

Câu 1: Cho hàm số $y = \sqrt{\frac{3x+5}{x-1}} - 4$. Biết rằng hàm số có tập xác định là $(a; b]$. Tính tổng $a + b$.

Lời giải

Kết quả: 10

Ta có $y = \sqrt{\frac{3x+5}{x-1}} - 4 = \sqrt{\frac{3x+5-4(x-1)}{x-1}} = \sqrt{\frac{-x+9}{x-1}}$.

$$\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ \frac{-x+9}{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+9 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 9 \\ x > 1 \end{cases} (TM) \Leftrightarrow 1 < x \leq 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+9 \leq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ x < 1 \end{cases} (L)$$

Điều kiện xác định của hàm số:

Suy ra tập xác định của hàm số là $D = (1; 9]$.

Vậy $a = 1, b = 9 \Rightarrow a + b = 10$.

Câu 2: Cho hàm số $y = 2x + m - 1$ (m là tham số thực) có đồ thị (C_m) . Biết rằng đồ thị hàm số cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm A, B thỏa mãn $S_{\Delta OAB} = 4$, khi đó tổng tất các giá trị của tham số m là?

Lời giải

Kết quả: 2

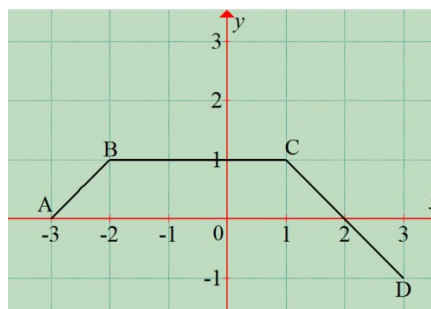
Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm $A\left(\frac{1-m}{2}; 0\right)$, cắt trục Oy tại điểm $B(0; m-1)$.

Tam giác OAB vuông tại O có diện tích là $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \left| \frac{1-m}{2} \right| |m-1| = 4$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -3 \end{cases}$$

Tổng tất cả các giá trị của m bằng 2.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết tập xác định của hàm số là $[a; b]$ và tập giá trị của hàm số là $[c; d]$. Tính $T = a - b + c - d$?



Ta có tập xác định của hàm số là $[-3; 3]$, tập giá trị của hàm số là $[-1; 1]$.

Vậy $a = -3, b = 3, c = -1, d = 1 \Rightarrow T = a - b + c - d = -8$

Câu 4: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{2024x + 2025}{\sqrt{mx^2 + 2mx + 9}}$ có tập xác định $\square$ là:

Lời giải

Đáp án: 9

Hàm số $y = \frac{2024x + 2025}{\sqrt{mx^2 + 2mx + 9}}$ có tập xác định $\square \Leftrightarrow mx^2 + 2mx + 9 > 0, \forall x \in \square$ (1).

+ $m = 0$ thỏa mãn (1).

+ $m \neq 0$, (1) $\Leftrightarrow$ parabol $y = mx^2 + 2mx + 9 > 0$ nằm hoàn toàn phía trên trục hoành $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -\frac{\Delta}{4m} > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = m^2 - 9m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < m < 9$$

Kết hợp 2 trường hợp ta được $\Leftrightarrow 0 \leq m < 9$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 5: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là parabol (P) . Biết rằng đường thẳng $y = -2$ cắt (P) tại một điểm duy nhất, đường thẳng $y = 2$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là -1 và 5 . Tính giá trị $T = a + 2b + 4c$.

Lời giải

Đáp án: -4

Vì (P) có trục đối xứng là 1 đường thẳng song song hoặc trùng với Oy và đường thẳng $y = 2$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là -1 và 5 nên trục đối xứng của (P) là đường thẳng

$$x = \frac{-1 + 5}{2} = 2 \text{ và điểm } A(-1; 2) \in (P).$$

Mà đường thẳng $y = -2$ cắt (P) tại một điểm duy nhất nên tọa độ đỉnh của (P) là $A(2; -2)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ a - b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{9} \\ b = -\frac{16}{9} \\ c = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

Ta có :

Vậy $T = a + 2b + 4c = -4$.

Nửa chu vi tam giác ABC là: $p = \frac{14+10+16}{2} = 20$.

Áp dụng công thức Herong ta có diện tam giác ABC là:

$$S = \sqrt{p(p-14)(p-10)(p-16)} = 40\sqrt{3}$$

c). ĐÚNG

Áp dụng định lý Cosin ta có:

$$\cos \sphericalangle ABC = \frac{BA^2 + BC^2 - CA^2}{2.BA.BC} = \frac{16^2 + 14^2 - 10^2}{2.16.14} = \frac{11}{14}$$

d). SAI

Gọi D là chân phân giác trong kẻ từ A .

Ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{DB}{DC+DB} = \frac{DB}{BC} = \frac{DB}{14} = \frac{8}{5+8} = \frac{8}{13} \Rightarrow DB = \frac{112}{13}$.

Áp dụng định lý Cosin ta có:

$$AD = \sqrt{BA^2 + BD^2 - 2.BA.BD.\cos \sphericalangle ABD} = \sqrt{16^2 + \left(\frac{112}{13}\right)^2 - 2.16.\frac{112}{13}.\frac{11}{14}} \approx 10,7$$

Câu 6: Cho hàm số $y = ax^2 + 4x + a - 2$ có đồ thị (P) , biết (P) có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$.

Tìm toạ độ đỉnh của (P) ?

Lời giải

(P) có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$ nên $-\frac{4}{2a} = 2 \Leftrightarrow a = -1$

Vậy (P) có phương trình $y = -x^2 + 4x - 3$ nên toạ độ đỉnh của (P) là $I(2;1)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = x^2 + ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 tại $x = -1$. Tính $a + b$?

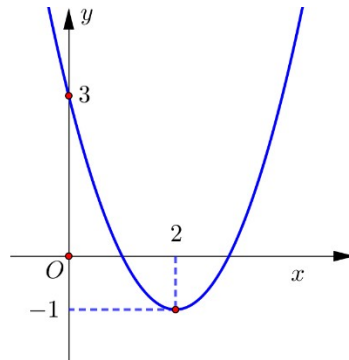
Lời giải

Vì hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 tại $x = -1$ nên ta có parabol nhận điểm $I(-1; 5)$ là đỉnh nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} = -1 \\ 1 - a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \end{cases}$$

Vậy $a + b = 8$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ.

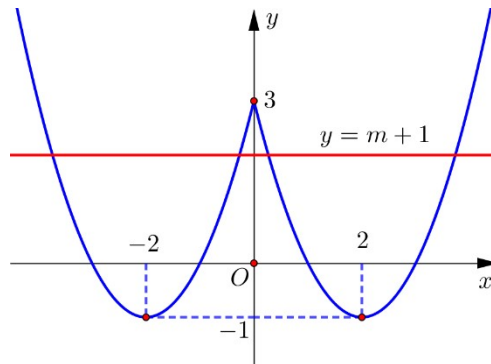


Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x|) - 1 = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Lời giải

Đáp án: 3

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ là



Ta có $f(|x|) - 1 = m \Leftrightarrow f(|x|) = m + 1$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có theo yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -1 < m + 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Câu 9: Biết parabol $(P): y = x^2 - 4x + m$ biết (P) cắt Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA = 3OB$. Tìm m nguyên âm.

Lời giải

Đáp án: -12

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 4x + m = 0$. (*)

Đề (P) cắt Ox tại hai điểm phân biệt A, B thì (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Theo giả thiết $OA = 3OB \Leftrightarrow |x_A| = 3|x_B| \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3x_B \\ x_A = -3x_B \end{cases}$

Với $x_A = 3x_B \Rightarrow \begin{cases} x_A = 3x_B \\ x_A + x_B = 4 \\ x_A \cdot x_B = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 3 \\ x_B = 1 \\ x_A \cdot x_B = m \end{cases} \Rightarrow m = x_A \cdot x_B = 3$: thỏa mãn.

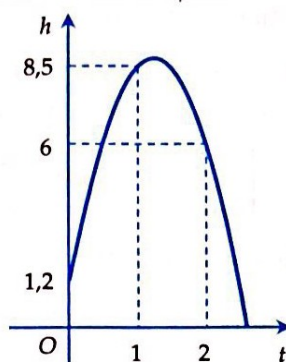
Với $x_A = -3x_B \Rightarrow \begin{cases} x_A = -3x_B \\ x_A + x_B = 4 \\ x_A \cdot x_B = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = -3 \\ x_B = 1 \\ x_A \cdot x_B = m \end{cases} \Rightarrow m = x_A \cdot x_B = -12$: thỏa mãn.

Do đó (P): $y = x^2 - 4x + 3$; $y = x^2 - 4x - 12$.

Câu 10: Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth , trong đó t là thời gian kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2m. Sau đó 1 giây nó đạt độ cao 8,5m và 2 giây sau khi đá lên nó đạt độ cao 6m. Hỏi sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi được đá lên.

Lời giải

Gọi phương trình của parabol quỹ đạo là $h = at^2 + bt + c$. Từ giả thiết suy ra parabol đi qua các điểm $(0; 1,2)$, $(1; 8,5)$ và $(2; 6)$.



Từ đó ta có

$$\begin{cases} c = 1,2 \\ a + b + c = 8,5 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4,9 \\ b = 12,2 \\ c = 1,2 \end{cases}$$

Suy ra phương trình của parabol quỹ đạo là $h = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$.

Giải phương trình $h = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 12,2t + 1,2 = 0$ ta tìm được một nghiệm dương là $t \approx 2,58$.

Vậy quả bóng chạm đất sau $t \approx 2,58$ giây.

Câu 11: Giá bán lẻ tiền điện sinh hoạt tính từ ngày 11/10/2024 được cho trong bảng sau:

Bậc	1	2	3	4	5	6
Mức sử dụng	0 - 50 kWh	51- 100 kWh	101- 200 kWh	201- 300 kWh	301- 400 kWh	401 kWh trở lên
Giá bán điện (đồng/kWh)	1.893	1.956	2.271	2.860	3.197	3.302

Dựa vào bảng số liệu trên, hãy tính số tiền điện phải trả ứng với lượng điện tiêu thụ là $150kWh$.

Lời giải

Đáp án: 306

Số tiền điện phải trả ứng với lượng điện tiêu thụ là $150kWh$ là

$$50.1893 + 50.1956 + 50.2271 = 306000 = 306.$$

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc $(-2024; 2024)$ để hàm số $y = \frac{3x^2 + 2mx + 2}{x - 2m}$ xác định trên khoảng $(-4; 2)$.

Lời giải

Đáp án: 4045

ĐKXD: $x \neq 2m$

Hàm số xác định trên khoảng $(-4; 2) \Leftrightarrow 2m \notin (-4; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \geq 2 \\ 2m \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$.

Vì m nguyên và $m \in (-2024; 2024)$ nên có tất cả 4045 giá trị.

Câu 13: Cho hàm số sau: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & x \leq 1 \\ 2m, & x > 1 \end{cases}$. Tìm tham số m để $f(0) + f(2) = 2025$.

Lời giải

Đáp án: 1014

Phân giải chi tiết

$$f(0) = 0^2 - 3 = -3, f(2) = 2m.$$

Theo đề ta có $f(0) + f(2) = 2025 \Rightarrow -3 + 2m = 2025 \Leftrightarrow m = 1014$.

Câu 14: Một người thuê xe mô tô đi phượt với mức giá như sau

Ngày đầu	Từ ngày thứ 2 đến hết ngày thứ 3	Ngày thứ 4 trở về sau
900 ngàn đồng/ ngày	800 ngàn đồng/ ngày	700 ngàn đồng/ ngày

Tính số tiền thuê ôtô trong ngày thứ 10 .

Lời giải

Đáp án: 4700

Phần giải chi tiết

Gọi x là số ngày thuê xe, theo đề ta có công thức tính tiền thuê xe phải trả là

$$\begin{cases} 900 & \text{khi } 0 < x \leq 1 \\ 900 + (x-1).800 & \text{khi } 1 < x \leq 3 \\ 900 + 800.2 + (x-3).700 & \text{khi } x > 3 \end{cases}$$

Số tiền thuê xe 10 ngày là $900 + 800.2 + (10-3).700 = 4700$ ngàn đồng.

Câu 15: Một công ty dịch vụ cho thuê xe ôtô tự lái vào dịp tết với giá thuê mỗi chiếc xe ôtô như sau: khách thuê tối thiểu phải thuê trọn ba ngày tết với giá 1 triệu đồng/ngày; những ngày còn lại sẽ được tính giá thuê là 600000 đồng/ngày. Tính số tiền mà khách phải trả cho công ty khi thuê 7 ngày.

Lời giải

Trả lời: 5,4

Giả sử T là tổng số tiền mà khách phải trả khi thuê một chiếc xe ôtô của công ty và x là số ngày thuê của khách, ta có hàm số

$$T = 3 + 0,6(x-3) = 1,2 + 0,6x \quad \text{với } x \geq 3, x \in \mathbb{N}.$$

Số tiền khách phải trả khi thuê 7 ngày là: $T(7) = 1,2 + 0,6.7 = 5,4$

Câu 16: Một nhân viên bán hàng sẽ nhận được một mức lương cơ bản là 6 triệu đồng mỗi tháng và một khoản hoa hồng là 5% nếu tổng doanh số trên 10 triệu đồng trong tháng. Ngoài ra, nếu doanh số bán hàng hàng tháng là 20 triệu đồng hoặc nhiều hơn thì nhân viên bán hàng nhận được thêm tiền thưởng là 600 nghìn đồng. Hỏi nhân viên đó sẽ nhận được bao nhiêu tiền lương nếu doanh số trong 1 tháng của nhân viên đó là 45 triệu đồng?

Lời giải

Trả lời: 8,85

Gọi x là doanh số bán hàng và y là thu nhập tương ứng của nhân viên đó hàng tháng.

Ta có hàm số biểu diễn thu nhập hàng tháng của nhân viên đó theo doanh số bán hàng như sau :

$$y = \begin{cases} 6 & \text{khi } 0 \leq x \leq 10 \\ 6 + 0,05x & \text{khi } 10 < x < 20 \\ 6,6 + 0,05x & \text{khi } x \geq 20 \end{cases}.$$

Khi $x = 45$ thì $y = 6,6 + 0,05.45 = 8,85$ triệu đồng.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$ có bảng giá trị như bên dưới. Hãy tính $A = f(-3) + 2f(0) - 3f(3)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x) = ax^2$	$f(-3)$	-2	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$

Lời giải**Đáp án: 9**

Nhìn vào bảng giá trị ta thấy $x = -2$ thì $y = f(-2) = -2$ nên $a = -\frac{1}{2}$.

Do đó, ta có hàm số: $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

Nên $f(-3) = -\frac{9}{2}$; $f(0) = 0$; $f(3) = -\frac{9}{2}$.

Vậy $A = f(-3) + 2f(0) - 3f(3) = -\frac{9}{2} + 2 \cdot 0 - 3 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = 9$.

Câu 18: Giả sử $D = (a; b)$ là tập xác định của hàm số $y = \frac{24x+25}{\sqrt{2x-2}} - \frac{20x^2+10x+24}{\sqrt{2-x}}$. Tính $S = 2a^2 + b^2$.

Lời giải**Đáp án: 6**

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Nên $a = 1$; $b = 2$.

Vậy $S = 2 \cdot 1^2 + 2^2 = 6$.

Câu 19: Cho $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 4x + 1 & \text{ khi } x \geq 0 \\ x + 4 & \text{ khi } x < 0 \end{cases}$. Biết $f(1) = -2$. Tính $f(-3) + f(3)$.

Lời giải**Đáp án: -1**

Với $x = 1 \geq 0$, ta có: $f(1) = a \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = a - 3$.

Vì $f(1) = -2$ nên $a - 3 = -2 \Leftrightarrow a = 1$.

Khi đó: $f(-3) = -3 + 4 = 1$ và $f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = -2$.

Vậy $f(-3) + f(3) = 1 - 2 = -1$.

Câu 20: Một hãng taxi có bảng giá như sau:

Bảng Giá Cước - Taxi Fare		
Giá mở cửa <i>Commencement rate up 0.6 km</i>	Giá km tiếp theo <i>From the following km to 25th km</i>	Từ km thứ 25 <i>For each km from the 25th km+</i>
10.000 đ/0.6km	13.000 đ/km	11.000 đ/km
Phí thời gian chờ 2.000 đ/4 phút Every 4 minutes is 2.000 VND for waiting time		Giá trên đã bao gồm 10% Thuế Giá trị gia tăng
Giảm giá 60% chiều về cho khách đi đường dài 2 chiều phạm vi từ 40 Km trở đi (chiều về tương ứng với chiều đi)		

Tính số tiền hành khách phải trả khi di chuyển 28 km .

Lời giải

Đáp án: 360

Số tiền phải trả khi di chuyển 25 km là $y = 10 + (25 - 0,6) \cdot 13 = 327,2$

Công thức tính số tiền cước taxi phải trả theo số kilômét di chuyển.

$$y = \begin{cases} 10 & \text{khi } 0 \leq x \leq 0,6 \\ 10 + 13(x - 0,6) & \text{khi } 0,6 < x \leq 25 \\ 327,2 + 11(x - 25) & \text{khi } x > 25 \end{cases}$$

Số tiền phải trả khi di chuyển 28 km là $y = 327,2 + (28 - 25) \cdot 11 = 360,2$

Câu 21: Anh Nam đang dự định đi mua xe máy mà muốn chọn một trong hai loại xe sau

Loại xe 1: Có giá 30 triệu đồng và trung bình mỗi một lít xăng đi được 50 km.

Loại xe 2: Có giá 40 triệu đồng và trung bình mỗi một lít xăng đi được 60 km.

Biết rằng giá trung bình 1 lít xăng là 24 nghìn đồng và dự định mỗi năm anh Nam đi được khoảng 9000 km. Hỏi thời gian sử dụng tối thiểu là bao nhiêu năm thì nên mua loại xe 2.

Lời giải

Đáp số: 14

Gọi $f(t)$ là hàm chi phí theo từng năm đối với thời gian t sử dụng xe loại 1.

Mỗi năm xe loại 1 tiêu thụ hết $9000 : 50 = 180$ ứng với số tiền là $180 \cdot 24 = 4320 = 4320000$.

Suy ra $f(t) = 30000 + 4320t$

Gọi $g(t)$ là hàm chi phí theo từng năm đối với thời gian t sử dụng xe loại 2.

Mỗi năm xe loại 2 tiêu thụ hết $9000 : 60 = 150$ ứng với số tiền là $150 \cdot 24 = 3600 = 3600000$.

Suy ra $g(t) = 40000 + 3600t$

$$f(t) > g(t) \Leftrightarrow 30000 + 4320t > 40000 + 3600t \Leftrightarrow 720t > 10000 \Leftrightarrow t > \frac{125}{9} \approx 13,9$$

Vậy, nếu sử dụng xe từ 14 năm trở lên thì mới nên mua loại xe 2.

Câu 22: Bảng giá cước gọi quốc tế của công ty viễn thông A được cho bởi bảng sau:

Thời gian gọi	Giá cước điện thoại
Không quá 10 phút	7000
Từ phút thứ 10 đến phút thứ 15	6500
Từ phút thứ 15 đến phút thứ 30	6000
Từ phút thứ 30 trở đi	5500

Nếu ông Anh gọi điện cho người thân ở nước ngoài tổng cộng 209000 đồng thì số phút Ông phải gọi là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp số: 33

Gọi $f(t)$ là số tiền ông Anh phải trả khi gọi quốc tế trong khoảng thời gian t .

Nếu $t \leq 10$ thì $f(t) = 7000t$,

Nếu $10 < t \leq 15$ thì $f(t) = 7000 \cdot 10 + 6500(t - 10) = 6500t + 5000$,

Nếu $15 < t \leq 30$ thì $f(t) = 7000 \cdot 10 + 6500 \cdot (15 - 10) + 6000(t - 15) = 6000t + 12500$,

Nếu $t > 30$ thì $f(t) = 7000 \cdot 10 + 6500 \cdot (15 - 10) + 6000 \cdot (30 - 15) + 5500t = 5500t + 12500$,

$$f(t) = \begin{cases} 7000t, & \text{khi } t \leq 10 \\ 6500t + 5000, & \text{khi } 10 < t \leq 15 \\ 6000t + 12500, & \text{khi } 15 < t \leq 30 \\ 5500t + 12500, & \text{khi } t > 30 \end{cases}$$

Ta có hàm số

Thay $t = 30$ vào $f(t) = 6000t + 12500$ ta được $f(t) = 192500 < 209000$ nên ông Anh phải gọi trên 30

phút. Vậy, số phút ông Anh phải gọi là $30 + \frac{209000 - 192500}{5500} = 33$

Câu 23: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với các hệ số $a, b, c \in \mathbf{R}; a \neq 0$. Biết rằng đồ thị của hàm số là đường parabol (P) đi qua ba điểm $A(1; -1)$, $B(2; 3)$, $C(-1; -3)$. Giá trị của biểu thức $T = -a + 2024b - 12c$ bằng

Lời giải

Đáp án: 2059

Tập xác định: $D = \mathbf{R}$.

Vì parabol (P) đi qua ba điểm $A(1; -1)$, $B(2; 3)$, $C(-1; -3)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b+c=-1 \\ 4a+2b+c=3 \\ a-b+c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-3 \end{cases}$$

Do vậy công thức hàm số $y = x^2 + x - 3$ và $T = -a + 2024b - 12c = 2059$

Câu 24: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với các hệ số $a, b, c \in \mathbf{R}; a \neq 0$. Biết rằng hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $x = 2$ và đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ là 8. Khi đó giá trị của biểu thức $2a + 3b - 6c$ bằng

Lời giải

Đáp án: -58

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Trên $\mathbb{R}$ hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có giá trị nhỏ nhất nên $a > 0$. Vì hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $x = 2$ nên đồ thị hàm số là parabol có đỉnh $I(2; 4)$.

Từ giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 4 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = -4 \\ c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 0 \\ 2a + b = -2 \\ c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 8 \end{cases}$$

Vậy $a = 1; b = -4; c = 8$ do đó $2a + 3b - 6c = -58$.

Câu 25: Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -6x + 13$ tại điểm có hoành độ $x = 1$. Tổng giá trị $a + 2b + 3c$

Lời giải

Đáp án: 25

Ta có đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -6x + 13$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ nên đồ thị đi qua điểm $A(1; 7)$ do đó $a + b + c = 7$

$$\begin{cases} y(2) = 5 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ a + b + c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 5 \\ 4a + b = 0 \\ a + b + c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ c = 13 \end{cases}$$

Theo bài ra ta có

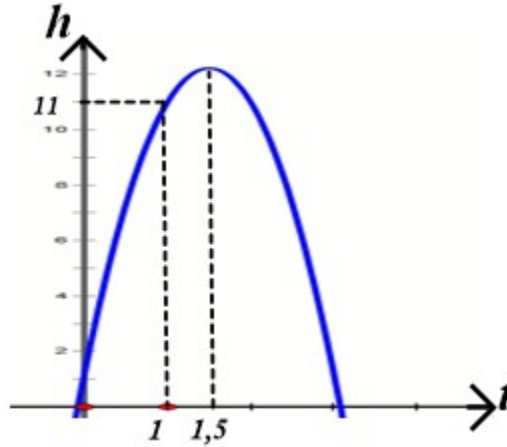
Từ đó $a + 2b + 3c = 25$

Câu 26: Khi quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết quỹ đạo của quả bóng là một parabol. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao $1,2$ m, Sau 1 giây, nó đạt độ cao 11 m và thời gian để quả bóng đạt độ cao lớn nhất là $1,5$ giây sau khi ném. Tìm độ cao lớn nhất của quả bóng

Lời giải

Đáp án: 12,225

Chọn hệ trục Oth như hình



Tại $t = 0$ ta có $h = 1,2$

Tại $t = 1$ ta có $h = 11$

Tại $t = \frac{3}{2}$ ta có h đạt giá trị lớn nhất

Parabol có phương trình $h = at^2 + bt + c$ ($a \neq 0$)

$$\begin{cases} c = 1,2 \\ a + b + c = 11 \\ \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1,2 \\ a + b + c = 11 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4,9 \\ a = 14,7 \\ c = 1,2 \end{cases}$$

Theo bài ta có hệ phương trình

Parabol có phương trình $h = -4,9t^2 + 14,7t + 1,2$

$$h\left(\frac{3}{2}\right) = -4,9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 14,7\left(\frac{3}{2}\right) + 1,2 = 12,225m$$

Do đó độ cao lớn nhất của quả bóng là

Câu 27: Một cửa hàng bán bưởi Đoàn Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30000 đồng.

Lời giải

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoàn Hùng (x : đồng, $30000 \leq x \leq 50000$).

Tương ứng với giá bán là x thì số quả bán được là: $40 + \frac{10}{1000}(50000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540$.

Gọi $f(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($f(x)$: đồng), ta có:

$$f(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right) \cdot (x - 30000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16200000$$

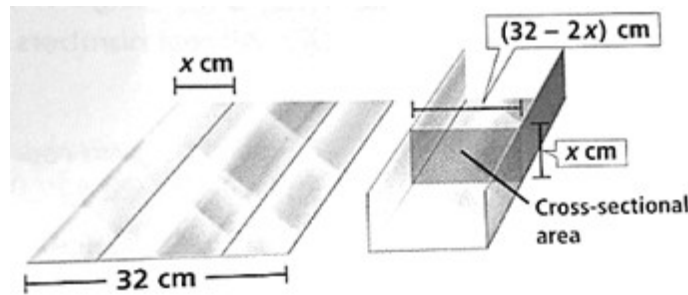
Lợi nhuận thu được lớn nhất khi hàm $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[30000; 50000]$

Ta có: $f(x) = -\left(\frac{1}{10}x - 4200\right)^2 + 1440000 \leq 1440000, \forall x \in [30000; 50000]$

$$\Rightarrow \max_{x \in [30000; 50000]} f(x) = f(42000) = 1440000$$

Vậy với giá bán 42000 đồng mỗi quả bưởi thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 28: Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng chia tám nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông như hình vẽ dưới. Hỏi x bằng bao nhiêu để tạo ra máng có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất?



Lời giải

Gọi $S(x)$ là diện tích mặt ngang ứng với bề ngang x của phần gấp hai bên, ta có:

$$S(x) = x(32 - 2x), \text{ với } 0 < x < 16.$$

Diện tích mặt ngang lớn nhất khi hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0; 16)$.

$$S(x) = -2x^2 + 32x = -2(x - 8)^2 + 128 \leq 128, \forall x \in (0; 16)$$

Ta có:

$$\Rightarrow \max S(x) = S(8) = 128$$

Vậy $x = 8$ cm thì diện tích mặt ngang lớn nhất.

Câu 29: Cửa hàng Goden tea hiện đang bán trà sữa với mức giá 30 nghìn đồng mỗi ly, lượng khách trung bình mỗi tháng là 4000 lượt. Cửa hàng muốn tăng giá để tăng thêm doanh thu. Biết rằng nếu giá mỗi ly

trà sữa cứ tăng thêm 1 nghìn đồng thì lượng khách mỗi tháng lại giảm đi 100 lượt. Hỏi anh A phải bán giá bao nhiêu một ly để đạt doanh thu cao nhất.

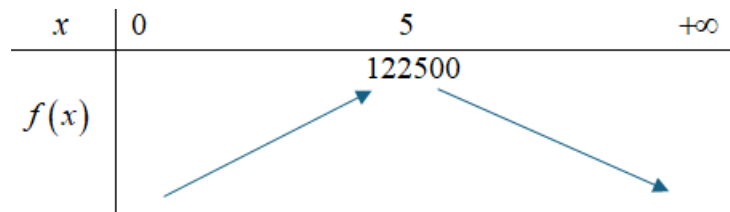
Lời giải

Giả sử giá trà sữa tăng thêm x nghìn đồng ($x \geq 0$) thì lượng khách giảm đi $100x$ lượt, Doanh thu của cửa hàng thu được là

$$f(x) = (30 + x)(4000 - 100x) = -100x^2 + 1000x + 120000$$

Ta có $f(x)$ là hàm số bậc hai có đỉnh $I(5; 122500)$

Bảng biến thiên



Như vậy, để đạt doanh thu lớn nhất thì giá tăng thêm là 5. Vậy giá bán là 35 nghìn đồng.

Câu 30: Biết rằng đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ là một parabol có đỉnh $S\left(\frac{3}{2}; \frac{17}{4}\right)$ và đi qua điểm $A(0; 2)$. Giá trị của biểu thức $S = a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 4.

Vì đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ là một parabol có đỉnh $S\left(\frac{3}{2}; \frac{17}{4}\right)$ và đi qua điểm $A(0; 2)$ nên

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{17}{4} \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b = -3a \\ 9a + 6b = 9 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$$

Khi đó, ta có $S = a + b + c = -1 + 3 + 2 = 4$.

Câu 31: Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị lớn nhất bằng -4 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; -5)$. Giá trị của biểu thức $T = a + b - c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 5,75

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị lớn nhất bằng -4 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua $A(0; -5)$ nên

$$\begin{cases} a < 0 \\ \frac{-b}{2a} = 2 \\ a \cdot (2)^2 + 2b + c = -4 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ 4a + b = 0 \\ 4a + 2b + c = -4 \\ c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 1 \\ c = -5 \end{cases}$$

$$T = a + b - c = -\frac{1}{4} + 1 + 5 = 5,75.$$

Khi đó, ta có

Câu 32: Biết đồ thị hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(0; 3)$, $B(1; 0)$ và $C(-1; 8)$. Giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 26

Do đồ thị hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(0; 3)$ nên $c = 3$. Suy ra $f(x) = ax^2 + bx + 3$.

Mặt khác đồ thị hàm số $f(x) = ax^2 + bx + 3$ đi qua 2 điểm $B(1; 0)$ và $C(-1; 2)$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b + 3 = 0 \\ a - b + 3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -3 \\ a - b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}.$$

$$\text{Giá trị biểu thức } T = a^2 + b^2 + c^2 = 1^2 + (-4)^2 + 3^2 = 26.$$

Câu 33: Một nhà hát có sức chứa 800 người. Với giá vé 40 nghìn đồng trung bình sẽ có 300 người đến nhà hát mỗi ngày. Để tăng doanh thu, nhà hát đã khảo sát thị trường và thấy rằng nếu giá vé cứ giảm 10 nghìn đồng sẽ có thêm 100 người đến rạp xem phim mỗi ngày. Gọi A là giá vé để doanh thu từ tiền bán vé của nhà hát là lớn nhất. Tính giá trị biểu thức $A^2 + 2025$.

Lời giải

Đáp án: 3250

Gọi giá vé bán của nhà hát là x ($0 < x < 40$).

Khi đó số tiền giảm giá vé so với giá cũ 40 nghìn đồng là $(40 - x)$ nghìn đồng.

$$\text{Số người đến rạp tăng thêm mỗi ngày: } \frac{40 - x}{10} \cdot 100 = 10(40 - x) = 400 - 10x.$$

$$\text{Số người đến rạp xem phim mỗi ngày: } 300 + 400 - 10x = 700 - 10x.$$

$$\text{Doanh thu từ tiền bán vé của nhà hát bằng } f(x) = x(700 - 10x) = -10x^2 + 700x.$$

$$\text{Hàm số } f(x) \text{ là hàm số bậc hai, đạt giá trị lớn nhất tại } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{700}{2 \cdot (-10)} = 35.$$

Do đó để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất thì giá vé của nhà hát là $A = 35$. Giá trị biểu thức $A^2 + 2025 = 35^2 + 2025 = 3250$.

Câu 34: Một cửa hàng bán bưởi da xanh với giá bán mỗi quả là 60000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 30 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 35000 đồng.

Lời giải

Đáp án: 49

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi da xanh (x : nghìn đồng, $35000 \leq x \leq 60000$).

Tương ứng với giá bán là x thì số quả bán được là: $30 + \frac{10}{1000}(60000 - x) = -\frac{1}{100}x + 630$.

Gọi $f(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($f(x)$: đồng), ta có:

$$f(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 630\right) \cdot (x - 35000) = -\frac{1}{100}x^2 + 980x - 22050000$$

Lợi nhuận thu được lớn nhất khi hàm $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[35000; 60000]$

Ta có:
$$f(x) = -\left(\frac{1}{10}x - 4900\right)^2 + 1960000 \leq 1960000, \forall x \in [35000; 60000]$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [35000; 60000]} f(x) = f(49000) = 1960000$$

Vậy với giá bán 49 nghìn đồng mỗi quả bưởi thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 35: Cầu Nhật Tân bắc qua sông Hồng được xem là dây cầu văng dài nhất Việt nam năm 2022. Cầu có 5 trụ tháp chính nối các nhịp dây văng nâng đỡ toàn bộ phần chính của cây cầu, cũng là để tượng trưng cho 5 cửa ô cổ kính của Hà Nội. Mỗi trụ tháp được kiến trúc tạo dáng mỹ thuật phía trong bằng đường cong tựa như một parabol.



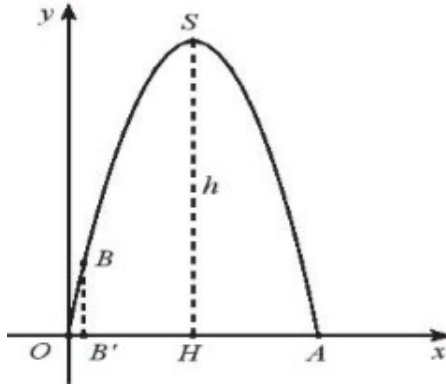
Giả sử rằng mặt trong của trụ cầu là một parabol . Biết độ rộng của mặt đường khoảng $43m$. Một người đã dùng dây dọi gắn lên thành trụ cầu ở vị trí B và điều chỉnh độ dài dây dọi để quả nặng vừa chạm đất ,

sau đó đo được chiều dài đoạn dây dọi sử dụng là $1,87m$ và khoảng cách từ chân trụ cầu đến quả nặng là $20cm$. Ước tính độ cao của đỉnh vòm phía trong một trụ của cầu Nhật Tân tới mặt đường?

Lời giải

Đáp án: 101m

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho vị trí chân trụ cầu trùng với gốc tọa độ O , trục Ox nằm trên đường nối hai chân trụ, A là chân trụ thứ hai và H là trung điểm OA



Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ đi qua gốc tọa độ O nên $c = 0$

Từ giả thiết, ta có đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(43;0), B(0,2;1,87)$

Thay tọa độ các điểm trên vào hàm số, ta được và hệ phương trình

$$\begin{cases} 43^2 \cdot a + 43 \cdot b = 0 \\ 0,2^2 \cdot a + 0,2 \cdot b = 1,87 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{187}{856} \\ b = \frac{8041}{856} \end{cases}$$

Suy ra hàm số $y = -\frac{187}{856}x^2 + \frac{8041}{856}x$.

Hình chiếu của đỉnh S trên trục hoành là H nên

$$y_S = f(x_S) = f(x_H) = f\left(\frac{x_A}{2}\right) = f\left(\frac{43}{2}\right) \approx 100,98$$

Từ đó, độ cao của đỉnh vòm phía trong một trụ của cầu Nhật Tân tới mặt đường là khoảng $101m$.

Câu 36: Một quả bóng được ném vào không trung có chiều cao tính từ lúc bắt đầu ném ra được cho bởi công thức $h(t) = -t^2 + 2t + 3$, t là thời gian tính bằng giây ($t \geq 0$). Tính chiều cao lớn nhất quả bóng đạt được.

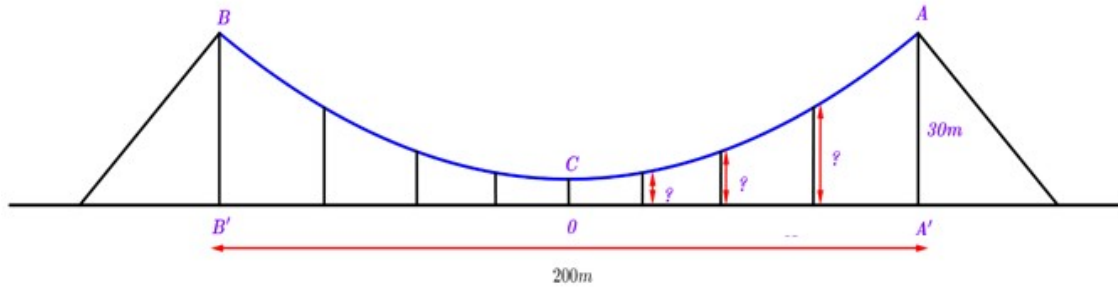
Đáp án là: 4m

Lời giải

Ta có: $h(t) = -t^2 + 2t + 3 \Leftrightarrow h(t) = -(t-1)^2 + 4 \Rightarrow \max h(t) = h(1) = 4$.

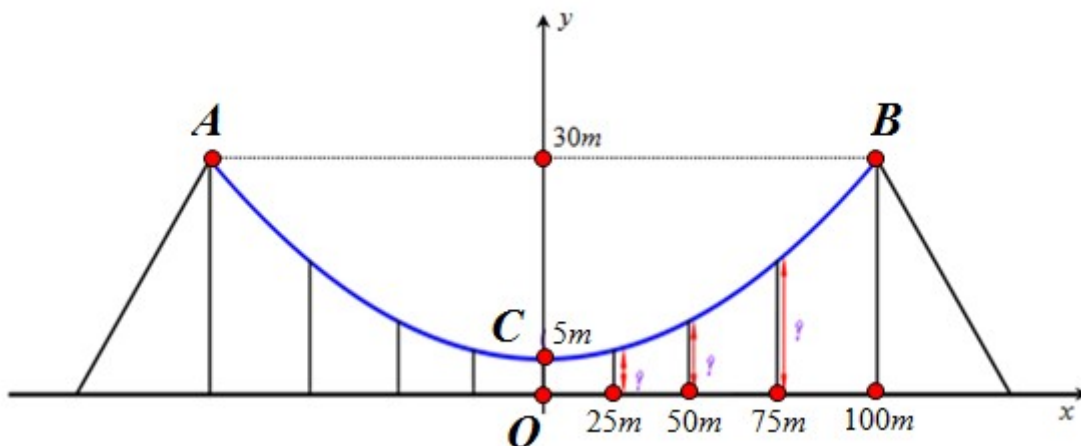
Vậy quả bóng đạt chiều cao lớn nhất bằng 4 m tại thời điểm $t = 1$ giây.

Câu 37: Một kĩ sư thiết kế cây cầu treo bắt ngang dòng sông . Ở hai bên dòng sông, kĩ sư thiết kế hai cột trụ đỡ AA' và BB' có độ cao $30m$ và bên trên có bắt một dây truyền có dạng Parabol (ACB) để đỡ nền cầu. Hai đầu của dây truyền được gắn chặt vào hai điểm A và B . Để chịu sức nặng của cây cầu và các phương tiện giao thông thì ở khoảng giữa cầu phải đặt thêm dây cáp treo thẳng đứng nối nền cầu với dây truyền. Biết khoảng cách giữa các dây cáp treo và hai cột trụ là bằng nhau và dây cáp có độ dài ngắn nhất là $OC = 5m$. Khoảng cách $A'B' = 200m$. Tổng chiều dài các cáp treo còn lại là bao nhiêu mét? .



Đáp án là: 36.9

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ (Oxy) như hình vẽ.

Parabol (P) có dạng: $y = ax^2 + b$.

Ta có:

$$\begin{cases} B(100, 30) \in (P) \\ C(0, 5) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10000a + b = 30 \\ b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{400} \\ b = 5 \end{cases}$$

Do đó Parabol (P) : $y = \frac{1}{400}x^2 + 5$.

Chiều dài các cáp treo còn lại lần lượt là: $6,56m$, $11,25m$, $19,06m$.

Vậy, tổng chiều dài các cáp treo còn lại là: $36,9m$.

Câu 38: Cho hàm số $y = x^2 + 2x + m - 3$ có đồ thị là parabol (P) , đỉnh I . Gọi A, B là giao điểm của (P) và trục Ox . Tìm m để diện tích tam giác IAB bằng $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x = \frac{-b}{2a} = -1 \\ y = m - 4 \end{cases} \text{ nên } I(-1; m - 4).$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và Ox : $x^2 + 2x + m - 3 = 0$.

(P) cắt Ox tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow \Delta' = 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$.

$$S_{IAB} = \frac{1}{2}(4 - m)|x_A - x_B| = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow$$

Vậy $m = 3,5$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 39: Một nhà nghỉ ở Hạ Long có 40 phòng cho thuê. Hiện tại nhà nghỉ đang được cho thuê với giá 600000 đồng/ phòng/ đêm thì tất cả các phòng đều được thuê hết. Chủ nhà nghỉ ước tính cứ tăng giá tiền lên 50.000 đồng/ phòng/ đêm thì sẽ có 2 phòng bị bỏ trống. Hỏi chủ nhà nghỉ nên cho thuê với giá bao nhiêu nghìn đồng/ phòng/ đêm để tổng doanh thu một ngày là cao nhất?

Lời giải

Đáp án: 800

Gọi giá tiền nhà chủ nhà nghỉ cho thuê một phòng một đêm là x .

Nếu chủ nhà nghỉ cho thuê với giá thấp hơn 600.000 đồng/ phòng/ đêm thì hiển nhiên là doanh thu bị giảm đi. Do đó ta chỉ xét trường hợp $x > 600$.

Theo bài ra số phòng được thuê là: $40 - \frac{x - 600}{50} \cdot 2$.

Khi đó tổng doanh thu trong một ngày là:

$$\left(40 - \frac{x - 600}{50} \cdot 2\right) \cdot x = \frac{1}{25}(1000x - x^2 + 600x) = \frac{1}{25}(-x^2 + 1600x)$$

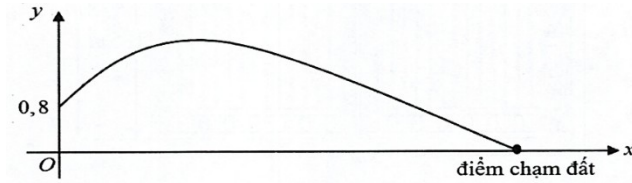
Nhận thấy: biểu thức $\frac{1}{25}(-x^2 + 1600x)$ là tam thức bậc hai có hệ số cao nhất âm, nhận giá trị lớn nhất tại

$$x = \frac{-b}{2a} = 800$$

Vậy chủ nhà nên cho thuê với giá 800.000 đồng/ phòng/ đêm để tổng doanh thu một ngày là cao nhất.

Câu 40: Bạn Mai chơi cầu lông có khuynh hướng phát cầu với góc 45° so với mặt đất. Biết quả cầu khi rời vợt ở độ cao 0.8 m so với mặt đất và vận tốc xuất phát của quả cầu là 4 m/s . Biết mép trên của lưới cao 1 m, hỏi Mai có thể đứng cách xa lưới tối đa bao nhiêu mét để quả cầu bay qua lưới? . Coi gia tốc trọng trường là 10 m/s^2 .

Đáp án: 1,37



Gán hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, vị trí xuất phát của quả cầu nằm trên trục tung. Vì gia tốc trọng trường là 10 m/s^2 , vận tốc xuất phát của quả cầu là 4 m/s và góc phát cầu là 45° so với mặt đất nên ta có phương trình chuyển động là:

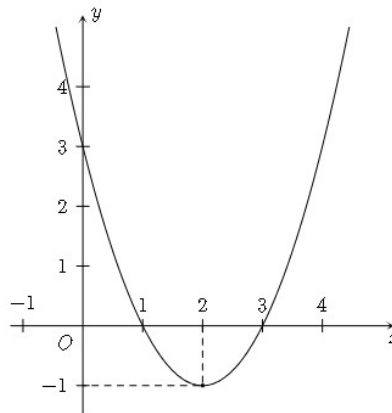
$$y = \frac{-10}{2 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} x^2 + x \cdot 1 + 0,8 = \frac{-5}{8} x^2 + x + 0,8$$

Quả cầu đạt độ cao của mép trên lưới khi và chỉ khi $y = 1$.

Khi đó: $\frac{-5}{8} x^2 + x - 0,2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,37 \\ x = 0,23 \end{cases}$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy khi $x > 1,37$ thì $y < 1$ và cầu sẽ không qua lưới. Do đó để quả cầu qua lưới thì bạn Mai đứng cách xa lưới tối đa là 1.37 m.

Câu 41: Cho hàm số bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ.



Tính giá trị của biểu thức $a + 2b + c$

Lời giải

Đáp án: -4

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 3)$ nên ta có: $c = 3$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 0)$ nên ta có: $a + b + c = 0$

Đồ thị hàm số có hoành độ đỉnh: $-\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a$

Từ , , ta có $a = 1; b = -4; c = 3$. Vậy $a + 2b + c = 1 - 8 + 3 = -4$.

Câu 42: Tìm tổng tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + m$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B phân biệt sao cho $OA = 3OB$.

Lời giải

Đáp án: -9

Phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị hàm số và trục hoành: $x^2 - 4x + m = 0$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm A, B phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$$

Gọi $A(x_A; 0), B(x_B; 0)$ là tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành.

Theo định lí Viet ta có: $x_A + x_B = 4, x_A \cdot x_B = m$

Theo yêu cầu bài toán:

$$OA = 3OB \Leftrightarrow |x_A| = 3|x_B| \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3x_B \\ x_A = -3x_B \end{cases}$$

TH1: Với $x_A = 3x_B$, ta có $\begin{cases} x_A + x_B = 4 \\ x_A = 3x_B \\ x_A \cdot x_B = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3 \\ x_B = 1 \\ m = 3 \end{cases}$. Kết hợp điều kiện $m < 4$, suy ra $m = 3$ thỏa mãn.

TH2: Với $x_A = -3x_B$, ta có $\begin{cases} x_A + x_B = 4 \\ x_A = -3x_B \\ x_A \cdot x_B = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 6 \\ x_B = -2 \\ m = -12 \end{cases}$. Kết hợp điều kiện $m < 4$, suy ra $m = -12$ thỏa mãn.

Vậy tổng các giá trị của tham số m là: -9

Câu 43: Một cửa hàng bán Na sầu riêng với giá bán mỗi quả là 60000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 30 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số Na sầu riêng bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất , biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 35000 đồng.

Lời giải

Trả lời: 49

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả Na sầu riêng (x : đồng, $35000 \leq x \leq 60000$).

Tương ứng với giá bán là x thì số quả bán được là: $30 + \frac{60000 - x}{1000} \cdot 10 = -\frac{1}{100}x + 630$.

Gọi $f(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($f(x)$: đồng), ta có:

$$f(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 630 \right) \cdot (x - 35000) = -\frac{1}{100}x^2 + 980x - 22050000$$

Lợi nhuận thu được lớn nhất khi hàm $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[35000; 60000]$

Ta có: $f(x) = -\left(\frac{1}{10}x - 4900\right)^2 + 1960000 \leq 1960000, \forall x \in [35000; 60000]$

Lợi nhuận thu được lớn nhất khi hàm $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất là $f(49000) = 1960000$.

Vậy với giá bán 49000 đồng mỗi quả Na sần riêng thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 44: Một hiệu cho thuê xe máy niêm yết giá như sau: giá thuê xe là 150 nghìn đồng một ngày cho ba ngày đầu tiên và 120 nghìn đồng một ngày cho các ngày tiếp theo. Với số tiền 1 triệu đồng, khách có thể thuê xe tối đa trong bao nhiêu ngày?

Lời giải

Trả lời: 7

Gọi x là số ngày mà khách thuê. Ta có, công thức tính tiền thuê xe là:

$$T(x) = \begin{cases} 150x, & 0 \leq x \leq 3 \\ 450 + 120(x-3), & x > 3 \end{cases} = \begin{cases} 150x, & 0 \leq x \leq 3 \\ 120x + 90, & x > 3 \end{cases}$$

Đổi: 1 triệu đồng = 1000 nghìn đồng.

Nếu $0 \leq x \leq 3$ thì $T(x) = 150x \leq 450$ nghìn vì thế số tiền 1 triệu khách có thể thuê nhiều hơn 3 ngày.

Nếu $x > 3$ thì $T(x) = 120x + 90$

Xét bất phương trình:

$$\begin{aligned} T(x) &\leq 1000 \\ \Leftrightarrow 120x + 90 &\leq 1000 \\ \Leftrightarrow x &\leq 7,58 \end{aligned}$$

Nghiệm nguyên dương lớn nhất của bất phương trình này là $x = 7$

Vậy số tiền 1 triệu thì khách thuê được tối đa 7 ngày liên tiếp.

Câu 45: Đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+4}$ cắt trục tung và trục hoành lần lượt tại hai điểm A, B . Tính diện tích tam giác IAB biết $I(1; -1)$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+4}$ cắt trục tung và trục hoành lần lượt tại hai điểm $A(0; 2), B(-4; 0)$.

Cách 1: Ta có $\overline{IA} = (-1; 3) \Rightarrow IA = \sqrt{10}$, $\overline{IB} = (-5; 1) \Rightarrow IB = \sqrt{26}$, $\overline{AB} = (-4; -2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$

Nửa chu vi: $p = \frac{IA + IB + AB}{2} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{26} + 2\sqrt{5}}{2}$

Diện tích tam giác IAB bằng $S_{\triangle IAB} = \sqrt{p(p-IA)(p-IB)(p-AB)} = 7$.

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{IA} = (-1; 3)$, $\overrightarrow{IB} = (-5; 1)$,

Diện tích tam giác IAB bằng $S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2} |(-1) \cdot 1 - 3 \cdot (-5)| = 7$.

Câu 46: Ông An nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là 50m^2 . Vụ trước ông nuôi với mật độ là $20\text{ con}/\text{m}^2$ và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi $4\text{ con}/\text{m}^2$ thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên $0,5\text{kg}$. Vậy vụ tới ông An phải thả bao nhiêu con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

Lời giải

Đáp số: 800

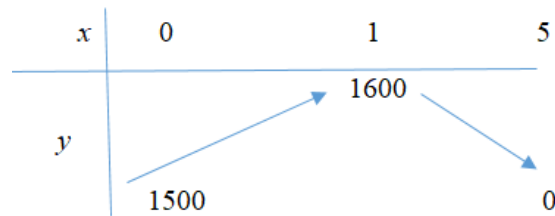
Ở vụ trước, ông An đã thả $20 \cdot 50 = 1000$ con cá giống và thu được 1,5 tấn cá nên trung bình mỗi con cá sẽ nặng $1,5\text{ kg}$.

Gọi x là số lần giảm đi $4\text{ con}/\text{m}^2$, điều kiện $5 > x \geq 0, x \in \mathbb{Z}$.

Ta tính tổng năng suất thu hoạch bằng công thức sau

$$S(x) = 50(20 - 4x)(1,5 + 0,5x) = -100x^2 + 200x + 1500 \quad (\text{kg})$$

Xét hàm số $y = S(x)$ trên $[0; 5)$, có bảng biến thiên



Vậy vụ tới ông An phải thả 800 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất là 1600 kg bằng $1,6$ tấn.

Câu 47: Biết rằng tồn tại $a \in \mathbb{R}$ để hàm số $y = \frac{1}{x-4}$ nghịch biến trên khoảng $(a; +\infty)$. Gọi a_0 là giá trị nhỏ nhất của a . Tính $a_0^2 + 2024$.

Lời giải

Đáp số: 2040

Hàm số $f(x) = \frac{1}{x-4}$ xác định khi $x-4 \neq 0$ tức là $x \neq 4$ nên $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Lấy x_1, x_2 là hai số tùy ý cùng thuộc mỗi khoảng $(-\infty; 4), (4; +\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$ ta có

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1 - 4} - \frac{1}{x_2 - 4} = \frac{x_2 - x_1}{(x_1 - 4)(x_2 - 4)}$$

Do $x_1 < x_2$ nên $x_2 - x_1 > 0$.

Mặt khác, khi lấy x_1 và x_2 cùng nhỏ hơn 4 hoặc cùng lớn hơn 4, ta đều có $x_1 - 4$ và $x_2 - 4$ luôn cùng dấu nên $(x_1 - 4)(x_2 - 4) > 0$ hay $f(x_1) - f(x_2) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Ta kết luận hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 4)$ và $(4; +\infty)$.

Vậy $a_0 = 4$ và $a_0^2 + 2024 = 16 + 2024 = 2040$.

Câu 48: Biết hàm số $y = f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x-4}-3}$ xác định trên khoảng $(a; a^2)$ với a là số nguyên. Giá trị nhỏ nhất của a là:

Lời giải

Đáp số: 13.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ \sqrt{x-4}-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ \sqrt{x-4}-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ \sqrt{x-4} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq x \neq 13$

Nên tập xác định của hàm số là $D = [4; +\infty) \setminus \{13\}$.

Do hàm số xác định trên khoảng $(a; a^2)$ nên $(a; a^2) \subset D$, tức là $\begin{cases} a \geq 4 \\ 13 \notin (a; a^2) \end{cases}$.

Do đó $a \geq 13$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của a là 13.

Câu 49: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị là Parabol (P) . Biết hoành độ đỉnh của (P) là $x_I = 2$ đồng thời (P) cắt đường thẳng $d: y = -2x + 6$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là -1 và 3 . Giá trị của biểu thức $H = a + 2b + 3c$ bằng:

Lời giải

Đáp án: 2

Parabol (P) có hoành độ đỉnh là $x_I = 2$ nên $-\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow 4a + b = 0$.

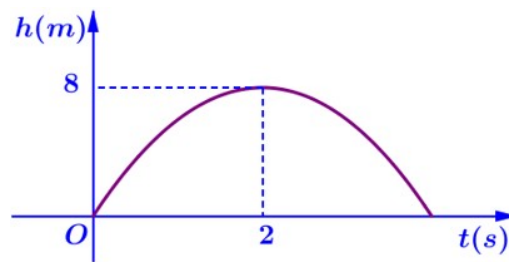
(P) cắt đường thẳng $d: y = -2x + 6$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là -1 và 3 nên tọa độ hai giao điểm lần lượt là $A(-1; 8)$ và $B(3; 0)$.

Khi đó, ta có
$$\begin{cases} A(-1; 8) \in (P) \\ B(3; 0) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 8 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

Do đó, ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 4a + b = 0 \\ a - b + c = 8 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy $H = a + 2b + 3c = 1 + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 3 = 2$

Câu 50: Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Hình vẽ sau minh họa quỹ đạo của quả bóng là một phần của cung parabol trong mặt phẳng tọa độ Oth , trong đó t là thời gian kể từ khi quả bóng được đá lên và h là độ cao của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ mặt đất. Sau khoảng $2s$, quả bóng đó lên đến vị trí cao nhất là 8 m. Sau bao nhiêu giây thì quả bóng chạm đất kể từ khi đá lên?



Lời giải

Đáp số: 4

Gọi hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t là: $h = f(t) = at^2 + bt + c$ ($a < 0$)

Theo giả thiết, quả bóng được đá lên từ mặt đất, nghĩa là $f(0) = c = 0$, do đó $f(t) = at^2 + bt$.

Sau 2 s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8 m nên:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ f(2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ -4a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \end{cases}$$

Vậy $f(t) = -2t^2 + 8t$

Quả bóng chạm đất khi độ cao $h = 0$, tức là:
$$\begin{cases} t > 0 \\ -2t^2 + 8t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4.$$

Vậy sau 4 s quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên.

Câu 51: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số

$y = (m^4 - 5m^2 + 4)x^2 + (2 - m)x + 2025$ là hàm số bậc hai?

Lời giải

Đáp số: 17

Hàm số $y = (m^4 - 5m^2 + 4)x^2 + (2 - m)x + 2025$ khi và chỉ khi $m^4 - 5m^2 + 4 \neq 0 \Leftrightarrow (m^2 - 1)(m^2 - 4) \neq 0$
hay $m \neq \pm 1$ và $m \neq \pm 2$.

Vậy có 17 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 52: Một hãng taxi có bảng giá như sau:

Bảng Giá Cước - Taxi Fare		
Giá mở cửa <i>Commencement rate up 0.6 km</i>	Giá km tiếp theo <i>From the following km to 25th km</i>	Từ km thứ 25 <i>For each km from the 25th km+</i>
10.000 đ/0.6km	13.000 đ/km	11.000 đ/km
Phí thời gian chờ 2.000 đ/4 phút Every 4 minutes is 2.000 VND for waiting time		Giá trên đã bao gồm 10% Thuế Giá trị gia tăng
Giảm giá 60% chiều về cho khách đi đường dài 2 chiều phạm vi từ 40 Km trở đi (chiều về tương ứng với chiều đi)		

Tính số tiền hành khách phải trả khi di chuyển 28km.

Lời giải

Trả lời: 360

Số tiền phải trả khi di chuyển 25km là $y = 10 + (25 - 0,6) \cdot 13 = 327,2$.

Công thức tính số tiền cước taxi phải trả theo số kilômét di chuyển.

$$y = \begin{cases} 10 & \text{khi } 0 \leq x \leq 0,6 \\ 10 + 13(x - 0,6) & \text{khi } 0,6 < x \leq 25 \\ 327,2 + 11(x - 25) & \text{khi } x > 25 \end{cases}$$

Số tiền phải trả khi di chuyển 28km là $y = 327,2 + (28 - 25) \cdot 11 = 360,2$.

Câu 53: Anh Nam đang dự định đi mua xe máy mà muốn chọn một trong hai loại xe sau

Loại xe 1: Có giá 30 triệu đồng và trung bình mỗi một lít xăng đi được 50 km.

Loại xe 2: Có giá 40 triệu đồng và trung bình mỗi một lít xăng đi được 60 km.

Biết rằng giá trung bình 1 lít xăng là 24 nghìn đồng và dự định mỗi năm anh Nam đi được khoảng 9000 km.

Hỏi thời gian sử dụng tối thiểu là bao nhiêu năm thì nên mua loại xe 2.

Lời giải

Trả lời: 14

Gọi $f(t)$ là hàm chi phí theo từng năm đối với thời gian t sử dụng xe loại 1.

Mỗi năm xe loại 1 tiêu thụ hết $9000 : 50 = 180$ ứng với số tiền là $180 \cdot 24 = 4320 = 4320000$.

Suy ra $f(t) = 30000 + 4320t$.

Gọi $g(t)$ là hàm chi phí theo từng năm đối với thời gian t sử dụng xe loại 2.

Mỗi năm xe loại 2 tiêu thụ hết $9000 : 50 = 180$ ứng với số tiền là $180 \cdot 24 = 3600 = 3600000$.

Suy ra $g(t) = 40000 + 3600t$.

$$f(t) > g(t) \Leftrightarrow 30000 + 4320t > 40000 + 3600t \Leftrightarrow 720t > 10000 \Leftrightarrow t > \frac{125}{9} \approx 13,9$$

Vậy, nếu sử dụng xe từ 14 năm trở lên thì mới nên mua loại xe 2.

Câu 54: Bảng giá cước gọi quốc tế của công ty viễn thông A được cho bởi bảng sau:

Thời gian gọi (phút)	Giá cước điện thoại (đồng/phút)
Không quá 10 phút	7000
Từ phút thứ 10 đến phút thứ 15	6500
Từ phút thứ 15 đến phút thứ 30	6000
Từ phút thứ 30 trở đi	5500

Nếu ông Anh gọi điện cho người thân ở nước ngoài tổng cộng 209000 đồng thì số phút Ông phải gọi là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 33

Gọi $f(t)$ là số tiền ông Anh phải trả khi gọi quốc tế trong khoảng thời gian t .

Nếu $t \leq 10$ thì $f(t) = 7000t$,

Nếu $10 < t \leq 15$ thì $f(t) = 7000 \cdot 10 + 6500(t - 10) = 6500t + 5000$,

Nếu $15 < t \leq 30$ thì $f(t) = 7000 \cdot 10 + 6500 \cdot (15 - 10) + 6000(t - 15) = 6000t + 12500$,

Nếu $t > 30$ thì $f(t) = 7000 \cdot 10 + 6500 \cdot (15 - 10) + 6000 \cdot (30 - 15) + 5500t = 5500t + 12500$,

$$f(t) = \begin{cases} 7000t, & \text{khi } t \leq 10 \\ 6500t + 5000, & \text{khi } 10 < t \leq 15 \\ 6000t + 12500, & \text{khi } 15 < t \leq 30 \\ 5500t + 12500, & \text{khi } t > 30 \end{cases}$$

Ta có hàm số

Thay $t = 30$ vào $f(t) = 6000t + 12500$ ta được $f(t) = 192500 < 209000$ nên ông Anh phải gọi trên 30 phút.

Vậy, số phút ông Anh phải gọi là $30 + \frac{209000 - 192500}{5500} = 33$

Câu 55: Giá bán lẻ tiền điện sinh hoạt tính từ ngày 11/10/2024 được cho trong bảng sau:

Bậc	1	2	3	4	5	6
Mức sử dụng	0 - 50 kWh	51- 100 kWh	101- 200 kWh	201- 300 kWh	301- 400 kWh	401 kWh trở lên
Giá bán điện (đồng/kWh)	1.893	1.956	2.271	2.860	3.197	3.302

Dựa vào bảng số liệu trên, hãy tính số tiền điện phải trả ứng với lượng điện tiêu thụ là $150kWh$.

Lời giải

Trả lời: 306

Số tiền điện phải trả ứng với lượng điện tiêu thụ là $150kWh$ là

$$50.1893 + 50.1956 + 50.2271 = 306000 = 306$$

Câu 56: Một người thuê xe mô tô đi phượt với mức giá như sau

1. Ngày đầu	2. Từ ngày thứ 2 đến hết ngày thứ 3	3. Ngày thứ 4 trở về sau
4. 900 ngàn đồng/ ngày	5. 800 ngàn đồng/ ngày	6. 700 ngàn đồng/ ngày

Tính số tiền thuê mô tô trong ngày thứ 10.

Lời giải

Trả lời: 4700

Phân giải chi tiết

Gọi x là số ngày thuê xe, theo đề ta có công thức tính tiền thuê xe phải trả là

$$\begin{cases} 900 & \text{khi } 0 < x \leq 1 \\ 900 + (x-1).800 & \text{khi } 1 < x \leq 3 \\ 900 + 800.2 + (x-3).700 & \text{khi } x > 3 \end{cases}$$

Số tiền thuê xe 10 ngày là $900 + 800.2 + (10-3).700 = 4700$ ngàn đồng.

Câu 57: Một cửa hàng nhân dịp Noel đã đồng loạt giảm giá các sản phẩm. Trong đó có chương trình nếu mua một gói kẹo thứ hai trở đi sẽ được giảm 10% so với giá ban đầu. Biết giá gói đầu là 60000 đồng. Bạn An có 500000 đồng. Hỏi bạn An có thể mua tối đa bao nhiêu gói kẹo?

Trả lời: 9

Lời giải

Xét một người mua x gói kẹo. Khi đó: Gói thứ nhất người đó trả 60000 đồng.

Số gói kẹo còn lại là $x-1$ và người đó chỉ phải trả

$$60000 - 10\%60000 = 54000 \text{ đồng.}$$

Vậy số tiền phải trả khi mua kẹo được tính theo công thức $y = 60000 + (x-1) \cdot 54000 = 54000x + 6000$.

Số tiền bạn An dùng mua kẹo phải không quá 500000 đồng, suy ra:

$$54000x + 6000 \leq 500000 \Rightarrow x \leq \frac{247}{27} \approx 9,148$$

Vậy, với số tiền hiện có, bạn An chỉ có thể mua được tối đa 9 gói kẹo.

Câu 58: Một người nông dân thả 1000 con cá giống vào hồ nuôi vừa mới đào. Biết rằng sau mỗi năm thì số lượng cá trong hồ tăng thêm x lần số lượng cá ban đầu và x không đổi. Bằng cách thay đổi kĩ thuật nuôi và thức ăn cho cá. Hỏi sau hai năm để số cá trong hồ là 36000 con thì tốc độ tăng số lượng cá trong hồ là bao nhiêu? Biết tốc độ tăng mỗi năm là không đổi.

Lời giải

Trả lời: 5

Sau một năm số lượng cá trong hồ là $1000 + 1000x = 1000(1+x)$.

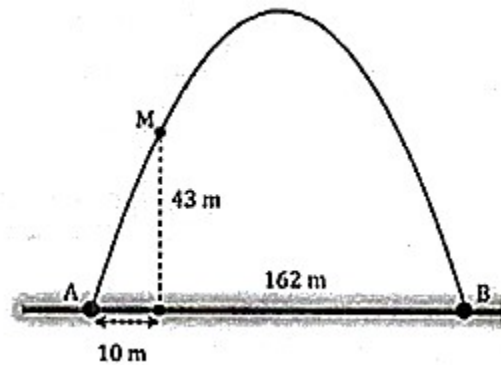
Sau hai năm số lượng cá trong hồ là $1000(1+x) + 1000(1+x)x = 1000(1+x)^2$.

Điều kiện $x > 0$. Để số lượng cá trong hồ sau hai năm là 36000 thì ta có:

$$1000(1+x)^2 = 36000 \Leftrightarrow (1+x)^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -7 \end{cases}$$

Vậy tốc độ tăng thêm số lượng cá trong hồ sau mỗi năm là 5 lần số lượng cá ban đầu.

Câu 59: Cổng Arch tại thành phố St Louis của Mỹ có hình dạng của một parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là $162m$. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao $43m$ so với mặt đất, người ta thả một sợi dây chạm đất và vị trí chạm đất này cách chân cổng một khoảng $10m$. Hãy tính gần đúng độ cao của cổng Arch.



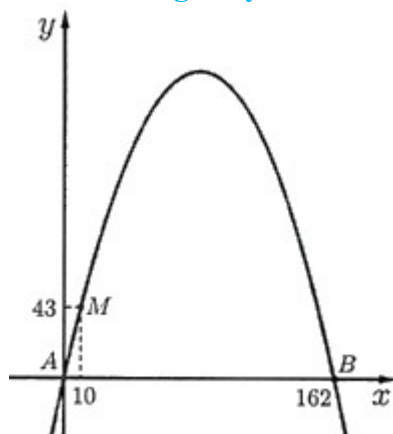
Lời giải

Trả lời: 185,6m

Dựng hệ trục Oxy như hình vẽ và gọi hàm số tương ứng cổng Arch là: $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.

Vì parabol qua ba điểm $A(0;0), B(162;0), M(10;43)$ nên

$$\begin{cases} c = 0 \\ 162^2 a + 162b + c = 0 \\ 10^2 a + 10b + c = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{43}{1520} \\ b = \frac{3483}{760} \end{cases}$$

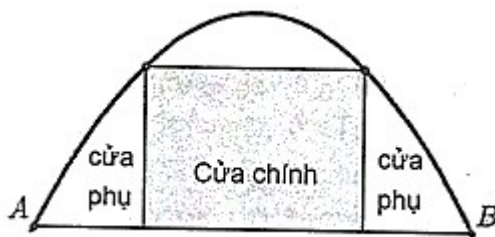


Do vậy ta xác định được hàm số là $y = -\frac{43}{1520}x^2 + \frac{3483}{760}x$.

Đỉnh I của parabol có tọa độ: $x_I = -\frac{b}{2a} = 81, y_I \approx 185,6$.

Vậy, chiều cao của cổng gần bằng $185,6m$.

Câu 60: Một chiếc cổng hình parabol bao gồm một cửa chính hình chữ nhật ở giữa và hai cánh cửa phụ hai bên như hình vẽ.

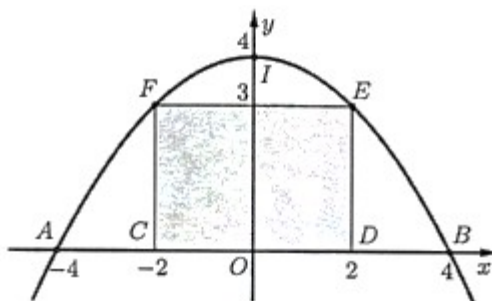


Biết chiều cao cổng parabol là $4m$, cửa chính cao $3m$ và rộng $4m$. Tính khoảng cách giữa hai chân cổng parabol ấy.

Lời giải

Trả lời: 8

Dựng trục Oxy như hình vẽ.



Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.

Ta có (P) qua các điểm $I(0;4), E(2;3), F(-2;3)$ nên

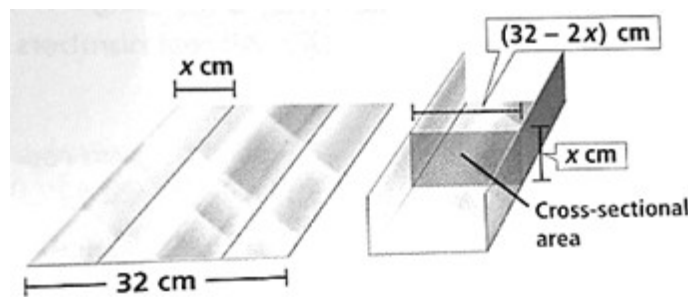
$$\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 4a - 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

Ta có $(P): y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

Hai điểm A, B là giao điểm của (P) với Ox nên hoành độ thỏa mãn $-\frac{1}{4}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 4$.

Do vậy $A(-4;0), B(4;0) \Rightarrow AB = 8$.

Câu 61: Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng chia tám nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông như hình vẽ dưới. Hỏi x bằng bao nhiêu để tạo ra máng có có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất?



Lời giải

Trả lời: 8

Gọi $S(x)$ là diện tích mặt ngang ứng với bề ngang x của phần gấp hai bên, ta có:

$$S(x) = x(32 - 2x), \text{ với } 0 < x < 16.$$

Diện tích mặt ngang lớn nhất khi hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0;16)$.

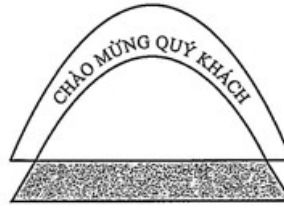
$$S(x) = -2x^2 + 32x = -2(x-8)^2 + 128 \leq 128, \forall x \in (0;16)$$

Ta có:

$$\Rightarrow \max S(x) = S(8) = 128$$

Vậy $x = 8$ cm thì diện tích mặt ngang lớn nhất.

Câu 62: Tại một buổi khai trương, người ta làm một cổng chào có đường viền trong của mặt cắt là đường parabol. Người ta đo khoảng cách giữa hai chân cổng là $4,5m$. Từ một điểm trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đất là $1,8m$ và khoảng cách từ điểm H tới chân cổng gần nhất là $1m$. Hãy tính chiều cao của cổng chào đó theo đơn vị mét và làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

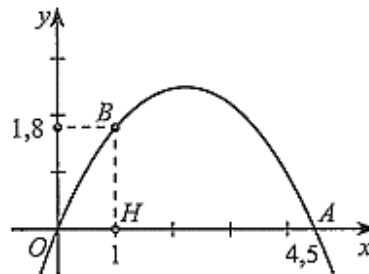


Lời giải

Trả lời: 2,6

Chọn hệ trục tọa độ sao cho gốc tọa độ O trùng một chân của cổng, trục hoành nằm trên đường nối hai chân cổng. Gọi hàm số bậc hai có đồ thị chứa đường viền trong của cổng chào trên là $y = ax^2 + bx + c$.

Từ giả thiết bài toán ta có đồ thị hàm số đi qua các điểm $O(0;0)$, $A(4,5;0)$, $B(1;1,8)$.



Hình 10

$$\begin{cases} 4,5^2 a + 4,5b = 0 \\ 1^2 a + 1b = 1,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-18}{35} \\ b = \frac{81}{35} \end{cases}$$

Thay tọa độ các điểm trên vào hàm số, ta được $c = 0$ và hệ phương trình:

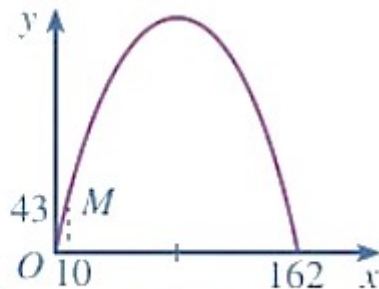
Suy ra ta có hàm số: $y = \frac{-18}{35}x^2 + \frac{81}{35}x$. Từ đó, đỉnh của đồ thị hàm số trên có tung độ là

$\frac{-18}{35} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 + \frac{81}{35} \cdot \frac{9}{4} \approx 2,6$. Vậy chiều cao của cổng là khoảng 2,6 m.

Câu 63: Khi du lịch đến thành phố St. Louis, ta sẽ thấy một cái cổng lớn có hình parabol hướng bề lõm xuống dưới, đó là cổng Arch. Giả sử ta lập một hệ tọa độ Oxy sao cho một chân cổng đi qua gốc O như Hình 16, chân kia của cổng ở vị trí có tọa độ $(162;0)$. Biết một điểm M trên cổng có tọa độ là $(10;43)$.



Cổng Arch (St.Louis, Mỹ)
(Nguồn: <https://visaf.vn>)



Hình 16

Tính chiều cao của cổng, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.

Lời giải

Trả lời: 186

Từ đồ thị ta thấy các điểm thuộc đồ thị là:

$$A(0; 0), B(10; 43), C(162; 0)$$

Gọi hàm số là $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

Thay tọa độ các điểm A, B, C vào ta được hệ:

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \\ a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 43 \\ a \cdot 162^2 + b \cdot 162 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 100a + 10b = 43 \\ 162^2 a + 162b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -\frac{43}{1520} \\ b = \frac{3483}{760} \end{cases}$$

Từ đó ta có $y = -\frac{43}{1520}x^2 + \frac{3483}{760}x$

Hoành độ đỉnh của đồ thị là: $x = -\frac{b}{2a} = 81$

Khi đó: $y = -\frac{43}{1520} \cdot 81^2 + \frac{3483}{760} \cdot 81 \approx 186(m)$

Vậy chiều cao của cổng là 186m.

Câu 64: Trong một công trình, người ta xây dựng một cổng ra vào hình parabol sao cho khoảng cách giữa hai chân cổng BC là $9m$. Từ một điểm M trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đất là $MK = 1,6m$ và khoảng cách từ K tới chân cổng gần nhất là $BK = 0,5m$. Tính chiều cao của cổng theo đơn vị mét.



Hình 13

Lời giải

Trả lời: 7,6

Lấy hệ trục tọa độ Oxy sao cho vị trí B trùng với gốc O , trục Ox nằm trên đường nối chân hai cổng, C nằm trên tia Ox .

Khi đó cổng ra vào là một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{-32}{85}x^2 + \frac{288}{85}x$.

Đỉnh của đồ thị hàm số trên có tung độ là khoảng 7,6.

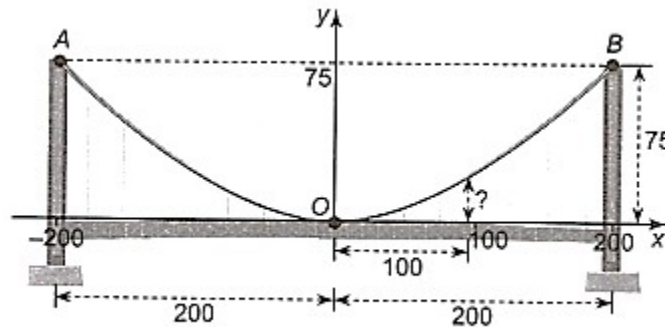
Vậy chiều cao của cổng là khoảng 7,6 m.

Câu 65: Một cây cầu treo có trọng lượng phân bố đều dọc theo chiều dài của nó. Cây cầu có trụ tháp đôi cao 75 m so với mặt của cây cầu và cách nhau 400 m. Các dây cáp có hình dạng đường parabol và được treo trên các đỉnh tháp. Các dây cáp chạm mặt cầu ở tâm của cây cầu. Tìm chiều cao của dây cáp tại điểm cách tâm của cây cầu 100 m.

Lời giải

Trả lời: 18,75

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như Hình 6.13: Trục Ox dọc theo mặt của cây cầu, trục Oy vuông góc với trục Ox tại tâm của cây cầu. Khi đó các dây cáp có hình dạng đường parabol có bề lõm hướng lên trên và đỉnh của parabol là gốc $O(0;0)$. Vì thế ta giả sử công thức của parabol là $y = ax^2, a > 0$.



Hình 6.13

Theo giả thiết, cây cầu có trụ tháp đôi cao 75 m so với mặt của cây cầu và cách nhau 400 m nên ta có các điểm $A(-200;75)$ và $B(200;75)$ thuộc parabol. Khi đó ta có:

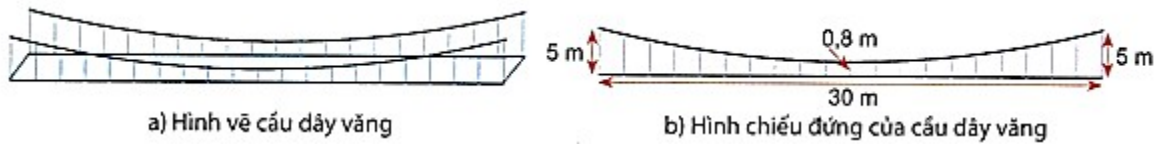
$$75 = a \cdot 200^2 \Rightarrow a = \frac{3}{1600}.$$

Do đó, phương trình của parabol là: $y = \frac{3}{1600}x^2$.

Với $x = 100$ ta có $y = \frac{3}{1600} \cdot 100^2 = 18,75$.

Vậy chiều cao của dây cáp tại điểm cách tâm của cây cầu 100 m là 18,75 m.

Câu 66: Chiếc cầu dây văng một nhịp được thiết kế hai bên thành cầu có dạng parabol và được cố định bằng các dây cáp song song.



a) Hình vẽ cầu dây văng

b) Hình chiếu đứng của cầu dây văng

Dựa vào bản vẽ ở Hình, hãy tính chiều dài tổng cộng của các dây cáp dọc ở hai mặt bên.

Biết: Dây dài nhất là $5m$, dây ngắn nhất là $0,8m$. Khoảng cách giữa các dây bằng nhau.

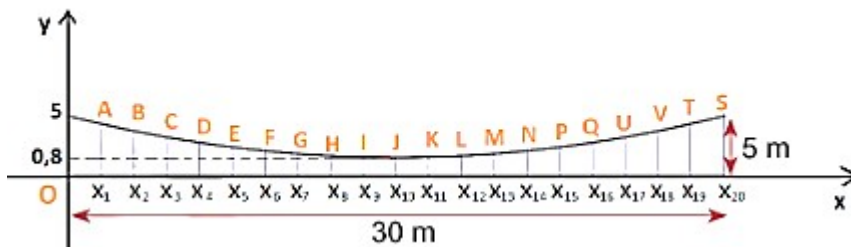
Nhịp cầu dài $30m$.

Cần tính thêm 5% chiều dài mỗi sợi dây cáp để neo cố định.

Lời giải

Gọi $y = ax^2 + bx + c$ là công thức của hàm số có đồ thị là thành cầu.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình dưới:



Khi đó độ dài dây cáp dọc ở mỗi mặt bên là tung độ của điểm biểu diễn tương ứng.

Ở mỗi mặt: có 21 dây cáp dọc, tương ứng cho 20 khoảng cách giữa chúng.

Khoảng cách giữa hai dây cáp liên kề là: $30 : 20 = 1,5(m)$

Khi đó: $x_0 = 0; x_1 = 1,5; x_2 = 3; x_3 = 4,5; \dots; x_n = 1,5.n$

Dễ thấy: các điểm có tọa độ $(0; 5), (x_{10}; 0,8), (x_{20}; 5)$ thuộc đồ thị hàm số.

Suy ra: $f(0) = a.0^2 + b.0 + c = 5 \Leftrightarrow c = 5$

Và $f(1) = a.10^2 + b.10 + c = 0,8 \Leftrightarrow 100a + 10b + 5 = 0,8$ $f(2) = a.30^2 + b.30 + c = 5 \Leftrightarrow 900a + 30b + 5 = 5$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 100a + 10b + 5 = 0,8 \\ 900a + 30b + 5 = 5 \end{cases}$ ta được $a = \frac{21}{1000}; b = -\frac{63}{100}$

Như vậy $y = \frac{21}{1000}x^2 - \frac{63}{100}x + 5$

Gọi $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{20}$ là tung độ của các điểm có hoành độ lần lượt là $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{20}$

Ta có:

$$y_0 = 5$$

$$y_1 = \frac{21}{1000} \cdot 1,5^2 - \frac{63}{100} \cdot 1,5 + 5$$

$$y_2 = \frac{21}{1000} \cdot (2 \cdot 1,5)^2 - \frac{63}{100} \cdot (2 \cdot 1,5) + 5 = 2^2 \cdot \frac{21}{1000} \cdot 1,5^2 - 2 \cdot \frac{63}{100} \cdot 1,5 + 5$$

...

$$y_n = \frac{21}{1000} \cdot (n \cdot 1,5)^2 - \frac{63}{100} \cdot (n \cdot 1,5) + 5 = n^2 \cdot \frac{21}{1000} \cdot 1,5^2 - n \cdot \frac{63}{100} \cdot 1,5 + 5$$

$$\Rightarrow T = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{20} = 5 + \frac{21}{1000} \cdot 1,5^2 \cdot (1 + 2^2 + \dots + 20^2) - \frac{63}{100} \cdot 1,5 \cdot (1 + 2 + \dots + 20) + 5 \cdot 20$$

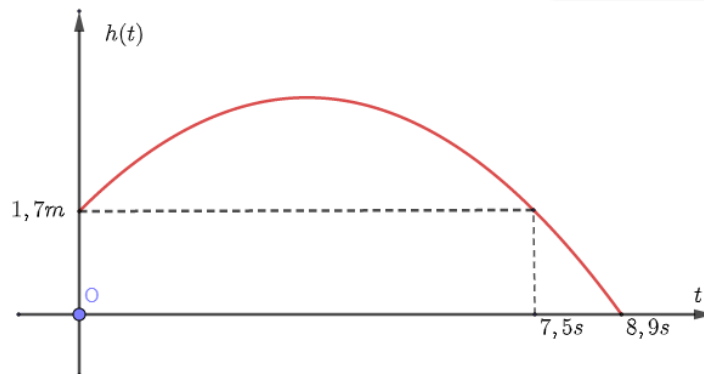
Mà $1 + 2^2 + \dots + 20^2 = 2870; 1 + 2 + \dots + 20 = 210$

$$\Rightarrow T = 5 + \frac{21}{1000} \cdot 1,5^2 \cdot 2870 - \frac{63}{100} \cdot 1,5 \cdot 210 + 5 \cdot 20 \approx 42,16(m)$$

Tổng chiều dài của các dây cáp dọc ở hai mặt bên là: $42,16 \cdot 2 = 84,32(m)$

Vậy chiều dài tổng cộng của các dây cáp dọc ở hai mặt bên là $84,32m$.

Câu 67: Một người cao 1,7m đang chơi cầu lông. Trái cầu được đánh lên ở vị trí ngang đầu của người đánh. Giả sử quỹ đạo bay của quả cầu là một parabol. Tìm vị trí cao nhất của quả cầu biết rằng, sau khoảng thời gian 7,5s thì quả cầu ở vị trí ngang đầu của người đánh và sau 8,9s thì trái cầu chạm đất



Lời giải

Trả lời: 3,62

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với góc tọa độ O là vị trí đứng của người chơi

Gọi $(P): h(t) = at^2 + bt + c$

Trái cầu ban đầu được đánh lên ở vị trí ngang đầu của người đánh cao 1,7m nên:

$$A(0; 1,7) \in (P) \Leftrightarrow c = 1,7 \quad (1)$$

Sau khoảng thời gian 7,5s thì quả cầu ở vị trí ngang đầu của người đánh nên:

$$B(7,5; 1,7) \in (P) \Leftrightarrow \frac{225}{4}a + \frac{15}{2}b + c = 1,7 \quad (2)$$

Sau 8,9s thì trái cầu chạm đất nên: $C(8,9; 0) \in (P) \Leftrightarrow 8,9^2a + 8,9b + c = 0 \quad (3)$

$$\begin{cases} c = 1,7 \\ \frac{225}{4}a + \frac{15}{2}b + c = 1,7 \\ 8,9^2 a + 8,9b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{85}{623} \\ b = \frac{1275}{1246} \\ c = 1,7 \end{cases}$$

Từ đó, ta có hệ phương trình:

Suy ra: $(P): h(t) = -\frac{85}{623}t^2 + \frac{1275}{1246}t + 1,7$

Khi đó điểm cao nhất mà quả cầu có thể đạt tới chính là tung độ của đỉnh $y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \approx 3,62m$