

CÁC DẠNG TOÁN BÀI ĐẦU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Dạng 1: Dấu của tam thức bậc hai

Phương pháp: Biến đổi biểu thức về các tam thức bậc hai và vận dụng các định lý về dấu của tam thức bậc hai.

- **Bước 1:** Tính và xác định dấu của biệt thức Δ
- **Bước 2:** Xác định nghiệm của $f(x)$ (nếu có)
- **Bước 3:** Xác định dấu của hệ số a
- **Bước 4:** Xác định dấu của $f(x)$

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xét dấu của các tam thức bậc hai sau:

a) $3x^2 - 2x + 1$

b) $-x^2 + 4x + 5$

c) $4x^2 + 4x + 1$

d) $2x^2 - 6x + \frac{9}{2}$

e) $3x^2 - 2x - 8$

f) $-x^2 + 2x - 1$

Lời giải

a) Ta có $\Delta' = -2 < 0$ và $a = 3 > 0$. Suy ra $3x^2 - 2x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$-x^2 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$$

b) Ta có:

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$	
$-x^2+4x+5$	$-$	0	$+$	0	$-$

Suy ra: $-x^2 + 4x + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 5)$ và $-x^2 + 4x + 5 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

c) Tam thức bậc hai $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ có $\Delta = 0$, nghiệm kép $x_0 = -\frac{1}{2}$ và hệ số $a = 4 > 0$

Khi đó $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

d) Ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$+$

Suy ra: $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

e) Ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	2	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Suy ra: $f(x) > 0 \Leftrightarrow \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup (2; +\infty)$ và $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}; 2\right)$.

f) Ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$-$

Suy ra: $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Bài tập 2: Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x) = 2x^2 + x + 6$

b) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

c) $f(x) = x^2 - \frac{3}{2}x - 1$

d) $f(x) = (4 - 3x)(x^2 - 5x + 6)$

e) $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 - 2x + 1 + \sqrt{2}$

f) $f(x) = -0,3x^2 + x - 1,5$

g) $f(x) = x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - \sqrt{5}$

h) $f(x) = \sqrt{3}x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + 1$

Lời giải

a) $f(x) = 2x^2 + x + 6$ có $\Delta = -47 < 0$, hệ số $a = 2 > 0$ nên $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ có $\Delta = 0$, hệ số $a = 4 > 0$ nên $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

c) $f(x) = x^2 - \frac{3}{2}x - 1$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 2$, hệ số $a = 1 > 0$ nên.

$f(x) > 0, \forall x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$ và $f(x) < 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

d) $f(x) = (4 - 3x)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$.

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	2	3	$+\infty$
$4 - 3x$	$+$	0	$-$	$+$	$-$
$x^2 - 5x + 6$	$+$	$+$	0	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ta có, bảng xét dấu:

Vậy $f(x) > 0, \forall x \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right) \cup (2; 3)$ và $f(x) < 0, \forall x \in \left(\frac{4}{3}; 2\right) \cup (3; +\infty)$.

e) $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 - 2x + 1 + \sqrt{2}$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1, x_2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = -3 - 2\sqrt{2}$,

Hệ số $a = 1 - \sqrt{2} < 0$ nên $f(x) < 0, \forall x \in (-\infty; -3 - 2\sqrt{2}) \cup (1; +\infty)$
 và $f(x) > 0, \forall x \in (-3 - 2\sqrt{2}; 1)$.

f) $f(x) = -0,3x^2 + x - 1,5$ có $\Delta = -\frac{4}{5} < 0$, hệ số $a = -0,3 < 0$ nên $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

g) $f(x) = x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - \sqrt{5}$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1, x_2 = -\sqrt{5}$, hệ số $a = 1 > 0$
 $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (1; +\infty)$ và $f(x) < 0, \forall x \in (-\sqrt{5}; 1)$

Nên

h) $f(x) = \sqrt{3}x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + 1$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1, x_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, hệ số $a = \sqrt{3} > 0$
 $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ và $f(x) < 0, \forall x \in \left(-1; \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

Nên

Bài tập 3: Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x) = (x + 3)(2x^2 + 5x + 2)$

b) $f(x) = (x^2 - 7x + 12)(1 - x)$

c) $f(x) = \frac{2x - x^2}{3 + x}$

d) $f(x) = \frac{2x^2 - 9x + 7}{4 - x^2}$

e) $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

f) $f(x) = x^2 - 5x - 6$.

g) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x - 1}$.

h) $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 4}$

g) $f(x) = x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$

h) $f(x) = \frac{2x - 5}{4x^2 - 19x + 12}$

Lời giải

$$2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = -2 \end{cases}$$

a) Cho $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$;

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x + 3$	-	0	+	+	+
$2x^2 + 5x + 2$	+	+	0	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	+

Kết luận:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup \left(-2; -\frac{1}{2}\right); f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3; x = -2; x = -\frac{1}{2}.$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3; -2) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases}; 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

b) Cho

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	1	3	4	$+\infty$
$1-x$	+	0	-	-	-
$x^2-7x+12$	+		0	0	+
$f(x)$	+	0	-	0	-

Kết luận:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1;3) \cup (4;+\infty); \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 3; x = 4$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;1) \cup (3;4)$$

$$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}; \quad 3 + x = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

c) Cho

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$
$3+x$	-	0	+	+	+
$2x-x^2$	-		0	+	0
$f(x)$	+		-	0	-

Kết luận:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3;0) \cup (2;+\infty); \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-3) \cup (0;2); \quad f(x) \text{ không xác định khi và chỉ khi } x = -3$$

$$2x^2 - 9x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}; \quad 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

d) Cho

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	1	2	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$2x^2-9x+7$	+		+	0	-	+
$4-x^2$	-	0	+		+	0
$f(x)$	-		+	0	-	

Kết luận:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-2) \cup (1;2) \cup \left(\frac{7}{2};+\infty\right); \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = \frac{7}{2}$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2;1) \cup \left(2;\frac{7}{2}\right); \quad f(x) \text{ không xác định khi và chỉ khi } x = -2; x = 2$$

e) Ta có $\Delta' = -4 < 0$ và $a = 1 > 0$ nên $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 6 \end{cases}$$

f) Ta có

$$\begin{cases} f(x) > 0, \forall x \in (-\infty;-1) \cup (6;+\infty) \\ f(x) < 0, \forall x \in (-1;6) \end{cases}$$

Do $a = 1 > 0$ nên

$$g(x) = x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

g) Ta có

$$h(x) = x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-$	$ $	$-$	$ $	0
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta thấy

$$\begin{cases} f(x) > 0, \forall x \in (-3; -1) \cup (1; +\infty) \\ f(x) < 0, \forall x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 1) \end{cases}$$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}; x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

h) Ta có

Bảng xét dấu $f(x)$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$2x^2 - x - 1$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	$ $	$-$	0	$+$	$+$

i) Ta có

$$x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4} = \frac{-x^3 + 2x^2 + 5x - 6}{-x^2 + 3x + 4} = \frac{(x-1)(-x^2 + x + 6)}{-x^2 + 3x + 4}$$

$$-x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}, -x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Ta có

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	-1	1	3	4	$+\infty$
$x-1$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$-x^2 + x + 6$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$-x^2 + 3x + 4$	$-$	$ $	$-$	0	$ $	$+$	0
$x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$	$-$	0	$+$	$ $	$-$	0	$+$

Suy ra $x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$ dương khi và chỉ khi $x \in (-2; -1) \cup (1; 3) \cup (4; +\infty)$,

$x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$ âm khi và chỉ khi $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (3; 4)$.

$$4x^2 - 19x + 12 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq \frac{3}{4} \end{cases}$$

j) Điều kiện xác định:

$$2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}, \quad 4x^2 - 19x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Ta có

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$		
$2x-5$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$4x^2-19x+12$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$\frac{2x-5}{4x^2-19x+12}$	$-$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$+$

Vậy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$; $f(x)$ không xác định tại $\begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$.
 $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{2}\right) \cup (4; +\infty)$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; 4\right)$.

Bài tập 4: Tìm x để biểu thức $P(x) = (x-1)(x^3-4x) - (x+2)(x^3+3x-2)$ nhận giá trị dương.

Lời giải

Ta có: $P(x) = x(x-1)(x-2)(x+2) - (x+2)(x^3+3x-2)$
 $= (x+2)[x(x-1)(x-2) - (x^3+3x-2)] = (x+2)(x^3-3x^2+2x-x^3-3x+2)$
 $= (x+2)(-3x^2-x+2)$. Cho $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$; $-3x^2-x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	-1	$\frac{2}{3}$	$+\infty$			
VT		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Khi đó: $(-2 < x < -1) \vee \left(x > \frac{2}{3}\right)$.

Bài tập 5: Một công ty du lịch thấy rằng khi bán tour chất lượng cao Hà Nội - TP Hồ Chí Minh trong 5 ngày 4 đêm với giá là x triệu đồng thì doanh thu F (tính theo đơn vị triệu đồng) sẽ là $F(x) = -10x^2 + 410x$. Với đơn giá nào của tour thì doanh thu từ việc bán tour vượt mức 4 tỉ đồng?

Lời giải

Doanh thu vượt mức 4 tỉ đồng tức là $F(x) = -10x^2 + 410x > 4000$
 Hay $-10x^2 + 410x - 4000 > 0 \Leftrightarrow 10(16-x)(x-25) > 0 \Leftrightarrow 16 < x < 25$.
 Vậy với đơn giá tour từ 16 triệu đồng đến 25 triệu đồng sẽ giúp công ty có được doanh thu vượt mức là 4 tỉ đồng.

Bài tập 6: Một quán buffet báo giá cho đoàn khách như sau: 10 khách đầu tiên có giá là 300000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 10 người thì cứ thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 5000 đồng/ người cho toàn bộ đoàn khách. Số người của nhóm khách nhiều nhất là bao nhiêu thì quán không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực cho bữa ăn này 3000000 đồng?

Lời giải

Gọi x là số lượng khách từ người thứ 11 trở lên của đoàn $x \in \mathbb{N}^*$.

Thêm 1 người thì giá vé giảm 5000 đồng/ người, vậy giá còn: $(300000 - 5000.1)$ đồng/ người cho toàn bộ đoàn khách.

Thêm x người thì giá còn: $(300000 - 5000.x)$ đồng/ người cho toàn bộ đoàn khách.

Doanh thu theo x : $(10 + x).(300000 - 5000.x)$ đồng.

Do chi phí thực tổ chức bữa tiệc là 3000000 đồng để quán không bị lỗ thì doanh thu phải lớn

hơn hoặc bằng 3000000 đồng: $(10 + x).(300000 - 5000.x) \geq 3000000$

$$(10 + x).(300000 - 5000.x) \geq 3000000 \Leftrightarrow 3000000 - 50000.x + 3000000.x - 50000.x^2 \geq 3000000$$

$$\Leftrightarrow -50000.x^2 + 250000.x \geq 0 \Leftrightarrow -50000.x(x - 5) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 5$$

Kết hợp với điều kiện $x > 0$ ta được: $0 < x \leq 5$.

Vậy số người nhóm khách nhiều nhất là 15 thì quán sẽ không bị lỗ.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Với giá trị x nào sau đây thì tam thức $y = x^2 - 2x - 3$ nhận giá trị dương?

- A. $x = -1$. B. $x = 4$. C. $x = 2$. D. $x = 0$.

Lời giải

Ta có $y(4) = 4^2 - 2.4 - 3 = 5 > 0$.

Câu 2: Tam thức $y = 235x^2 + 87x - 197$ có hai nghiệm phân biệt vì

- A. $\Delta < 0$. B. $a.c < 0$. C. $a.c > 0$. D. $b.c < 0$.

Lời giải

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac > 0, \forall a.c < 0$. Khi đó tam thức đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Câu 3: Với giá trị nào của tham số m thì biểu thức $y = mx^2 - 4x - 8$ là tam thức bậc hai có nghiệm kép?

- A. $m > -\frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m < \frac{1}{2}$. D. $m = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\Delta' = 4 + 8m$.

Để tam thức đã cho có nghiệm kép thì $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 4 + 8m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Câu 4: Tìm tổng các giá trị của tham số m để biểu thức $y = -(m+2)x^2 - (m^2-1)x + 3m$ là tam thức bậc hai có nghiệm $x = -1$?

- A. -2 . B. -4 . C. 2 . D. 4 .

Lời giải

Điều kiện: $m \neq -2$.

Ta có $y(-1) = 0 \Leftrightarrow -(m+2) + (m^2-1) + 3m = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$.

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $a \in [-100; 100]$ để tam thức $y = x^2 - ax + 1$ có hai nghiệm dương phân biệt?

A. 98.

B. 99.

C. 97.

D. 100.

Lời giải

Ta có $\Delta = a^2 - 4$.

Để tam thức $y = x^2 - ax + 1$ có hai nghiệm dương phân biệt thì

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4 > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -2 \\ a > 2 \end{cases} \Leftrightarrow a > 2$$

$a \in [-100; 100] \Rightarrow$ Có 98 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Câu 6: Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - bx + 3$. Với giá trị nào của b thì tam thức $f(x)$ có nghiệm?

A. $b \in [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$.B. $b \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.C. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; +\infty)$.D. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$.

Lời giải

Ta có $f(x) = x^2 - bx + 3$ có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow b^2 - 12 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b \leq -2\sqrt{3} \\ b \geq 2\sqrt{3} \end{cases}$

Câu 7: Giá trị nào của m thì biểu thức $y = (m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1)$ (1) là tam thức bậc hai vô nghiệm?

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$.B. $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$.C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$.D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Lời giải

Ta có (1) là tam thức bậc hai vô nghiệm khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -\frac{3}{5} < m < 1 \end{cases}$

Câu 8: Tam thức nào sau đây nhận giá trị âm với mọi $x < 2$?

A. $x^2 - 5x + 6$.B. $16 - x^2$.C. $x^2 - 2x + 3$.D. $-x^2 + 5x - 6$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $y = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$ (loại A);

$y = 16 - x^2 = (4-x)(4+x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x > 4 \end{cases}$ (loại B)

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0, \forall x$ (loại C)

$y = -x^2 + 5x - 6 = -(x-2)(x-3) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 3 \end{cases}$ (Chọn D)

Cách 2: Thay $x = 0$ vào từng đáp án; chỉ có D thỏa mãn $-6 < 0$ (đúng).

Câu 9: Tam thức $-x^2 - 3x - 4$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi

A. $x < -4$ hoặc $x > -1$.

B. $x < 1$ hoặc $x > 4$.

C. $-4 < x < -1$.

D. $x \in \square$.

Lời giải

Cách 1: $y = -x^2 - 3x - 4$ nhận giá trị âm khi $-x^2 - 3x - 4 < 0 \Leftrightarrow -\left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + \frac{7}{4}\right) < 0$

$\Leftrightarrow -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4} < 0, \forall x \in \square$

Câu 10: Tam thức $y = x^2 - 12x - 13$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi

A. $x < -13$ hoặc $x > 1$.

B. $x < -1$ hoặc $x > 13$.

C. $-13 < x < 1$.

D. $-1 < x < 13$.

Lời giải

$y = x^2 - 12x - 13$ nhận giá trị âm tức là $x^2 - 12x - 13 < 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 13) < 0$

$\Leftrightarrow -1 < x < 13$.

Câu 11: Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x) = x^2 - 6x + 8$ không dương?

A. $[2; 3]$.

B. $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$.

C. $[2; 4]$.

D. $[1; 4]$.

Lời giải

Để $f(x)$ không dương thì $x^2 - 6x + 8 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 4) \leq 0$

Lập bảng xét dấu $f(x)$ ta thấy để $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2; 4]$

Câu 12: Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x) = x^2 + 9 - 6x$ luôn dương?

A. $\square \setminus \{3\}$.

B. $\square$.

C. $(3; +\infty)$.

D. $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Ta có $x^2 + 9 - 6x > 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 3$.

Vậy $x \in \square \setminus \{3\}$.

Câu 13: Khi xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - 1}$ ta có

A. $f(x) > 0$ khi $-7 < x < -1$ hoặc $1 < x < 3$.

B. $f(x) > 0$ khi $x < -7$ hoặc $-1 < x < 1$ hoặc $x > 3$.

C. $f(x) > 0$ khi $-1 < x < 0$ hoặc $x > 1$.

D. $f(x) > 0$ khi $x > -1$.

Lời giải

Ta có: $x^2 + 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow x = -7; x = 3$ và $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Lập bảng xét dấu ta có

$f(x) > 0$ khi $x < -7$ hoặc $-1 < x < 1$ hoặc $x > 3$.

Câu 14: Tìm x để $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$ không âm.

A. $(1; 3]$

B. $(1; 2] \cup [3; +\infty)$

C. $[2; 3]$

D. $(-\infty; 1) \cup [2; 3]$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \neq 1$. Khi đó ta có: $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 1} \geq 0$

Ta có: $(x - 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}; x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$x - 3$	-	-	-	0	+
$x - 2$	-	-	0	+	+
$x - 1$	-	0	+	+	+
$f(x)$	-		+	0	+

$$x \in (1; 2] \cup [3; +\infty)$$

Vậy

Câu 15: Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì $f(x) = x(5x + 2) - x(x^2 + 6)$ không dương?

A. $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$

B. $[1; 4]$

C. $(1; 4)$

D. $[0; 1] \cup [4; +\infty)$

Lời giải

$$x(5x + 2) - x(x^2 + 6) \leq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 5x + 4) \geq 0$$

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$
$x - 4$	-	-	-	0	+
$x - 1$	-	-	0	+	+
x	-	0	+	+	+
$f(x)$	-	0	+	0	+

Vậy $x \in [0; 1] \cup [4; +\infty)$.

Câu 16: Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức $f(x) = x(x^2 - 1)$ không âm?

- A. $(-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$. B. $[-1; 0] \cup [1; +\infty)$. C. $(-\infty; -1] \cup [0; 1)$. D. $[-1; 1]$.

Lời giải

$$x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Cho

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Căn cứ bảng xét dấu ta được $x \in [-1; 0] \cup [1; +\infty)$

Câu 17: Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 4x + 3}$ không dương?

- A. $S = (-\infty; 1)$. B. $S = (-3; -1) \cup [1; +\infty)$.
C. $S = (-\infty; -3) \cup (-1; 1]$. D. $S = (-3; 1)$.

Lời giải

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 4x + 3}$$

Ta có $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ và $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$

Bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	0	$+$

Vậy $f(x) \leq 0$ khi $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 1]$. Vậy $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 1]$

Câu 18: Khi xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - 1}$ ta có

- A. $f(x) > 0$ khi $-7 < x < -1$ hoặc $1 < x < 3$.
 B. $f(x) > 0$ khi $x < -7$ hoặc $-1 < x < 1$ hoặc $x > 3$.
 C. $f(x) > 0$ khi $-1 < x < 0$ hoặc $x > 1$.
 D. $f(x) > 0$ khi $x > -1$.

Lời giải

Ta có: $x^2 + 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow x = -7; x = 3$ và $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Lập bảng xét dấu ta có

$f(x) > 0$ khi $x < -7$ hoặc $-1 < x < 1$ hoặc $x > 3$.

Câu 19: Tìm số nguyên lớn nhất của x để đa thức $f(x) = \frac{x+4}{x^2-9} - \frac{2}{x+3} - \frac{4x}{3x-x^2}$ luôn âm.

- A. $x = 2$. B. $x = 1$. C. $x = -2$. D. $x = -1$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 9 \neq 0 \\ x + 3 \neq 0 \\ 3x - x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -3 \\ x \neq 0 \end{cases}$.

Ta có $\frac{x+4}{x^2-9} - \frac{2}{x+3} - \frac{4x}{3x-x^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x^2-9} - \frac{2}{x+3} < \frac{4x}{3x-x^2}$
 $\Leftrightarrow \frac{(x+4) - 2(x-3) + 4(x+3)}{(x-3)(x+3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{3x+22}{(x-3)(x+3)} < 0$.

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$	$-\frac{22}{3}$	-3	3	$+\infty$
$x-3$	-		-	0	+
$x+3$	-		-	0	+
$3x+22$	-	0	+	+	+
$f(x)$	-	0	+	-	+

$$x \in \left(-\infty, -\frac{22}{3}\right) \cup (-3, 3)$$

Dựa vào bảng xét dấu ta có . Vậy $x = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20: Một khung dây thép hình chữ nhật có chiều dài 16 cm và chiều rộng 11 cm được uốn lại thành khung hình chữ nhật mới có kích thước $(16+x)$ và $(11-x)$ cm. Với x nằm trong khoảng nào thì diện tích của khung sau khi uốn tăng lên?

- A. $(-5; 0)$. B. $(-\infty; -5) \cup (0; +\infty)$.
 C. $(-16; 11)$. D. $(-\infty; -16) \cup (11; +\infty)$.

Lời giải

Diện tích của khung dây thép khi chưa uốn là: $16 \cdot 11 = 176 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Diện tích của khung dây thép khi đã uốn là: $(16+x)(11-x) = 176 - 5x - x^2$.

Như vậy diện tích của khung sau khi uốn tùy thuộc vào giá trị của hàm số $f(x) = x^2 + 5x$

Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 5x$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -5; x_2 = 0$.

Ta có: $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-5; 0)$ thì diện tích khung hình sau khi uốn lớn hơn trước khi uốn (tăng lên).

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho các biểu thức $f(x) = -4x^2 + 3x + 1$; $g(x) = x^3 + 3x^2 - 1$; $h(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Có hai biểu thức là tam thức bậc hai

b) Nghiệm tam thức $f(x)$ là $x = 1; x = -\frac{1}{3}$.

c) Tam thức $h(x)$ không âm khi $x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 1$.

d) $h(x) \geq m; \forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m < -\frac{1}{8}$.

Lời giải

a) Đúng: Có hai biểu thức là tam thức bậc hai là $f(x) = -4x^2 + 3x + 1$ và $h(x) = 2x^2 - 3x + 1$

b) Sai: Ta có:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

c) Đúng: Ta có

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bảng xét dấu $h(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$h(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Tam thức $h(x)$ không âm khi $x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 1$

$$h(x) \geq m; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 \geq m; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 - m \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

d) Sai:

$$\Leftrightarrow 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (1 - m) \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{8}.$$

Câu 2: Cho các tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 5x + 6$; $g(x) = x^2 + 6x + 9$; $h(x) = -x^2 + 4x - 4$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tam thức $g(x)$ không âm $\forall x \in \mathbb{R}$.
- b) Tam thức $h(x)$ âm $\forall x \in \mathbb{R}$.
- c) Tam thức $f(x)$ không âm khi $2 \leq x \leq 3$.
- d) Tam thức $f(x) - h(x)$ luôn dương $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

- a) Đúng: Ta có $a = 1 > 0; \Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0 \Rightarrow g(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$.
- b) Đúng: Ta có $a = -1 < 0; \Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 0 \Rightarrow h(x) < 0; \forall x \neq 2$.
- c) Sai: Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng xét dấu $h(x)$:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x)$ không âm khi $x \leq 2 \vee x \geq 3$.

- d) Đúng: $f(x) - h(x) = 2x^2 + x + 10$

Ta có $a = 2 > 0; \Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = -79 < 0 \Rightarrow f(x) - h(x) = 2x^2 + x + 10 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 3: Cho $f(x) = -x^2 + 2(m-1)x + m - 3$ (m là tham số). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Khi $m = 1$ thì $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- b) Khi $m > 3$ thì $f(x)$ có hai nghiệm trái dấu.
- c) Khi $m \in (-1; 2)$ thì tam thức có hai nghiệm phân biệt.
- d) Khi $m \in [-1; 2]$ thì $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

a) Đúng: Khi $m = 1$ thì $f(x) = -x^2 - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Đúng: $f(x)$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow -1.(m-3) < 0 \Leftrightarrow m > 3$.

c) Sai: Tam thức có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 - (-1).(m-3) > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$$

Vậy $m \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

$$f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \\ m^2 - m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2$$

d) Đúng:

Câu 4: Cho phương trình $f(x) = mx^2 - (4m+1)x + 4m + 2$ với m là tham số. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khi $m = 0$ thì $f(x) = 0$ vô nghiệm.

b) Phương trình có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $-\frac{1}{4} < m < 0$.

c) Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .

d) Phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 1 < x_2$ khi $-2 < m < 0$.

Lời giải

a) Sai: Khi $m = 0$ thì $f(x) = -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

b) Sai: Phương trình có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$ac < 0 \Leftrightarrow (4m+2).m < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 0$$

c) Sai: Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt phải là phương trình bậc 2.

Do đó $m \neq 0$; $f(x) = mx^2 - (4m+1)x + 4m + 2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4m+1)^2 - 4m(4m+2) = 1 > 0$$

Do đó phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $m \neq 0$.

d) Sai: Phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 1 < x_2$ khi và chỉ khi

$$f(1)m < 0 \Leftrightarrow (m+1)m < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0.$$

Câu 5: Cho tam thức $f(x) = x^2 - mx + m + 3$, với m là tham số thực. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khi $m = 2$ thì tam thức có hai nghiệm phân biệt.

b) Khi $m = 2$ thì tam thức luôn âm với $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Khi $m = -2$ thì tam thức luôn không âm với $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) Có 7 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ luôn xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$

Lời giải

a) Sai: Khi $m = 2$ ta có phương trình $x^2 - 2x + 5 = 0$ vô nghiệm.

b) Sai: Khi $m = 2$ ta có $x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Đúng: Khi $m = -2$ ta có $x^2 + 2x + 5 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

d) Sai: Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ xác định $\Leftrightarrow f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Delta = m^2 - 4(m + 3) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 6$$

Vậy có 5 giá trị nguyên dương của tham số m .

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một công ty du lịch báo giá tiền cho chuyến đi du lịch của một nhóm khách như sau: Nếu có 30 khách thì giá vé là 300000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 30 khách thì cứ thêm 1 người giá vé sẽ giảm 5000 đồng/người cho toàn bộ khách. Giả sử nhóm du lịch có hơn 30 khách. Gọi x là số lượng khách từ người thứ 31 trở đi và chi phí công ty bỏ ra cho nhóm khách du lịch là 10080000 đồng. Số lượng khách thêm vào lớn nhất là bao nhiêu người thì công ty không bị lỗ.

Lời giải

Khi thêm x người thì giá vé sẽ là $300000 - 5000x$ đồng/người

Số khách của nhóm du lịch là: $30 + x$; Doanh thu mà công ty thu được của nhóm khách du lịch:
 $T = (300000 - 5000x) \cdot (30 + x)$

Lợi nhuận của công ty thu được: $F = (300000 - 5000x) \cdot (30 + x) - 10080000$

Công ty không bị lỗ khi lợi nhuận không âm,

suy ra: $F = (300000 - 5000x) \cdot (30 + x) - 10080000 \geq 0 \Leftrightarrow -5000x^2 + 150000x - 1080000 \geq 0$

$12 \leq x \leq 18$. Vậy số khách thêm vào không quá 18 thì công ty sẽ có lợi nhuận

Câu 2: Một cửa hàng kinh doanh xăng dầu. Kế toán của cửa hàng đã tính toán lợi nhuận khi bán xăng

A95 hàng ngày theo công thức sau $y = -86x^2 + 86000x - 18146000$, trong đó x là số lít xăng A95 được bán ra. y lợi nhuận thu được theo đơn vị đồng. Hỏi cửa hàng bán tối thiểu bao nhiêu lít xăng thì sẽ có lợi nhuận.

Lời giải

Xét tam thức bậc hai $f(x) = -86x^2 + 86000x - 18146000$. Điều kiện $x > 0, x \in \mathbb{Q}$

Nhận thấy $f(x) = 0$ có hai nghiệm là $x_1 \approx 302,5$; $x_2 \approx 697,5$ và hệ số $a = -86 < 0$.

Ta có bảng xét dấu sau:

x	$\mathbf{0}$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$

Vì x là số nguyên dương nên:

Cửa hàng có lợi nhuận khi và chỉ khi $f(x) > 0$ tức là $303 \leq x \leq 697$.

Cửa hàng không có lợi nhuận khi và chỉ khi $f(x) < 0$ tức là $x \leq 302$ hoặc $x \geq 698$.

Vậy cửa hàng có lợi nhuận khi bán từ 303 đến 697 lít. Do đó cửa hàng bán tối thiểu 303 lít xăng thì sẽ có lợi nhuận.

Câu 3: Một chú thỏ đen chạy đuổi theo một chú thỏ trắng ở vị trí cách nó 100 m. Biết rằng, quãng đường chú thỏ đen chạy được biểu thị bởi công thức $s(t) = 8t + 5t^2$ (m), trong đó t (giây) là thời gian tính từ thời điểm chú thỏ đen bắt đầu chạy, và chú thỏ trắng chạy với vận tốc không đổi là 3 (m/s). Tại những thời điểm $t \in (a; +\infty)$ thì chú thỏ đen chạy trước chú thỏ trắng. Tính $2a + 8$

Lời giải

Giả sử vị trí ban đầu của chú thỏ đen là $s = 0$ (m) và thời điểm ban đầu là $t = 0$ (giây).

Quãng đường của chú thỏ trắng chạy được tại thời điểm t là $f(t) = 100 + 3t$ (m).

Để chú thỏ đen chạy trước chú thỏ trắng thì $s(t) > f(t)$

hay $8t + 5t^2 > 100 + 3t \Rightarrow 5t^2 + 5t - 100 > 0 \Rightarrow t(4; +\infty)$ (vì $t > 0$).

Vậy tại những thời điểm $t \in (4; +\infty)$ thì chú thỏ đen chạy trước chú thỏ trắng $\Rightarrow 2a + 8 = 16$

Câu 4: Bộ phận nghiên cứu thị trường của một xí nghiệp xác định tổng chi phí để sản xuất Q sản phẩm là $Q^2 + 300Q + 200000$ (nghìn đồng). Giả sử giá mỗi sản phẩm bán ra thị trường là 1200 nghìn đồng. Xí nghiệp cần sản xuất số sản phẩm $Q \in [a; b]$ để không bị lỗ. Tính $a + b$

Lời giải

Lợi nhuận của xí nghiệp khi bán hết Q sản phẩm là:

$$1200Q - (Q^2 + 300Q + 200000) = -Q^2 + 900Q - 200000$$

Để xí nghiệp không bị lỗ thì $-Q^2 + 900Q - 200000 \geq 0 \Leftrightarrow 400 \leq Q \leq 500$

$$\Rightarrow Q \in [400; 500] \Rightarrow \begin{cases} a = 400 \\ b = 500 \end{cases} \Rightarrow a + b = 900$$

Câu 5: Một công ty du lịch thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách như sau: 50 khách đầu tiên có giá 300000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 50 người đăng kí thì cứ có thêm một người, giá vé sẽ giảm 5000 đồng/người cho toàn bộ hành khách. Biết chi phí thực sự của chuyến đi là 15080000 đồng. Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu để công ty không bị lỗ?

Lời giải

Với số lượng khách là $(50 + x)$ người thì mỗi khách sẽ trả một khoản tiền $(300000 - 5000x)$ đồng.

Vậy tổng số tiền công ty thu được trong chuyến du lịch đó là:

$$T(x) = (50 + x)(300000 - 5000x) = -5000x^2 + 50000x + 15000000 \text{ (đồng)}.$$

Xét tam thức bậc hai: $f(x) = T(x) - 15080000 = -5000x^2 + 50000x - 80000$.

$\Delta > 0, f(x)$ có hai nghiệm phân biệt là 2 và 8. bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$	2	8	$+\infty$
$f(x)$	+	0	−	0 +

Kết luận: $f(x) \geq 0$ khi $x \in [2; 8]$. Vậy nếu số khách tối đa là 58 người ($x = 8$) thì công ty sẽ không lỗ khi tổ chức chuyến du lịch này.

Câu 6: Một quả bóng được đá lên từ mặt đất, biết rằng chiều cao y (mét) của quả bóng so với mặt đất được biểu diễn bởi một hàm số bậc hai theo thời gian t (giây). Sau 3 giây kể từ lúc được đá lên quả bóng đạt chiều cao tối đa là 21 m và bắt đầu rơi xuống. Hỏi thời điểm t lớn nhất là bao nhiêu ($t \in \mathbb{R}$) để quả bóng vẫn đang ở độ cao trên 10 m so với mặt đất?

Lời giải

Xét hàm số bậc hai $y = at^2 + bt + c (a \neq 0)$.

$$\begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 3 \\ 9a + 3b + c = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 6a + b = 0 \\ 9a + 3b = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{7}{3} \\ b = 14 \\ c = 0 \end{cases}$$

Theo giả thiết, ta có:

Vì vậy $y = -\frac{7}{3}t^2 + 14t$

Ta cần xét: $y = -\frac{7}{3}t^2 + 14t > 10$ hay $-\frac{7}{3}t^2 + 14t - 10 > 0$

Đặt $f(t) = -\frac{7}{3}t^2 + 14t - 10$; cho $f(t) = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{21 - \sqrt{231}}{7}, t_2 = \frac{21 + \sqrt{231}}{7}$

Bảng xét dấu $f(t)$:

t	$-\infty$	t_1	t_2	$+\infty$	
$f(t)$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$

Kết luận: $f(t) > 0$ khi $t_1 < t < t_2$ hay $\underbrace{\frac{21 - \sqrt{231}}{7}}_{\approx 0,83} < t < \underbrace{\frac{21 + \sqrt{231}}{7}}_{\approx 5,17}$

Vì t nguyên nên $t \in [1; 5]$. Do vậy giá trị $t = 5$ thỏa mãn đề bài.

Dạng 2: Bất phương trình bậc hai một ẩn

Phương pháp: Để giải bất phương trình bậc hai ta dựa vào việc xét dấu tam thức bậc hai

- **Bước 1:** Xét dấu tam thức bậc hai ở vế trái.
- **Bước 2:** Chọn những giá trị của x làm cho vế trái dương hoặc âm tùy theo chiều của bất phương trình.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $-3x^2 + 2x + 1 < 0$

b) $-36x^2 + 12x - 1 \geq 0$

c) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

d) $(x^2 - x)^2 + 3(x^2 - x) + 2 \geq 0$

e) $\frac{x^2 + x - 1}{x - 2} > \frac{1}{x^2 - x} + \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$

f) $(x^2 - 4)(x^2 + 2x) \leq 3(x^2 + 4x + 4)$

g) $x^2 - 8x + 7 \geq 0$

h) $x^2 - 4x + 4 > 0$

Lời giải

a) Tam thức $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$ có $a = -3 < 0$ và có hai nghiệm $x_1 = -\frac{1}{3}; x_2 = 1$
($f(x)$ cùng dấu với hệ số a).

Suy ra $-3x^2 + 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$ hoặc $x > 1$

$$S = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình:

b) Tam thức $f(x) = -36x^2 + 12x - 1$ có $a = -36 < 0$ và $D = 0$

$f(x)$ trái dấu với hệ số a nên $f(x)$ âm với $\forall x \neq \frac{1}{6}$ và $f\left(\frac{1}{6}\right) = 0$

Suy ra $-36x^2 + 12x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$

$$S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là

c) Điều kiện: $x^2 - 2x + 5 \geq 0$

Xét tam thức vế trái có $D' = -4 < 0$ và $a = 1 > 0$ nên $x^2 - 2x + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$

d) Ta có $(x^2 - x)^2 + 3(x^2 - x) + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \leq -2 \\ x^2 - x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2 \leq 0 \\ x^2 - x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{đúng } \forall x$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $T = \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 + x - 1)(x^2 - x) - (x - 2) + x(x^3 - 2)}{x(x^2 - 3x + 2)} > 0$$

e) Bất phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x(x^2 - 3x + 2)} > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \vee x > 2$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (0; 1) \cup (2; +\infty)$

f) Bất phương trình $\Leftrightarrow (x + 2)^2 (x^2 - 2x) \leq 3(x + 2)^2$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 (x^2 - 2x - 3) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 \vee -1 \leq x \leq 3$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = [-1; 3] \cup \{-2\}$

g) Xét $f(x) = x^2 - 8x + 7 \Rightarrow f(x)$ là một tam thức bậc hai nên $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 7 \end{cases}$

$$x^2 - 8x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 7 \end{cases}$$

Suy ra

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$

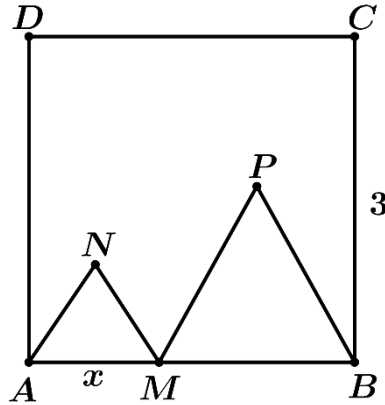
h) Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
-----	-----------	-----	-----------

$x^2 - 4x + 4$	+	0	+
----------------	---	---	---

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Bài tập 2: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 3 và một điểm M di động trên cạnh AB sao cho $AM = x$. Dựng các tam giác đều AMN và MBP nằm bên trong hình vuông $ABCD$. Tìm các giá trị của x sao cho tổng diện tích của hai tam giác đều bé hơn một phần tư diện tích hình vuông $ABCD$.



Lời giải

Ta có $AM = x, 0 < x < 3$ nên $MB = 3 - x$.

Tính được $S_{AMN} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}; S_{MBP} = \frac{(3-x)^2 \sqrt{3}}{4}$.

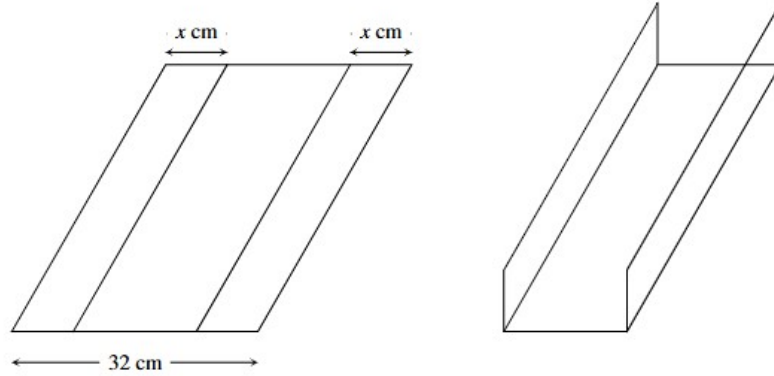
Do đó tổng diện tích của hai tam giác đều là $\frac{x^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{(3-x)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2x^2 - 6x + 9)$.

Mà $S_{ABCD} = 3^2 = 9$ nên theo giả thiết ta có bất phương trình $\frac{\sqrt{3}}{4} (2x^2 - 6x + 9) < \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 - 3\sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{6\sqrt{3} - 9}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{6\sqrt{3} - 9}}{2}$ (thỏa điều kiện).

Vậy $\frac{3 - \sqrt{6\sqrt{3} - 9}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{6\sqrt{3} - 9}}{2}$.

Bài tập 3: Một người muốn uốn tấm tôn phẳng hình chữ nhật có bề ngang 32 cm, thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như hình vẽ. Biết rằng diện tích mặt cắt ngang của rãnh nước phải lớn hơn hoặc bằng tổng 120 cm^2 . Hỏi độ cao tối đa của rãnh dẫn nước là bao nhiêu cm?

**Lời giải**

Bề ngang còn lại của tấm tôn sau khi gấp thành rãnh dẫn nước: $32 - 2x$ (cm).

Diện tích mặt cắt ngang rãnh dẫn nước: $S = x(32 - 2x) = -2x^2 + 32x$

Theo giả thiết: $S \geq 120 \Leftrightarrow -2x^2 + 32x \geq 120 \Leftrightarrow -2x^2 + 32x - 120 \geq 0$

Xét $-2x^2 + 32x - 120 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = 10$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	6	10	$+\infty$	
$-2x^2+30x-120$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ta có: $-2x^2 + 32x - 120 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [6; 10]$

Vậy rãnh dẫn nước chỉ đạt yêu cầu khi độ cao tối đa của nó là 10 cm.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các bất phương trình sau, với m là tham số, bất phương trình nào là bất phương trình bậc hai một ẩn?

A. $mx^2 - 2x + 1 \geq 0$

B. $(m^2 + 1)x^2 + 3x + m \geq 0$

C. $x^3 + 3x - 1 \leq 0$

D. $(x - 1)x^2 \geq 2$

Lời giải

Bất phương trình $(m^2 + 1)x^2 + 3x + m \geq 0$ là bất phương trình bậc hai một ẩn

Có dạng $ax^2 + bx + c \geq 0$ với $a = m^2 + 1 \neq 0, \forall m \in \mathbb{R}, b = 3, c = m$.

Câu 2: Cho tam thức bậc hai $f(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là

A. $S = [-2; 3]$

B. $S = (-2; 3)$

C. $S = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$

D. $S = (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là $S = [-2; 3]$.

Câu 3: Cho tam thức bậc hai $f(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0
		$-$	$-$

Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) < 0$ là

A. $S = \square$

B. $S = \square \setminus \{-2\}$

C. $S = (0; +\infty)$

D. $S = \square \setminus \{0\}$

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình $f(x) < 0$ là $S = \square \setminus \{-2\}$.

Câu 4: Cho tam thức bậc hai $f(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		$+$
		$+$

Nghiệm của bất phương trình $f(x) \leq 0$ là

A. $x \in (0; +\infty)$

B. $x \in \square \setminus \{0\}$

C. $x \in \square$

D. $x \in \emptyset$

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu, ta có nghiệm của bất phương trình $f(x) \leq 0$ là $x \in \emptyset$.

Câu 5: Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 4x - 4 \geq 0$ là

A. $S = \square$

B. $S = \emptyset$

C. $S = \{2\}$

D. $S = \square \setminus \{2\}$

Lời giải

Đặt vế trái của bất phương trình là $f(x)$.

Ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0
		$-$	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \{2\}$.

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 4x + 5 \geq 0$ là

A. $S = [-1; 5]$

B. $S = [-5; 1]$

C. $S = (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$

D. $S = (-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$

Lời giải

Đặt vế trái của bất phương trình là $f(x)$.

Ta có:
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1		5	$+\infty$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [-1; 5]$.

Câu 7: Tập nghiệm của bất phương trình $4x^2 + 3x + 2022 > 0$ là

A. $S = \square$

B. $S = \emptyset$

C. $S = \{0\}$

D. $S = \square \setminus \{2022\}$

Lời giải

Đặt vế trái của bất phương trình là $f(x)$.

Ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 3x + 2022 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \square$.

Câu 8: Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + x - 1 \geq 2x^2 - 7$ là

A. $S = [-2; 3]$

B. $S = \emptyset$

C. $S = (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$

D. $S = \square \setminus \{-2; 3\}$

Lời giải

Bất phương trình $x^2 + x - 1 \geq 2x^2 - 7 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leq 0$

Đặt vế trái của bất phương trình là $f(x)$.

Ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [-2; 3]$.

Câu 9: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2x^2 - 3x - 15 \leq 0$ là

A. 6.

B. 5.

C. 8.

D. 7.

Lời giải

Đặt vế trái của bất phương trình là $f(x)$.

Ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{129}}{4}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{3 - \sqrt{129}}{4}$		$\frac{3 + \sqrt{129}}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$S = \left[\frac{3 - \sqrt{129}}{4}; \frac{3 + \sqrt{129}}{4} \right]$$

Dựa vào bảng xét dấu, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

Vậy các nghiệm nguyên của bpt là $-2; -1; 0; 1; 2; 3$.

Câu 10: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 8x + 7 \geq 0$. Trong các tập hợp sau, tập nào **không** là tập con của S ?

A. $(-\infty; 0]$

B. $[6; +\infty)$

C. $[8; +\infty)$

D. $(-\infty; -1]$

Lời giải

Đặt vế trái của bất phương trình là $f(x)$.

Ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 7 \end{cases}$

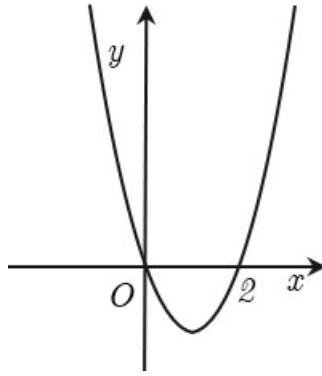
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	1		7	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bpt đã cho là $S = (-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$.

Vậy $[6; +\infty) \not\subset S$.

Câu 11: Cho đồ thị của hàm số bậc hai $f(x)$ như hình vẽ:



Nghiệm của bất phương trình $f(x) > 0$ là

A. $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

B. $x \in (0; 2)$

C. $x \in \emptyset$

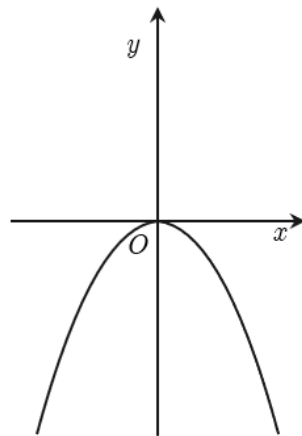
D. $x \in (2; +\infty)$

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số bậc hai $f(x)$ như hình vẽ ta thấy phần đồ thị nằm phía trên trục hoành khi $x < 0$ hay $x > 2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình $f(x) > 0$ là $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Câu 12: Cho đồ thị của hàm số bậc hai $f(x)$ như hình vẽ:



Nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là

A. $x = 0$

B. $x \in (0; 2)$

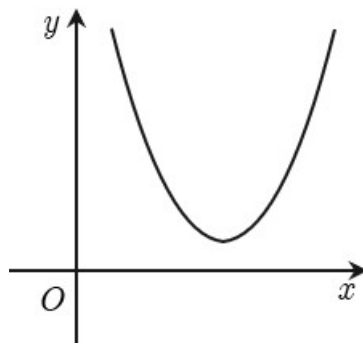
C. $x \in \emptyset$

D. $x \in (2; +\infty)$

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số bậc hai $f(x)$ như hình vẽ ta thấy đồ thị nằm phía dưới trục hoành và đi qua điểm $O(0;0)$. Vì thế, nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là $x = 0$.

Câu 13: Cho đồ thị của hàm số bậc hai $f(x)$ như hình vẽ:



Nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là

- A. $x = 0$. B. $x \in (0; 2)$. C. $x \in \square$. D. $x \in (2; +\infty)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số bậc hai $f(x)$ như hình vẽ ta thấy đồ thị nằm hoàn toàn phía trên trục hoành. Do đó, nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là $x \in \square$.

Câu 14: Một quả bóng được ném thẳng lên cao từ độ cao $1,5m$ so với mặt đất với vận tốc $10 m/s$. Độ cao của quả bóng so với mặt đất (tính bằng mét) sau t giây được xác định bởi hàm số $h(t) = -3,5t^2 + 7t + 1,5$. Khoảng thời gian bóng ở độ cao trên $4 m$ là (làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân)

- A. Từ $0,37s$ đến $1,43s$. B. Từ $0,47s$ đến $1,53s$.
C. Từ $0,77s$ đến $1,77s$. D. Từ $0,57s$ đến $1,73s$.

Lời giải

Khi quả bóng ở độ cao trên $4m$ nghĩa là :

$$h(t) > 4 \Leftrightarrow -3,5t^2 + 7t + 1,5 > 4 \Leftrightarrow -3,5t^2 + 7t - 2,5 > 0 \Leftrightarrow 0,47 \approx \frac{7 - \sqrt{14}}{7} < t < \frac{7 + \sqrt{14}}{4} \approx 1,53$$

Khoảng thời gian bóng ở độ cao trên $4 m$ là từ $0,47s$ đến $1,53s$.

Câu 15: Tổng chi phí T (đơn vị : nghìn đồng) để sản xuất Q sản phẩm được cho bởi biểu thức $T = Q^2 + 20Q + 3600$; giá bán của một sản phẩm là 150 nghìn đồng. Số sản phẩm được sản xuất trong khoảng nào để đảm bảo có lãi (giả thiết các sản phẩm được bán hết)

- A. $(50; 70)$. B. $(40; 90)$. C. $(55; 90)$. D. $(40; 100)$.

Lời giải

$$\text{Tổng lợi nhuận là } 150Q - (Q^2 + 20Q + 3600) = -Q^2 + 130Q - 3600$$

$$\text{Để có lãi thì } -Q^2 + 130Q - 3600 > 0 \Leftrightarrow 40 < Q < 90$$

Câu 16: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 5x - 4 \leq 0$. Trong các tập hợp sau đây, tập nào **không** là tập con của S ?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(4; +\infty)$. C. $(-\infty; 1]$. D. $[1; +\infty)$.

$$-x^2 + 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Ta có

Bảng xét dấu về trái của bất phương trình

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
VT		-	0	+	0	-	

Suy ra $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$

- Câu 17:** Cho hàm số $f(x) = mx^2 - 4x - 1$, với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên của $m \in (-20; 23)$ để $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$?
- A. 15. B. 10. C. 8. D. 11.

Lời giải

Trường hợp 1: Với $m = 0$ thì khi đó: $f(x) = -4x - 1 < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$.
 Vậy $m = 0$ không thỏa yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$ thì $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 4 + m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -4$.

Kết hợp với số nguyên $m \in (-20; 23)$ suy ra $m \in \{-19; -18; \dots; -5\}$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

- Câu 18:** Nghiệm của bất phương trình $(x^2 + x - 6)\sqrt{2x^2 - 1} < 0$ là
- A. $\left(1; \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup (2; +\infty)$ B. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- C. $\left(-3; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\right)$ D. $(-\infty; -5] \cup \left[5; \frac{17}{5}\right] \cup \{3\}$.

Lời giải

Điều kiện xác định $2x^2 - 1 \geq 0$

Với $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ không thỏa mãn bất phương trình.

Với $x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $\sqrt{2x^2 - 1} > 0$

Bất phương trình tương đương: $x^2 + x - 6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2$.

$$S = \left(-3; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\right).$$

Kết hợp điều kiện ta được:

- Câu 19:** Biết tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 - x + 2} < 0$ là khoảng $(a; b)$ giá trị biểu thức $a + b$ bằng.
- A. -5 . B. -1 . C. 5 . D. 2 .

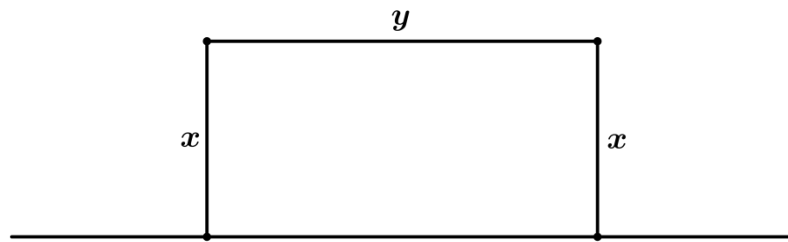
Lời giải

Đặt $f(x) = 3x^2 - x + 2, f(x)$ có $\begin{cases} \Delta = 1 - 24 = -23 < 0 \\ a = 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 - x + 2} < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-1; 3) \Rightarrow a = -1, b = 3$.

Vậy $a + b = 2$.

- Câu 20:** Thầy Huy có $45m$ lưới muốn rào một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau, biết rằng một cạnh là tường, Thầy Huy chỉ cần rào 3 cạnh còn lại của hình chữ nhật để làm vườn. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x (như hình vẽ) để diện tích mảnh vườn không bé hơn $100m^2$?



- A. 19 . B. 18 . C. 20 . D. 21 .

Lời giải

Gọi hai cạnh của hình chữ nhật có độ dài là x, y (như hình vẽ); $0 < x, y < 45$.

Ta có $2x + y = 45 \Rightarrow y = 45 - 2x$.

Diện tích hình chữ nhật là

$$S = xy = x(45 - 2x) = -2x^2 + 45x \geq 100 \Leftrightarrow -2x^2 + 45x - 100 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq x \leq 20$$

Khi đó: $x \in \{3; 4; \dots; 20\}$.

- Câu 21:** Cho hàm số $y = mx^2 - 3(m + 2)x + 2m + 1$ (m là tham số). Các giá trị của m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho gốc tọa độ O nằm giữa A và B là:

- A. $m < 0$. B. $m > -\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{2} < m < 0$. D. $m \leq -\frac{1}{2}$ hoặc $m \geq 0$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là: $mx^2 - 3(m+2)x + 2m+1 = 0$

Điều kiện để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho gốc tọa độ O

nằm giữa A và B là $x_A \cdot x_B < 0 \Leftrightarrow \frac{2m+1}{m} < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 0$

Câu 22: Phương trình $(m+2)x^2 - 2mx + m^2 + 6m = 0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $2 < x_1 < x_2$. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau

- A.** $-3 < m < -2$. **B.** $m > 1$. **C.** $-5 < m < -3$. **D.** $-2 < m < 1$.

Lời giải

Để phương trình $(m+2)x^2 - 2mx + m^2 + 6m = 0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $2 < x_1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ m+2 \neq 0 \\ x_2 > x_1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - (m+2)(m^2 + 6m) > 0 \\ m \neq -2 \\ (x_1 - 2) + (x_2 - 2) > 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m+2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2 + 6m}{m+2} \end{cases} \text{ Theo Vi-et ta có}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m(-m^2 - 7m - 12) > 0 \\ m \neq -2 \\ \frac{2m}{m+2} - 4 > 0 \\ \frac{m^2 + 6m}{m+2} - 2 \cdot \frac{2m}{m+2} + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 0 \\ m < -4 \\ m \neq -2 \\ -4 < m < -2 \\ m > -4 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < -2.$$

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = -x^2 - 2(m-1)x + 2m-1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $f(x) > 0$ với $\forall x \in (0;1)$.

- A.** $m > 1$. **B.** $m < \frac{1}{2}$. **C.** $m \geq 1$. **D.** $m \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $f(x) > 0, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow -x^2 - 2(m-1)x + 2m-1 > 0, \forall x \in (0;1)$
 $\Leftrightarrow -2m(x-1) > x^2 - 2x + 1, \forall x \in (0;1) (*)$

Vì $x \in (0;1) \Rightarrow x-1 < 0$ nên $(*) \Leftrightarrow -2m < \frac{x^2 - 2x + 1}{x-1} = x-1 = g(x), \forall x \in (0;1)$
 $\Leftrightarrow -2m \leq g(0) = -1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$

Câu 24: Cho bất phương trình $x^2 - 6x + \sqrt{-x^2 + 6x - 8} + m - 1 \geq 0$. Xác định m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [2;4]$.

- A.** $m \geq \frac{35}{4}$. **B.** $m \leq 9$. **C.** $m \leq \frac{35}{4}$. **D.** $m \geq 9$.

Lời giải

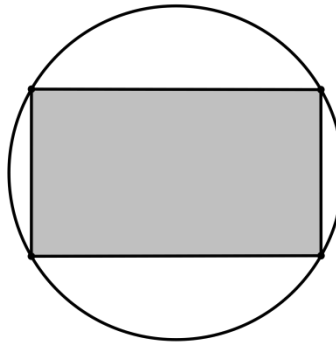
Điều kiện: $-x^2 + 6x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [2; 4]$.

Đặt $t = \sqrt{-x^2 + 6x - 8} = \sqrt{1 - (x-3)^2}$ ($0 \leq t \leq 1$) suy ra $x^2 - 6x = -8 - t^2$.

Ta có bất phương trình $-8 - t^2 + t + m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq t^2 - t + 9$ (*).

Xét $f(t) = t^2 - t + 9$ trên $[0; 1]$. Để bất phương trình đã cho nghiệm đúng $\forall x \in [2; 4]$ thì bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi $t \in [0; 1] \Leftrightarrow m \geq 9$.

Câu 25: Người ta muốn thiết kế một vườn hoa hình chữ nhật nội tiếp trong một mảnh đất hình tròn đường kính bằng 4 m (như hình vẽ). Diện tích S trồng hoa lớn nhất bằng bao nhiêu?



A. $S = 8 \text{ m}^2$.

B. $S = 64 \text{ m}^2$.

C. $S = 4 \text{ m}^2$.

D. $S = 16 \text{ m}^2$.

Lời giải

Gọi độ dài một cạnh hình chữ nhật cần tìm là x ($m, 0 < x < 4$).

Ta có, độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật là: $\sqrt{16 - x^2}$ (m).

Do đó diện tích vườn hoa hình chữ nhật là $S = x\sqrt{16 - x^2}$ (m^2).

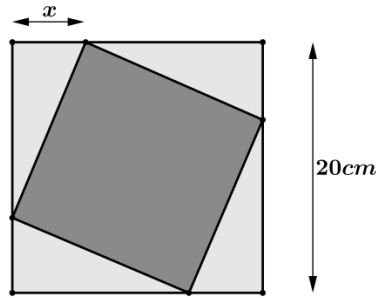
$$S^2 = x^2 \cdot (16 - x^2) = 64 - (x^4 - 16x^2 + 64) = 64 - (x^2 - 8)^2 \leq 64 \text{ suy ra } S \leq 8.$$

Khi đó:

Vậy diện tích vườn hoa lớn nhất là $8m^2$ khi và chỉ khi $x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$ (m).

Khi đó các cạnh của hình chữ nhật đều có độ dài là $2\sqrt{2} \text{ m}$, tức hình chữ nhật là hình vuông cạnh $2\sqrt{2} \text{ m}$.

Câu 26: Một viên gạch hình vuông có cạnh thay đổi được đặt nội tiếp trong một hình vuông có cạnh bằng 20 cm , tạo thành bốn tam giác xung quanh như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của x để diện tích viên gạch không vượt quá 208 cm^2 .



A. $8 \leq x \leq 12$.

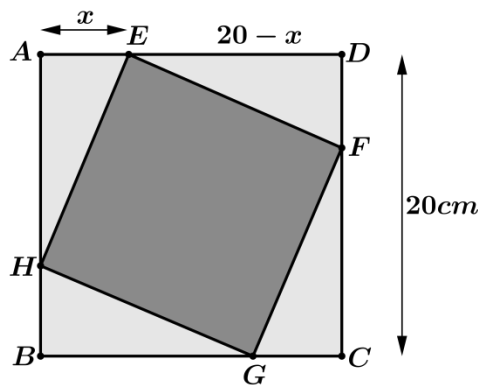
B. $6 \leq x \leq 14$.

C. $12 \leq x \leq 14$.

D. $12 \leq x \leq 18$.

Lời giải

Gọi E, F, G, H là bốn đỉnh của viên gạch hình vuông nội tiếp trong hình vuông $ABCD$ có cạnh 20 cm như hình vẽ:



Ta có cạnh viên gạch là $EF = \sqrt{x^2 + (20-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 40x + 400}$.

Diện tích của viên gạch là: $EF^2 = 2x^2 - 40x + 400$.

Theo đề ta có diện tích viên gạch không vượt quá 208 cm^2 .

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 400 \leq 208 \Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 192 \leq 0 \Leftrightarrow 8 \leq x \leq 12.$$

Câu 27: Một quả bóng được ném qua lưới với chiều cao 3 mét theo quỹ đạo được mô tả bằng hàm số $y = f(x) = -0,2x^2 + 2x + 1,5$ trong đó y (tính bằng mét) là chiều cao của quả bóng so với mặt đất, x được (tính bằng mét) là khoảng cách từ nơi đứng ném đến lưới theo phương ngang. Hỏi người đó phải đứng gần lưới nhất với khoảng cách là bao nhiêu để bóng bay cao hơn lưới (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

A. $9,18$ mét.

B. 1 mét.

C. $0,82$ mét.

D. 9 mét.

Lời giải

Theo yêu cầu bài toán thì chiều cao của quả bóng phải cao hơn 3 mét để có thể bay cao hơn lưới. Khi đó ta được bất phương trình $-0,2x^2 + 2x + 1,5 > 3$ (*).

Giải bất phương trình (*) ta được $\frac{10 - \sqrt{70}}{2} \approx 0,82 < x < \frac{10 + \sqrt{70}}{2} \approx 9,18$.

Vậy người đó phải đứng gần lưới nhất với khoảng cách xấp xỉ $0,82$ mét.

Câu 28: Một cửa hàng bán gạo loại A ước tính lợi nhuận một ngày được tính theo công thức $t(x) = -10x^2 + 250x - 500$ trong đó t được tính theo đơn vị là nghìn đồng là lợi nhuận một ngày, x được tính theo đơn vị là nghìn đồng là giá bán 1kg gạo loại A. Hỏi cửa hàng phải bán với giá bao nhiêu để lợi nhuận một ngày khi bán loại gạo đó trên 1000000 đồng.

- A. Trên 10000 đồng một kg.
- B. Trong khoảng từ 10000 đến 15000 đồng một kg.
- C. Trên 15000 đồng một kg.
- D. Dưới 10000 đồng một kg.

Lời giải

Theo yêu cầu bài toán thì lợi nhuận một ngày khi bán loại gạo đó trên 1000000 đồng.

Nên ta được bất phương trình: $-10x^2 + 250x - 500 > 1000$ (*)

(lưu ý x được tính theo đơn vị là nghìn đồng)

Giải bất phương trình (*) ta được $10 < x < 15$.

Vậy cửa hàng phải bán với giá trong khoảng từ 10000 đến 15000 đồng một kg.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Nhân viên công ty thiết kế A ước tính lợi nhuận y (đồng) khi kinh doanh x mặt hàng bàn ghế được tính bởi công thức $f(x) = -x^2 + 375x - 33750$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tam thức $f(x) = -x^2 + 375x - 33750$ có biệt thức $\Delta > 0$.
- b) Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x = 150$ và $x = 225$.
- c) Bảng xét dấu của $f(x)$ là

x	$-\infty$	150	225	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

- d) Công ty có lãi khi bán từ 150 sản phẩm đến 225 sản phẩm.

Lời giải

a) Đúng: $\Delta = 375^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-33750) = 5625 > 0$.

b) Đúng: $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 375x - 33750 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 150 \\ x = 225 \end{cases}$.

c) Sai: Bảng xét dấu của $f(x)$ là

x	$-\infty$		150		225		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	

d) Sai: Công ty có lãi khi $f(x) > 0 \Leftrightarrow 150 < x < 225$.

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 151 \leq x \leq 224$.

Vậy công ty có lãi khi bán từ 151 sản phẩm đến 224 sản phẩm.

Câu 2: Cho biểu thức $f(x) = \frac{-10}{-x^2 + 2x + 3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

b) Với $x \in (-1; 3)$ thì $-x^2 + 2x + 3 > 0$.

c) Với $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ thì $-x^2 + 2x + 3 < 0$.

d) Với $x \in (-1; 3)$ thì $f(x) > 0$.

Lời giải

Ta có: $-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Xét dấu của $-x^2 + 2x + 3$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$-x^2+2x-3$	-	0	+	0	-
$f(x)$	+		-		+

a) Đúng: Ta có: $-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

b) Đúng: Qua bảng biến thiên ta có $-x^2 + 2x + 3 > 0$ với $x \in (-1; 3)$.

c) Đúng: Qua bảng biến thiên ta có $-x^2 + 2x + 3 < 0$ với $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

d) Qua bảng biến thiên ta có $f(x) > 0$ với $x \in (-1; 3)$

Câu 3: Cho tam thức bậc hai $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + m}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khi $m = 2$ thì tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

b) Khi $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq -4 \end{cases}$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

c) Khi $m = 2$ thì tập nghiệm của bất phương trình $f(x) > 0$ là $(1; 2)$.

d) Khi $m = -1$ thì tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là $(-\infty; -1) \cup [2; +\infty)$

Lời giải

a) Sai: Khi $m = 2$ thì hàm số luôn xác định trên $\mathbb{R}$

b) Đúng: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Thử lại $x = 1; x = 2$ ta thấy $x^2 + m \neq 0$ với mọi $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq -4 \end{cases}$

c) Sai: Khi $m = 2$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2}$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases}$$

d) Đúng: Khi $m = -1$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$. Khi đó bảng xét dấu của $f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$		
x^2-3x+2	+		+	0	-	0	+
x^2-1	+	0	-	0	+		+
$f(x)$	+		-		-	0	+

Từ bảng xét dấu ta thấy $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x \geq 2 \end{cases}$

Câu 4: Cho $f(x) = (-x^2 + 3x)(2x^2 + 1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

b) $2x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

d) $f(x) < 0, \forall x \in (0; 3)$

Lời giải

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (-x^2 + 3x)(2x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x = 0 \\ 2x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

a) Đúng: Xét

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$-x^2 + 3x$	-	0	+	-
$2x^2 + 1$	+	+	+	+
$f(x)$	-	0	+	-

b) Đúng: Vì $x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2x^2 + 1 \geq 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

c) Sai: Từ bảng xét dấu ta thấy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 3)$

d) Sai: $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

Câu 5: Cho $f(x) = x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 4$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu $m = 1$ thì $f(x)$ không phải là tam thức bậc hai.

b) Khi $m = 3$ thì bất phương trình $f(x) \leq 0$ có tập nghiệm chứa hữu hạn giá trị nguyên.

c) Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm trái dấu với $\forall m \in (a; b)$. Khi đó $a + b = 0$

d) $f(x)$ nhận giá trị không dương trên khoảng $[a; b]$ có $b - a = 5$ khi $m > 1$.

Lời giải

a) Sai: Nếu $m = 1$ thì $f(x) = x^2 - 3$ là tam thức bậc hai.

b) Sai: Khi: $m = 3 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 5$ khi đó $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Đúng: Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

d) Sai: $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [x_1; x_2]$ với $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

$f(x)$ nhận giá trị không dương trên khoảng $[a; b]$

$$\Leftrightarrow [a; b] = [x_1; x_2] \Rightarrow |x_2 - x_1| = 5 \Leftrightarrow 4(m-1)^2 - 4(m^2 - 4) = 25 \Leftrightarrow -8m + 7 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{8}$$

Câu 6: Một công ty Du lịch sinh thái thông báo giá tiền khi tham gia chuyến tham quan của một nhóm khách du lịch được cho như sau:

Số khách	20 khách đầu tiên	từ khách thứ 21 trở đi
Giá tiền	30 USD/người	Giảm 1 USD/người cho toàn bộ khách trong nhóm

Gọi x là số lượng khách từ người thứ 21 trở đi của nhóm. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Số khách tham quan chuyến du lịch trên là $20 - x$.
- b) Giá vé của mỗi người là $30 - x$.
- c) Doanh thu của công ty được tính bởi công thức $-x^2 + 10x + 600$.
- d) Biết chi phí của chuyến tham quan mà công ty phải chịu là 400 USD. Khi đó, nếu số khách từ người thứ 21 trở lên của nhóm nhiều hơn 20 người thì công ty có lãi.

Lời giải

- a) Sai: Số khách tham quan chuyến du lịch trên là $20 + x$
- b) Đúng: Vì cứ có thêm 1 người thì giá vé sẽ giảm 1 USD/người cho toàn bộ khách trong nhóm nên giá vé của mỗi người là $30 - x$.
- c) Đúng: Doanh thu của công ty là $(20 + x)(30 - x) = -x^2 + 10x + 600$.
- d) Sai: Lợi nhuận của công ty là $y = -x^2 + 10x + 600 - 400 = -x^2 + 10x + 200$.

Công ty có lãi khi $y > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 10x + 200 > 0 \Leftrightarrow -10 < x < 20$.

Vì $x \geq 0$ nên $0 \leq x < 20$.

Do đó, nếu số khách từ người thứ 21 trở lên của nhóm ít hơn 20 người thì công ty mới có lãi.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tổng chi phí P (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm được biểu diễn bởi biểu thức $P = x^2 + 30x + 3300$. Giá bán một sản phẩm là 170 nghìn đồng. Số sản phẩm được sản xuất trong $[a; b]$ để đảm bảo nhà sản xuất không bị lỗ (giả sử các sản phẩm được bán hết). Tính $a + b$

Lời giải

Khi bán hết x sản phẩm thì số tiền thu được là: $170x$ (nghìn đồng).

Điều kiện để nhà sản xuất không bị lỗ là: $170x \geq x^2 + 30x + 3300 \Leftrightarrow x^2 - 140x + 3300 \leq 0$.

Xét $x^2 - 140x + 3300 = 0 \Rightarrow x = 30 \vee x = 110$.

Bảng xét dấu:

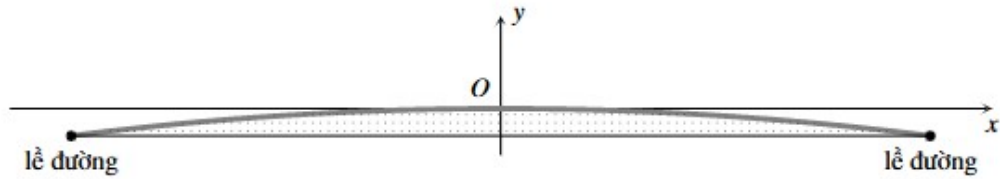
x	$-\infty$	30	110	$+\infty$	
$x^2-140x+3300$	+	0	-	0	+

Ta có: $x^2 - 140x + 3300 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [30; 110]$.

Vậy nếu nhà sản xuất làm ra từ 30 đến 110 sản phẩm thì họ sẽ không bị lỗ.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 30 \\ b = 110 \end{cases} \Rightarrow a + b = 140$$

Câu 2: Mặt cắt ngang của mặt đường thường có dạng hình parabol để nước mưa dễ dàng thoát sang hai bên. Mặt cắt ngang của một con đường được mô tả bằng hàm số $y = -0,006x^2$ với gốc tọa độ đặt tại tim đường và đơn vị đo là mét như hình bên dưới.



Với chiều rộng của đường như thế nào thì tim đường cao hơn lề đường không quá 15 cm?

Lời giải

Gọi chiều rộng của đường là $2a$ thì tọa độ của lề đường là $(a; y(a))$ và $(-a; y(-a))$

Do parabol đối xứng qua trục Oy nên $y(a) = y(-a)$

Độ cao chênh lệch giữa tim đường và lề đường là $|y(0) - y(a)|$

Theo đề bài độ cao này không quá 0,15 m, tức là $|y(0) - y(a)| \leq 0,15 \Leftrightarrow y(0) - y(a) \leq 0,15$
 $\Leftrightarrow 0 - (-0,006a^2) \leq 0,15 \Leftrightarrow 0,006a^2 \leq 0,15 \Leftrightarrow -5 \leq a \leq 5$

Vì a là chiều rộng một bên của đường nên $a > 0$ suy ra $0 < a \leq 5$

Khi đó chiều rộng của đường không quá 10 m.

Câu 3: Độ cao (tính bằng mét) của một quả bóng (trong môn bóng đá) khi cầu thủ sút phạt so với xà ngang của khung thành khi bóng di chuyển được x mét theo phương ngang được mô phỏng bằng hàm số $k(x) = -0,2x^2 + 3x - 3$. Biết rằng $x \in (a; b)$ thì bóng nằm cao hơn so với xà ngang của khung thành. Tính $b - a$ (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải

$$k(x) = -0,2x^2 + 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15 - \sqrt{165}}{2} \approx 1,08 \\ x = \frac{15 + \sqrt{165}}{2} \approx 13,92 \end{cases}$$

Ta có

Ta có bảng xét dấu của $k(x)$

x	$-\infty$	1,08	13,92	$+\infty$	
$k(x)$	—	0	+	0	—

Vậy bóng nằm cao hơn so với xà ngang của khung thành khi $k(x) > 0$ tức là

$$x \in (1,08; 13,92) \Rightarrow \begin{cases} a = 1,08 \\ b = 13,92 \end{cases} \Rightarrow b - a = 13,92 - 1,08 \approx 12,8$$

Câu 4: Một khung dây thép hình chữ nhật với chiều dài 30 cm và chiều rộng 20 cm được uốn lại thành hình chữ nhật mới với kích thước $(30 - x)$ cm và $(20 + x)$ cm. Biết rằng $x \in (a; b)$ thì diện tích của khung sau khi uốn tăng lên. Tính $a + b$.

Lời giải

Ta có điều kiện: $-20 < x < 30$

Diện tích hình chữ nhật lúc sau là: $S = (30 - x) \cdot (20 + x) = -x^2 + 10x + 600 \text{ cm}^2$.

Diện tích hình chữ nhật lúc đầu là 600 cm^2

Đặt $f(x) = -x^2 + 10x + 600 - 600 = -x^2 + 10x$

Khi đó: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases}$ nên ta có bảng xét dấu của $f(x)$

x	$-\infty$	0	10	$+\infty$
$f(x)$		0	0	
		-	+	-

Diện tích của khung sau khi uốn tăng lên khi $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 10) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow a + b = 10$

Câu 5: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hơn đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Doanh nghiệp phải định giá bán mới là x (đồng) để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ tăng. Biết rằng $x \in [a; b]$ thì lợi nhuận sẽ tăng lên. Tính $a + b$.

Lời giải

Gọi x đồng là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá ($0 \leq x \leq 4$).

Khi đó:

Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là $31 - x - 27 = 4 - x$.

Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là $600 + 200x$.

Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là:

$$f(x) = (4 - x)(600 + 200x) = -200x^2 + 200x + 2400.$$

Xét hàm số $f(x) = -200x^2 + 200x + 2400$ trên đoạn $[0; 4]$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 2450\right)$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	2400	2450	0	$-\infty$

$$x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a + b = 0.5$$

Từ bảng biến thiên ta thấy lợi nhuận tăng lên khi

Câu 6: Sức mạnh động cơ (tính bằng đơn vị mã lực) sinh ra từ máy của một canô ở tốc độ quay r vòng/ phút được xác định bởi hàm số: $p(r) = -0.000025r^2 + 0.2r - 240$. Vậy sức mạnh của động cơ này tăng lên khi tốc độ quay $r \leq 400a$. Tính $a + 200$.



Lời giải

Ta có: $p(r) = -0.000025r^2 + 0.2r - 240$ là hàm số bậc hai

Tập xác định: $D = R$ có đỉnh $I(4000; 160)$ và bảng biến thiên:

r	$-\infty$	4000	$+\infty$
$p(r)$	$-\infty$	160	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy sức mạnh của động cơ tăng lên khi:

$$r \leq 4000 \Rightarrow 400a = 4000 \Leftrightarrow a = 10 \Rightarrow a + 200 = 210$$