

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Họ và tên thí sinh :Số báo danh

Họ và tên, chữ ký: Giám thị thứ nhất:

Giám thị thứ hai:

Câu 1 (4,0 điểm)

Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = \frac{7}{23} \cdot \frac{5}{17} + \frac{7}{23} \cdot \frac{12}{17} + \frac{-30}{23}$$

$$b) B = \frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} - \frac{3}{12}}{0,625 - 0,5 + \frac{5}{11} - \frac{5}{12}}$$

$$c) M = a + 3b + 2c, \text{ biết } a + b = 5; b + c = -8.$$

Câu 2 (4,0 điểm)

$$a) \text{ Tìm } x, y, z \text{ biết: } \frac{x}{3} = \frac{y}{4}, \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \text{ và } 2x - 3y + z = -6.$$

$$b) \text{ Tìm số nguyên } x, y \text{ biết } 2xy - x + y = 6.$$

Câu 3 (4,0 điểm)

a) Cho đa thức $Q(x) = ax^2 + bx + 4c$. Chứng minh rằng nếu đa thức $Q(x)$ nhận 2 và -2 là nghiệm thì a và c là hai số đối nhau.

$$b) \text{ Cho } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ với } b \neq 0, d \neq 0; c \neq d. \text{ Chứng minh rằng } \frac{(a-b)^{2023}}{a^{2023} - b^{2023}} = \frac{(c-d)^{2023}}{c^{2023} - d^{2023}}.$$

c) Chứng tỏ rằng tích của hai số nguyên lẻ liên tiếp cộng thêm 9 thì chia hết cho 4.

Câu 4 (6,0 điểm)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$), D là trung điểm của BC, trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DE = DA$. Gọi H và K thứ tự là chân đường vuông góc hạ từ B và C xuống đường thẳng AE, M là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AC.

$$a) \text{ Chứng minh } BK = CH.$$

$$b) \text{ Chứng minh } CD > KM.$$

c) Từ E kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại P và cắt BH tại N. Chứng minh ba điểm D, M, N thẳng hàng.

d) Giả sử $\angle ACB = 36^\circ$, tia phân giác của $\angle ACB$ cắt AD tại F. Chứng minh tam giác CEF là tam giác cân.

Câu 5 (2,0 điểm)

a) Một cái hộp đựng 60 quả bóng giống nhau, gồm ba màu: màu đỏ, màu xanh và màu vàng. Trong đó có 18 quả bóng màu đỏ và 25 quả bóng màu vàng. Hỏi cần phải lấy ra ngẫu nhiên ít nhất bao nhiêu quả bóng để chắc chắn rằng lấy ra được 2 quả bóng xanh?

$$P = 6 \left| y - \frac{1}{8} \right| + x^2 - 4x + 7.$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

-----Hết-----

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN GIA VIỄN

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI CHỌN HSG LỚP 7 THCS
NĂM HỌC 2022-2023

Môn: Toán

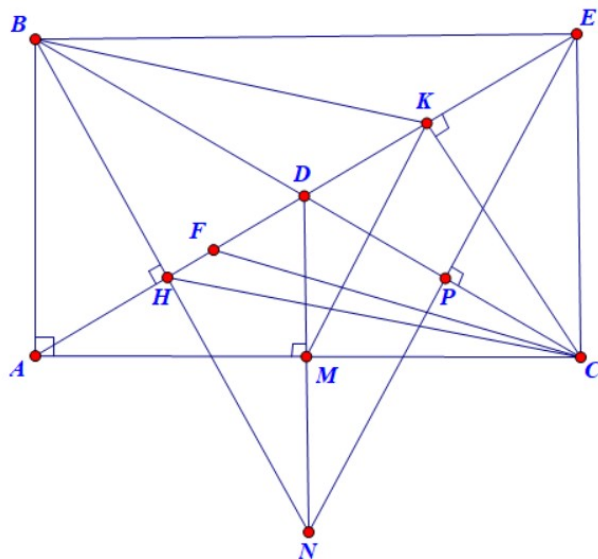
Ngày thi 30/3/2023

(Hướng dẫn chấm này gồm 04 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1: (4,0 điểm)	a) (1,5 điểm)	
	$A = \frac{7}{23} \cdot \frac{5}{17} + \frac{7}{23} \cdot \frac{12}{17} + \frac{-30}{23} = \frac{7}{23} \cdot \left(\frac{5}{17} + \frac{12}{17} \right) + \frac{-30}{23}$	0,5
	$= \frac{7}{23} \cdot 1 + \frac{-30}{23} = \frac{-23}{23} = -1.$	1,0
	b) (1,5 điểm)	
	$B = \frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} - \frac{3}{12}}{0,625 - 0,5 + \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} = \frac{\frac{3}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{11} - \frac{3}{12}}{\frac{5}{8} - \frac{5}{10} + \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right)}{5 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right)} = \frac{3}{5}.$	1,5
	c) (1,0 điểm)	
	$M = a + 3b + 2c = (a + b) + 2b + 2c$ Ta có:	02,5
	$M = (a + b) + 2(b + c)$	0,25
Câu 2: (4,0 điểm)	Thay $a + b = 5; b + c = -8$ vào $M = (a + b) + 2(b + c)$ ta được:	0,5
	$M = 5 + 2(-8) = 5 + (-16) = -11$	
	a) (2,0 điểm)	
	$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} \quad (1); \quad \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \quad (2)$	0,5
	Từ (1) và (2) ta có $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20}.$	0,5
	$\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = \frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20} = \frac{2x - 3y + z}{18 - 36 + 20} = \frac{-6}{2} = -3$	0,5
	Tìm được $x = -27; y = -36; z = -60.$	0,5
	b) (2,0 điểm)	
	$2xy - x + y = 6. \Rightarrow 4xy - 2x + 2y = 12 \Rightarrow 2x(2y - 1) + (2y - 1) = 12 - 1$ $\Rightarrow (2x + 1)(2y - 1) = 11$	0,5
	$\Rightarrow 2y - 1; 2x + 1 \in U(11) \Rightarrow 2y - 1; 2x + 1 \in \{\pm 1; \pm 11\}$	0,5

	Giải tìm được 4 cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn là: (0;6);(-1;-5);(5;1);(-6;0).	1,0
	Cách 2: $2xy - x + y = 6 \Rightarrow y(2x+1) = x+6 \Rightarrow y = \frac{x+6}{2x+1} \in \mathbb{Z}$	0,5
	$\Rightarrow x+6 \mid (2x+1) \Rightarrow 2(x+6) - (2x+1) \mid (2x+1) \Rightarrow 11 \mid (2x+1)$	0,5
	$\Rightarrow 2x+1 \in U(11) \Rightarrow 2x+1 \in \{\pm 1; \pm 11\}$ Giải tìm được 4 cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn là: (0;6);(-1;-5);(5;1);(-6;0).	1,0
Câu 3: (4,0 điểm)	a) (1,5 điểm)	
	Vì $Q(x) = ax^2 + bx + 4c$ nhận 2 và -2 là nghiệm nên $Q(2) = 0; Q(-2) = 0$.	0,5
	Ta có: $Q(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 4c = 4a + 2b + 4c = 0$ $Q(-2) = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 4c = 4a - 2b + 4c = 0$	0,5
	$\Rightarrow 4a + 2b + 4c + 4a - 2b + 4c = 0 \Rightarrow 8a + 8c = 0$	0,25
	$\Rightarrow 8(a+c) = 0 \Rightarrow a+c = 0$ $\Rightarrow a$ và c là hai số đối nhau.	0,25
	b) (1,5 điểm)	
	Với $b \neq 0, d \neq 0; c \neq d$, thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d} \quad (1)$	0,5
	$\Rightarrow \frac{a^{2023}}{c^{2023}} = \frac{b^{2023}}{d^{2023}} = \frac{(a-b)^{2023}}{(c-d)^{2023}} \quad (2)$	0,5
	Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{a^{2023}}{c^{2023}} = \frac{b^{2023}}{d^{2023}} = \frac{(a-b)^{2023}}{(c-d)^{2023}} = \frac{a^{2023} - b^{2023}}{c^{2023} - d^{2023}}$ $\Rightarrow \frac{(a-b)^{2023}}{a^{2023} - b^{2023}} = \frac{(c-d)^{2023}}{c^{2023} - d^{2023}}$	0,5
	c) (1,0 điểm)	
	Gọi hai số nguyên lẻ liên tiếp là $2a+1$ và $2a-1$ ($a \in \mathbb{Z}$) Tích của hai số nguyên lẻ liên tiếp cộng thêm 9 bằng: $(2a+1)(2a-1)+9$	0,25 0,25
	$= 4a^2 - 2a + 2a - 1 + 9$ $= 4a^2 + 8$ $= 4(a^2 + 2)$	0,25
	Vậy tích của hai số nguyên lẻ liên tiếp cộng thêm 9 thì chia hết cho 4.	0,25

Câu 4:
(6,0 điểm)



0,5

a) (1,5 điểm)

Chứng minh $\triangle HBD = \triangle KCD$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow HD = KD$

0,75

Chứng minh $\triangle DBK = \triangle DCH$ (c-g-c) $\Rightarrow BK = CH$

0,75

b) (2,0 điểm)

Chứng minh: $AM = MC \Rightarrow \triangle AMC$ cân tại M

0,5

Chứng minh: $\triangle AMC$ cân tại M, có DM là đường cao nên đồng thời là trung tuyến. Suy ra M là trung điểm của AC.

0,5

Xét $\triangle ACK$ vuông tại K, có KM là trung tuyến nên $KM = \frac{1}{2} AC$ (1)
Mà $CD = \frac{1}{2} BC$ (2)

0,5

Lại có $\triangle ABC$ vuông tại A $\Rightarrow BC > AC$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow CD > KM$.

0,5

c) (1,0 điểm)

Chứng minh $BE \parallel AC$

0,25

Xét $\triangle BEN$ có hai đường cao BP và EH cắt nhau tại D nên điểm D là trực tâm của $\triangle BEN \Rightarrow ND \perp BE$ (4)

0,25

Lại có $DM \perp AC$ (gt), mà $BE \parallel AC \Rightarrow NM \perp BE$ (5)

0,25

Từ (3), (4) và (5) suy ra ba điểm D, M, N thẳng hàng.

0,25

d) (1,0 điểm)

$\triangle ABC$ vuông tại A, $\angle ACB = 36^\circ$ nên $\angle ABC = 54^\circ$

0,25

Có $\triangle ABD = \triangle ECD \Rightarrow \angle ABD = \angle ECD = 54^\circ$

Do đó $\angle ACE = \angle ACB + \angle BCE = 90^\circ$

Từ $\triangle ABC = \triangle CEA \Rightarrow \angle ACB = \angle CAE = 36^\circ$

0,25

Mặt khác, CF là phân giác $\angle ACB$ nên $\angle ACF = \angle DCF = 18^\circ$

$\angle FCE$ là góc ngoài của $\triangle ACE$ nên $\angle FCE = \angle ACF + \angle EAC = 18^\circ + 36^\circ = 54^\circ$

0,25

Tính được $\angle CEF = 54^\circ \Rightarrow \angle CEF = \angle FCE = 54^\circ$

$\Rightarrow \triangle CEF$ cân tại C.

0,25

a) (1,0 điểm)

Câu 5: (2,0 điểm)	Số quả bóng màu xanh là: $60 - 18 - 25 = 17$ (quả).	0,25
	Trường hợp xấu nhất: Ta lấy ra được 25 quả bóng màu vàng, 18 bóng màu đỏ và 1 quả bóng màu xanh. Khi đó, ta cần lấy thêm 1 quả bóng nữa thì chắc chắn có được 2 quả bóng màu xanh.	0,5
	Vậy cần lấy ít nhất là: $25 + 18 + 1 + 1 = 45$ quả bóng để thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	$P = 6 \cdot \left y - \frac{1}{8} \right + x^2 - 4x + 7.$ Ta có: $6 \cdot \left y - \frac{1}{8} \right \geq 0, \forall y$	0,25
	$x^2 - 4x + 7 = x^2 - 2x - 2x + 4 + 3 = x(x-2) - 2(x-2) + 3$ $= (x-2) \cdot (x-2) + 3 = (x-2)^2 + 3 > 0, \forall x \quad (\text{vì } (x-2)^2 \geq 0, \forall x)$	0,25
	$\Rightarrow P \geq 3, \forall x, y. \text{ Dấu "}" xảy ra khi: } \begin{cases} 6 \cdot \left y - \frac{1}{8} \right = 0 \\ (x-2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{8} \\ x = 2 \end{cases}$	0,25
	$\begin{cases} y = \frac{1}{8} \\ x = 2 \end{cases}$ Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 3 khi	0,25

Lưu ý:

- Lời giải trong hướng dẫn chấm chỉ trình bày tóm tắt, học sinh trình bày hoàn chỉnh, lý luận chặt chẽ mới cho điểm tối đa.
- Học sinh có thể trình bày nhiều cách giải khác nhau nếu đúng thì cho điểm tương ứng.