh rồi gặp An ở hai địa điểm cách nhau 6 km. Tính vận tốc mỗi người? Biết rằng thành phố Lào Cai cách huyện Bảo Thắng 33 km; vận tốc của Bình gấp rưỡi vận tốc

của An và bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc của Minh.

Câu 4 (2,0 điểm)

4.1. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a + b + ab = 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

4.2. Với $a, b, c > 0, 3bc - ac - ab = 1$, chứng minh rằng $a^3b^3c^3 + b^3 + c^3 \geq 3b^3c^3$.

Câu 5 (3,0 điểm)

5.1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 3$ thì $A = n^3 - n^2 - n - 2$ không phải là số nguyên tố.

5.2. Cho X, Y là các số nguyên thỏa mãn $xy(x-y) + 1$ chia hết cho 3. Chứng minh $x+y$ chia hết cho 3.

5.3. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình:

$$6x^2 - xy - 2y^2 + 4x + 2y - 7 = 0$$

Câu 6 (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AH.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Đường thẳng MK cắt các đường thẳng AH và BC thứ tự tại P và Q. Gọi F là giao điểm của AM và BC.

a) Chứng minh: $FA \cdot FM = FH \cdot FQ$.

b) Chứng minh: $\square AKP$ cân;

c) Chứng minh: $MB^2 = MK \cdot MQ$ và tứ giác QIHP nội tiếp.

d) Đường thẳng KI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại R. Gọi E là trung điểm của AR. Chứng minh ba điểm Q, I, E thẳng hàng.

-----Hết-----

GIẢI ĐỀ CHÍNH THỨC
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ LÀO CAI
NĂM HỌC 2024 - 2025

Môn: Toán

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Ngày thi 03 tháng 12 năm 2024

(Đề thi gồm 06 câu, in trong 01 trang)

Câu 1 (5,0 điểm)

$$A = \left(2 - \frac{2\sqrt{xy} + 1}{1 + \sqrt{xy}} + \frac{1 + \sqrt{xy} + 2\sqrt{x}}{1 - xy} \right) : \left(\frac{\sqrt{xy} - \sqrt{x}}{\sqrt{xy} + 1} - \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}{\sqrt{xy} - 1} \right) \quad \text{với}$$

1.1. Cho biểu thức:

$$x > 0, y > 0, xy \neq 1, \quad (2)$$

a) Rút gọn biểu thức A.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 12$$

b) Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 12$, tìm giá trị lớn nhất của A.

1.2. Xét ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{c^2 + 1}}{b} - \frac{ac}{c + \sqrt{c^2 + 1}}$. Tính giá trị biểu

$$P = \frac{1}{\sqrt{ab} + a\sqrt{bc} + 1} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{b} + 1} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{c} + 1}$$

thức

Giải

1.1

a) Rút gọn A ;

$$A = \left(\frac{2(1 - xy) - (2\sqrt{xy} + 1)(1 - \sqrt{xy}) + (1 + \sqrt{xy} + 2\sqrt{x})}{1 - xy} \right) : \left(\frac{(\sqrt{xy} - \sqrt{x})(\sqrt{xy} - 1) - (\sqrt{xy} + \sqrt{x})(\sqrt{xy} - 1)}{xy - 1} \right)$$

$$= \frac{2(1 + \sqrt{x})}{1 - xy} : \frac{2\sqrt{xy}(1 + \sqrt{x})}{1 - xy} = \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

b) Ta có

$$12 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \dots \frac{2}{\sqrt[4]{xy}} = 2 \cdot \sqrt{A}$$

$$\Rightarrow 6 \dots \sqrt{A} \Rightarrow 36 \dots A$$

$$\text{GTLN} = 36 \text{ khi } x = y = \frac{1}{36}$$

A đạt

1.2

$$\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{c^2 + 1}}{b} - \frac{ac}{c + \sqrt{c^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\sqrt{c^2 + 1} - c}{b} - \frac{ac(-c + \sqrt{c^2 + 1})}{1}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{c^2 + 1} - c \right) \left(\frac{1}{b} - ac \right) = 0$$

Do $\left(\sqrt{c^2 + 1} - c \right) > |c| - c \geq 0$ nên $\frac{1}{b} - ac = 0$ hay $abc = 1$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\sqrt{ab} + a\sqrt{bc} + 1} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{b} + 1} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{c} + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{a}\sqrt{abc} + 1} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{b} + 1} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{c} + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{a} + 1} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{b} + 1} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{c} + 1} \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{a} = x; \sqrt{b} = y; \sqrt{c} = z$. Ta có $xyz = 1$. Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{xy + x + 1} + \frac{1}{yz + y + 1} + \frac{1}{zx + z + 1} \\ &= \frac{1}{xy + x + 1} + \frac{x}{xyz + xy + x} + \frac{xy}{x^2yz + xyz + xy} = \frac{1}{xy + x + 1} + \frac{x}{1 + xy + x} + \frac{xy}{x + 1 + xy} = 1 \end{aligned}$$

Vậy $P=1$

Câu 2 (2,0 điểm). Khởi động một giờ học, cô An cho lớp chơi trò chơi "Quay số nhận quả". Vòng quay số gồm 6 ô gắn các số tự nhiên từ 1 đến 6 (mỗi số gắn trên một ô). Người chơi được quay số 3 lần. Sau 3 lần quay, nếu kết quả nhận được có đủ các chữ số 3,1,2 thì sẽ được nhận quả. Hãy tính xác suất để người chơi được nhận quả.

Giải:

Không gian mẫu có $6.6.6 = 216$ phần tử

Khả năng thuận lợi: Ta cần xác suất để kết quả 3 lần quay có chứa các chữ số 3,1 và 12 (có thể xuất hiện theo bất kỳ thứ tự nào). Tức là, ta cần 3 lần quay cho ra chính xác ba số 3,1, và 2.

Số kết quả có thể có các số 3,1, và 2 (các số này xuất hiện 3 lần trong các ô quay, và mỗi lần quay có thể là 3,1, hoặc 2).

Các kết quả có thể xảy ra theo các thứ tự khác nhau của ba số này.

Vậy số kết quả mong muốn là số cách sắp xếp ba số 3,1 số khác nhau: và 2 trong 3 lần quay, tức là số hoán vị của 3 số khác nhau :

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 12$$

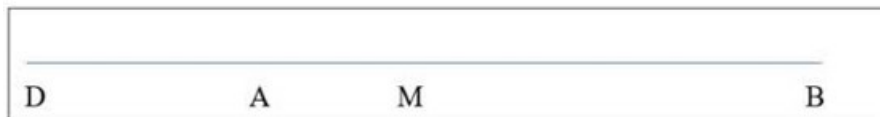
$$P = \frac{1}{36}$$

Do đó xác suất

Câu 3(2, 0 điểm). Bình khởi hành từ thành phố Lào Cai về huyện Bảo Thắng. Sau đó 5 phút, Minh và An khởi hành từ huyện Bảo Thắng về thành phố Lào Cai. Trên đường đi Bình gặp Minh rồi gặp An ở hai địa điểm cách nhau 6 km . Tính vận tốc mỗi người? Biết rằng thành phố Lào Cai cách huyện Bảo Thắng 33 km ; vận tốc của Bình gấp rưỡi vận tốc

của An và bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc của Minh.

Giải:



Gọi Lào Cai là B, Bảo Thắng là D, vị trí gặp nhau của Minh và Bình là M, của Bình và An là A

Gọi vận tốc của Bình là x km/h, vận tốc của An là $\frac{2}{3}x$ km/h, vận tốc của Minh là $\frac{3x}{2}$ km/h,

Thời gian Bình đến M gặp Minh là $y(h) (y > 0)$

$$DM = \frac{3}{2}x \left(y - \frac{1}{12} \right); BM = xy; BM + DM = 33$$

Ta có nên $20xy - x = 264$

$$DA = \frac{2}{3}x \left(y - \frac{1}{12} + \frac{6}{x} \right) = \frac{2}{3}xy - \frac{1}{18}x + 4$$

$$DM = \frac{3}{2}xy - \frac{1}{8}x$$

$$DA + 6 = DM \rightarrow \frac{2}{3}xy - \frac{1}{18}x + 4 + 6 = \frac{3}{2}xy - \frac{1}{8}x \rightarrow \frac{5}{6}xy - \frac{5}{72}x = 10$$

Ta có

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } xy = 15; x = 36$$

Do đó vận tốc của Bình là 36 km/h; vận tốc của An là 24 km/h, vận tốc của Minh là 54 km/h

Câu 4 (2,0 điểm)

4.1. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a + b + ab = 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

4.2. Với $a, b, c > 0, 3bc - ac - ab = 1$. Chứng minh rằng $a^3b^3c^3 + b^3 + c^3 \geq 3b^3c^3$.

Giải

4.1

$$\left. \begin{array}{l} 2(a^2 + b^2) \\ a^2 + 4 \cdot 4a \\ b^2 + 4 \cdot 4b \end{array} \right\} \Rightarrow 3P + 8 \cdot 4(ab + a + b) = 4 \cdot 8 \rightarrow P \geq 8$$

Cách 1:

Dấu bằng khi $a = b = 2$

Cách 2:

$$\text{Giả thiết} \Rightarrow P + 2\sqrt{2}\sqrt{P} - 16 \cdot 0 \Rightarrow (\sqrt{P} - \sqrt{8})(\sqrt{P} + 4\sqrt{2}) \cdot 0 \Rightarrow P \geq 8$$

Dấu bằng khi $a = b = 2$

$$4.2 \text{ Giả thiết cho } 3bc - ac - ab = 1 \Leftrightarrow ac + ab + 1 = 3bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{1}{bc} = 3$$

Đặt $\frac{1}{b} = x, \frac{1}{c} = y$, ta có $ax + ay + xy = 3$

$$\Rightarrow (a+x+y)^2 \dots 3(ax+ay+xy) = 9 \Rightarrow a+x+y \dots 3$$

Lại có $a^3 + x^3 + y^3 = (a^3 + 2) + (x^3 + 2) + (y^3 + 2) - 6 \dots 3(a+x+y) - 6 \dots 3$

$$\Rightarrow a^3 + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \dots 3 \text{ hay } a^3 b^3 c^3 + b^3 + c^3 \dots 3b^3 c^3$$

Cách 2:

Có $3c = ac - ab - 1 \Leftrightarrow 3 = ad + ae + de, d = \frac{1}{b}, e = \frac{1}{c}$

Cần chứng minh: $a^3 + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq 3$

Tương đương với $a^3 + d^3 + e^3 \geq 3$

Ta có $3 \leq \frac{a^3 + d^3 + 1}{3} + \frac{a^3 + e^3 + 1}{3} + \frac{d^3 + e^3 + 1}{3} \rightarrow a^3 + d^3 + e^3 \geq 3$

Suy ra điều phải chứng minh

Câu 5(3, 0 điểm)

5.1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 3$ thì $A = n^3 - n^2 - n - 2$ không phải là số nguyên tố.

5.2. Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $xy(x-y) + 1$ chia hết cho 3. Chứng minh $x+y$ chia hết cho 3.

5.3. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình:

$$6x^2 - xy - 2y^2 + 4x + 2y - 7 = 0$$

Giải

5.1 Ta có $A = n^3 - n^2 - n - 2 = (n-2)(n^2 + n + 1)$

Mà $n > 3$ nên $n-2 > 1$ và $n^2 + n + 1 > 1 \Rightarrow A$ là hợp số

$$xy(x-y) \div 3 \Rightarrow \begin{cases} x \not\equiv 0 \pmod{3} \\ y \not\equiv 0 \pmod{3} \\ x \not\equiv y \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ y \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ y \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

5.2 Do $xy(x-y) + 1 \div 3$ nên

$$\Rightarrow x+y \div 3$$

5.3 Ta có

$$6x^2 - xy - 2y^2 + 4x + 2y - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+y)(3x-2y) + 2(2x+y) - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+y)(3x-2y+2) = 7$$

$2x + y$	1	y	-1	-7
$3x - 2y + 2$	y	1	-7	-1
x	1	$13/7$	$-11/7$	$-17/7$
y	-1	$23/7$	$15/7$	$-15/7$
	Tm	(loại)	(loại)	(loại)

Vậy $(x, y) = (1; -1)$ là nghiệm duy nhất

Cách 2:

$$6x^2 + (-y + 4)x - 2y^2 + 2y - 7 = 0$$

$$\Delta = (-y + 4)^2 - 24(-2y^2 + 2y - 7) = 49y^2 - 56y + 184 = (7y - 4)^2 + 168$$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương tồn tại số tự nhiên Z mà :

$$\Delta = Z^2 \Rightarrow Z^2 - (7y - 4)^2 = 168 \Leftrightarrow (Z + 7y - 4)(Z - 7y + 4) = 168, Z > |7y - 4|$$

Do $Z + 7y - 4$ và $Z - 7y + 4$ cùng tính chẵn lẻ.

Nên ta xét các trường hợp $2 \times 84; 4 \times 42$

ta có $x = 1, y = -1$ là nghiệm duy nhất

Câu 6 (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AH . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M .

Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Đường thẳng MK cắt các đường thẳng AH và BC thứ tự tại P và Q. Gọi F là giao điểm của AM và BC.

a) Chứng minh: $FA \cdot FM = FH \cdot FQ$.

b) Chứng minh: $\triangle AKP$ cân;

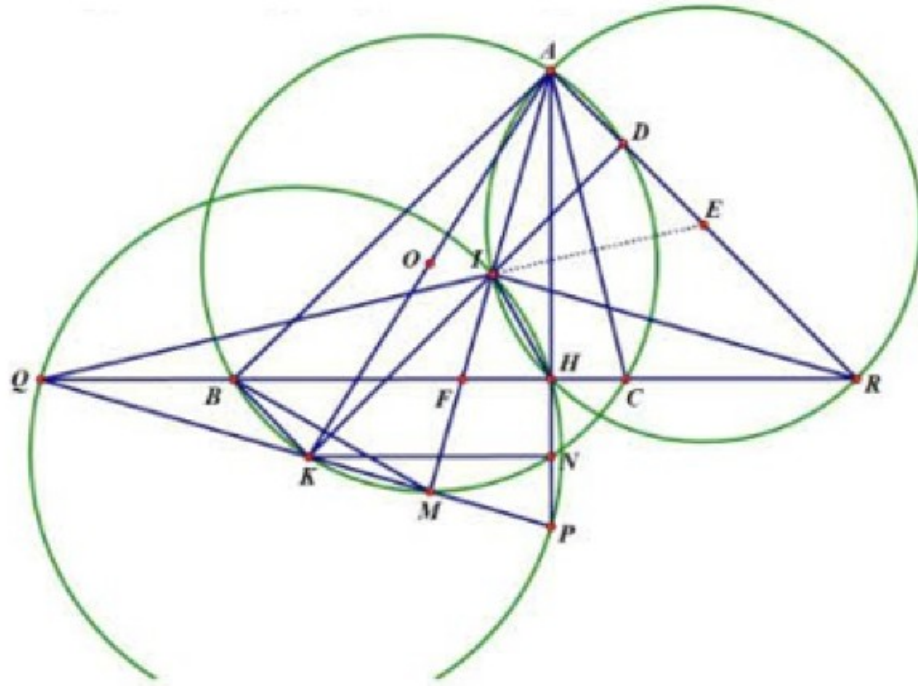
c) Chứng minh: $MB^2 = MK \cdot MQ$ và tứ giác QIHP nội tiếp.

d) Đường thẳng KI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D . Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại R . Gọi E là trung điểm của AR . Chứng minh ba điểm Q, I, E thẳng hàng.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) Do } \angle AHQ &= \angle AMQ \text{ nên } AHMQ \text{ nội tiếp} \Rightarrow \angle FAH = \angle FQM \Rightarrow \angle FAH = \angle FQM \\ \Rightarrow \frac{FA}{FH} &= \frac{FQ}{FM} \Rightarrow FA \cdot FM = FH \cdot FQ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Gọi: } N &= AH \cap (O) \Rightarrow KN \perp BC \text{ (vì } KN, BC \text{ cùng } \perp AH) \\ \Rightarrow BK &= CN \text{ mà } M \text{ là điểm chính giữa cung BC nên } MB = MC \\ \Rightarrow MK &= MN \Rightarrow \angle MAP = \angle MKN = \angle MNK = \angle MAK \\ \text{mà } AM &\perp KP \Rightarrow \triangle AKP \text{ cân tại } A. \end{aligned}$$



c) $\angle KBM = \frac{1}{2} \angle K M = \frac{1}{2} \angle M N = \angle M A N = \angle M Q B$

$\Rightarrow MB$ là tiếp tuyến của đường tròn $(QBK) \Rightarrow MB^2 = MK \cdot MQ$

*Ta có tính chất quen thuộc: $MI = MB$

Theo trên: $MI^2 = MP^2 = MK \cdot MQ = MP \cdot MQ$

$\Rightarrow \angle QIP = 90^\circ$ mà $\angle QHP = 90^\circ \Rightarrow QIHP$ nội tiếp

d) Ta có $\angle AR = 90^\circ - \angle AID = 90^\circ - \angle KIM = 90^\circ - \angle PIM$
 $= \angle IPQ = \angle IHQ$

$\Rightarrow AIHR$ nội tiếp $\Rightarrow \angle AIR = \angle AHR = 90^\circ$

Ta có $\angle AIE = \angle DAI = \angle IKM = \angle IPQ = \angle QIM$

$\Rightarrow Q, I, E$ thẳng hàng

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HSG TỈNH LỚP 9 THCS

NĂM HỌC 2024-2025

Khóa ngày 03 tháng 12 năm 2024

Môn thi: TOÁN

Thời gian: 150 phút

(không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+4} : \left(\frac{x}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right)$ với $x > 0$. Tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$.

b) Tính giá trị của biểu thức $B = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + x$ với $x = 3 - \sqrt{3}$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Nhà Huệ dự định trồng cây su hào trên một mảnh vườn được chia thành nhiều luống và mỗi luống sẽ được trồng một số lượng cây như nhau. Nếu tăng thêm 8 luống và mỗi luống trồng giảm đi 3 cây thì số cây toàn vườn giảm đi 54 cây so với dự định. Nếu giảm đi 4 luống và mỗi luống trồng nhiều hơn 2 cây thì số cây trong toàn vườn sẽ tăng thêm 32 cây so với dự định. Hỏi theo dự định nhà Huệ trồng bao nhiêu cây su hào trên mảnh vườn đó?

b) Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x-3} = x^2 - 4$

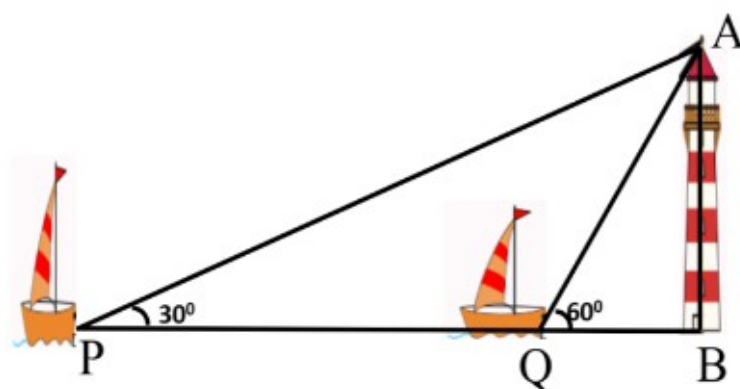
Câu 3. (1,5 điểm)

a) Từ một hộp có 30 thẻ được đánh số từ 1 đến 30, rút ngẫu nhiên hai thẻ. Tính xác suất để lấy được hai thẻ mà tích hai số trên hai thẻ là một số nguyên tố.

b) Từ tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để số lấy được có tổng các chữ số chia hết cho 4.

Câu 4. (3,5 điểm)

1) Hai con thuyền P và Q cách nhau 150m và thẳng hàng với chân B của tháp hải đăng ở trên bờ biển. Từ P và Q người ta nhìn thấy đỉnh A của tháp hải đăng dưới các góc $\angle BPA = 30^\circ$, $\angle BQA = 60^\circ$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính chiều cao AB của tháp hải đăng.



2) Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB, lấy điểm C nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A và C khác B). Gọi K là trung điểm của dây cung BC. Qua B dựng tiếp tuyến với (O) và cắt OK tại D.

a) Chứng minh rằng AC song song với OK.

b) Chứng minh rằng DC là tiếp tuyến (O).

c) Vẽ CH vuông góc với AB tại H. Gọi I là trung điểm của CH. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BI tại E. Chứng minh rằng ba điểm E, C, D thẳng hàng.

Câu 5. (1,0 điểm)

- a) Tìm số nguyên dương n để $n^{2027} + n^{2026} + 1$ là số nguyên tố.
 b) Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2025 sao cho $n^3 + 2025$ chia hết cho 6.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

- a) ĐKXD: $x > 0$

$$A = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}$$

$$A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)} - \frac{1}{3\sqrt{x}} \geq 0$$

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{3\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)} \geq 0$$

$$1 - \sqrt{x} \geq 0 \text{ (Do } 3\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2) > 0, \forall x > 0).$$

$$x \leq 1$$

Vậy $0 < x \leq 1$ thì $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$.

b) Ta có: $B = \sqrt{(x-3)^2} + x = |x-3| + x.$

Với $x = 3 - \sqrt{3}$ ta có $B = |3 - \sqrt{3} - 3| + (3 - \sqrt{3}) = 3.$

Câu 2.

- a) Gọi số luống là x (luống); ($x \in \mathbb{N}^*, x > 4$) và số cây su hào trong mỗi luống là y (cây) ($y \in \mathbb{N}^*, y > 3$)

Sau khi tăng thêm 8 luống, mỗi luống giảm đi 3 cây thì số cây toàn vườn là

$$(x+8)(y-3) \text{ (cây)}$$

Vì số cây khi đó giảm so với ban đầu là 54 cây nên ta có phương trình

$$(x+8)(y-3) = xy - 54 \quad (1)$$

Sau khi giảm đi 4 luống, mỗi luống trồng nhiều hơn 2 cây thì số cây toàn vườn là

$$(x-4)(y+2) \text{ (cây)}$$

Vì số cây khi đó nhiều hơn so với ban đầu là 32 cây nên ta có phương trình

$$(x-4)(y+2) = xy + 32 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+8)(y-3) = xy - 54 \\ (x-4)(y+2) = xy + 32 \\ xy - 3x + 8y - 24 = xy - 54 \\ xy + 2x - 4y - 8 = xy + 32 \\ \begin{cases} 3x - 8y = 30 \\ 2x - 4y = 40 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 50 \\ y = 15 \end{cases} \text{ (TMDK).} \end{cases}$$

Vậy nhà Huệ dự định trồng $50.15 = 750$ (cây su hào).

b) Điều kiện: $x \geq \frac{3}{4}$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{4x-3} = x^2 - 4$$

$$\sqrt{x+1} - 2 + \sqrt{4x-3} - 3 = x^2 - 9$$

$$\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4(x-3)}{\sqrt{4x-3}+3} = (x-3)(x+3)$$

$$(x-3) \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{4x-3}+3} - (x+3) \right) = 0$$

$$\begin{cases} x-3=0 \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{4x-3}+3} - (x+3) = 0 \end{cases}$$

TH1: $x-3=0$ hay $x=3$ (Thỏa mãn)

TH2:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{4x-3}+3} - (x+3) = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{4x-3}+3} = x+3 \quad (*)$$

Với $x \geq \frac{3}{4}$ ta có:

$$VT = \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{4x-3}+3} < \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{11}{6} < \frac{3}{4} + 3 \leq x+3 = VP$$

Phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 3$.

Câu 3.

a) Vì mỗi thẻ được đánh số khác nhau nên rút ngẫu nhiên hai thẻ thì số ghi trên hai thẻ không trùng nhau.

$$\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$$

Không gian mẫu có số phần tử là

Các số nguyên tố từ 1 đến 30 là 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Có 10 kết quả thuận lợi.

Xác suất để lấy được hai thẻ mà tích hai số trên hai thẻ là một số nguyên tố là $\frac{2}{87}$.

b) Số phần tử của không gian mẫu: 900.

Gọi số cần tìm $\overline{abc}, (a+b+c) \vdots 4$

Xét $a+b = 4k + r, r \in \{0; 1; 2; 3\}$.

TH1: $r \in \{0; 3\}$, có 3 cách chọn c

TH2: $r \in \{1; 2\}$, có 2 cách chọn c

Gọi A là tập hợp các số có dạng $4k + r, r \in \{1; 2\}$

Gọi B là tập hợp các số có dạng $4k + r, r \in \{0; 3\}$

Gọi X là biến cố “số lấy được có tổng các chữ số chia hết cho 4”

Gọi S là tập hợp các số có tổng các chữ số chia hết cho 4.

Khi đó: $|S| = 2|A| + 3|B| = 2(|A| + |B|) + |B| = 2 \cdot 9 \cdot 10 + |B| = 180 + |B|$

Tính $|B|$

Nếu $\overline{ab}$ có dạng $a + b = 4k$ thì ta có 22 số

Nếu $\overline{ab}$ có dạng $a + b = 4k + 3$ thì ta có 22 số

Suy ra: $|B| = 22 + 22 = 44$

Khi đó: $|S| = 180 + 44 = 224$ suy ra $n(X) = |S| = 224$

Xác suất để số lấy được có tổng các chữ số chia hết cho 4 là $P(X) = \frac{224}{900} = \frac{56}{225}$

Câu 4.

Trong $\triangle ABP$ có $AB = PB \cdot \tan BPA = (PQ + QB) \tan 30^\circ$.

Trong $\triangle AQP$ có $AB = QB \cdot \tan BQA = QB \cdot \tan 60^\circ$

Ta có:

$$PQ \cdot \tan 30^\circ + QB \cdot \tan 30^\circ = QB \cdot \tan 60^\circ$$

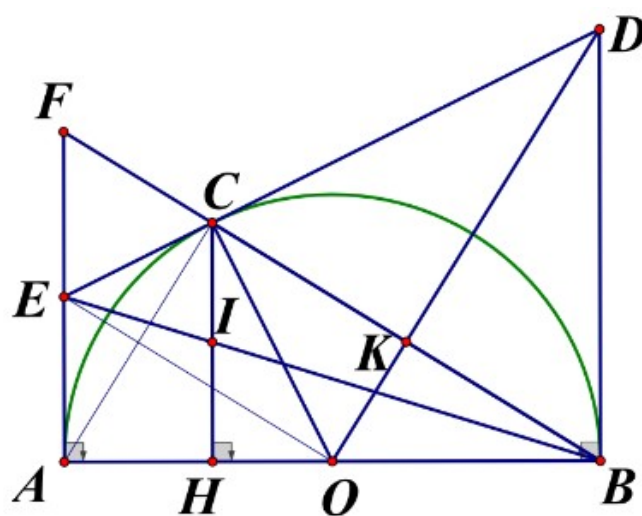
$$QB = \frac{PQ \cdot \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}.$$

$$AB = \frac{PQ \cdot \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ} \cdot \tan 60^\circ = \frac{150 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3} = 75\sqrt{3}.$$

Suy ra:

$$v_{\text{ây}} AB = 75\sqrt{3}\text{m}.$$

2.



a) Do K là trung điểm BC nên $OK \perp BC$ (1)

ΔACB có CO là đường trung tuyến và $CO = \frac{1}{2}AB$ nên ΔACB vuông tại C hay $AC \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AC \parallel OK$ (cùng vuông góc với BC)

b) Ta có: $\triangle OCK = \triangle OBK$ (c.c.c) nên $\widehat{OK} = \widehat{OK}$ hay $\widehat{OD} = \widehat{OB}$

Xét $\triangle OCD$ và $\triangle OBD$ có $OC = OB$; $\widehat{COD} = \widehat{BOD}$; OD chung

Nên $\triangle OCD = \triangle OBD$ (c.g.c) suy ra $\widehat{OCD} = \widehat{OBD}$ mà $\widehat{OBD} = 90^\circ$ (BD là tiếp tuyến) nên $\widehat{OCD} = 90^\circ$ hay $OC \perp CD$ tại C.

Vậy CD là một tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

c) Gọi F là giao điểm của BC và AE .

Ta có: $\Delta HBI \sim \Delta ABE(g.g) \Rightarrow \frac{IB}{EB} = \frac{IH}{EA}$ (3)

$$\Delta CBI \sim \Delta FBE(g.g) \Rightarrow \frac{IB}{EB} = \frac{IC}{EF} \quad (4)$$

Từ (3), (4) và $IH = IC$ (gt) suy ra $EA = EF$

Xét ΔABF có $EA = EF$, $OA = OB$

Nên OE là đường trung bình của tam giác

Suy ra: $OE \parallel BF$

Mà $AC \perp BF$ nên $AC \perp OE$

Suy ra $\square AOE = \square OCE$

Do đó: $\Delta OAE = \Delta OCE(c.g.c) \Rightarrow \square AOE = \square OCE = 90^\circ$

Khi đó: $\square OCE + \square OCD = 180^\circ$

Suy ra 3 điểm E, C, D thẳng hàng

Câu 5.

a) Ta có: $n^{2027} + n^{2026} + 1 = n^2(n^{2025} - 1) + n(n^{2025} - 1) + n^2 + n + 1$

Với $n > 1$ ta có $(n^{2025} - 1) : (n^3 - 1) : n^2 + n + 1$

Do đó: $(n^{2027} + n^{2026} + 1) : n^2 + n + 1$ và $n^{2027} + n^{2026} + 1 > n^2 + n + 1 > 1$

Nên $n^{2027} + n^{2026} + 1$ là hợp số

Với $n = 1$ thì $n^{2027} + n^{2026} + 1 = 3$ là số nguyên tố

Vậy $n = 1$ là giá trị cần tìm

b) Đặt $n = 6q + r, r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Khi đó: $n^3 + 2025$ chia hết cho 6 khi $r^3 + 3$ chia hết cho 6.

Nếu r chẵn thì $r^3 + 3$ lẻ, do đó $r^3 + 3$ không chia hết cho 6

Suy ra: $r \in \{1; 3; 5\}$

Với $r = 1$ thì $r^3 + 3 = 4$ không chia hết cho 6

Với $r = 3$ thì $r^3 + 3 = 30$ chia hết cho 6

Với $r = 5$ thì $r^3 + 3 = 128$ không chia hết cho 6

Suy ra: $n = 6q + 3$

Mà $0 \leq n \leq 2025 \Rightarrow 0 \leq q \leq 337$.

Vậy có tất cả 338 số tự nhiên n thỏa mãn đề bài.

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÁI BÌNH
ĐỀ CHÍNH THỨC**

**ĐỀ THI CHỌN HSG LỚP 9 THCS
NĂM HỌC 2024 – 2025
Môn: TOÁN HỌC
Thời gian: 150 phút
(Không kể thời gian giao đề)**

Câu 1:

1) Cho số thực $x = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 16x + 31}{x^3 - 9x^2 + 19x - 9}.$$

2) Bác An gửi tiết kiệm ngân hàng số tiền là 500 triệu đồng với kì hạn một năm. Sau một năm bác An mong muốn có số tiền cả gốc và lãi ít nhất là 530 triệu đồng. Hỏi lãi suất của ngân hàng tại thời điểm bác An gửi tiền ít nhất là bao nhiêu % trong một năm, để bác An có được số tiền như mong muốn?

Câu 2:

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: y = 2x - 2m + 1$ (m là tham số). Tìm m để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy tại hai điểm A và B sao cho ba đỉnh của tam giác OAB nằm trên một đường

tròn có bán kính bằng $5\sqrt{5}$ (với điểm O là gốc tọa độ).

2) Cho hình vuông ABCD, độ dài cạnh bằng 24cm. Trong hình vuông đó có đánh dấu 2026 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 2cm chứa ít nhất 26 điểm trong số các điểm ở trên.

Câu 3.

1) Giải phương trình $6x^4 - 4x^3 - 66x^2 + 72x + 20 = (x-1)(x^2 + 2x - 5)\sqrt{2x+5}$

$$\begin{cases} 8x^3y^3 + 6xy^3 - 5y^2 = -1 \\ 6xy^3 - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

2) Giải hệ phương trình:

Câu 4.

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$ và

$$a + b + c = 1 \text{ và } a + b > c; a + c > b; b + c > a.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a} + \frac{a}{2bc} + \frac{b}{2ca} + \frac{c}{2ab} - \frac{1}{2abc}.$$

Câu 5.

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của HC, N là trung điểm của AC, AM cắt HN tại G. Đường thẳng đi qua M vuông góc với HC và đường thẳng đi qua N vuông góc với AC cắt nhau tại K.

1) Chứng minh ΔABH đồng dạng ΔMKN và tính $\frac{GA^2 + GB^2 + GH^2}{GM^2 + GK^2 + GN^2}$.

$$3\cos A + 4\cos B + 6\cos C < \frac{29}{4}.$$

2) Chứng minh

Câu 6.

Cho tam giác đều ABC, đường tròn (O) tiếp xúc với ba cạnh AB, AC, BC lần lượt tại ba điểm D, E, F.

Điểm M thuộc đường tròn (O), tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại P, Q ($P \neq A, D; Q \neq A, E$)

1) Kẻ QH vuông góc với AP tại H. Chứng minh $2AH^2 + 2AH \cdot PH = AP \cdot AQ$ và tỷ số $\frac{PQ^2 + AP \cdot AQ}{AP^2 + AQ^2}$ không đổi.

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AP - AQ + CQ}{BP + CQ}.$$

2) Chứng minh

Câu 7:

Tìm các cặp số nguyên dương (x; y) sao cho $x^2y + x + y$ chia hết cho $xy^2 + y + 7$.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1) Ta có

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} = \sqrt{(3 + 2\sqrt{5})^2} + \sqrt[3]{(1 - \sqrt{5})^3} \\ &= 3 + 2\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} = 4 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

Suy ra: $x - 4 = \sqrt{5}$ hay $x^2 - 8x + 16 = 5$ suy ra $x^2 - 8x + 11 = 0$.

$$P = \frac{x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 16x + 31}{x^3 - 9x^2 + 19x - 9} = \frac{x^2(x^2 - 8x + 11) + 2 \cdot (x^2 - 8x + 11) + 9}{x \cdot (x^2 - 8x + 11) - (x^2 - 8x + 11) + 2} = \frac{9}{2}$$

Ta có:

$$P = \frac{3}{2}.$$

Vậy

2) Gọi số phần trăm lãi suất của ngân hàng tại thời điểm bác An gửi tiền là x (x > 0)

Số tiền lãi trong một năm của bác An khi đó là 500x (triệu đồng)

Ta có bất phương trình: $500 + 500x \geq 530$ hay $x \geq 0,06$ hay $x \geq 6\%$

Vậy lãi suất ngân hàng tại thời điểm bác An gửi tiền ít nhất là 6% thì bác An có được số tiền mong muốn.

Câu 2.

1) Gọi giao điểm của đường thẳng (d): $y = 2x - 2m + 1$ với trục Ox, Oy lần lượt là:

$$A\left(\frac{2m-1}{2}; 0\right), B(0; -2m+1).$$

$$OA = \left|\frac{2m-1}{2}\right|, OB = |-2m+1|$$

Suy ra:

Gọi I là tâm đường tròn đi qua ba đỉnh O, A, B.

Vì tam giác OAB là tam giác vuông tại O nên I là trung điểm AB

$$R = IA = IB = IO = \frac{AB}{2} = 5\sqrt{5}, \text{ suy ra } AB = 10\sqrt{5}.$$

Suy ra:

Vì ΔOAB là tam giác vuông tại O, theo định lý Pytago ta có

$$OA^2 + OB^2 = AB^2$$

$$\left| \frac{2m-1}{2} \right|^2 + |-2m+1|^2 = 500$$

$$\frac{5}{4}(2m-1)^2 = 500$$

$$(2m-1)^2 = 400$$

$$(2m-21)(2m+19) = 0$$

$$m = \frac{21}{2} \text{ hoặc } m = -\frac{19}{2}$$

Vậy $m \in \left\{ \frac{21}{2}; -\frac{19}{2} \right\}$

2) Chia hình vuông thành 81 ô vuông có cạnh $\frac{8}{3}cm$.

Theo nguyên lí Dirichlet, khi chia 2026 điểm vào 81 ô vuông thì luôn tồn tại một ô chứa ít nhất

$\left\lfloor \frac{2026}{81} \right\rfloor = 26$ điểm. Vì bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi ô vuông đó là $\frac{4\sqrt{2}}{3} < 2$. Do đó đường trong bán kính 2cm có tâm là tâm hình vuông chứa 26 điểm trên chứa toàn bộ ô vuông và chứa 26 điểm trên ta có điều phải chứng minh.

Câu 3.

$$1) 6x^4 - 4x^3 - 66x^2 + 72x + 20 = (x-1)(x^2 + 2x - 5)\sqrt{2x+5}$$

$$ĐKXĐ: x \geq -\frac{5}{2}$$

Phương trình đã cho viết lại thành:

$$(x^2 + 2x - 5)(6x^2 - 16x - 4) = (x-1)(x^2 + 2x - 5)\sqrt{2x+5}$$

$$(x^2 + 2x - 5)[(6x^2 - 16x - 4) - (x-1)\sqrt{2x+5}] = 0$$

$$x^2 + 2x - 5 = 0 \text{ hoặc } (6x^2 - 16x - 4) - (x-1)\sqrt{2x+5} = 0$$

+ TH1: $x^2 + 2x - 5 = 0$ hay $(x+1)^2 - 6 = 0$

Hay $(x+1+\sqrt{6})(x+1-\sqrt{6}) = 0$

Hay $x = -1 - \sqrt{6}$ (không thỏa mãn) hoặc $x = -1 + \sqrt{6}$ (thỏa mãn)

+ TH2: $(6x^2 - 16x - 4) - (x-1)\sqrt{2x+5} = 0$

Hay $6x^2 - 16x - 4 = (x-1)\sqrt{2x+5}$ (1)

Cách 1: Bình phương hai vế của phương trình (1) ta có

$$36x^4 - 192x^3 + 208x^2 + 128x + 16 = 2x^3 + x^2 - 8x + 5$$

$$36x^4 - 194x^3 + 207x^2 + 136x + 11 = 0$$

$$(9x^2 - 26x - 11)(4x^2 - 10x - 1) = 0$$

+ Nếu $9x^2 - 26x - 11 = 0$ thì $x = \frac{13 \pm 2\sqrt{67}}{9}$ (thỏa mãn ĐKXD)

+ Nếu $4x^2 - 10x - 1 = 0$ thì $x = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{4}$ (thỏa mãn ĐKXD)

Thử lại ta thấy $x = \frac{13 + 2\sqrt{67}}{9}$ và $x = \frac{5 - \sqrt{29}}{4}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{13 + 2\sqrt{67}}{9}$ và $x = \frac{5 - \sqrt{29}}{4}$ và $x = \sqrt{6} - 1$.

Cách 2: Đặt $a = x - 1, b = \sqrt{2x + 5} (b \geq 0)$ thì phương trình (2) trở thành

$$2.(3a^2 - b^2) = ab \text{ hay } 6a^2 - ab - 2b^2 = 0 \text{ hay } (3a - 2b)(2a + b) = 0$$

+ $3a = 2b$, tức là

$$3x - 3 = 2\sqrt{2x + 5} \text{ hay } \begin{cases} x \geq 1 \\ 9x^2 - 18x + 9 = 8x + 20 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x \geq 1 \\ 9x^2 - 26x - 11 = 0 \end{cases}$$

Suy ra: $x = \frac{13 + 2\sqrt{67}}{9}$ (thỏa mãn)

+ $b = -2a$, tức là

$$1 - x = \sqrt{2x + 5} \text{ hay } \begin{cases} x \leq 1 \\ 4x^2 - 8x + 4 = 2x + 5 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x \leq 1 \\ 4x^2 - 10x - 1 = 0 \end{cases}$$

Suy ra: $x = \frac{5 - \sqrt{29}}{4}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{13 + 2\sqrt{67}}{9}$ và $x = \frac{5 - \sqrt{29}}{4}$ và $x = \sqrt{6} - 1$.

$$\begin{cases} 8x^3 y^3 + 6xy^3 - 5y^2 = -1 \\ 6xy^3 - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

2) Xét $y = 0$, hệ phương trình vô nghiệm

Xét $y \neq 0$, chia cả hai vế của hai phương trình của hệ cho y^3 , ta được

$$\begin{cases} 8x^3 + 6x - \frac{5}{y} = \frac{-1}{y^3} \\ 6x - \frac{2}{y} = \frac{1}{y^3} \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $2x = u, \frac{1}{y} = v (v \neq 0)$, hệ phương trình (I) trên trở thành $\begin{cases} u^3 + 3u - 5v = -v^3 \\ 3u - 2v = v^3 \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} u^3 + 3u - 5v = 2v - 3u \\ 3u - 2v = v^3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} u^3 = 7v - 6u \\ v^3 = 3u - 2v \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Lấy (1) – (2) ta được $u^3 - v^3 = -9(u - v)$ hay $(u - v)(u^2 + uv + v^2 + 9) = 0$

Vì $u^2 + uv + v^2 + 9 = \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3v^2}{4} + 9 > 0$ nên $u = v$.

$$2x = \frac{1}{y}$$

Trả lại biến cũ, ta có y , thay vào phương trình (2) của (I), ta được

$$6x - 4x = 8x^3 \text{ hay } 8x^3 - 2x = 0$$

$$\text{Hay } 2x(4x^2 - 1) = 0$$

$$\text{Hay } x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2}$$

Với $x = 0$ thì không có giá trị y thỏa mãn

Với $x = \frac{1}{2}$ thì $y = 1$ (thỏa mãn)

Với $x = -\frac{1}{2}$ thì $y = -1$ (thỏa mãn)

$$(x; y) \in \left\{ \left(\frac{1}{2}; 1 \right); \left(-\frac{1}{2}; -1 \right) \right\}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm

Câu 4.

$$1 = a + b + c > a + a = 2a \text{ hay } 0 < a < \frac{1}{2}.$$

Từ giả thiết đề bài suy ra

$$0 < b, c < \frac{1}{2}.$$

Tương tự,

$$\text{Ta có: } M = \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a} + \frac{a}{2bc} + \frac{b}{2ca} + \frac{c}{2ab} - \frac{1}{2abc}$$

$$= \frac{4}{1-c} + \frac{4}{1-a} + \frac{4}{1-b} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} - \frac{(a+b+c)^2}{2abc}$$

$$= \frac{4}{1-c} + \frac{4}{1-a} + \frac{4}{1-b} - \frac{ab+bc+ca}{abc}$$

$$= \frac{4}{1-c} + \frac{4}{1-a} + \frac{4}{1-b} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$= \left(\frac{4}{1-a} - \frac{1}{a} \right) + \left(\frac{4}{1-b} - \frac{1}{b} \right) + \left(\frac{4}{1-c} - \frac{1}{c} \right)$$

$$\text{Ta chứng minh } \frac{4}{1-a} - \frac{1}{a} \leq 18a - 3 \quad (1)$$

$$\text{Hay } \frac{5a-1}{a \cdot (1-a)} - 3 \leq 18a - 6$$

$$\frac{3a^2 + 2a - 1}{a(1-a)} \leq 6(3a-1)$$

$$\frac{(3a-1)(a+1)}{a \cdot (1-a)} - 6 \cdot (3a-1) \leq 0$$

$$(3a-1) \left[\frac{a+1}{a \cdot (1-a)} - 6 \right] \leq 0$$

$$(3a-1) \cdot \frac{6a^2 - 5a + 1}{a(1-a)} \leq 0$$

$$\text{Hay } \frac{(3a-1)^2 (2a-1)}{a \cdot (1-a)} \leq 0 \quad \left(\text{đúng vì } 0 < a < \frac{1}{2} \right)$$

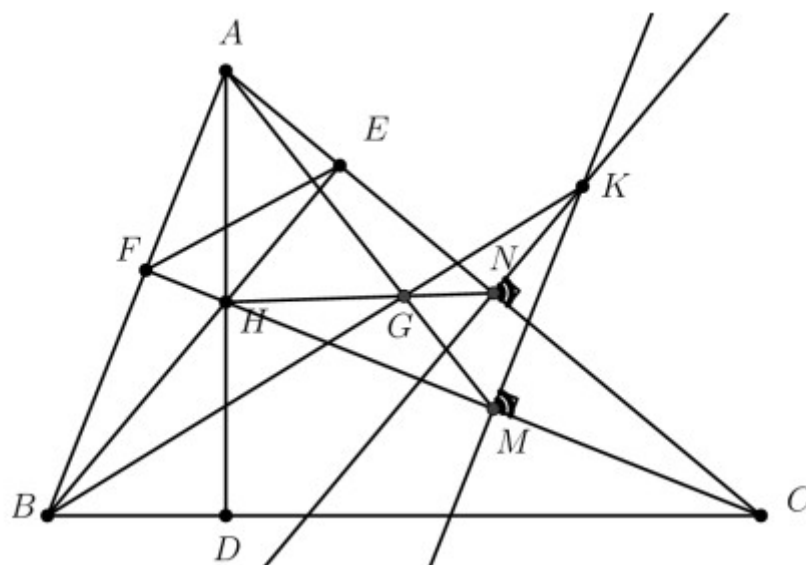
$$\text{Tương tự ta có: } \frac{4}{1-b} - \frac{1}{b} \leq 18b - 3 \quad (2) \quad \text{và} \quad \frac{4}{1-c} - \frac{1}{c} \leq 18c - 3 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra: } M \leq 18a - 3 + 18b - 3 + 18c - 3 = 18(a+b+c) - 9 = 9$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } a = b = c = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy max } M = 9 \text{ khi } a = b = c = \frac{1}{3}.$$

Câu 5.



1) Vì $KM \perp CF, AB \perp CF$ nên $KM \parallel AB$

Tương tự ta có $KN \parallel BH$ suy ra $\angle ABH = \angle NKM$

Lại có M là trung điểm của HC, N là trung điểm của AC

Nên NM là đường trung trực của $\triangle AHC$

Suy ra: $NM \parallel AH$ mà $KM \parallel AB$ nên $\angle BAH = \angle NKM$

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle MKN$ có

$$\begin{cases} \angle ABH = \angle NKM \\ \angle BAH = \angle NKM \end{cases}$$

Suy ra: $\triangle ABH \sim \triangle MKN$ (g - g)

Gọi G' là giao điểm của KB và HN

$$\frac{G'N}{G'H} = \frac{NK}{BH} = \frac{MN}{AH} = \frac{1}{2}$$

Vì $KN \parallel BH$ theo định lý Thales ta có

Suy ra: G' là trọng tâm tam giác AHC

Suy ra: $G \equiv G'$, ta có $GA = 2GM, GB = 2GK, GH = 2GN$.

$$\frac{GA^3 + GB^3 + GH^3}{GM^3 + GK^3 + GN^3} = \frac{8GM^3 + 8GK^3 + 8GN^3}{GM^3 + GK^3 + GN^3} = 8$$

2) Ta có: $a = BC = BD + DC = b \cdot \cos B + c \cdot \cos C$

$$1 = \frac{b}{a} \cdot \cos C + \frac{c}{a} \cdot \cos B$$

Suy ra:

$$1 = \frac{b}{c} \cdot \cos A + \frac{a}{c} \cdot \cos B, \quad 1 = \frac{a}{b} \cdot \cos C + \frac{c}{b} \cdot \cos A$$

Tương tự,

Suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{29}{4} &= 4 \cdot \left(\frac{b}{a} \cdot \cos C + \frac{c}{a} \cdot \cos B \right) + \frac{b}{c} \cdot \cos A + \frac{a}{c} \cdot \cos B + \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{a}{b} \cdot \cos C + \frac{c}{b} \cdot \cos A \right) \\ &= \left(\frac{b}{c} + \frac{9c}{4b} \right) \cdot \cos A + \left(\frac{4c}{a} + \frac{a}{c} \right) \cdot \cos B + \left(\frac{4b}{a} + \frac{9a}{4b} \right) \cdot \cos C \\ &\geq 3 \cdot \cos A + 4 \cdot \cos B + 6 \cdot \cos C \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{c} = \frac{9c}{4b} \\ \frac{4c}{a} = \frac{a}{c} \\ \frac{4b}{a} = \frac{9a}{4b} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 4b^2 = 9c^2 \\ 4c^2 = a^2 \\ 16b^2 = 9a^2 \end{cases}$$

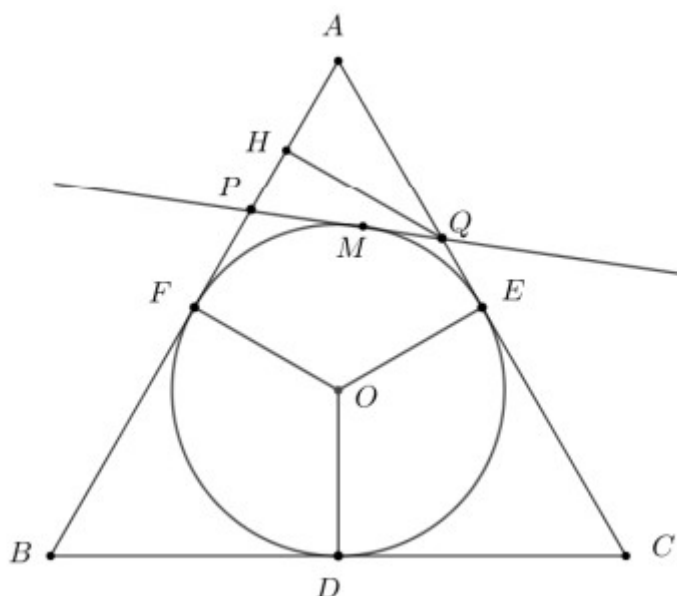
Dấu “=” xảy ra khi

(không xảy ra)

$$3 \cdot \cos A + 4 \cdot \cos B + 6 \cdot \cos C < \frac{29}{4}.$$

Do đó:

Câu 6.



1) Ta có: $2AH^2 + 2 \cdot AH \cdot PH = 2 \cdot AH \cdot (AH + PH) = 2 \cdot AH \cdot AP$

Áp dụng hệ thức cạnh và góc vào tam giác AHQ vuông tại H có

$$AH = AQ \cdot \cos A = AQ \cdot \cos 60^\circ = \frac{AQ}{2} \text{ hay } 2AH = AQ$$

Suy ra: $2 \cdot AH^2 + 2 \cdot AH \cdot PH = 2 \cdot AH \cdot AP = AP \cdot AQ$

$$PH^2 = (AP - AH)^2 = \left(AP - \frac{AQ}{2} \right)^2 = AP^2 - AP \cdot AQ + \frac{AQ^2}{4}$$

Ta có:

$$QH = AQ \cdot \sin A = AQ \cdot \sin 60^\circ = AQ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ suy ra } QH^2 = \frac{3 \cdot AQ^2}{4}$$

Lại có: $PQ^2 = PH^2 + HQ^2 = AP^2 - AP \cdot AQ + AQ^2$

Suy ra: $PQ^2 + AP \cdot AQ = AP^2 + AQ^2$

$$\frac{PQ^2 + AP \cdot AQ}{AP^2 + AQ^2} = 1$$

Do đó: (không đổi)

2) Ta có: $BP = AB - AP, CQ = AC - AQ = AB - AQ$

Lại có: $AP - AQ + CQ = AP - AQ + AB - AQ = AB + AP - 2 \cdot AQ$

$$BP + CQ = 2 \cdot AB - AP - AQ$$

Vì tam giác ABC đều có O là tâm đường tròn nội tiếp và D, E, F là tiếp điểm của (O) với BC, CA, AB nên D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

Ta có:

$$\begin{aligned} PQ &= PM + MQ = PF + QE = AF - AP + AE - AQ \\ &= 2 \cdot AF - AP - AQ = AB - AP - AQ \end{aligned}$$

Mặt khác $PQ^2 = AP^2 - AP \cdot AQ + AQ^2$

Do đó: $(AB - AP - AQ)^2 = AP^2 - AP \cdot AQ + AQ^2$

$$\begin{aligned} AB^2 + AP^2 + AQ^2 - 2 \cdot AB \cdot AP - 2 \cdot AB \cdot AQ + 2 \cdot AP \cdot AQ \\ = AP^2 - AP \cdot AQ + AQ^2 \end{aligned}$$

$$AP \cdot (2 \cdot AB - AP - AQ) = AB^2 - AP^2 + 2 \cdot AP \cdot AQ - 2 \cdot AB \cdot AQ$$

$$AP \cdot (BP + CQ) = (AB - AP) \cdot (AB + AP - 2 \cdot AQ)$$

$$AP \cdot (BP + CQ) = (AB - AP) \cdot (AP - AQ + CQ)$$

$$AP \cdot (BP + CQ) = BP \cdot (AP - AQ + CQ)$$

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AP - AQ + CQ}{BP + CQ} \quad (\text{đpcm})$$

Câu 7.

Vì $(xy^2 + y + 7) \mid (x^2y + x + y)$ nên $(xy^2 + y + 7) \mid (x^2y^2 + xy + y^2)$ (1)

Mặt khác $x^2y^2 + xy + y^2 = x(xy^2 + y + 7) + y^2 - 7x$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(xy^2 + y + 7) \mid (y^2 - 7x)$

Mà $x, y \in \mathbb{Z}^+$ nên $(xy^2 + y + 7) > (y^2 - 7x)$

Do đó: $y^2 - 7x \leq 0$

TH1: $y^2 - 7x = 0$

Đặt $x = 7k^2 (k \in \mathbb{N})$ thì $y = 7k$

Khi đó ta có
$$\begin{cases} xy^2 + y + 7 = 343k^4 + 7k + 7 \\ x^2y + x + y = 343k^5 + 7k^2 + 7k \end{cases}$$

Suy ra: $x^2y + x + y = k \cdot (xy^2 + x + y)$ (thỏa mãn)

TH2: $y^2 - 7x < 0$

Suy ra: $(xy^2 + y + 7) | (7x - y^2)$ suy ra $7x > 7x - y^2 \geq xy^2 + y + 7 > xy^2$

Suy ra: $y^2 < 7$ mà $y \in \mathbb{Z}^+$ nên $y \in \{1; 2\}$

+ Với $y = 1$ thì
$$\begin{cases} xy^2 + y + 7 = x + 8 \\ x^2y + x + y = x^2 + x + 1 \end{cases}$$

Khi đó: $(x + 8) | (x^2 + x + 1) = x(x + 8) - 7(x + 8) + 57$

Suy ra: $(x + 8) | 57$ nên $x + 8 \in U(57)$ mà $x + 8 > 8$ nên $x + 8 \in \{19; 57\}$

Do đó: $x \in \{11; 49\}$

+ Với $y = 2$ thì
$$\begin{cases} xy^2 + y + 7 = 4x + 9 \\ x^2y + x + y = 2x^2 + x + 2 \end{cases}$$

Khi đó: $(4x + 9) | (2x^2 + x + 2)$

Suy ra: $(4x + 9) | (16x^2 + 8x + 16) = 4x(4x + 9) - 7(4x + 9) + 79$

Do đó: $(4x + 9) | 79$ nên $4x + 9 \in U(79)$ mà $4x + 9 > 9$

Nên $4x + 9 = 79$ hay $x = \frac{35}{2}$ (loại)

Vậy $(x; y) \in \{(11; 1); (49; 1); (7k^2; 7k)\}$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

**PHÒNG GD&ĐT
THỊ XÃ SA PA**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI CHỌN HSG LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC: 2024 - 2025**

Môn: Toán

**Thời gian làm bài: 150 phút
(không kể thời gian giao đề)**

Câu 1 (5,0 điểm).

1.1. Cho biểu thức:
$$P = \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 1} - \frac{x + 2}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} + 1} \quad (x > 0; x \neq 1)$$

a) Rút gọn biểu thức P.

$$Q = \frac{2}{P} + \sqrt{x}.$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

1.2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1 - 2\sqrt{abc}$.

Tính giá trị của biểu thức:

$$M = \sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-c)(1-a)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} - \sqrt{abc} + 2023.$$

Câu 2 (2,0 điểm).

Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 người ta lập ra ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số khác nhau. Tính xác suất để lập được số lẻ.

Câu 3 (2,0 điểm).

Trong một kì thi tuyển sinh lớp 10, hai trường A và B có tổng 252 học sinh đỗ vào lớp 10 và đạt tỉ lệ đỗ là 84%. Tính riêng trường A tỉ lệ đỗ là 80%, tính riêng trường B tỉ lệ đỗ là 90%. Hỏi số học sinh dự thi lớp 10 của mỗi trường là bao nhiêu học sinh.

Câu 4 (2,0 điểm).

4.1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 2y + 1042$.

4.2. Cho $a \geq 0, b \geq 0$ thỏa mãn: $a^2 + b^2 \leq 2$. Chứng minh:

$$a\sqrt{3a(a+2b)} + b\sqrt{3b(b+2a)} \leq 6$$

Câu 5 (3,0 điểm).

5.1. Với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $A = 8a^2 + 6ab - 22b^2$ chia hết cho 5 thì $a^4 - b^4$ chia hết cho 5.

5.2. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau:

$$(x - y)(2x + y + 1) + 9(y - 1) = 13$$

Câu 6 (6,0 điểm). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi C là một điểm nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A và B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, D là điểm đối xứng của A qua C, I là trung điểm của CH, J là trung điểm của DH.

a) Chứng minh: IJ song song với AD.

b) Chứng minh: $\angle IJ = \angle BH$

c) Chứng minh: $\triangle CJH$ đồng dạng với $\triangle HIB$.

d) Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1.1. a) Ta có:

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{x+2}{\sqrt{x}^3-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$$

$$P = \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(x+\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$P = \frac{x+\sqrt{x}+1-x-2-x+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}-x}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$P = \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$P = \frac{-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

Vậy $P = \frac{-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

b) Ta có:

$$Q = \frac{2}{P} + \sqrt{x} = 2 : P + \sqrt{x} = 2 : \frac{-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \sqrt{x}$$

$$Q = \sqrt{x} - \frac{2(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}$$

$$Q = \frac{x-2(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}$$

$$Q = \frac{x-2x-2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$$

$$Q = \frac{-x-2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$$

$$Q = -\left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\right)$$

Vì $\sqrt{x} > 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 0$ nên theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} &\geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}}} = 2\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 2 &\geq 2\sqrt{2} + 2 \\ -\left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\right) &\leq -2\sqrt{2} - 2 \\ Q &\leq 2\sqrt{2} - 2\end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= \frac{2}{\sqrt{x}} \\ x &= 2\end{aligned}$$

Vậy $Q_{\max} = -2\sqrt{2} - 2$ khi và chỉ khi $x = 2$.

1.2. Ta có:

$$\begin{aligned}a + b + c &= 1 - 2\sqrt{abc} \\ a + b + c + 2\sqrt{abc} &= 1 \\ a + 2\sqrt{abc} &= 1 - b - c\end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{a(1-b)(1-c)} &= \sqrt{a(1-b-c+bc)} = \sqrt{a(a+2\sqrt{abc}+bc)} \\ &= \sqrt{a^2 + 2a\sqrt{abc} + abc} = \sqrt{(a+\sqrt{abc})^2} \\ &= a + \sqrt{abc} \quad (a, b, c > 0)\end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{b(1-c)(1-a)} &= b + \sqrt{abc} \\ \sqrt{c(1-a)(1-b)} &= c + \sqrt{abc}\end{aligned}$$

Từ 3 đánh giá trên, suy ra:

$$\begin{aligned}M &= a + b + c + 3\sqrt{abc} - \sqrt{abc} + 2023 \\ M &= a + b + c + 2\sqrt{abc} + 2023 \\ M &= 1 + 2023 = 2024\end{aligned}$$

Vậy: Với các giá trị dương của a, b, c thỏa mãn đề bài thì $M = 2024$.

Câu 2.

*Không gian mẫu:

Hàng chục có 6 cách chọn

Hàng đơn vị có 6 cách chọn

Suy ra: $n(\Omega) = 6.6 = 36$

*Gọi A là biến cố “Số được chọn ngẫu nhiên là số lẻ”

*Ta có:

- Hàng đơn vị có 3 cách chọn: 1 ; 3 ; 5.

- Hàng chục có 5 cách chọn (trừ đi số 0, số đã chọn ở hàng đơn vị)

Suy ra: Số các kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $n(A) = 3.5 = 15$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

Câu 3.

Gọi số học sinh ở trường A và B lần lượt là a và b (học sinh) ($a, b \in N^$)

*Ta có:

- Tổng số học sinh ở cả 2 trường là: $252 : 84\% = 300$ (học sinh)

Hay: $a + b = 300$ (1)

- Số học sinh đỗ vào lớp 10 của trường A là: $80\% \cdot a = \frac{4}{5}a$ (học sinh)

- Số học sinh đỗ vào lớp 10 của trường B là: $90\% \cdot b = \frac{9}{10}b$ (học sinh)

- Tổng số học sinh đỗ vào lớp 10 của cả 2 trường là:

$$\frac{4}{5}a + \frac{9}{10}b = 252 \quad (\text{học sinh}) \quad (2)$$

*Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} a + b = 300 \\ \frac{4}{5}a + \frac{9}{10}b = 252 \end{cases}$$

Giải ra được: $a = 180$; $b = 120$ (thỏa ĐKXD)

Vậy: Trường A có 180 học sinh thi vào lớp 10.

Trường B có 120 học sinh thi vào lớp 10.

Câu 4.

4.1. Ta có:

$$P = (x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y) + (y^2 - 4y + 4) + 1037$$

$$P = (x + y + 1)^2 + (y - 2)^2 + 1037 \geq 1037$$

Dấu “=” xảy ra khi:
$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

Suy ra: $x = 1; y = -2$.

Vậy $P_{\min} = 1037$ khi và chỉ khi $x = 1; y = -2$

4.2. Ta có bất đẳng thức phụ:

$$\begin{aligned} 2(a^2 + b^2) &\geq (a + b)^2 \\ 4 &\geq (a + b)^2 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{3a(a + 2b)} &\leq \frac{4a + 2b}{2} = 2a + b \\ a\sqrt{3a(a + 2b)} &\leq a(2a + b) = 2a^2 + ab \quad (1) \end{aligned}$$

Tương tự, ta có:

$$a\sqrt{3a(a + 2b)} \leq 2b^2 + ab \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$VT \leq 2a^2 + 2ab + 2b^2 = (a^2 + b^2) + (a + b)^2 \leq 2 + 4 = 6$$

Vậy: Bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu “=” xảy ra khi: $a = b = 1$

Câu 5.

5.1. Ta có:

$$\begin{aligned} &(8a^2 + 6ab - 22b^2) : 5 \\ &[5(a^2 + ab - 4b^2) + (3a^2 + ab - 2b^2)] : 5 \\ &(3a^2 + ab - 2b^2) : 5 \\ &(a + b)(3a - 2b) : 5 \end{aligned}$$

Trường hợp 1: $a + b$ chia hết cho 5

$$\begin{aligned} a &\equiv -b \pmod{5} \\ a^4 &\equiv b^4 \pmod{5} \\ a^4 - b^4 &\equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}$$

Trường hợp 2: $3a - 2b$ chia hết cho 5

$$3a \equiv 2b \pmod{5}$$

$$5a \equiv 2(a+b) \pmod{5}$$

$$2(a+b) \equiv 5 \pmod{5}$$

$a + b$ chia hết cho 5 (quy về trường hợp 1)

Vậy: Mệnh đề được chứng minh.

5.2. Ta có:

$$(x-y)(2x+y+1)+9(y-1)=13$$

$$(x-y)(2x+y)+x+8y=22$$

$$(x-y)(2x+y)-5(x+y)+3(2x+y)-15=7$$

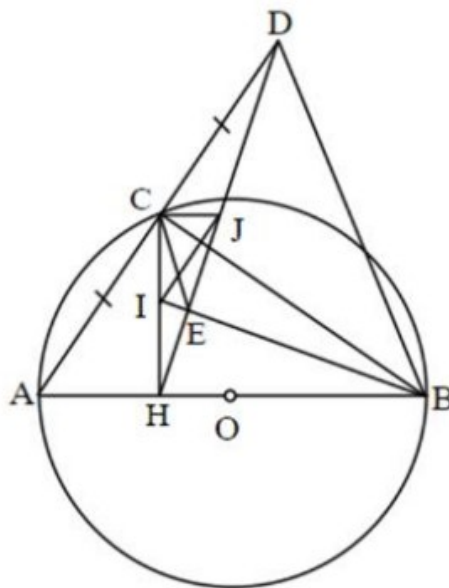
$$(x-y+3)(2x+y-5)=7$$

Vì $(x-y+3)(2x+y-5)=7$ nên $x-y+3$ và $2x+y-5$ thuộc các ước của 7 mà $U(7) = \{1; 7; -1; -7\}$ nên ta có bảng sau:

$x-y+3$	1	7	-1	-7
$2x+y-5$	7	1	-7	-1
x	10/3 (loại)	10/3 (loại)	-2 (loại)	-2 (loại)
y	16/3 (loại)	-2/3 (loại)	2	8

Vậy: Phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

Câu 6.



a) Nhận xét: I là trung điểm CH, J là trung điểm HD (gt)

Suy ra: IJ là đường trung bình của tam giác HCD.

Suy ra: $IJ \parallel CD$ nên $IJ \parallel AD$

b) Ta có: $\angle BH = \angle CH$ (cùng phụ $\angle HCB$) (1)

Ta có: $IJ \parallel CD$ nên $IJ \parallel AC$ suy ra $\widehat{EIJ} = \widehat{ACH}$ (so le trong) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{EIJ} = \widehat{EBH}$

c) Mà dễ dàng thấy: $\widehat{ACH} = \widehat{BHI} = 90^\circ$

Nên $\Delta CJH \sim \Delta HIB (g.g)$

d) Ta có bất đẳng thức phụ: $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$

$$(AH+CH)^2 \leq 2(AH^2+CH^2) = 2AC^2$$

Dấu “=” xảy ra khi: $AH = CH$

Suy ra: H thuộc trung trực AC

Mà $OH = CH$ nên O thuộc trung trực AC

Nên: OH là trung trực AC

Mà: A, O, H thẳng hàng nên $O \equiv H$ suy ra C là điểm chính giữa của cung AB

Do đó: $AH + CH = 2R$

Vậy: Khi C là điểm chính giữa của cung AB thì $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

BÌNH PHƯỚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI

CẤP TỈNH THCS NĂM HỌC 2024 - 2025

Môn: Toán

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 15/02/2025

Câu 1. (5,0 điểm)

1. Cho biểu thức $P = \frac{x-6\sqrt{x}+5}{x-\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + 1$, với $x \geq 0; x \neq 4$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x nguyên để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

2. Cho $x = \sqrt{14-6\sqrt{5}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}}$. Tính giá trị của biểu thức $Q = (x^3 - 5x - 45)^{2025}$.

3. Cho ba số thực x, y, z khác 0 thỏa mãn $x+y+z=0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(x+y-z)^3 + (y+z-x)^3 + (z+x-y)^3}{x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 + xyz} = 3$$

Câu 2. (5,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2 + x - 1 = 3\sqrt{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$.

$$\begin{cases} x^2 + xy + 3 = y^2 + 2y & (1) \end{cases}$$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2 + 3)(x - y + 2) = 3y & (2) \end{cases}$.

3. Một bể nước (ban đầu chưa có nước) được cung cấp nước bởi ba vòi. Biết rằng nếu từng vòi cung cấp nước cho bể thì vòi thứ nhất sẽ làm đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai 10 giờ, vòi thứ ba lại làm đầy bể nhanh hơn vòi thứ nhất 8 giờ; còn nếu vòi thứ nhất và thứ hai cùng cung cấp nước cho bể thì thời gian để chúng làm đầy bể bằng với thời gian vòi thứ ba làm đầy bể. Hỏi nếu cả ba vòi cùng cung cấp nước cho bể thì chúng làm đầy bể trong bao lâu?

Câu 3. (5,0 điểm)

Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng AO . Đường thẳng a vuông góc với AB tại C , cắt nửa đường tròn $(O; R)$ tại I . Trên đoạn CI lấy điểm K bất kỳ (K không trùng với C và I). Tia AK cắt nửa đường tròn $(O; R)$ tại M . Tiếp tuyến của nửa đường tròn $(O; R)$ tại M cắt đường thẳng a tại N , tia BM cắt đường thẳng a tại D .

1. Chứng minh: Tứ giác $ADMC$ nội tiếp và tam giác MNK là tam giác cân.

2. Khi K là trung điểm của đoạn thẳng CI , tính diện tích tam giác ABD theo R .

3. Chứng minh rằng khi K chuyển động trên đoạn thẳng CI (K không trùng với C và I) thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKD luôn nằm trên đường thẳng cố định.

Câu 4. (2,0 điểm)

1. Một cốc thủy tinh có mặt trong dạng hình trụ với chiều cao bằng 15 cm đựng đầy nước và thể tích nước chứa được trong cốc bằng $240\pi \text{ cm}^3$. Người ta thả vào cốc một viên bi sắt hình cầu có bán kính bằng bán kính đáy mặt trong của cốc nước, viên bi sắt ngập toàn bộ trong nước. Tính thể tích nước bị tràn ra khỏi cốc. ($\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

2. Một hộp đựng 100 viên bi có cùng khối lượng và kích thước, trong đó có 35 viên bi màu đỏ, 25 viên bi màu xanh và số còn lại là bi màu vàng. Bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi rồi bỏ lại vào hộp.

a) Tính xác suất để bạn An lấy được viên bi màu vàng.

b) Bạn An được mẹ cho thêm x viên bi màu xanh vào trong hộp. Tìm x , biết rằng khi đó

xác suất để bạn An lấy được viên bi màu vàng là $\frac{1}{3}$.

Câu 5. (3,0 điểm)

1. Giải phương trình nghiệm nguyên: $4x^2 + 8x - 2 = 6xy + 9y$.

2. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{3a}{a + \sqrt{a+bc}} + \frac{3b}{b + \sqrt{b+ac}} + \frac{3c}{c + \sqrt{c+ab}}.$$

.....**HẾT**.....

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

Môn: Toán

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

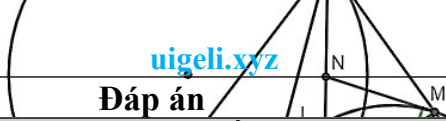
Ngày thi: 15/02/2025

ĐÁP ÁN

Câu	Đáp án
Câu 1 (5,0 đ)	$P = \frac{x-6\sqrt{x}+5}{x-\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + 1, \text{ với } x \geq 0; x \neq 4$
	1. Cho biểu thức a) Rút gọn biểu thức P .
	$P = \frac{x-6\sqrt{x}+5}{x-\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + 1 \quad (x \geq 0; x \neq 4)$ $= \frac{x-6\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} + \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} + \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} + \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}$ $= \frac{x-6\sqrt{x}+5+x-4+\sqrt{x}+1+x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{3x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}$ $= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$
	b) Tìm x nguyên để biểu thức P nhận giá trị nguyên.
	$P = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{3\sqrt{x}+3-3}{\sqrt{x}+1} = 3 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$ <p>P nhận giá trị nguyên khi $\sqrt{x}+1$ là ước của 3 Mà $\sqrt{x}+1 > 0$ nên $\sqrt{x}+1=1$ hoặc $\sqrt{x}+1=3$ Do đó, $x=0$ (nhận) hoặc $x=4$ (loại) Vậy: Khi $x=0$ thì P nhận giá trị nguyên.</p>
	2. Cho $x = \sqrt{14-6\sqrt{5}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}}$. Tính giá trị của biểu thức: $Q = (x^3 - 5x - 45)^{2025}$.
	<p>Ta có: $x = \sqrt{14-6\sqrt{5}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}$ $= 3 - \sqrt{5} + \sqrt{5} + 1 = 4$</p> <p>Thay $x=4$ vào biểu thức Q, ta được: $Q = (4^3 - 5 \cdot 4 - 45)^{2025} = (-1)^{2025} = -1$</p>
	3. Cho ba số thực x, y, z khác 0 thỏa mãn $x+y+z=0$. Chứng minh rằng:

Câu	Đáp án
	$\frac{(x+y-z)^3 + (y+z-x)^3 + (z+x-y)^3}{x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 + xyz} = 3$ <p>Ta có: $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = (-z)^3 - 3xy(-z)$ (vì $x+y+z=0$)</p> <p>Do đó: $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$</p> $\frac{(x+y-z)^3 + (y+z-x)^3 + (z+x-y)^3}{x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 + xyz} = \frac{(-2z)^3 + (-2y)^3 + (-2x)^3}{xy(x+y) + yz(y+z) + xz(x+z) - 5xyz}$ $= \frac{-8(x^3 + y^3 + z^3)}{-xyz - xyz - xyz - 5xyz} = \frac{-24xyz}{-8xyz} = 3$
Câu 2 (5,0 đ)	<p>1. Giải phương trình $x^2 + x - 1 = 3\sqrt{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$.</p> <p>Xét phương trình $x^2 + x - 1 = 3\sqrt{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$ (1).</p> <p>Điều kiện $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \geq 0$</p> <p>Suy ra $(x-1)(x^2 - x + 1) \geq 0$</p> <p>Suy ra $x \geq 1$ (vì $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x$)</p> <p>Từ (1), ta có: $(x^2 - x + 1) + 2(x-1) - 3\sqrt{(x-1)(x^2 - x + 1)} = 0$</p> <p>2. $\frac{x-1}{x^2 - x + 1} - 3\sqrt{\frac{x-1}{x^2 - x + 1}} + 1 = 0$</p> <p>Đặt $t = \sqrt{\frac{x-1}{x^2 - x + 1}} \ (t \geq 0)$, ta được phương trình: $2t^2 - 3t + 1 = 0$</p> <p>$t = 1$ (nhận) hoặc $t = \frac{1}{2}$ (nhận)</p> <p>+ Với $t = 1$, ta có:</p> $\sqrt{\frac{x-1}{x^2 - x + 1}} = 1$ $\frac{x-1}{x^2 - x + 1} = 1$ $x^2 - 2x + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$ <p>+ Với $t = \frac{1}{2}$, ta có:</p> $\sqrt{\frac{x-1}{x^2 - x + 1}} = \frac{1}{2}$ $\frac{x-1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{4}$ $x^2 - 5x + 5 = 0$ $x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$ <p>Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ và $x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$</p>

Câu	Đáp án
	<div style="background-color: #f0f0f0; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> $\begin{cases} x^2 + xy + 3 = y^2 + 2y & (1) \\ (x^2 + 3)(x - y + 2) = 3y & (2) \end{cases}$ </div> <p>2. Giải hệ phương trình</p> <p>Biến đổi phương trình (1), ta được: $x^2 + 3 = y^2 + 2y - xy$, thay vào (2) được:</p> $(y^2 + 2y - xy)(x - y + 2) = 3y$ $y[2 - (x - y)][2 + (x - y)] = 3y \quad (*)$ <p>Xét $y = 0$, thay vào (1) ta được $x^2 + 3 = 0$ (vô nghiệm).</p> <p>Xét $y \neq 0$: Phương trình (*) trở thành:</p> $[2 - (x - y)][2 + (x - y)] = 3$ $4 - (x - y)^2 = 3$ $x - y = 1 \text{ hoặc } x - y = -1$ <p>Trường hợp $x - y = 1$: Thay vào (2), ta được:</p> $x^2 - x + 4 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$ <p>Trường hợp $x - y = -1$: Thay vào (2), ta được:</p> $x^2 - 3x = 0$ $x = 0 \text{ hoặc } x = 3$ $x = 0 \text{ suy ra } y = 1; \quad x = 3 \text{ suy ra } y = 4$ <p>Vậy hệ phương trình có nghiệm là (0;1) và (3;4)</p> <div style="background-color: #f0f0f0; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>Một bể nước (ban đầu chưa có nước) được cung cấp nước bởi ba vòi. Biết rằng nếu từng vòi cung cấp nước cho bể thì vòi thứ nhất sẽ làm đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai 10 giờ, vòi thứ ba lại làm đầy bể nhanh hơn vòi thứ nhất 8 giờ; còn nếu vòi thứ nhất và thứ hai cùng cung cấp nước cho bể thì thời gian để chúng làm đầy bể bằng với thời gian vòi thứ ba làm đầy bể. Hỏi nếu cả ba vòi cùng cung cấp nước cho bể thì chúng làm đầy bể trong bao lâu?</p> </div> <p>Gọi thời gian vòi thứ ba làm đầy bể là t (giờ), $t > 0$ Thời gian vòi thứ nhất làm đầy bể là $t + 8$ (giờ) Thời gian vòi thứ hai làm đầy bể là $t + 8 + 10 = t + 18$ (giờ)</p> <p>Một giờ, cả hai vòi thứ nhất và thứ hai chảy được: $\frac{1}{t+8} + \frac{1}{t+18}$ bể nước</p> <p>Một giờ, vòi thứ ba chảy được: $\frac{1}{t}$ bể nước.</p> <p>Theo đề bài, ta có phương trình:</p> $\frac{1}{t+8} + \frac{1}{t+18} = \frac{1}{t}$ $(t+18)t + (t+8)t = (t+8)(t+18)$ $t^2 = 144$ $t = 12 \text{ (nhận) hoặc } t = -12 \text{ (loại)}$ <p>Trong một giờ, cả ba vòi chảy được: $\frac{1}{t} + \frac{1}{t+8} + \frac{1}{t+18} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{6}$ bể nước.</p> <p>Vậy nếu cả ba vòi cùng cung cấp nước cho bể thì sau 6 giờ sẽ đầy bể.</p>
Câu 3	Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng



Câu	Đáp án
(5,0 đ)	<p>AO. Đường thẳng a vuông góc với AB tại C, cắt nửa đường tròn $(O; R)$ tại I. Trên đoạn CI lấy điểm K bất kỳ (K không trùng với C và I). Tia AK cắt nửa đường tròn $(O; R)$ tại M. Tiếp tuyến của nửa đường tròn $(O; R)$ tại M cắt đường thẳng a tại N, tia BM cắt đường thẳng a tại D.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Chứng minh: Tứ giác $ADMC$ nội tiếp và tam giác MNK là tam giác cân. 2. Khi K là trung điểm của đoạn thẳng CI, tính diện tích tam giác ABD theo R. 3. Chứng minh rằng khi K chuyển động trên đoạn thẳng CI (K không trùng với C và I) thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKD luôn nằm trên đường thẳng cố định.
	<p>Hình vẽ</p>
	<p>1. Ta có $\angle AMB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra $\angle AMD = 90^\circ$ $\angle ACD = 90^\circ$ (gt) Suy ra tứ giác $ADMC$ nội tiếp đường tròn.</p>
	<p>Ta có: $\angle NMA + \angle AMO = 90^\circ$, $\angle AMO = \angle MOA$ (tam giác OAM cân tại O), $\angle MAO + \angle MBA = 90^\circ$ Suy ra $\angle NMA = \angle MBA$ (1) $\angle AMB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn); $\angle KCB = 90^\circ$ (gt) Suy ra tứ giác $CKMB$ nội tiếp Suy ra $\angle NKM = \angle MBA$ (cùng bù với $\angle CKM$) (2) Từ (1) và (2) suy ra $\angle NMA = \angle NKM$ Suy ra $\triangle NMK$ cân tại N</p>
	<p>2. Xét tam giác OCI vuông tại C có $IC^2 = OI^2 - OC^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$ $IC = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ Suy ra: $KC = \frac{R\sqrt{3}}{4}$ (vì K là trung điểm của IC) $BC = AB - AC = 2R - \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$ Mặt khác: Xét $\triangle AKC$ và $\triangle DBC$ có: $\angle ACK = \angle DCB = 90^\circ$; $\angle AKC = \angle DBC$ (cùng phụ với $\angle MAB$) Suy ra: $\triangle AKC$ đồng dạng với $\triangle DBC$ (g.g)</p>

Câu	Đáp án
	$\frac{AC}{DC} = \frac{KC}{CB}$ <p>Suy ra: $\frac{AC}{DC} = \frac{KC}{CB}$</p> $DC = \frac{AC \cdot CB}{KC} = \left(\frac{R}{2} \cdot \frac{3R}{2} \right) : \frac{R\sqrt{3}}{4} = R\sqrt{3}$ <p>Suy ra $S_{ADB} = \frac{AB \cdot DC}{2} = \frac{2R \cdot R\sqrt{3}}{2} = R^2\sqrt{3}$ (đvdt)</p>
	<p>3. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle AKD$ cắt đường thẳng AB tại E</p> <p>Tứ giác $AKDE$ nội tiếp nên $\angle DEA = \angle AKC$ (cùng bù với $\angle AKD$)</p> <p>Tứ giác $CKMB$ nội tiếp nên $\angle ABM = \angle AKC$ (cùng bù với $\angle CKM$)</p> <p>Suy ra $\angle DEA = \angle ABM$</p> <p>Suy ra $\triangle DEB$ cân tại D</p> <p>Suy ra đường cao CD cũng là đường trung tuyến</p> <p>Suy ra E và B đối xứng với nhau qua C</p> <p>Suy ra E cố định (do B và C cố định)</p> <p>Do A, E cố định nên tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AKD$ nằm trên đường trung trực của AE (cố định).</p>
Câu 4 (2,0 đ)	<p>1. Một cốc thủy tinh có mặt trong dạng hình trụ với chiều cao bằng 15 cm đựng đầy nước và thể tích nước chứa được trong cốc bằng $240\pi \text{ cm}^3$. Người ta thả vào cốc một viên bi sắt hình cầu có bán kính bằng bán kính đáy mặt trong của cốc nước, viên bi sắt ngập toàn bộ trong nước. Tính thể tích nước bị tràn ra khỏi cốc. ($\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến hàng phần chục).</p> <p>Gọi bán kính đáy mặt trong của cốc nước là $r \text{ (cm)}$, $r > 0$</p> <p>Theo đề bài ta có: $\pi r^2 \cdot 15 = 240\pi$</p> <p>Suy ra $r = 4 \text{ (cm)}$</p> <p>Thể tích của viên bi sắt là: $\pi r^3 \approx 3,14 \cdot 4^3 = 200,96 \approx 201 \text{ (cm}^3\text{)}$</p> <p>Do thể tích nước tràn ra khỏi cốc bằng thể tích viên bi nên thể tích nước tràn ra khỏi cốc là $201 \text{ (cm}^3\text{)}$</p> <p>2. Một hộp đựng 100 viên bi có cùng khối lượng và kích thước, trong đó có 35 viên bi màu đỏ, 25 viên bi màu xanh và số còn lại là bi màu vàng. Bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi rồi bỏ lại vào hộp.</p> <p>a) Tính xác suất để bạn An lấy được viên bi màu vàng.</p> <p>b) Bạn An được mẹ cho thêm x viên bi màu xanh vào trong hộp. Tìm x, biết rằng, khi đó xác suất để bạn An lấy được viên bi màu vàng là $\frac{1}{3}$.</p> <p>a) Số viên bi màu vàng trong hộp là: $100 - 25 - 35 = 40$ viên</p> <p>Xác suất để bạn An lấy được viên bi màu vàng là: $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$</p> <p>b) Tổng số viên bi trong hộp sau khi thêm x viên bi màu xanh là: $100 + x$</p> <p>Xác suất để lấy được viên bi màu vàng là: $\frac{40}{100 + x}$</p>

Câu	Đáp án
	$\frac{40}{100+x} = \frac{1}{3}$ <p>Theo đề bài ta có: $\frac{40}{100+x} = \frac{1}{3}$ suy ra $x = 20$</p>
Câu 5 (3,0 đ)	<p>1. Giải phương trình nghiệm nguyên: $4x^2 + 8x - 2 = 6xy + 9y$</p> $4x^2 + 8x - 2 = 6xy + 9y$ $(2x+3)^2 - 2(2x+3) - 5 = 3y(2x+3)$ $(2x+3)(2x-3y+1) = 5$ <p>TH1: $\begin{cases} 2x+3=1 \\ 2x-3y+1=5 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$</p> <p>TH2: $\begin{cases} 2x+3=-1 \\ 2x-3y+1=-5 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x=-2 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$ (loại)</p> <p>TH3: $\begin{cases} 2x+3=5 \\ 2x-3y+1=1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$ (loại)</p> <p>TH4: $\begin{cases} 2x+3=-5 \\ 2x-3y+1=-1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$</p> <p>Vậy phương trình có nghiệm nguyên là: $(-1; -2); (-4; -2)$</p> <p>2. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:</p> $Q = \frac{3a}{a+\sqrt{a+bc}} + \frac{3b}{b+\sqrt{b+ac}} + \frac{3c}{c+\sqrt{c+ab}}$ <p>Do $a, b, c > 0$ và $a+b+c=1$ nên $0 < a, b, c < 1$</p> <p>Suy ra $a-a^2 > 0$ mà $bc > 0$ nên $a+bc-a^2 > 0$</p> $\frac{3a}{a+\sqrt{a+bc}} = \frac{3a(\sqrt{a+bc}-a)}{a+bc-a^2} = \frac{3a(\sqrt{a(a+b+c)+bc}-a)}{a(a+b+c)+bc-a^2}$ <p>Ta có:</p> $= \frac{3a(\sqrt{(a+b)(a+c)}-a)}{ab+bc+ac}$ <p>Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số thực dương $a+b$ và $a+c$, ta có:</p> $\frac{3a(\sqrt{(a+b)(a+c)}-a)}{ab+bc+ac} \leq \frac{3a\left(\frac{a+b+a+c}{2}-a\right)}{ab+bc+ac} = \frac{3(ab+ac)}{2(ab+bc+ac)}$ <p>Suy ra $\frac{3a}{a+\sqrt{a+bc}} \leq \frac{3(ab+ac)}{2(ab+bc+ac)}$ (1)</p> <p>Chứng minh tương tự, ta được:</p> $\frac{3b}{b+\sqrt{b+ac}} \leq \frac{3(ab+bc)}{2(ab+bc+ac)} \quad (2)$ $\frac{3c}{c+\sqrt{c+ab}} \leq \frac{3(ac+bc)}{2(ab+bc+ac)} \quad (3)$

Câu	Đáp án
	Cộng (1), (2) và (3) theo vế, ta được $Q \leq 3$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. Vậy giá trị lớn nhất của Q là 3, đạt được khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Lưu ý: Nếu học sinh làm theo cách khác và lập luận đúng thì vẫn cho điểm

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH

KỲ THI CHỌN HSG TỈNH NĂM HỌC 2024-2025

Khóa ngày 03 tháng 12 năm 2024

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

LỚP 9 THCS

SỐ BÁO DANH:.....

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề gồm có 01 trang và 5 câu

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+4} : \left(\frac{x}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right)$ với $x > 0$. Tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$.

b) Tính giá trị của biểu thức $B = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + x$ với $x = 3 - \sqrt{3}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Nhà Huệ dự định trồng cây su hào trên một mảnh vườn được chia thành nhiều luống và mỗi luống sẽ được trồng một số lượng cây như nhau. Nếu tăng thêm 8 luống và mỗi luống trồng giảm đi 3 cây thì số cây toàn vườn giảm đi 54 cây so với dự định. Nếu giảm đi 4 luống và mỗi luống trồng nhiều hơn 2 cây thì số cây trong toàn vườn sẽ tăng thêm 32 cây so với dự định. Hỏi theo dự định nhà Huệ trồng bao nhiêu cây su hào trên mảnh vườn đó?

b) Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x-3} = x^2 - 4$.

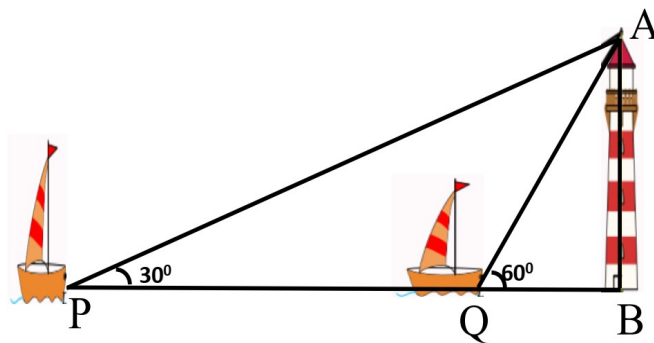
Câu 3. (1,5 điểm)

a) Từ một hộp có 30 thẻ được đánh số từ 1 đến 30, rút ngẫu nhiên hai thẻ. Tính xác suất để lấy được hai thẻ mà tích hai số trên hai thẻ là một số nguyên tố.

b) Từ tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để số lấy được có tổng các chữ số chia hết cho 4.

Câu 4. (3,5 điểm)

1) Hai con thuyền P và Q cách nhau 150m và thẳng hàng với chân B của tháp hải đăng ở trên bờ biển. Từ P và Q người ta nhìn thấy đỉnh A của tháp hải đăng dưới các góc $\widehat{BPA} = 30^\circ$ và $\widehat{BQA} = 60^\circ$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính chiều cao AB của tháp hải đăng.



2) Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB , lấy điểm C nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A và C khác B). Gọi K là trung điểm của dây cung BC . Qua B dựng tiếp tuyến với (O) và cắt OK tại D .

a) Chứng minh rằng AC song song với OK .

b) Chứng minh rằng DC là tiếp tuyến (O) .

c) Vẽ $CH \perp AB$ tại H . Gọi I là trung điểm của CH . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BI tại E . Chứng minh rằng ba điểm E, C, D thẳng hàng.

Câu 5. (1,0 điểm)

a) Tìm số nguyên dương n để $n^{2027} + n^{2026} + 1$ là số nguyên tố.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2025 sao cho $n^3 + 2025$ chia hết cho 6.

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH

KỶ THI CHỌN HSG TỈNH NĂM HỌC 2024-2025

Khóa ngày 03 tháng 12 năm 2024

HƯỚNG DẪN CHẤM

Môn thi: TOÁN

LỚP 9 THCS

Đáp án này gồm có 06 trang

YÊU CẦU CHUNG

* Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi bài. Trong bài làm của thí sinh yêu cầu phải lập luận logic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.

* Trong mỗi bài, nếu thí sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan.

* Ở câu 4 ý 2 nếu thí sinh không vẽ hình thì cho 0 điểm.

* Điểm thành phần của mỗi bài nói chung phân chia đến 0,25 điểm. Đối với điểm thành phần là 0,5 điểm hoặc 0,75 điểm thì tùy tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,25 điểm.

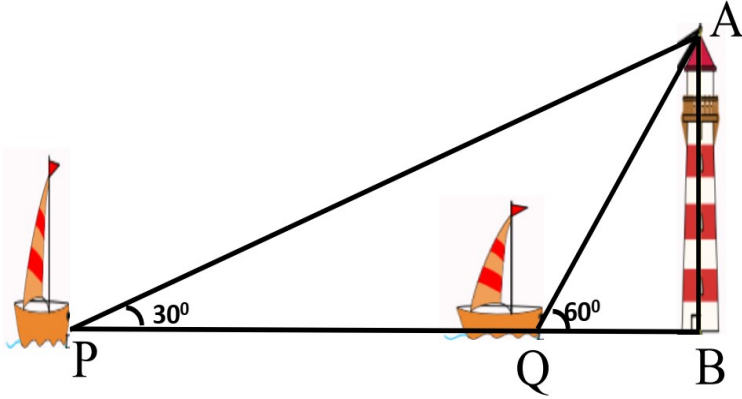
* Thí sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm của từng bài.

* Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các bài.

Câu	Nội dung	Điểm
1	a) Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+4} : \left(\frac{x}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right); (x > 0)$. Tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$	1,0
	ĐKXD: $x > 0$	0,25
	$A = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$	0,25
	$A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$ $\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} - \frac{1}{3\sqrt{x}} \geq 0$ $\frac{1-\sqrt{x}}{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \geq 0$ $1-\sqrt{x} \geq 0$ (Do $3\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) > 0, \forall x > 0$). $x \leq 1$.	0,25
	Vậy $0 < x \leq 1$ thì $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$.	0,25
	b) Tính giá trị của biểu thức $B = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + x$ với $x = 3 - \sqrt{3}$.	1,0
	Ta có $B = \sqrt{(x-3)^2} + x = x-3 + x$.	0,5
	Với $x = 3 - \sqrt{3}$, ta có $B = 3 - \sqrt{3} - 3 + (3 - \sqrt{3}) = 3$.	0,5
2	a) Nhà Huệ dự định trồng cây su hào trên một mảnh vườn được chia thành nhiều luống và mỗi luống sẽ được trồng một số lượng cây như nhau. Nếu tăng thêm 8 luống và mỗi luống trồng giảm đi 3 cây thì số cây toàn vườn giảm đi 54 cây so với dự định. Nếu giảm đi 4 luống và mỗi luống trồng nhiều hơn 2 cây thì số cây trong toàn vườn sẽ tăng thêm 32 cây so với dự định. Hỏi theo dự định nhà Huệ trồng bao nhiêu cây su hào trên mảnh vườn đó?	1,0
	Gọi số luống là x (luống); $x \in \mathbb{N}^*; x > 4$ và số cây su hào trong mỗi luống là y (cây) $y \in \mathbb{N}^*; y > 3$.	0,25
	Sau khi tăng thêm 8 luống, mỗi luống giảm đi 3 cây thì số cây toàn vườn là $(x+8)(y-3)$ (cây). Vì số cây khi đó giảm so với ban đầu là 54 cây nên ta có phương trình $(x+8)(y-3) = xy - 54$ (1)	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	<p>Sau khi giảm đi 4 luống, mỗi luống trồng nhiều hơn 2 cây thì số cây toàn vườn là $(x-4)(y+2)$ (cây).</p> <p>Vì số cây khi đó nhiều hơn so với ban đầu là 32 cây nên ta có phương trình $(x-4)(y+2) = xy + 32$ (2)</p>	0,25
	<p>Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:</p> $\begin{cases} (x+8)(y-3) = xy - 54 \\ (x-4)(y+2) = xy + 32 \end{cases}$ $\begin{cases} xy - 3x + 8y - 24 = xy - 54 \\ xy + 2x - 4y - 8 = xy + 32 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 8y = 30 \\ 2x - 4y = 40 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 50 \\ y = 15 \end{cases} \text{ (TMĐK).}$ <p>Vậy nhà Huệ dự định trồng $50.15 = 750$ (cây su hào).</p>	0,25
	b) Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x-3} = x^2 - 4$.	1,0
	Điều kiện: $x \geq \frac{3}{4}$	0,25
	$\sqrt{x+1} + \sqrt{4x-3} = x^2 - 4$ $\sqrt{x+1} - 2 + \sqrt{4x-3} - 3 = x^2 - 9$ $\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4(x-3)}{\sqrt{4x-3}+3} = (x-3)(x+3)$ $(x-3) \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{4x-3}+3} - (x+3) \right) = 0$ $\begin{cases} x-3=0 \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{4x-3}+3} - (x+3) = 0 \end{cases}$	0,25
	Trường hợp 1:	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	$x - 3 = 0$ $x = 3 \text{ (TM)}$	
	<p>Trường hợp 2:</p> $\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{4x-3}+3} - (x+3) = 0$ $\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{4x-3}+3} = x+3 \text{ (*)}$ <p>Với $x \geq \frac{3}{4}$</p> $VT = \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{4x-3}+3} < \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{11}{6} < \frac{3}{4} + 3 \leq x+3 = VP$ <p>Ta có</p> <p>Phương trình (*) vô nghiệm.</p> <p>Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 3$.</p>	0,25
3	<p>a) Từ một hộp có 30 thẻ được đánh số từ 1 đến 30, rút ngẫu nhiên hai thẻ. Tính xác suất để lấy được hai thẻ mà tích hai số trên hai thẻ là một số nguyên tố.</p>	0,75
	<p>Vì mỗi thẻ được đánh số khác nhau nên rút ngẫu nhiên hai thẻ thì số ghi trên hai thẻ không trùng nhau.</p> $\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$ <p>Không gian mẫu có số phần tử là 435.</p> <p>Các số nguyên tố từ 1 đến 30 là 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.</p> <p>Có 10 kết quả thuận lợi.</p>	0,5
	<p>Xác suất để lấy được hai thẻ mà tích hai số trên hai thẻ là một số nguyên tố là</p> $\frac{2}{87}$	0,25
	<p>b) Từ tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để số lấy được có tổng các chữ số chia hết cho 4.</p>	0,75
	<p>Số phần tử của không gian mẫu: 900.</p> <p>Gọi số cần tìm $\overline{abc}, (a+b+c):4$</p> <p>Xét $a+b=4k+r, r \in \{0;1;2;3\}$.</p> <p>Trường hợp 1: $r \in \{0;3\}$, có 3 cách chọn c.</p>	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	<p>Trường hợp 2: $r \in \{1; 2\}$, có 2 cách chọn c.</p> <p>Gọi A là tập hợp các số có dạng $4k + r, r \in \{1; 2\}$.</p> <p>Gọi B là tập hợp các số có dạng $4k + r, r \in \{0; 3\}$.</p>	
	<p>Gọi X là biến cố “số lấy được có tổng các chữ số chia hết cho 4”</p> <p>Gọi S là tập hợp các số có tổng các chữ số chia hết cho 4.</p> <p>Khi đó: $S = 2 A + 3 B = 2(A + B) + B = 2 \cdot 9 \cdot 10 + B = 180 + B$</p> <p>Tính B</p> <p>Nếu $\overline{ab}$ có dạng $a + b = 4k$ thì ta có 22 số.</p> <p>Nếu $\overline{ab}$ có dạng $a + b = 4k + 3$ thì ta có 22 số.</p> <p>Suy ra $B = 22 + 22 = 44$.</p> <p>Khi đó $S = 180 + 44 = 224$ suy ra $n(X) = S = 224$.</p>	0,25
	<p>Xác suất để số lấy được có tổng các chữ số chia hết cho 4 là</p> $P(X) = \frac{224}{900} = \frac{56}{225}$	0,25
4	<p>1) Hai con thuyền P và Q cách nhau 150m và thẳng hàng với chân B của tháp hải đăng ở trên bờ biển. Từ P và Q người ta nhìn thấy đỉnh A của tháp hải đăng dưới các góc $\widehat{BPA} = 30^\circ$ và $\widehat{BQA} = 60^\circ$ (tham khảo hình vẽ). Tính chiều cao AB của tháp hải đăng.</p> 	0,5
	<p>Trong $\triangle ABP$ có $AB = PB \cdot \tan \widehat{BPA} = (PQ + QB) \tan 30^\circ$.</p> <p>Trong $\triangle AQP$ có $AB = QB \cdot \tan \widehat{BQA} = QB \cdot \tan 60^\circ$.</p>	0,25
	Ta có:	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	$PQ \cdot \tan 30^\circ + QB \cdot \tan 30^\circ = QB \cdot \tan 60^\circ \text{ nên } QB = \frac{PQ \cdot \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}$ $AB = \frac{PQ \cdot \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ} \cdot \tan 60^\circ = \frac{150 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3} = 75\sqrt{3}$ <p>Suy ra</p> <p>Vậy $AB = 75\sqrt{3}$ m.</p>	
	<p>2) Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB, lấy điểm C nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A và C khác B). Gọi K là trung điểm của dây cung BC. Qua B dựng tiếp tuyến với (O) và cắt OK tại D.</p> <p>a) Chứng minh rằng AC song song với OK.</p> <p>b) Chứng minh rằng DC là tiếp tuyến (O).</p> <p>c) Vẽ $CH \perp AB$ tại H. Gọi I là trung điểm của CH. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BI tại E. Chứng minh rằng ba điểm E, C, D thẳng hàng.</p>	3,0
		0,5
	<p>a) Chứng minh $AC \parallel OK$.</p> <p>Do K là trung điểm BC nên $OK \perp BC$ (1)</p> <p>$\triangle ACB$ có CO là đường trung tuyến và $CO = \frac{1}{2} AB$ nên $\triangle ACB$ vuông tại C hay $AC \perp BC$ (2)</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra $AC \parallel OK$ (cùng vuông góc với BC)</p>	0,75
	<p>b) Ta có $\triangle OCK = \triangle OBK$ (c.c.c) nên $\angle OKC = \angle OKB$ hay $\angle ODC = \angle ODB$.</p>	0,75

Câu	Nội dung	Điểm
	<p>Xét $\triangle OCD$ và $\triangle OBD$ có $OC = OB$; $\widehat{COD} = \widehat{BOD}$; OD cạnh chung nên $\triangle OCD = \triangle OBD$ (c.g.c) suy ra $\widehat{OCD} = \widehat{OBD}$ mà $\widehat{OBD} = 90^\circ$ (BD là tiếp tuyến) nên $\widehat{OCD} = 90^\circ$ hay $OC \perp CD$ tại C.</p> <p>Vậy CD là một tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).</p>	
	<p>c) Gọi F là giao điểm của BC và AE.</p> $\frac{IB}{EB} = \frac{IH}{EA}$ <p>Ta có $\triangle HBI \sim \triangle ABE$ (g.g) suy ra</p> $\frac{IB}{EB} = \frac{IC}{EF}$ <p>$\triangle CBI \sim \triangle FBE$ (g.g) suy ra</p>	0,25
	<p>Từ (3), (4) và $IH = IC$ (gt) suy ra $EA = EF$</p> <p>Xét $\triangle ABF$ có $EA = EF$, $OA = OB$ nên OE là đường trung bình của tam giác suy ra $OE \parallel BF$.</p> <p>Mà $AC \perp BF$ nên $AC \perp OE$ suy ra $\widehat{AOE} = \widehat{EOE}$.</p> <p>Do đó $\triangle OAE = \triangle OCE$ (c.g.c) suy ra $\widehat{OAE} = \widehat{OCE} = 90^\circ$.</p>	0,5
	<p>Khi đó $\widehat{OCE} + \widehat{OCD} = 180^\circ$ suy ra ba điểm E, C, D thẳng hàng.</p>	0,25
5	<p>a) Tìm số nguyên dương n để $n^{2027} + n^{2026} + 1$ là số nguyên tố.</p>	0,5
	<p>Ta có $n^{2027} + n^{2026} + 1 = n^2(n^{2025} - 1) + n(n^{2025} - 1) + n^2 + n + 1$</p>	0,25
	<p>Với $n > 1$ ta có $(n^{2025} - 1) : (n^3 - 1) : n^2 + n + 1$</p> <p>Do đó $(n^{2027} + n^{2026} + 1) : n^2 + n + 1$ và $n^{2027} + n^{2026} + 1 > n^2 + n + 1 > 1$ nên $n^{2027} + n^{2026} + 1$ là hợp số.</p> <p>Với $n = 1$ thì $n^{2027} + n^{2026} + 1 = 3$ là số nguyên tố.</p> <p>Vậy $n = 1$ là số cần tìm.</p>	0,25
	<p>b) Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2025 thỏa mãn $n^3 + 2025$ chia hết cho 6.</p>	0,5
	<p>Đặt $n = 6q + r, r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.</p> <p>Khi đó $n^3 + 2025$ chia hết cho 6 khi $r^3 + 3$ chia hết cho 6.</p> <p>Nếu r chẵn thì $r^3 + 3$ lẻ, do đó $r^3 + 3$ không chia hết cho 6. Suy ra</p>	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	$r \in \{1, 3, 5\}$.	
	<p>Với $r = 1 \Rightarrow r^3 + 3 = 4$ không chia hết cho 6.</p> <p>Với $r = 3 \Rightarrow r^3 + 3 = 30 \vdots 6$.</p> <p>Với $r = 5 \Rightarrow r^3 + 3 = 128$ không chia hết cho 6.</p> <p>Suy ra $n = 6q + 3$. Mà $0 \leq n \leq 2025 \Rightarrow 0 \leq q \leq 337$.</p> <p>Vậy có tất cả 338 số tự nhiên n thỏa mãn đề bài.</p>	0,25

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ VINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
NĂM HỌC 2024 – 2025

Môn thi: Toán
Thời gian: 150 phút
(Không kể thời gian giao đề)

$$K = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2025}{x}$$

Câu 1: (2,5 điểm) Cho biểu thức:

a, Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức K

b, Tìm x để biểu thức $A = \frac{K}{x} - \frac{2024}{x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2: (3,0 điểm)

a, Tìm số nguyên n thỏa mãn $2003^{2004} + 1$ chia hết cho $n^3 + 2024n$

b, Cho đa thức $P(x) = (1 + x + x^2)^{2024}$

Gọi m và n lần lượt là tổng các hệ số của lũy thừa bậc chẵn và bậc lẻ của x sau khi khai triển và thu gọn đa thức P(x). Hãy xét xem m, n chẵn hay lẻ? Vì sao?

Câu 3: (3,5 điểm)

a, Tìm x biết: $(x^2 + x + 1)^2 = 3(x^4 + x^2 + 1)$

b, Tìm các cặp số nguyên không âm x, y thỏa mãn: $(y+1)^4 + y^4 = (x+1)^2 + x^2$

c, Cho các số thực x, y, z ≥ -1 thỏa mãn: $x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2 + y^2 + z^2$.

Chứng minh $x^5 + y^5 + z^5 \geq x^2 + y^2 + z^2$

Câu 4: (3,0 điểm)

1, Người ta đặt một vòi chảy vào từ trên xuống và một vòi tháo nước ra tại lưng chừng của một bể nước. Khi bể không chứa nước nếu mở cả 2 vòi thì sau 2 giờ 42 phút bể đầy nước, còn nếu đóng vòi chảy ra và chỉ mở vòi chảy vào thì sau 1 giờ 30 phút bể đầy nước. Biết trong cùng một thời gian vòi chảy vào chảy được lượng nước nhiều gấp hai lần lượng nước của vòi chảy ra. Hỏi khi bể không có nước nếu mở cả hai vòi thì sau thời gian bao lâu mực trong bể nước ngang đến chỗ lắp vòi chảy ra.

2, Trong một hộp kín có 5 tấm thẻ (có kích thước và hình dạng giống nhau) được đánh số -1; 0; 1; 2; 3

a, Chọn ngẫu nhiên 1 tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất tấm thẻ được chọn đánh số chia hết cho 2

b, Chọn ngẫu nhiên 2 tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất để tích của 2 số đánh trên 2 tấm thẻ được chọn là số âm.

Câu 5: (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AC > AB$), các đường cao AD, BE, CF, trực tâm H. Điểm I nằm giữa B và C sao cho $IB = 2IC$. Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với AI. Gọi Q là giao điểm của đường thẳng d và CH, G là điểm trên tia CH sao cho Q là trung điểm của GH. Gọi J là giao điểm của AG và BH.

a. Chứng minh $\triangle QAH$ đồng dạng với $\triangle AIB$

b. Gọi K là trung điểm của BI.

Chứng minh $\triangle AHG$ đồng dạng với $\triangle KBA$ và $AG = 2AJ$

c. Giả sử AABC cân tại C. Gọi N là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC. Chứng minh rằng: $CE \cdot CN - FE \cdot FN = CF^2$

Câu 6: (1,0 điểm)

Giả sử các điểm trên mặt phẳng được tô bởi 2 màu đỏ hoặc xanh. Chứng tỏ rằng luôn tìm được tam giác có 3 đỉnh và trọng tâm cùng màu.

ĐÁP ÁN

Câu 1:

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \\ x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

a) ĐKXD:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2025}{x} = \left(\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2 + x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} \right) \frac{x+2025}{x} \\ & = \left(\frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 + x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} \right) \frac{x+2025}{x} \\ & = \frac{x+2025}{x} \end{aligned}$$

$$\text{b) } A = \frac{K}{x} - \frac{2024}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = -2$ (TMĐKXĐ)

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{4}$ tại $x = -2$.

Câu 2:

$$\text{a) Đặt } A = 2023^{2024} + 1; B = n^3 + 2024n$$

Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{Z}$ để $A \vdots B$ (1)

$$B = n^3 + 2024n = n^3 - n + 2025n = (n-1)n(n+1) + 2025n$$

Vì $n-1; n; n+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên $(n-1)n(n+1) \vdots 3$

Mà $2025n \vdots 3$ (do $2025 \vdots 3$)

$$\Rightarrow B = (n-1)n(n+1) + 2025n \vdots 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \vdots 3$ (*)

Lại có $2023 \equiv 1 \pmod{3}$

$$\Rightarrow 2023^{2024} \equiv 1^{2024} \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow A = 2023^{2024} + 1 \equiv 2 \pmod{3}$$

$\Rightarrow A \not\vdots 3$ (trái với (*) mâu thuẫn) nên giả sử là sai

Vậy không tồn tại số nguyên n thỏa mãn đề bài.

$$\text{b) Ta có: } P(1) = (1 + 1 + 1^2)^{2024} = 3^{2024} = m + n$$

$$P(-1) = (1 - 1 + (-1)^2)^{2024} = 1 = m - n$$

$$\text{Do đó: } 2m = 3^{2024} + 1 \Rightarrow m = \frac{3^{2024} + 1}{2}$$

$$\text{Lại có: } 3^{2024} \equiv (-1)^{2024} \pmod{4} \Rightarrow 3^{2024} \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow 3^{2024} = 4k + 1 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow m = \frac{3^{2024} + 1}{2} = 2k + 1$$

Suy ra m lẻ

Mà $n = m - 1$ nên n chẵn

Câu 3:

$$a) (x^2 + x + 1)^2 = 3 \cdot (x^4 + x^2 + 1)$$

$$(x^2 + x + 1)^2 = 3 \cdot (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 1 - 3x^2 + 3x - 3) = 0$$

$$(x^2 + x + 1) \cdot (-2x^2 + 4x - 2) = 0$$

$$-2(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$(x^2 + x + 1) \cdot (x - 1)^2 = 0$$

Mà $x^2 + x + 1 > 0$ nên $x = 1$

$$b) (y+1)^4 + y^4 = (x+1)^2 + x^2$$

$$2y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$y^4 + 2y^3 + 3y^2 + 2y = x^2 + x$$

$$(y^2 + y)^2 + 2(y^2 + y) = x^2 + x$$

$$(y^2 + y + 1)^2 = x^2 + x + 1$$

Ta có với mọi số nguyên không âm: $x^2 < x^2 + x + 1 \leq x^2 + 2x + 1$

Suy ra: $x^2 < (y^2 + y + 1)^2 \leq x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

$$\text{Nên } (y^2 + y + 1)^2 = (x+1)^2$$

Hay $x^2 + x + 1 = (x+1)^2$ suy ra $(x, y) = (0, 0)$

$$\text{Từ } x \geq -1 \Rightarrow x+2 \geq 1 > 0 \Rightarrow (x+2)(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 3x - 2$$

$$\Rightarrow x^5 \geq (3x - 2)x^2 = 3x^3 - 2x^2$$

$$\text{Tương tự, } y^5 \geq (3y - 2)y^2 = 3y^3 - 2y^2; \Rightarrow z^5 \geq (3z - 2)z^2 = 3z^3 - 2z^2$$

Vậy,

$$x^5 + y^5 + z^5 \geq 3(x^3 + y^3 + z^3) - 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq x^2 + y^2 + z^2 \text{ vì } x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2 + y^2 + z^2 \quad \mathbf{C}$$

âu 4:

1. Đổi 2 giờ 42 phút = 2,7 giờ

Gọi thời gian vòi chảy vào chảy được lượng nước từ khi bể không chứa nước đến lúc nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra là x (giờ). ĐK: $0 < x < 1,5$

Trong 1 giờ, vòi chảy vào chảy được lượng nước vào bể là $1 : 1,5 = \frac{2}{3}$ (bể), vòi chảy ra tháo ra khỏi bể một lượng nước là: $\frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$ (bể)

Khi lượng nước ngang vòi chảy ra nếu mở cả 2 vòi thì 1 giờ lượng nước trong bể có thêm là $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (bể)

Trong x giờ vòi chảy vào được lượng nước là: $\frac{2}{3}x$ (bể)

Trong $2,7 - x$ giờ còn lại cả 2 vòi cùng chảy vào được lượng nước là $\frac{1}{3}(2,7 - x)$ (bể)

Ta có phương trình: $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(2,7 - x) = 1$ nên $x = 0,3$ (thỏa mãn)

Vậy thời gian để vòi chảy vào được lượng nước từ khi bể không chứa nước đến lúc nước ngang vòi chảy ra là 0,3 giờ.

2.

a) Có 5 kết quả có thể là : -1; 0; 1; 2; 3. Do chọn ngẫu nhiên nên các kết quả có thể này là đồng khả năng
Có 2 kết quả thuận lợi của biến cố tám thẻ được chọn đánh số chia hết cho 2 là: 0; 2

Vậy xác suất tám thẻ được chọn đánh số chia hết cho 2 là: $\frac{2}{5}$

b) Các trường hợp có thể xảy ra của các số đánh trên 2 tám thẻ khi chọn ngẫu nhiên trong hộp là:

+) {-1; 0}; {-1; 1}; {-1; 2}; {-1; 3}

+) {0; 1}; {0; 2}; {0; 3}

+) {1; 2}; {1; 3}

+) {2; 3}

Số các kết quả xảy ra khi chọn ngẫu nhiên hai tám thẻ trong hộp là 10

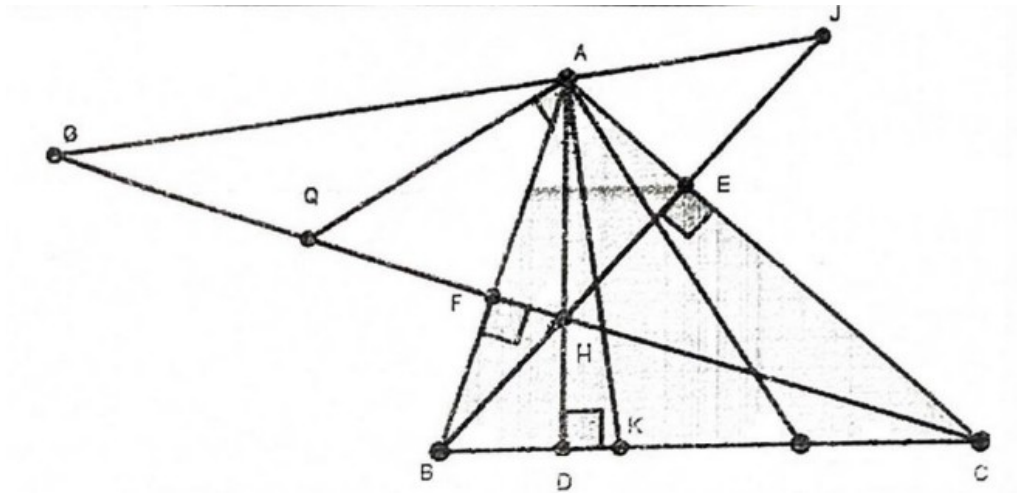
Khi tích của hai số đánh trên 2 tám thẻ đã chọn là số âm thì có 1 tám thẻ đánh số

-1, tám thẻ còn lại đánh số khác 0.

Ta có 3 trường hợp như thế.

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{3}{10}$

Câu 5:



a) Ta có: $\square_{DHC} = \square_{ABI}$ (cùng phụ với $\square_{BCH}$)

Mà $\square_{DHC} = \square_{HA}$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \angle HA = \angle ABI$$

Xét Δ_{QAH} và Δ_{AIB} có $\sphericalangle_{QAH} = \sphericalangle_{AIB}$ (cùng phụ với $\sphericalangle_{HAI}$).

$$\Theta_{HA} = \Theta_{ABI}(cmt)$$

Suy ra $\Delta_{\text{QAH}} \sim \Delta_{\text{AIB}} (g - g)$

b) từ câu a $\Delta_{QAH} \sim \Delta_{AIB} (g-g) \Rightarrow \frac{AB}{OH} = \frac{BI}{HA} \Rightarrow \frac{AB}{2QH} = \frac{BI}{2HA} \Rightarrow \frac{AB}{GH} = \frac{BK}{AH}$

Xét Δ_{AHG} và Δ_{KBA} có $\square_{AHG} = \square_{ABK}(cmt); \frac{AB}{GH} = \frac{BK}{AH}$

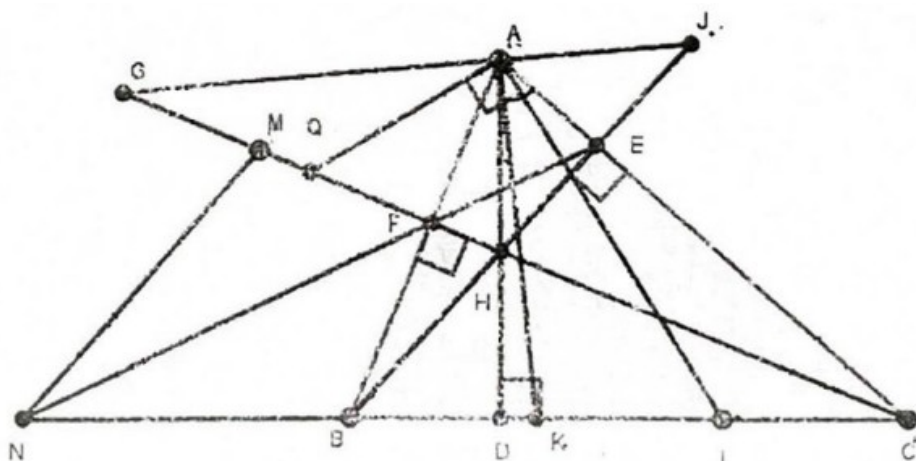
Suy ra $\Delta AHG \sim \Delta KBA(c.g.c) \Rightarrow \frac{AG}{AK} = \frac{AH}{BK}$ (1)

Chứng minh tương tự $\Delta AJH \sim \Delta KAC \Rightarrow \frac{AJ}{AK} = \frac{AH}{KC}$

Mặt khác $KC = 2KB \Rightarrow \frac{AJ}{AK} = \frac{AH}{2KB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AJ}{AK} = \frac{AG}{2.AK} \Rightarrow AG = 2.AJ$

c)



Trên tia đối của tia FC lấy điểm M sao cho $\angle FNM = \angle FCE$

Xét tam giác CEF và tam giác NMF có

$$\begin{cases} \angle FCE = \angle FNM (dd) \\ \angle CFE = \angle FNM \end{cases} \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle NMF (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{MF} = \frac{CF}{FN} \Rightarrow EF \cdot FN = FM \cdot CF \quad (3)$$

Tam giác ABC cân tại C có CF là đường cao đồng thời CF là đường phân giác

Nên $\angle FCN = \angle FCE$

Xét tam giác CNM và tam giác CFE có

$$\begin{cases} \angle NMC = \angle FEC (\triangle NMF \sim \triangle CEF) \\ \angle FCN = \angle FCE \end{cases} \Rightarrow \triangle CNM \sim \triangle CFE (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{CN}{CF} = \frac{CM}{CE} \Rightarrow CE \cdot CN = CM \cdot CF \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$CE \cdot CN - FE \cdot FN = CM \cdot CF - FM \cdot CF = CF(CM - FM) = CF^2$$

Câu 6:

Lấy 5 điểm bất kì phân biệt trên mp.

Theo nguyên lý Dirichle, tồn tại 3 điểm cùng màu, giả sử là màu đỏ. Gọi 3 điểm là A, B, C. Xét trọng tâm G của tam giác ABC.

TH1: G được tô đỏ $\Rightarrow$ tam giác ABC thỏa mãn

TH2: ô tô xanh. là lấy A, B, C sao cho $AA' = 3GA$; $BB' = 3GB$; $CC' = 3GC$ (A nằm giữa GA', B và C tương tự)

Gọi M, N, P là trung điểm 3 cạnh tam giác ABC.

|Cô $AA' = 3GA = 6GM$ nên $AA' = 2AM$. Tương tự $BB' = 2BN$; $CC' = 2CP$.

Vì vậy mà các tam giác A'BC, B'CA và C'AB tương ứng nhận A, B, C làm trọng tâm. Bên cạnh đó, có thể thấy các tam giác ABC và A'B'C' có chung trọng tâm G.

Nếu A', B', C' cùng tô xanh thì có tam giác A'B'C' và G thỏa mãn

Nếu 1 trong 3 điểm đc tô đỏ, giả sử là A thì tam giác A'BC và trọng tâm A cùng được tô đỏ $\Rightarrow$ thỏa mãn

Vậy luôn tìm được tam giác có 3 đỉnh và trọng tâm cùng màu.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH NĂM HỌC 2024 - 2025

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN THI: TOÁN - THCS.

*Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian phát đề.
(Đề thi có 02 trang, gồm 10 câu).*

Ngày thi: 14/12/2024

Câu 1 (2,0 điểm). Rút gọn biểu thức:

$$A = \left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2} - a+b} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad (\text{với } a > b > 0).$$

Câu 2 (2,0 điểm). Cho a, b là các số thực dương phân biệt thỏa mãn:

$$\frac{8b^8}{a^8-b^8} + \frac{4b^4}{a^4+b^4} + \frac{2b^2}{a^2+b^2} + \frac{b}{a+b} = 4 \quad \text{và} \quad a^2 = 2025 + b^2.$$

Tính giá trị biểu thức: $P = (a-b-10)^2 + 2000$.

Câu 3 (2,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{y+2} = 16x \\ (x^2+x)\sqrt{x-y+3} = 2x^2+x+y+1 \end{cases}$$

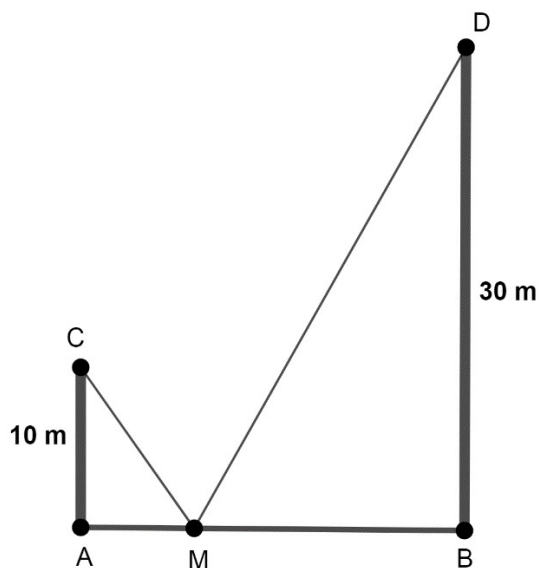
Câu 4 (2,0 điểm). Cho các chữ số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau viết được từ các chữ số nói trên. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập hợp X . Tính xác suất của biến cố A : “Số lấy ra là số lớn hơn 59000”.

Câu 5 (2,0 điểm). Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:

$$(2x - y - 2)^2 = 7(x - 2y - y^2 - 1)$$

Câu 6 (2,0 điểm). Cho số tự nhiên $n \geq 2$ và số nguyên tố p . Chứng minh rằng nếu $p-1$ chia hết cho n và $n^6 - 1$ chia hết cho p thì ít nhất một trong hai số $p-n$ và $p+n$ là số chính phương.

Câu 7 (1,5 điểm). Có hai chiếc cọc cao $10m$ và $30m$ đặt vuông góc với mặt đất tại hai vị trí A và B . Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng $24m$. Người ta đặt một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất, nằm giữa hai chân cọc để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của hai cọc (như hình vẽ). Hỏi người ta phải đặt chốt ở vị trí cách A một khoảng bằng bao nhiêu trên mặt đất để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất?



Câu 8 (3,5 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) , ba đường cao AD, BF, CE cắt nhau tại H , vẽ $OK \perp BC (K \in BC)$. Gọi I là trung điểm của AH , gọi J là giao điểm của AH và EF , kẻ đường kính AP của đường tròn (O) .

a. Chứng minh: $OK = \frac{1}{2}AH$ và IK đi qua trung điểm của EF .

b. Đường thẳng qua B song song với AC cắt đường thẳng CE tại S . Chứng minh: $IF^2 = IJ.ID$ và $KS \parallel CJ$.

Câu 9 (1,5 điểm). Cho tam giác ABC có ba cạnh tiếp xúc với đường tròn (I) . Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với AC và AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC . Chứng minh ba đường thẳng BI, MN, EF đồng quy.

Câu 10 (1,5 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $xyz(x+y+z)=3$. Chứng minh rằng:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{1}{243} (x^5 - 2x + 4)^2 (y^5 - 2y + 4)^2 (z^5 - 2z + 4)^2$$

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

Chữ ký của Giám thị 1:.....; Chữ ký của Giám thị 2:.....

ĐÁP ÁN, THANG ĐIỂM CHẤM

ĐỀ THI MÔN: TOÁN - THCS.

(Hướng dẫn chấm gồm 10 trang).

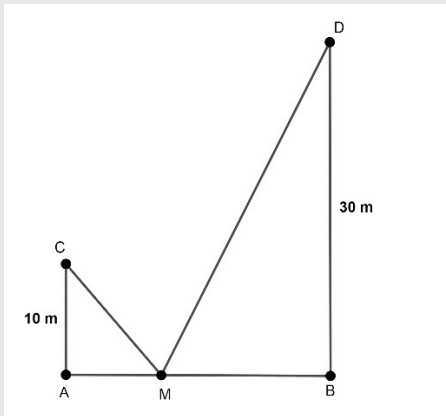
Câu	Nội dung đáp án	Điểm
Câu 1	Rút gọn biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2} - a + b} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad (\text{với } a > b > 0).$	2,0
	Với $a > b > 0$, ta có: $A = \left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2} - a + b} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ $A = \left[\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}} + \frac{a-b}{\sqrt{(a-b)(a+b)} - (a-b)} \right] \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$	0,25
	$A = \left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}} + \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$	0,25
	$A = \left(\frac{\sqrt{a-b}(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b})}{(a+b) - (a-b)} + \frac{\sqrt{a-b}(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})}{(a+b) - (a-b)} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$	0,25
	$A = \frac{\sqrt{a^2-b^2} - a + b + \sqrt{a^2-b^2} + a - b}{2b} \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$	0,5
	$A = \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{2b} \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$	0,25
	$A = \frac{a^2+b^2}{b}$	0,25
	Vậy $A = \frac{a^2+b^2}{b}$ với $a > b > 0$.	0,25
Câu 2	Cho a, b là các số thực dương phân biệt thỏa mãn: $\frac{8b^8}{a^8-b^8} + \frac{4b^4}{a^4+b^4} + \frac{2b^2}{a^2+b^2} + \frac{b}{a+b} = 4$ và $a^2 = 2025 + b^2$.	2,0

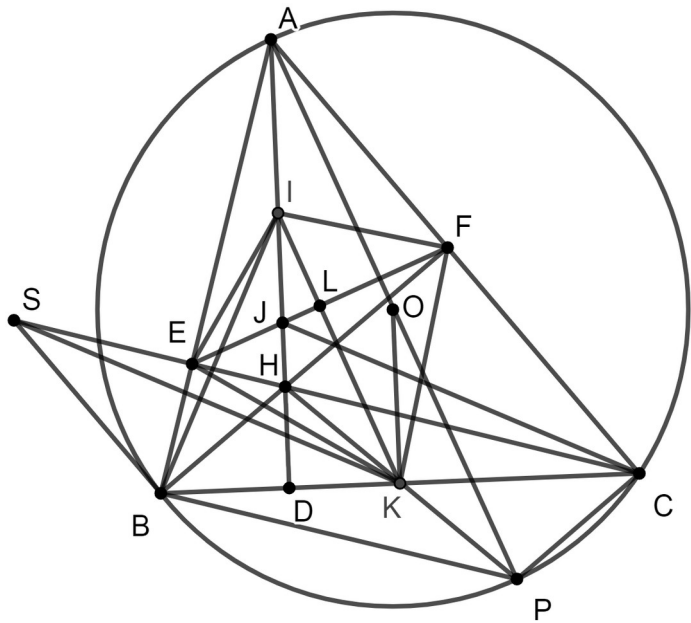
Tính giá trị biểu thức: $P = (a - b - 10)^2 + 2000$	
$\frac{8b^8}{a^8 - b^8} + \frac{4b^4}{a^4 + b^4} + \frac{2b^2}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a + b} = 4$ $\Leftrightarrow \frac{8b^8}{a^8 - b^8} + \frac{4b^4(a^4 - b^4)}{a^8 - b^8} + \frac{2b^2}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a + b} = 4$ $\Leftrightarrow \frac{8b^8 + 4a^4b^4 - 4b^8}{a^8 - b^8} + \frac{2b^2}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a + b} = 4$	0,25
$\Leftrightarrow \frac{4a^4b^4 + 4b^8}{a^8 - b^8} + \frac{2b^2}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a + b} = 4$ $\Leftrightarrow \frac{4b^4(a^4 + b^4)}{(a^4 + b^4)(a^4 - b^4)} + \frac{2b^2}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a + b} = 4$ $\Leftrightarrow \frac{4b^4}{a^4 - b^4} + \frac{2b^2}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a + b} = 4$	0,25
$\Leftrightarrow \frac{4b^4}{a^4 - b^4} + \frac{2b^2(a^2 - b^2)}{a^4 - b^4} + \frac{b}{a + b} = 4$ $\Leftrightarrow \frac{2a^2b^2 + 2b^4}{a^4 - b^4} + \frac{b}{a + b} = 4$ $\Leftrightarrow \frac{2b^2(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)} + \frac{b}{a + b} = 4$	0,25
$\Leftrightarrow \frac{2b^2}{a^2 - b^2} + \frac{b}{a + b} = 4$ $\Leftrightarrow \frac{2b^2}{a^2 - b^2} + \frac{b(a - b)}{a^2 - b^2} = 4$ $\Leftrightarrow \frac{ab + b^2}{a^2 - b^2} = 4$ $\Leftrightarrow \frac{b(a + b)}{(a + b)(a - b)} = 4$	0,25
$\Leftrightarrow \frac{b}{a - b} = 4 \Leftrightarrow 4a = 5b$ $\Leftrightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{a^2}{5^2} = \frac{b^2}{4^2}$ $a^2 = 2025 + b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 2025$ <p>Từ</p>	0,25
<p>Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:</p>	0,25

	$\frac{a^2}{5^2} = \frac{b^2}{4^2} = \frac{a^2 - b^2}{25 - 16} = \frac{2025}{9} = 225$ $\Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{4} = 15 \quad (\text{vì } a > 0, b > 0).$ <p>suy ra: $a = 75, b = 60$.</p>	
	Thay $a = 75, b = 60$ vào biểu thức P ta có: $P = (75 - 60 - 10)^2 + 2000 = 5^2 + 2000 = 2025$	0,25
	Vậy $P = 2025$.	0,25
	Chú ý: nếu học sinh xét thừa trường hợp thì trừ 0,25 điểm.	
Câu 3	<p>Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{y+2} = 16x & (1) \\ (x^2 + x)\sqrt{x-y+3} = 2x^2 + x + y + 1 & (2) \end{cases}$</p>	2,0
	Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -2 \\ x - y + 3 \geq 0 \end{cases}$	0,25
	Từ phương trình (2) ta có $(x^2 + x)\sqrt{x-y+3} = 2(x^2 + x) - x + y + 1$ $\Leftrightarrow (x^2 + x)(\sqrt{x-y+3} - 2) + x - y - 1 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x^2 + x) \frac{x - y - 1}{\sqrt{x-y+3} + 2} + x - y - 1 = 0$ $\Leftrightarrow (x - y - 1) \left(\frac{x^2 + x}{\sqrt{x-y+3} + 2} + 1 \right) = 0$	0,25
	Vì $x \geq 1$ nên $\frac{x^2 + x}{\sqrt{x-y+3} + 2} + 1 > 0$	0,25
	Suy ra: $x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = x - 1$ thế vào phương trình (1) ta được: $13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 16x$	0,25
	$\Leftrightarrow 13 \left(x - 1 - \sqrt{x-1} + \frac{1}{4} \right) + 3 \left(x + 1 - 3\sqrt{x+1} + \frac{9}{4} \right) = 0$ $\Leftrightarrow 13 \left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2} \right)^2 + 3 \left(\sqrt{x+1} - \frac{3}{2} \right)^2 = 0$	0,25
	Vì $\left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0; \left(\sqrt{x+1} - \frac{3}{2} \right)^2 \geq 0$ với mọi $x \geq 1$ nên $13 \left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2} \right)^2 + 3 \left(\sqrt{x+1} - \frac{3}{2} \right)^2 \geq 0$	0,25

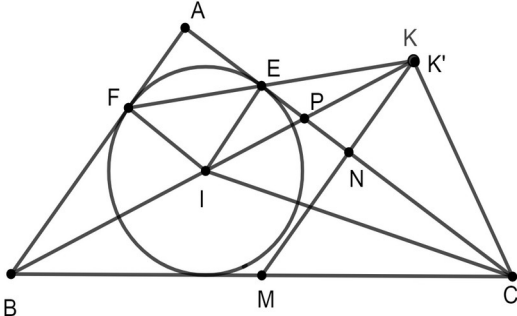
	$\begin{cases} \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{x+1} = \frac{3}{2} \end{cases}$ <p>Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:</p> $x = \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4} \quad (\text{thỏa mãn}).$ <p>Suy ra:</p>	
	Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $\left(\frac{5}{4}; \frac{1}{4}\right)$.	0,25
Câu 4	Cho các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau viết được từ các chữ số nói trên. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập hợp X . Tính xác suất của biến cố A : "Số lấy ra là số lớn hơn 59000".	2,0
	Gọi số có 5 chữ số khác nhau là $\overline{abcde}$ ($a \neq 0$). Vì $a \neq 0$ nên a có 9 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 8 cách chọn, d có 7 cách chọn, e có 6 cách chọn.	0,25
	Số các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được viết từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 là: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$ (số). Suy ra có 27216 kết quả có thể. Các kết quả là đồng khả năng xảy ra.	0,25
	Để $\overline{abcde}$ lớn hơn 59000 nên ta xét các trường hợp: Trường hợp 1: $a = 5$; $b = 9$ thì c có 8 cách chọn, d có 7 cách chọn, e có 6 cách chọn.	0,25
	Suy ra có $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ (số).	0,25
	Trường hợp 2: $a > 5$ thì a có 4 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 8 cách chọn, d có 7 cách chọn, e có 6 cách chọn.	0,25
	Suy ra có $4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 12096$ (số).	0,25
	Vậy có $336 + 12096 = 12432$ kết quả thuận lợi cho biến cố A .	0,25
	Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{12432}{27216} = \frac{37}{81}$.	0,25
Câu 5	Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $(2x - y - 2)^2 = 7(x - 2y - y^2 - 1)$	2,0
	Phương trình đã cho tương đương với: $2(2x - y - 2)^2 = 7(2x - y - 2 - 2y^2 - 3y)$ $\Leftrightarrow 2(2x - y - 2)^2 = 7(2x - y - 2) - 7(2y^2 + 3y)$ $\Leftrightarrow 2(2x - y - 2)^2 - 7(2x - y - 2) + 7(2y^2 + 3y) = 0$	0,5
	Đặt $t = 2x - y - 2$ ($t \in \mathbb{Z}$), ta được: $2t^2 - 7t + 7(2y^2 + 3y) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow 16t^2 - 56t + 49 + 7(16y^2 + 24y + 9) = 112$ $\Leftrightarrow (4t - 7)^2 + 7(4y + 3)^2 = 112$	0,25

	Vì $(4t-7)^2 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{Q}$ nên $7(4y+3)^2 < 112$ suy ra $(4y+3)^2 < 16$	0,25
	$\Leftrightarrow -4 < 4y+3 < 4$ $\Leftrightarrow -7 < 4y < 1$ $\Leftrightarrow \frac{-7}{4} < y < \frac{1}{4}$ Mà $y \in \mathbb{Q}$ nên $y \in \{-1; 0\}$	0,25
	Với $y = -1$ thì $(4t-7)^2 = 105$ (loại). Với $y = 0$ thì $(4t-7)^2 = 49$ suy ra $t = \frac{7}{2}$ hoặc $t = 0$ Mà $t \in \mathbb{Q}$ nên $t = 0$, khi đó: $x = 1$ (thỏa mãn).	0,25
	Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(1; 0)$.	0,25
Câu 6	Cho số tự nhiên $n \geq 2$ và số nguyên tố p . Chứng minh rằng nếu $p-1$ chia hết cho n và n^6-1 chia hết cho p thì ít nhất một trong hai số $p-n$ và $p+n$ là số chính phương.	2,0
	Ta có: $n^6-1 = (n^3)^2-1 = (n^3-1)(n^3+1)$ $= (n-1)(n^2+n+1)(n+1)(n^2-n+1)$	0,25
	Vì $n^6-1 \vdots p$ và p là số nguyên tố nên ta xét các trường hợp sau:	
	Trường hợp 1: $n-1 \vdots p \Rightarrow n-1 = lp$ ($l \in \mathbb{Q}^*$) $\Leftrightarrow n = lp+1$	0,25
	Mà $p-1 \vdots n$ nên ta có: $(p-1) \vdots (lp+1) \Rightarrow p-1 \geq lp+1$ (vì $p-1 > 0$) $\Rightarrow (l-1)p \leq -2 \Rightarrow l-1 < 0 \Rightarrow l < 1$ (loại vì $l \in \mathbb{Q}^*$)	0,25
	Trường hợp 2: $n+1 \vdots p \Rightarrow n+1 = ap$ ($a \in \mathbb{Q}^*$) $\Leftrightarrow n = ap-1$ Mà $p-1 \vdots n$ nên ta có: $(p-1) \vdots (ap-1) \Rightarrow p-1 \geq ap-1$ (vì $p-1 > 0$) $\Rightarrow (a-1)p \leq 0$ $\Rightarrow a-1 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 1$ Mà $a \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow a = 1; n = p-1$ Khi đó $p-n=1$ là số chính phương.	0,25
	Trường hợp 3: $n^2+n+1 \vdots p$ Vì $p-1 \vdots n$ nên $p-1 = kn$ ($k \in \mathbb{Q}^*$) $\Leftrightarrow p = kn+1$ Ta có: $n^2+n+1 = n^2 - kn + n + kn + 1 = n(n-k+1) + kn+1$ là bội của $kn+1$ Suy ra $n(n-k+1) \vdots kn+1$ Do $(n, kn+1) = 1$ nên $(n-k+1) \vdots (kn+1)$	0,25

	<p>Với $k, n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $-(kn+1) \leq -k-1 < n-k+1 \leq n \leq kn < kn+1$</p> <p>Suy ra $n-k+1=0$ hay $k=n+1$. Khi đó $p=n^2+n+1$</p> <p>Như vậy $p+n=(n+1)^2$ là số chính phương.</p>	0,25
	<p>Trường hợp 4: $n^2-n+1 \vdots p$.</p> <p>Vì $p-1 \vdots n$ nên $p-1=kn \ (k \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow p=kn+1$</p> <p>Ta có: $n^2-n+1=n^2-kn-n+kn+1=n(n-k-1)+kn+1$ là bội của $kn+1$</p> <p>Suy ra $n(n-k-1) \vdots kn+1$</p> <p>Do $(n, kn+1)=1$ nên $(n-k-1) \vdots (kn+1)$</p>	0,25
	<p>Với $k, n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $-(kn+1) \leq -k-1 < n-k-1 < n \leq kn < kn+1$</p> <p>Suy ra $n-k-1=0$ hay $k=n-1$. Khi đó $p=n^2-n+1$</p> <p>Như vậy $p-n=(n-1)^2$ là số chính phương.</p>	0,25
Câu 7	<p>Có hai chiếc cọc cao 10 m và 30 m đặt vuông góc với mặt đất tại hai vị trí A và B. Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng 24 m. Người ta đặt một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất, nằm giữa hai chân cọc để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của hai cọc (như hình vẽ). Hỏi người ta phải đặt chốt ở vị trí cách A một khoảng bằng bao nhiêu trên mặt đất để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất?</p> 	1,5
	<p>Đặt $AM = x \text{ (m)} \ (0 < x < 24)$. Khi đó $MB = 24 - x \text{ (m)}$.</p>	0,25
	<p>Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông CAM và DBM, ta có:</p> $CM = \sqrt{CA^2 + AM^2} = \sqrt{10^2 + x^2} \text{ (m)}$	0,25
	$DM = \sqrt{BD^2 + BM^2} = \sqrt{30^2 + (24-x)^2} \text{ (m)}$ $CM + DM = \sqrt{10^2 + x^2} + \sqrt{30^2 + (24-x)^2} \text{ (m)}$	0,25
	<p>Ta chứng minh bất đẳng thức sau: Với mọi số thực a, b, c, d thì:</p> $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$ <p>Thật vậy: Với mọi số thực a, b, c, d thì:</p> $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \quad (1)$	0,25

	$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq (a + c)^2 + (b + d)^2$ $\Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq ac + bd \quad (2)$ <p>Nếu $ac + bd < 0$ thì (2) luôn đúng.</p> <p>Nếu $ac + bd \geq 0$, bình phương hai vế của (2) ta được:</p> $(ad - bc)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}), \text{ suy ra: } \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$ <p>Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $ad = bc$.</p> <p>Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có:</p> $CM + DM = \sqrt{10^2 + x^2} + \sqrt{30^2 + (24 - x)^2} \geq \sqrt{(10 + 30)^2 + (x + 24 - x)^2}$ $CM + DM \geq \sqrt{2176}$ <p>Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $10(24 - x) = 30x$ suy ra $x = 6$ (thỏa mãn).</p> <p>Vậy người ta phải đặt chốt ở vị trí M cách A một đoạn $6m$ thì tổng độ dài hai dây ngắn nhất.</p>	
		0,25
		0,25
Câu 8	<p>Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), ba đường cao AD, BF, CE cắt nhau tại H, vẽ $OK \perp BC (K \in BC)$. Gọi I là trung điểm của AH, gọi J là giao điểm của AH và EF, kẻ đường kính AP của đường tròn (O).</p>	3,5
		
	<p>a. Chứng minh: $OK = \frac{1}{2}AH$ và IK đi qua trung điểm của EF.</p>	2,0
	<p>Vì C thuộc đường tròn đường kính AP nên $\triangle ACP$ vuông tại C $\Rightarrow PC \perp AC$ mà $BH \perp AC \Rightarrow PC \parallel BH$.</p> <p>Tương tự ta có: $PB \parallel CH$</p> <p>Suy ra tứ giác $BHCP$ là hình bình hành nên BC và HP cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.</p>	0,25
	Mà $\triangle OBC$ cân tại O có $OK \perp BC$ nên K là trung điểm của BC do đó K	0,25

cũng là trung điểm của PH .	
Tam giác AHP có O và K lần lượt là trung điểm của AP và HP nên OK là đường trung bình của $\Delta APH \Rightarrow OK = \frac{1}{2}AH$.	0,5
ΔAHF vuông tại F có FI là đường trung tuyến nên $FI = \frac{1}{2}AH$.	0,25
Tương tự: $EI = \frac{1}{2}AH$ Suy ra $EI = FI$ nên I thuộc đường trung trực của đoạn thẳng EF .	0,25
Chứng minh tương tự: K thuộc đường trung trực của đoạn thẳng EF . Do đó IK là đường trung trực của đoạn thẳng EF hay IK đi qua trung điểm của EF .	0,5
b. Đường thẳng qua B song song với AC cắt đường thẳng CE tại S. Chứng minh: $IF^2 = IJ.ID$ và $KS \parallel CJ$.	1,5
Gọi L là giao điểm của KI và EF . Vì $IF = IA = \frac{AH}{2}$ nên ΔAIF cân tại $I \Rightarrow \angle FAI = \angle IFA$ Tương tự: $\angle KFC = \angle KCF$ Mà $\angle KCF + \angle FAI = 90^\circ$ nên $\angle AFI + \angle CFK = 90^\circ \Rightarrow \angle IFK = 90^\circ$ ΔIFK vuông tại F có FL là đường cao suy ra: $IF^2 = IL.IK$ (1)	0,25
$\Delta ILJ \sim \Delta IDK$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IL}{ID} = \frac{IJ}{IK} \Rightarrow IL.IK = IJ.ID$ (2) Từ (1) và (2) suy ra: $IF^2 = IJ.ID$.	0,25
Ta có: $\Delta DBH \sim \Delta DAC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{DB}{DA} = \frac{DH}{DC} \Rightarrow DB.DC = DH.DA$ (3) Lại có: $IF^2 = IJ.ID \Rightarrow IA^2 = ID(ID - JD)$ $\Rightarrow ID.JD = ID^2 - IA^2 = (ID + IA)(ID - IA) = DA.(ID - IH) = DA.HD$ (4)	0,25
Từ (3) và (4) suy ra: $DB.DC = ID.JD \Rightarrow \frac{DB}{JD} = \frac{ID}{DC}$ ΔDBI và ΔDJC có $\angle BDI = \angle JDC = 90^\circ$ và $\frac{DB}{JD} = \frac{ID}{DC}$ suy ra $\Delta DBI \sim \Delta DJC$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle DIB = \angle DCJ$ (5)	0,25
Do $BS \parallel AC$ mà $BF \perp AC \Rightarrow BF \perp BS$ suy ra $\angle BSC = \angle HBA$ (cùng phụ với $\angle SBE$) Lại có $\angle BCS = \angle BAH$ (cùng phụ với $\angle ABC$) Suy ra $\Delta SBC \sim \Delta BHA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{SB}{BH} = \frac{BC}{HA} = \frac{2BK}{2IH} = \frac{BK}{IH}$	0,25
ΔSBK và ΔBHI có: $\angle SBK = \angle BHI$ và $\frac{SB}{BH} = \frac{BK}{IH} \Rightarrow \Delta SBK \sim \Delta BHI$ (c.g.c)	0,25

	$\Rightarrow \angle BKS = \angle HIB$ hay $\angle BKS = \angle DIB$ (6) Từ (5) và (6) suy ra: $\angle BKS = \angle DCJ$, mà 2 góc này ở vị trí đồng vị nên $KS \parallel CJ$.	
Câu 9	Cho tam giác ABC có ba cạnh tiếp xúc với đường tròn (I) . Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với AC và AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC . Chứng minh ba đường thẳng BI, MN, EF đồng quy.	1,5
		
	Gọi K là giao điểm của BI và EF . Ta có $\angle BIC = 180^\circ - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$	0,25
	Suy ra $\angle KIC = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$	0,25
	Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $AE = AF \Rightarrow \triangle AEF$ cân tại A $\Rightarrow \angle AEF = \angle AFE = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$ Suy ra $\angle KIC = \angle AEF$ mà $\angle KEC = \angle AEF$ (đối đỉnh). Suy ra $\angle KIC = \angle KEC$.	0,25
	Gọi P là giao điểm của BK và AC . $\Rightarrow \triangle IPC \sim \triangle EPK$ (g.g) $\frac{PI}{PE} = \frac{PC}{PK}$ mà $\angle EPI = \angle KPC$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \triangle IEP \sim \triangle CKP$ (c.g.c) $\angle IEP = \angle CKP = 90^\circ$ (hai góc tương ứng) Hay $\angle BKC = 90^\circ$ (1)	0,25
	Gọi K' là giao điểm của BI và MN . Vì MN là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $MN \parallel AB$. Suy ra $\angle BK'M = \angle ABK'$ (so le trong)	0,25
	Mà $\angle K'BM = \angle ABK'$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \angle BK'M = \angle K'BM \Rightarrow \triangle BK'M$ cân tại M . $\Rightarrow MB = MK'$ mà $MB = MC \Rightarrow MB = MC = MK'$ Suy ra $\triangle BK'C$ vuông tại K' hay $\angle BK'C = 90^\circ$ (2)	0,25

	<p>Từ (1) và (2) suy ra K trùng K'.</p> <p>Vậy ba đường thẳng BI, MN, EF đồng quy.</p>	
Câu 10	<p>Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $xyz(x+y+z)=3$. Chứng minh rằng:</p> $x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{1}{243} (x^5 - 2x + 4)^2 (y^5 - 2y + 4)^2 (z^5 - 2z + 4)^2$	1,5
	<p>Ta có:</p> $x^5 - 2x + 4 - (x^3 + 2) = x^5 - x^3 - 2x + 2$ $= (x-1)^2 (x^3 + 2x^2 + 2x + 2) \geq 0 \quad \text{với mọi } x > 0$ $\Rightarrow x^5 - 2x + 4 \geq x^3 + 2 \quad \text{với mọi } x > 0$ <p>Tương tự $y^5 - 2y + 4 \geq y^3 + 2$ với mọi $y > 0$</p> $z^5 - 2z + 4 \geq z^3 + 2 \quad \text{với mọi } z > 0.$ <p>Suy ra $(x^5 - 2x + 4)(y^5 - 2y + 4)(z^5 - 2z + 4) \geq (x^3 + 2)(y^3 + 2)(z^3 + 2) \quad (1)$</p>	0,25
	<p>Cần chứng minh bất đẳng thức phụ sau: Cho $a, b, c, x, y, z, m, n, p$ là các số thực dương, ta có:</p> $(a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(m^3 + n^3 + p^3) \geq (axm + byn + czp)^3$ <p>Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:</p> $\frac{a^3}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{x^3}{x^3 + y^3 + z^3} + \frac{m^3}{m^3 + n^3 + p^3} \geq \frac{3axm}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(m^3 + n^3 + p^3)}}$ <p>Tương tự, ta có:</p> $\frac{b^3}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{y^3}{x^3 + y^3 + z^3} + \frac{n^3}{m^3 + n^3 + p^3} \geq \frac{3byn}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(m^3 + n^3 + p^3)}}$ $\frac{c^3}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{z^3}{x^3 + y^3 + z^3} + \frac{p^3}{m^3 + n^3 + p^3} \geq \frac{3czp}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(m^3 + n^3 + p^3)}}$ <p>Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:</p> $(a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(m^3 + n^3 + p^3) \geq (axm + byn + czp)^3$ <p>(với $a, b, c, x, y, z, m, n, p$).</p>	0,25
	<p>Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có:</p> $(x^3 + 2)(y^3 + 2)(z^3 + 2) = (x^3 + 1^3 + 1^3)(1^3 + y^3 + 1^3)(1^3 + 1^3 + z^3)$ $\geq (x \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot y \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot z)^3 = (x + y + z)^3 \quad (2)$ <p>Từ (1), (2) suy ra:</p> $(x^5 - 2x + 4)(y^5 - 2y + 4)(z^5 - 2z + 4) \geq (x + y + z)^3$ $\Leftrightarrow (x + y + z)^6 \leq (x^5 - 2x + 4)^2 (y^5 - 2y + 4)^2 (z^5 - 2z + 4)^2 \quad (3)$	0,25
	<p>Từ bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$, ta được:</p> $(xy + yz + zx)^2 \geq 3xyz(x + y + z)$	0,25
	<p>Mặt khác:</p> $(x + y + z)^6 = [(x + y + z)^2]^3 = [x^2 + y^2 + z^2 + (xy + yz + zx) + (xy + yz + zx)]^3$ $\geq [3\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx)(xy + yz + zx)}]^3 = 27(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx)^2$ $\geq 27(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 3xyz \cdot (x + y + z) = 27(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 3 \cdot 3 = 243(x^2 + y^2 + z^2)$	0,25

	$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{1}{243} (x + y + z)^6 \quad (4)$	
	<p>Từ (3), (4) suy ra: $x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{1}{243} (x^5 - 2x + 4)^2 (y^5 - 2y + 4)^2 (z^5 - 2z + 4)^2$</p> <p>Dấu "=" khi và chỉ khi: $\begin{cases} x - 1 = y - 1 = z - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \\ xyz(x + y + z) = 3 \end{cases}$</p> <p>Suy ra: $x = y = z = 1$.</p> <p>Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{1}{243} (x^5 - 2x + 4)^2 (y^5 - 2y + 4)^2 (z^5 - 2z + 4)^2$, với x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $xyz(x + y + z) = 3$.</p>	0,25

Chú ý:

- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.

- Để giải các dạng bài tập Hình Học trong đề thi học sinh chỉ sử dụng kiến thức đến tại thời điểm thi. Bài Hình nếu không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì không cho điểm.

- Học sinh được dùng dấu " $\Rightarrow$ ", " $\Leftrightarrow$ "

- Các trường hợp khác tổ chấm thống nhất phương án chấm.

----- HẾT -----