

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

Câu 1. (4,0 điểm)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a) 3x^2 - 7x + 2 \quad b) a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1)$$

Câu 2. (5,0 điểm)

$$A = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \frac{x^2-3x}{2x^2-x^3}$$

Cho biểu thức :

- Tìm ĐKXĐ rồi rút gọn biểu thức A
- Tìm giá trị của x để $A > 0$
- Tính giá trị của A trong trường hợp $|x-7|=4$

Câu 3. (5,0 điểm)

- Tìm x, y, z thỏa mãn phương trình sau:

$$9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0$$

- Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$ có đường chéo AC lớn hơn đường chéo BD . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của C xuống đường thẳng AB và AD

- Tứ giác $BEDF$ là hình gì ? Vì sao ?
- Chứng minh rằng : $CH.CD = CB.CK$
- Chứng minh rằng: $AB.AH + AD.AK = AC^2$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\begin{aligned} a) 3x^2 - 7x + 2 &= 3x^2 - 6x - x + 2 \\ &= 3x(x-2) - (x-2) = (3x-1)(x-2) \\ b) a(x^2+1) - x(a^2+1) &= ax^2 + a - a^2x - x \\ &= ax(x-a) - (x-a) = (x-a)(ax-1) \end{aligned}$$

Câu 2.

$$\text{ĐKXĐ: } x \neq \{0; \pm 2; 3\}$$

$$\begin{aligned} a) A &= \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \frac{x^2-3x}{2x^2-x^3} = \frac{(2+x)^2 + 4x^2 - (2-x)^2}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x^2(2-x)}{x(x-3)} \\ &= \frac{4x^2+8x}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x(2-x)}{x-3} = \frac{4x(x+2)x(2-x)}{(2-x)(2+x)(x-3)} = \frac{4x^2}{x-3} \end{aligned}$$

$$b) A > 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x-3} > 0 \Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3 \text{ (tmdk)}$$

Vậy $x > 3$ thì $A > 0$

$$c) |x-7|=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-7=4 \\ x-7=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=11(tm) \\ x=3(ktm) \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{121}{2} khi \quad x=11$$

Câu 3.

$$\begin{aligned} a) \quad & 9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0 \\ & \Leftrightarrow (9x^2 - 18x + 9) + (y^2 - 6y + 9) + 2(z^2 + 2z + 1) = 0 \\ & \Leftrightarrow 9(x-1)^2 + (y-3)^2 + 2(z+1)^2 = 0(*) \\ & \text{Do } (x-1)^2 \geq 0; (y-3)^2 \geq 0; (z+1)^2 \geq 0 \\ & \text{Nên : } x=1; y=3; z=-1 \end{aligned}$$

$$b) \quad \text{Từ } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0$$

$$\Leftrightarrow ayz + bxz + cxy = 0$$

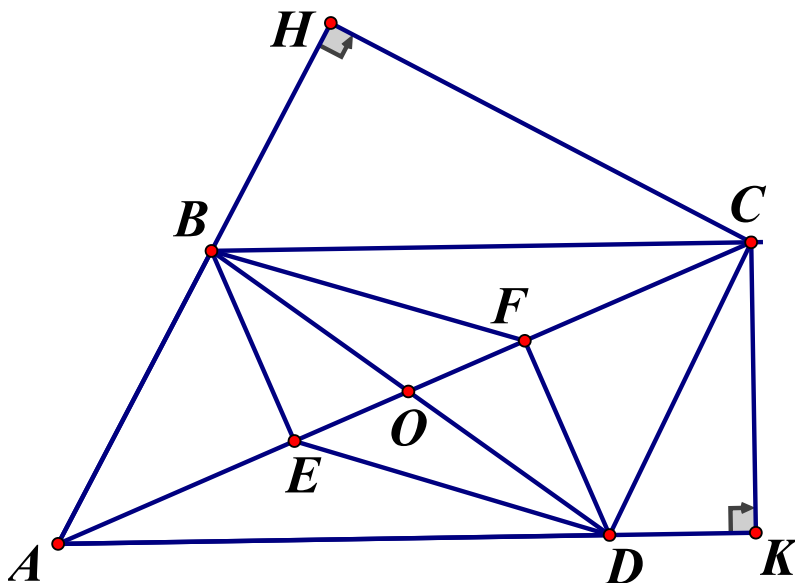
$$\text{Ta có: } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \left(\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \frac{cxy + bxz + ayz}{abc} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1(dfcm)$$

Câu 4.



$$a) \quad \text{Ta có } BE \perp AC(gt); DF \perp AC(gt) \Rightarrow BE \parallel DF$$

$$\text{Chứng minh } \triangle BEO = \triangle DFO(g.c.g) \Rightarrow BE = DF$$

Suy ra tứ giác BEDF là hình bình hành

b) Ta có : $\square ABC = \square ADC \Rightarrow \square HBC = \square KDC$

Chứng minh $\triangle CBH \square \triangle CDK (g.g) \Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CK}{CD} \Rightarrow CH.CD = CK.CB$

c) Chứng minh $\triangle AFD \square \triangle AKC (g.g) \Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow AD.AK = AF.AC$

Chứng minh $\triangle CFD \square \triangle AHC (g.g) \Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{AH}{AC}$

Mà $CD = AB \Rightarrow \frac{CF}{AB} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AB.AH = CF.AC$

Suy ra $AB.AH + AB.AH = CF.AC + AF.AC = (CF + AF).AC = AC^2$

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

Môn: Toán lớp 8

Thời gian làm bài : 150 phút

Câu 1. (2,0 điểm)

$$B = \frac{x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz}{(x+y)^2 + (y-z)^2 + (x+z)^2}$$

Rút gọn biểu thức

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Tìm số dư trong phép chia đa thức $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+9$ cho $x^2 + 8x + 12$.

b) Tìm mọi số nguyên x sao cho $x^3 - 2x^2 + 7x - 7$ chia hết cho $x^2 + 3$

Câu 3. (4,0 điểm)

Giải các phương trình:

a) $\left(\frac{1}{4}x + 3\right)^3 + \left(\frac{3}{4}x - 4\right)^3 + (1-x)^3 = 0$

b) $x\left(\frac{3-x}{x+1}\right)\left(x + \frac{3-x}{x+1}\right) = 2$

Câu 4. (4,0 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = |3x + 1| + |x + 2| - 4x + 3$

b) $B = \frac{14x^2 - 8x + 9}{3x^2 + 6x + 9}$

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A . M, D tương ứng là trung điểm của BC , AM . H là hình chiếu của M trên CD . AH cắt BC tại N , BH cắt AM tại E . Chứng minh rằng

a) $\triangle MHD \square \triangle CMD$

b) E là trực tâm $\triangle ABN$

Câu 6. (2,0 điểm)

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD và N là một điểm trên đường chéo AC sao cho $\angle BNM = 90^\circ$. Gọi F là điểm đối xứng của A qua N . Chứng minh rằng $FB \perp AC$.

ĐÁP ÁN

Câu 1. Ta có:

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz &= (x-y)^3 + 3xy(x-y) - z^3 - 3xyz \\ &= (x-y-z)^3 + 3(x-y)z(x-y-z) + 3xy(x-y-z) \\ &= (x-y-z) \left[(x-y-z)^2 + 3xz - 3yz + 3xy \right] \\ &= (x-y-z) (x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz + 3xz - 3yz + 3xy) \\ &= (x-y-z) (x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz + xz) \\ *) (x+y)^2 + (y-z)^2 + (x+z)^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + x^2 + 2xz + z^2 \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz + xz) \\ B &= \frac{(x-y-z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz + xz)}{2(x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz + xz)} = \frac{x-y-z}{2} \end{aligned}$$

Vậy

Câu 2.

a) Đặt $f(x) = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 9$

Ta có: $A = (x+1)(x+7)(x+3)(x+5) + 9$

$$\begin{aligned} &= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 9 \\ &= (x^2 + 8x + 7) \left[(x^2 + 8x + 12) + 3 \right] + 9 \\ &= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 12) + 3(x^2 + 8x + 7) + 9 \\ &= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 12) + 3(x^2 + 8x + 12) + 9 - 15 \\ &= (x^2 + 8x + 12)(x^2 + 8x + 10) - 6 \end{aligned}$$

Vậy số dư trong phép chia $f(x)$ cho $x^2 + 8x + 12$ là -6

b) Thực hiện phép chia đa thức $B = x^3 - 2x^2 + 7x - 7$ cho $C = x^2 + 3$, ta được: Đa thức thương: $x - 2$; đa thức dư: $4x - 1$

Suy ra: $x^3 - 2x^2 + 7x - 7 = (x^2 + 3)(x - 2) + 4x - 1$

Do đó $B : (x^2 + 3) \Leftrightarrow (4x - 1) : (3x^2 + 3) \quad (1)$

Vì $4x \neq 1$ vs $4x \neq -1$ nên:

$$\begin{aligned}(1) &\Rightarrow (4x-1)(4x+1):x^2+3 \\&\Rightarrow (16x^2-1):(x^2+3) \Rightarrow 16(x^2+3)+49:(x^2+3) \\&\Rightarrow 49:(x^2+3)\end{aligned}$$

Vì $x^2+3 \geq 3$ nên xảy ra một trong hai trường hợp sau:

• $x^2+3=49$, không có giá trị nào thỏa mãn

$$\bullet x^2+3=7 \Rightarrow x^2=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2(tm) \\ x=-2(ktm) \end{cases}$$

Vậy $x=2$

Câu 3.

a) Đặt $a = \frac{1}{4}x+3; b = \frac{3}{4}x-4 \Rightarrow a+b = x-1 \Rightarrow 1-x = -(a+b)$

Ta có (pt đề) $\Leftrightarrow a^3+b^3-(a+b)^3=0$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3-a^3-b^3-3ab(a+b)=0$$

$$\Leftrightarrow -3ab(a+b)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x+3=0 \\ \frac{3}{4}x-4=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-12 \\ x=\frac{16}{3} \\ x=1 \end{cases}$$

Vậy $S = \left\{-12; \frac{16}{3}; 1\right\}$

b) ĐKXD: $x \neq -1$

$$x\left(\frac{3-x}{x+1}\right)\left(x+\frac{3-x}{x+1}\right)=2 \Leftrightarrow \frac{3x-x^2}{x+1} \cdot \frac{x^2+x-3-x}{x+1}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-x^2)(x^2+3)}{(x+1)^2}=2$$

$$\Rightarrow 3x^3+9x-x^4-3x^2=2x^2+4x+2$$

$$\Leftrightarrow x^4-3x^3+5x^2-5x+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \cdot (x^2-x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2-x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(tm) \\ VN \end{cases}$$

Vậy $S = \{1\}$

Câu 4.

a) Áp dụng tính chất $|a| \geq a$, dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow a \geq 0$, ta có:

$$A = |3x + 1| + |x + 2| - 4x + 3 \geq 3x + 1 + x - 2 - 4x + 3 = 6 \Rightarrow A \geq 6$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 3x + 1 \geq 0$ và $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$ và $x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$

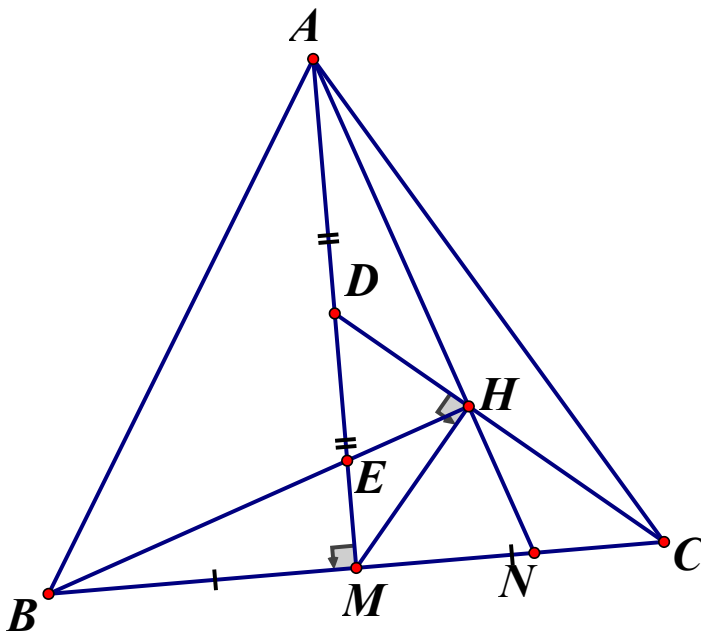
Vậy $\min A = 6 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$

b) Ta có
$$B - \frac{2}{3} = \frac{14x^2 - 8x + 9}{3x^2 + 6x + 9} - \frac{2}{3}$$
$$= \frac{(14x^2 - 8x + 9) - 2(x^2 + 2x + 3)}{3(x^2 + 2x + 3)} = \frac{12x^2 - 12x + 3}{3(x^2 + 2x + 3)} = \frac{(2x - 1)^2}{(x + 1)^2 + 2}$$

Với mọi x , ta có: $3(2x - 1)^2 \geq 0, (x + 1)^2 + 2 \geq 2 > 0$

$$\Rightarrow \frac{(2x - 1)^2}{(x + 1)^2 + 2} \geq 0 \Leftrightarrow B - \frac{2}{3} \geq 0 \Rightarrow B \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Câu 5.



- a) Vì M là trung điểm của BC nên AM là đường trung tuyến của $\triangle ABC$
Mà $\triangle ABC$ cân tại A (gt) nên AM là đường cao của $\triangle ABC$

Xét $\triangle MHD$ và $\triangle CMD$ có: $\angle MHD = \angle CMD = 90^\circ$; $\angle MDH = \angle CDM$
 $\Rightarrow \triangle MHD \cong \triangle CMD (g.g)$

- b) $\triangle MHD \cong \triangle CMD$ (câu a)

$$\Rightarrow \frac{HD}{MD} = \frac{HM}{CM} \Rightarrow \frac{HD}{AD} = \frac{HM}{BM} \quad (\text{Vì } MD = AD, CM = BM)$$

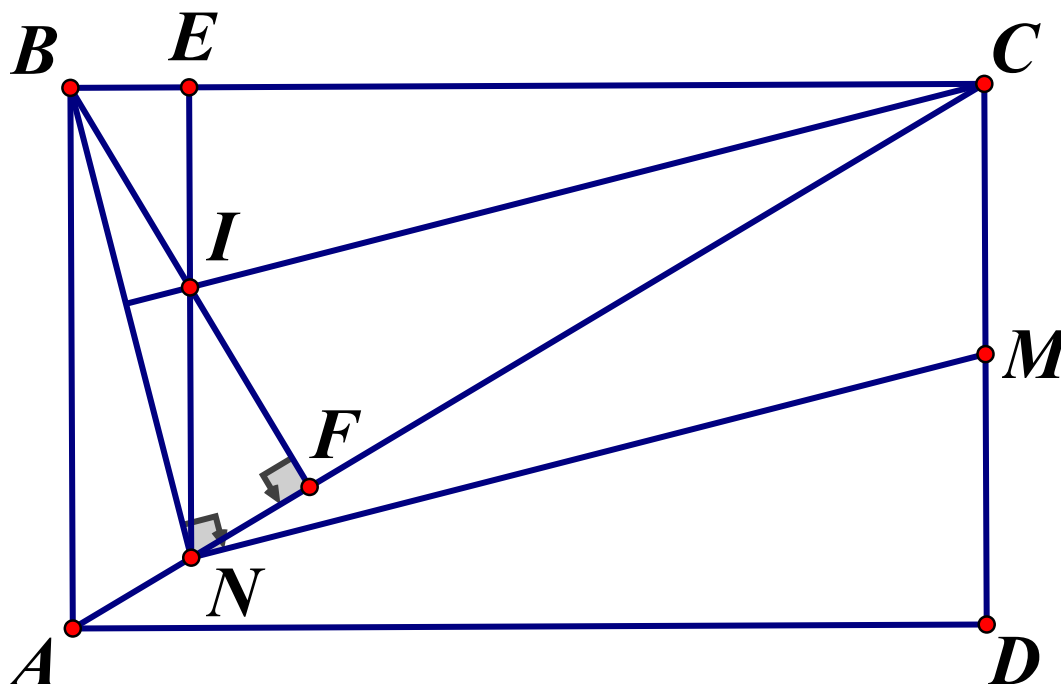
Mặt khác ta có: $\angle ADH = 90^\circ + \angle DMH = \angle BMH$

Suy ra $\triangle HDA \cong \triangle HMB (c.g.c)$

Do đó: $\angle AHD = \angle BHM \Rightarrow \angle AHB = \angle DHM = 90^\circ \Rightarrow BH \perp AN$

Kết hợp với $AM \perp BC \Rightarrow E$ là trực tâm $\triangle ABN$.

Câu 6.



Gọi I là trung điểm của BF, đường thẳng NI cắt BC tại E

Ta có: F đối xứng với A qua N (gt) $\Rightarrow N$ là trung điểm của AF

Mà I là trung điểm của BF nên NI là đường trung bình $\triangle ABF$

$$\Rightarrow NI \parallel AB, NI = \frac{1}{2} AB$$

Mặt khác $AB \parallel CD; AB = CD$ (ABCD là hình chữ nhật và M là trung điểm của CD)

$$AB \perp BC; CM = \frac{CD}{2} \text{ suy ra } NI \perp BC; NI \parallel CM \text{ và } NI = CM$$

$\Rightarrow$ Tứ giác CINM là hình bình hành $\Rightarrow CI \parallel MN$

Mà $MN \perp BN$ ($\angle BNM = 90^\circ$) $\Rightarrow CK \perp BN$ tại K

Do đó I là trực tâm $\triangle BCN \Rightarrow BF \perp AC$.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN MÔN: TOÁN LỚP 8

Bài 1. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2 - y^2 - 5x + 5y$

b) $2x^2 - 5x - 7$

Bài 2. Tìm đa thức A, biết rằng $\frac{4x^2 - 16}{x^2 + 2} = \frac{A}{x}$

Bài 3. Cho phân thức $\frac{5x+5}{2x^2+2x}$

- Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định
- Tìm giá trị của x để giá trị của phân thức bằng 1

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$$

Bài 4. a) Giải phương trình :

b) Giải bất phương trình : $(x-3)(x+3) < (x+2)^2 + 3$

Bài 5. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình

Một tổ sản xuất lập kế hoạch sản xuất, mỗi ngày sản xuất được 50 sản phẩm. Khi thực hiện, mỗi ngày tổ đó sản xuất được 57 sản phẩm. Do đó đã hoàn thành trước kế hoạch 1 ngày và còn vượt mức 13 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch tổ phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm và thực hiện trong bao nhiêu ngày

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, có $AB = 15 \text{ cm}$, $AC = 20 \text{ cm}$. Kẻ đường cao AH và trung tuyến AM

a) Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle HBA$

b) Tính BC; AH; BH; CH

c) Tính diện tích $\triangle AHM$

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HSG TOÁN 8 CẤP HUYỆN

Bài 1.

$$a) x^2 - y^2 - 5x + 5y = (x^2 - y^2) - 5(x - y)$$

$$= (x + y)(x - y) - 5(x - y) = (x - y)(x + y - 5)$$

$$b) 2x^2 - 5x - 7 = 2x^2 + 2x - 7x - 7 = (2x^2 + 2x) - (7x + 7)$$

$$= 2x(x + 1) - 7(x + 1) = (x + 1)(2x - 7)$$

Bài 2.

$$A =$$

$$\frac{x(4x^2 - 16)}{x^2 + 2x} = \frac{x(2x - 4)(2x + 4)}{x(x + 2)} = \frac{4x(x - 2)(x + 2)}{x(x + 2)} = 4x - 8$$

Bài 3.

$$a) 2x^2 + 2x = 2x(x + 1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \neq 0 \text{ và } x + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ và } x \neq -1$$

b) Rút gọn

$$\frac{5x + 5}{2x^2 + 2x} = \frac{5(x + 1)}{2x(x + 1)} = \frac{5}{2x}$$

$$\frac{5}{2x} = 1 \Leftrightarrow 5 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ (t / m)}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Bài 4. a) Điều kiện xác định $x \neq 0; x \neq 2$

$$\frac{x(x+2) - (x-2)}{x(x-2)} = \frac{2}{x(x-2)} \Leftrightarrow x^2 + 2x - x + 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ (loại) vs } x = -1$$

$$\text{Vậy } S = \{-1\}$$

$$b) (x-3)(x+3) < (x+2)^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 - 9 < x^2 + 4x + 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x^2 - 4x < 7 + 9 \Leftrightarrow -4x < 16 \Leftrightarrow x > -4$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x > -4$

Bài 5.

- Gọi số ngày tổ dự định sản xuất là : x ngày ($x \in \mathbb{N}^*, x > 1$)
- Vậy số ngày tổ đã thực hiện $x-1$ (ngày)
- Số sản phẩm làm theo kế hoạch là : $50x$ (sản phẩm)
- Số sản phẩm thực hiện là : $57.(x-1)$ (sản phẩm)

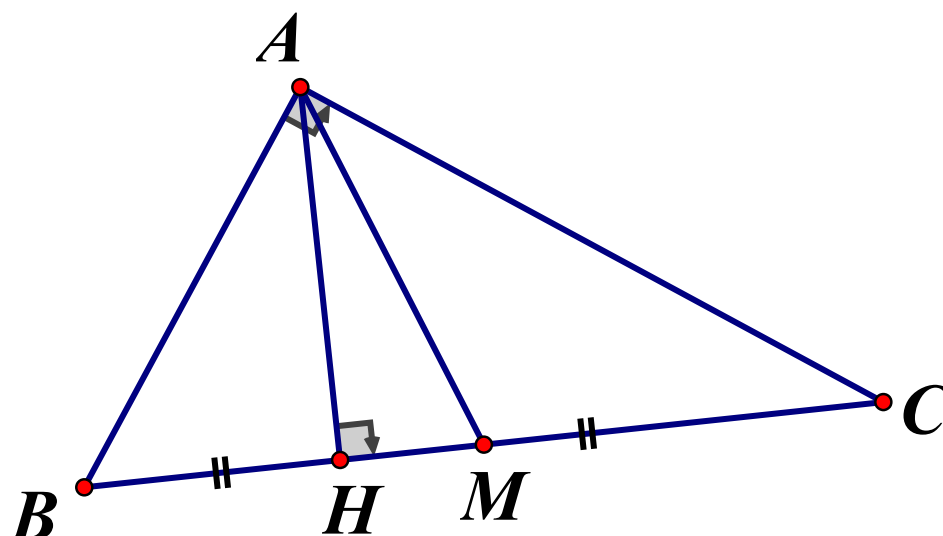
Theo đề bài ta có phương trình : $57(x-1) - 50x = 13$

$$\Leftrightarrow 57x - 57 - 50x = 13 \Leftrightarrow 7x = 70 \Leftrightarrow x = 10 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số ngày dự định sản xuất là 10 ngày

Số sản phẩm phải làm theo kế hoạch là : $50.10 = 500$ (sản phẩm)

Bài 6



a) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle HBA$ có: $\angle A = \angle H = 90^\circ$; $\angle B$ chung $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle HBA$ (g.g)

b) Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ABC có

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25 \text{ (cm)}$$

$$\text{Vì } \triangle ABC \sim \triangle HBA \text{ nên } \frac{AB}{HB} = \frac{AC}{HA} = \frac{BC}{BA} \text{ hay } \frac{15}{HB} = \frac{20}{HA} = \frac{25}{15}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12 \text{ (cm)}; BH = \frac{15 \cdot 15}{25} = 9 \text{ (cm)}; HC = BC - BH = 25 - 9 = 16 \text{ (cm)}$$

$$c) HM = BM - BH = \frac{BC}{2} - BH = \frac{25}{2} - 9 = 3,5 \text{ (cm)}$$

$$S_{AHM} = \frac{1}{2} AH \cdot HM = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3,5 = 21 \text{ (cm}^2\text{)}$$

ĐỀ THI KSCL HỌC SINH GIỎI MÔN: TOÁN 8

Bài 1. (2 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x$

b) Dựa vào kết quả trên hãy chứng minh :

$$A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n \text{ chia hết cho 210 với mọi số tự nhiên } n$$

Bài 2. (2 điểm)

$$A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3} \quad (x \neq -1; 1)$$

Cho biểu thức

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -1\frac{2}{3}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

Bài 3. (1 điểm) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $abc = 2004$

$$M = \frac{2004a}{ab + 2004a + 2004} + \frac{b}{bc + b + 2004} + \frac{c}{ac + c + 1}$$

Tính

Bài 4. (4 điểm) Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng $4cm$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Gọi P là giao điểm của AN với DM

a) Chứng minh $\triangle APM$ là tam giác vuông

b) Tính diện tích của tam giác APM

c) Chứng minh tam giác CPD là tam giác cân

Bài 5. (1 điểm)

Tìm các giá trị x, y nguyên dương sao cho $x^2 = y^2 + 2y + 13$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$\begin{aligned} a) x^3(x^2 - 7)^2 - 36x &= x \left[(x^3 - 7x)^2 - 36 \right] \\ &= x(x^3 - 7x - 6)(x^3 - 7x + 6) = x(x^3 - x - 6x - 6)(x^3 - x - 6x + 6) \end{aligned}$$

.....

$$= x(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)(x-2)(x+3)$$

b) Theo phần a ta có:

$$A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n = (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$$

Đây là tích của 7 số nguyên liên tiếp nên có một bộ của 2, 1 bội của 3, 1 bội của 5, 1 bội của 7

Mà $(2, 3, 5, 7) = 1$ nên $A : (2.3.5.7) \Rightarrow A : 210$

Bài 2.

a) Với $x \neq \pm 1$ thì

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-x^3-x+x^2}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)} \\ &= \frac{(1-x)(1+x+x^2-x)}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)} \\ &= (1+x^2) : \frac{1}{1-x} = (1+x^2)(1-x) \end{aligned}$$

b) Tại $x = -1\frac{2}{3} \Rightarrow A = 10\frac{2}{27}$

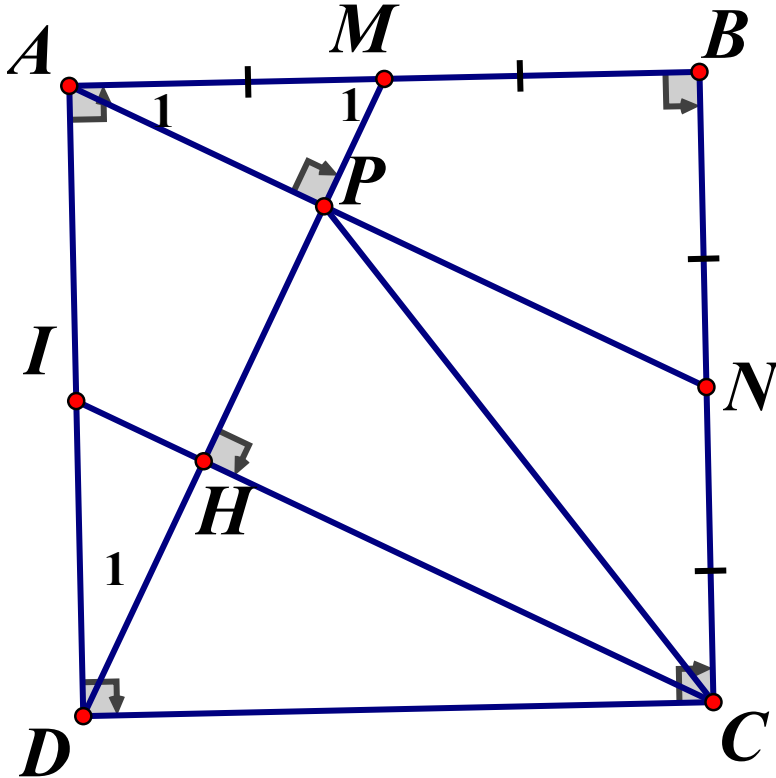
c) Với $x \neq \pm 1$ thì $A < 0 \Leftrightarrow (1+x^2)(1-x) < 0 \Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Bài 3

Thay $2004 = abc$ vào M ta có:

$$\begin{aligned} M &= \frac{a^2bc}{ab + a^2bc + abc} + \frac{b}{bc + b + abc} + \frac{c}{ac + c + 1} \\ &= \frac{a^2bc}{ab(1 + ac + c)} + \frac{b}{b(c + 1 + ac)} + \frac{c}{ac + c + 1} \\ &= \frac{ac}{1 + ac + c} + \frac{1}{c + 1 + ac} + \frac{c}{ac + c + 1} = \frac{ac + c + 1}{1 + ac + c} = 1 \end{aligned}$$

Bài 4.



- a) Chứng minh $\triangle ADM = \triangle BAN (cgc) \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{D_1}$
 Mà $\widehat{D_1} + \widehat{M_1} = 90^\circ$ ($\triangle ADM$ vuông tại A)
 Do đó: $\widehat{A_1} + \widehat{M_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{APM} = 90^\circ$. Hay $\triangle APM$ vuông tại P

$$AP = \frac{4\sqrt{5}}{5} (cm), AM = \frac{2\sqrt{5}}{5} cm, S_{APM} = \frac{4}{5} (cm^2)$$

- b) Tính được
 c) Gọi I là trung điểm của AD. Nối C với I; CI cắt DM tại H

Chứng minh tứ giác $AICN$ là hình bình hành
 $\Rightarrow AN \parallel CI$ mà $AN \perp DM \Rightarrow CI \perp DM$

Hay CH là đường cao trong $\triangle CPD$ (1)

Vận dụng định lý về đường trung bình trong $\triangle ADP$ chứng minh được H là trung điểm DP suy ra CH là trung tuyến trong $\triangle CPD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle CPD$ cân tại C

Bài 5.

Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng $(x+y+1)(x-y-1)=12$

Lập luận để có $x+y+1 > x-y-1$ và $x+y+1; x-y-1$ là các ước dương của 12 từ đó có các trường hợp

$x+y+1$	12	6	4
$x-y-1$	1	2	3
x	$\frac{13}{2}$	4	$\frac{7}{2}$
y	$\frac{9}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$

Mà x, y nguyên dương nên $(x; y) = (4; 1)$

ĐỀ BÀI

Câu 1. (5 điểm) Tìm số tự nhiên n để:

a) $A = n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố

b) $B = \frac{n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 6n - 2}{n^2 + 2}$ có giá trị là một số nguyên

c) $D = n^5 - n + 2$ là số chính phương.

Câu 2. (5 điểm) Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1} = 1$ biết $abc = 1$

b) Với $a+b+c=0$ thì $a^4+b^4+c^4=2(ab+bc+ca)^2$

c) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c}$

Câu 3. (5 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$

b) $2x(8x-1)^2 \cdot (4x-1) = 9$

c) $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0$ với x, y nguyên dương.

Câu 4. (5 điểm) Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), O là giao điểm hai đường chéo. Qua O kẻ đường thẳng song song với AB cắt DA tại E , cắt BC tại F

a) Chứng minh : Diện tích tam giác AOD bằng diện tích tam giác BOC

b) Chứng minh: $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{EF}$

c) Gọi K là điểm bất kỳ thuộc OE . Nêu cách dựng đường thẳng đi qua K và chia đôi diện tích tam giác DEF

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) $A = n^3 - n^2 + n - 1 = (n^2 + 1)(n - 1)$

Để A là nguyên tố thì $n - 1 = 1 \Leftrightarrow n = 2$. Khi đó $A = 5$

b) $B = n^2 + 3n - \frac{2}{n^2 + 2}$

B có giá trị nguyên $\Leftrightarrow 2 : n^2 + 2$

$$n^2 + 2 \text{ là ước tự nhiên của } 2 \Rightarrow \begin{cases} n^2 + 2 = 1 \\ n^2 + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 = -1 \text{ (ktm)} \\ n = 0 \text{ (tm)} \end{cases}$$

Vậy với $n = 0$ thì B có giá trị nguyên.

c)

$$D = n^5 - n + 2 = n(n^4 - 1) + 2 = n(n + 1)(n - 1)(n^2 + 1) + 2$$

$$= n(n - 1)(n + 1) \left[(n^2 - 4) + 5 \right] + 2 = n(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2) + 5n(n - 1)(n + 1) + 2$$

Mà $n(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2) : 5$ (tích 5 số tự nhiên liên tiếp)

Và $5n(n - 1)(n + 1) : 5$. Vậy D chia 5 dư 2

Do đó D có tận cùng là 2 hoặc 7 nên D không phải là số chính phương.

Vậy không có giá trị nào của n để D là số chính phương.

Câu 2.

a)

$$\begin{aligned} \frac{a}{ab + a + 1} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{c}{ac + c + 1} &= \frac{ac}{abc + ac + c} + \frac{abc}{abc^2 + abc + ac} + \frac{c}{ac + c + 1} \\ &= \frac{ac}{1 + ac + c} + \frac{abc}{c + 1 + ac} + \frac{c}{ac + c + 1} = \frac{abc + ac + 1}{abc + ac + 1} = 1 \end{aligned}$$

b)

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc) \quad (1)$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 8abc(a + b + c)$$

(Vì $a + b + c = 0$)

$$\Rightarrow 2(ab + ac + bc) = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + ac + bc)^2$

c) Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = 2 \cdot \frac{a}{c}$$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a} = 2 \cdot \frac{c}{b}$$

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2 \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{c} = 2 \cdot \frac{b}{a}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$2 \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \right) \geq 2 \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \right) \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$

Câu 3.

a)

$$\frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-214}{86} - 1 \right) + \left(\frac{x-132}{84} - 2 \right) + \left(\frac{x-54}{82} - 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-300}{86} + \frac{x-300}{84} + \frac{x-300}{82} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-300) \left(\frac{1}{86} + \frac{1}{84} + \frac{1}{82} \right) = 0 \Leftrightarrow x-300 = 0 \Leftrightarrow x = 300$$

$$\text{Vậy } S = \{300\}$$

b)

$$2x(8x-1)^2 \cdot (4x-1) = 9$$

$$\Leftrightarrow (64x^2 - 16x + 1)(8x^2 - 2x) = 9 \Leftrightarrow (64x^2 - 16x + 1)(64x^2 - 16x) = 72$$

$$64x^2 - 16x + \frac{1}{2} = k$$

Đặt

Ta có:

$$(k+0,5)(k-0,5) = 72 \Leftrightarrow k^2 = 72,25 \Rightarrow k = \pm 8,5$$

$$64x^2 - 16x - 8 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(4x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Với $k = 8,5$ ta có phương trình :

Với $k = -8,5$ ta có phương trình:

$$64x^2 - 16x + 9 = 0 \Leftrightarrow (8x-1)^2 + 8 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{1}{4} \right\}$$

Vậy

$$\text{c) } x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) - 7 = 0$$

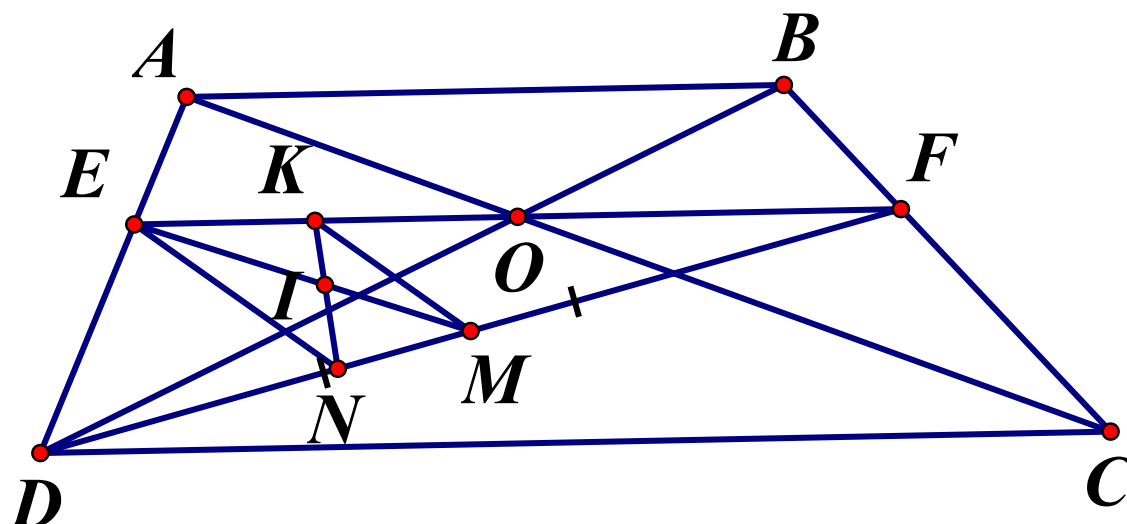
$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - (y+2)^2 = 7 \Leftrightarrow (x-y-1)(x+y+3) = 7$$

Vì x, y nguyên dương nên $x+y+3 > x-y-1$

$$\Rightarrow x+y+3=7 \text{ và } x-y-1=1 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm dương duy nhất $(x; y) = (3; 1)$

Câu 4.



a) Vì $AB \parallel CD \Rightarrow S_{DAB} = S_{CBA}$ (cùng đáy và cùng đường cao)

$$\Rightarrow S_{DAB} - S_{AOB} = S_{CBA} - S_{AOB} \text{ hay } S_{AOD} = S_{BOC}$$

b) Vì $EO \parallel DC \Rightarrow \frac{EO}{DC} = \frac{AO}{AC}$. Mặt khác $AB \parallel DC$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{AO}{OC} \Rightarrow \frac{AB}{AB+BC} = \frac{AO}{AO+OC} \Rightarrow \frac{AB}{AB+BC} = \frac{AO}{AC} \Rightarrow \frac{EO}{DC} = \frac{AB}{AB+DC}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{2DC} = \frac{AB}{AB+DC} \Rightarrow \frac{AB+DC}{AB \cdot DC} = \frac{2}{EF} \Rightarrow \frac{1}{DC} + \frac{1}{AB} = \frac{2}{EF}$$

c) Dựng trung tuyến EM , dựng $EN \parallel MK$ ($N \in DF$)

Kẻ đường thẳng KN là đường phải dựng.

$$\text{Chứng minh: } S_{EDM} = S_{EFM} \quad (1)$$

$$\text{Gọi giao điểm của } EM \text{ và } KN \text{ là } I \text{ thì } S_{IKE} = S_{IMN} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } S_{DEKN} = S_{KFN}$$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN MÔN TOÁN 8

Bài 1 (3 điểm) Chứng minh rằng:

- a) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17
 b) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Bài 2. (3 điểm)

- a) Rút gọn biểu thức : $\frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 4x^2 - 18x + 9}$
 b) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 (x, y, z \neq 0)$. Tính $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Bài 3. (3 điểm)

Cho tam giác ABC . Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc tia đối của các tia BA, CA sao cho $BD = CE = BC$. Gọi O là giao điểm của BE và CD . Qua O vẽ đường thẳng song song với tia phân giác của góc A, đường thẳng này cắt AC ở K. Chứng minh rằng $AB = CK$

Bài 4. (1 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của biểu thức sau (nếu có):

$$M = 4x^2 + 4x + 5$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

- a) Ta có: $8^5 + 2^{11} = (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11} = 2^{11} \cdot (2^4 + 1) = 2^{11} \cdot 17$
 Rõ ràng kết quả trên chia hết cho 17
 b) Áp dụng hằng đẳng thức
 $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ với mọi n lẻ
 Ta có: $19^{19} + 69^{19} = (19 + 69)(19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18})$
 $= 88 \cdot (19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18})$ chia hết cho 44

Bài 2.

- a) Ta có:

$$*) x^2 + x - 6 = x^2 + 3x - 2x - 6 = x(x+3) - 2(x+3) = (x-2)(x+3)$$

$$*) x^3 - 4x^2 - 18x + 9 = x^3 + 3x^2 - 7x^2 - 21x + 3x + 9$$

$$= x^2(x+3) - 7x(x+3) + 3(x+3)$$

$$= (x+3)(x^2 - 7x + 3)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 4x^2 - 18x + 9} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x^2 - 7x + 3)} = \frac{x-2}{x^2 - 7x + 3} \quad (x \neq -1; x^2 - 7x + 3 \neq 0)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^3} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^3 \Rightarrow \frac{1}{z^3} = -\left(\frac{1}{x^3} + 3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y} + 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3}\right)$$

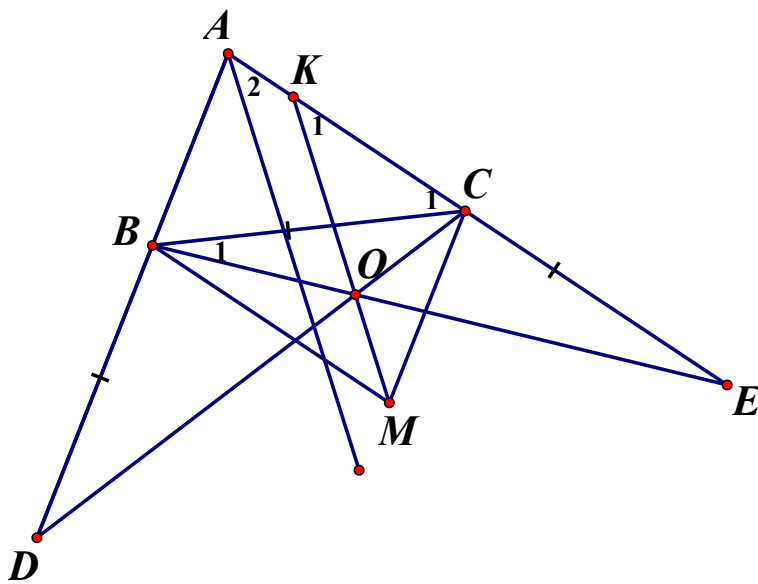
$$\Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = -3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = 3 \cdot \frac{1}{xyz}$$

b) Vì

$$xyz \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = 3 \Leftrightarrow \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3} = 3 \Leftrightarrow \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = 3$$

Do đó:

Bài 3.



Vẽ hình bình hành $ABMC$ ta có: $AB = CM$

Để chứng minh $AB = KC$ ta cần chứng minh $KC = CM$.

Thật vậy, xét tam giác BCE có $BC = CE$ (gt) $\Rightarrow \triangle CBE$ cân tại C $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{E}$

Vì góc $\widehat{C}_1$ là góc ngoài của tam giác BCE

$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{B}_1 + \widehat{E} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \frac{1}{2} \widehat{C}_1$ mà $AC \parallel BM$ (ta vẽ) $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{CBM} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \frac{1}{2} \widehat{CBM}$ nên BO là tia

phân giác của $\widehat{CBM}$. Hoàn toàn tương tự ta có CD là tia phân giác của $\widehat{BCM}$. Trong tam giác BCM, OB, CO, MO đồng quy tại O

$\Rightarrow MO$ là tia phân giác của $\widehat{CMB}$

Mà $\widehat{BAC}, \widehat{BMC}$ là hai góc đối của hình bình hành BMCA $\Rightarrow MO \parallel$ với tia phân giác của góc A
 theo giả thiết tia phân giác của góc A còn song song với OK
 $\Rightarrow K, O, M$ thẳng hàng

Ta lại có: $\widehat{M_1} = \frac{1}{2} \widehat{BMC} (cmt); \widehat{A} = \widehat{M} \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{A_2}$ mà $\widehat{A_2} = \widehat{K_1}$ (2 góc đồng vị)

$\Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{M_1} \Rightarrow \triangle CKM$ cân tại C $\Rightarrow CK = CM$.

Kết hợp $AB = CM \Rightarrow AB = CK$ (đpcm)

Bài 4.

Ta có $M = 4x^2 + 4x + 5 = (4x^2 + 4x + 1) + 4 = (2x + 1)^2 + 4$

Vì $(2x + 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (2x + 1)^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow M \geq 4$

Vậy $Min_M = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI MÔN : Toán 8. Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{x}{x+1} - \frac{3-3x}{x^2-x+1} + \frac{x+4}{x^3+1}$

- Rút gọn biểu thức A
- Chứng minh rằng giá trị của A luôn dương với mọi $x \neq -1$

Câu 2. (3 điểm)

- Chứng minh rằng: Với mọi $x \in \mathbb{Q}$ thì giá trị của đa thức :

$M = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 16$ là bình phương của một số hữu tỉ

- Giải phương trình : $|x+1| = |x(x+1)|$

Câu 3. (1,5 điểm) Đa thức $P(x)$ bậc 4 có hệ số bậc cao nhất là 1. Biết $P(1) = 0$;
 $P(3) = 0; P(5) = 0$.

Hãy tính giá trị của biểu thức $Q = P(-2) + 7P(6)$

Câu 4. (2,5 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Vẽ hình vuông $MNPQ$ có M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC, P và Q thuộc cạnh BC. Gọi E và F lần lượt là giao điểm của BN và MQ; CM và NP. Chứng minh rằng

- DE song song với AC

b) $DE = DF; AE = AF$

Câu 5. (1 điểm) Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{3}{2} \text{ với } a \geq b \geq c > 0$$

Câu 1.

a)

$$A = \frac{x}{x+1} - \frac{3-3x}{x^2-x+1} + \frac{x+4}{x^3+1} = \frac{x(x^2-x+1) - (x+1)(3-3x) + x+4}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{x^3+2x^2+2x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(x+1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$$

$$A = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

b) Với mọi $x \neq -1$ thì

$$\text{Vì } \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0; \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \neq -1 \Rightarrow A > 0, \forall x \neq -1$$

Câu 2.

a) Ta có: $M = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 16$

Đặt $a = x^2 + 10x + 16$

Suy ra $M = a(a+8) + 16 = a^2 + 8a + 16 = (a+4)^2$

Vậy $M = (x^2 + 10x + 20)^2$ (dpcm)

$$b / |x+1| = |x(x+1)|$$

$$\Leftrightarrow |x(x+1)| - |x+1| = 0 \Leftrightarrow |x| \cdot |x+1| - |x+1| = 0 \Leftrightarrow |x+1| \cdot (|x| - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| = 0 \\ |x| - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ |x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Câu 3.

Ta có: $P(x) : (x-1), (x-3), (x-5)$

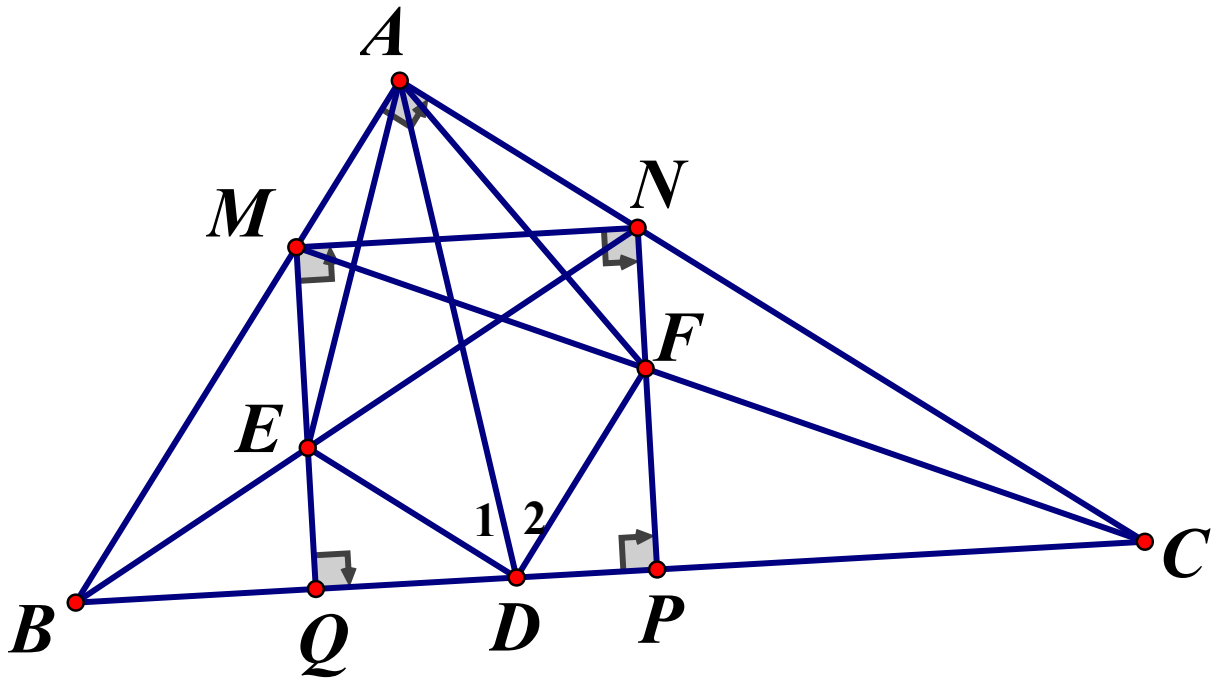
Nên $P(x)$ có dạng $P(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x+a)$

$$\text{Khi đó: } P(-2) + 7.P(6) = (-3) \cdot (-5) \cdot (-7) \cdot (-2+a) + 7.5.3.1 \cdot (6+a)$$

$$= -105 \cdot (-2+a) + 105 \cdot (6+a)$$

$$= 105 \cdot (2-a+6+a) = 840$$

Câu 4.



a) Chứng minh được $\frac{BE}{EN} = \frac{BQ}{QP} = \frac{BQ}{MQ} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow DE \parallel NC$ hay $DE \parallel AC$

b) Do $DE \parallel AC \Rightarrow \frac{DE}{CN} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow DE = \frac{BD}{BC} \cdot CN$ (1)

$$DF = \frac{CD}{BC} \cdot BM \quad (2)$$

Tương tự:

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{DE}{DF} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CN}{BM}$$

$$\text{Mà } \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \text{ và } \frac{CN}{BM} = \frac{AC}{AB} \text{ nên } \frac{DE}{DF} = 1 \Rightarrow DE = DF$$

Ta có: $\widehat{D}_1 = \widehat{DAC} = \widehat{DAB} = \widehat{D}_2 \Rightarrow \triangle ADE = \triangle ADF \Rightarrow AE = AF$

Câu 5.

Gọi vế trái là A , ta có:

$$\begin{aligned} A - \frac{3}{2} &= \left(\frac{a}{a+b} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{b}{b+c} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{c}{c+a} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{a-b}{2(a+b)} + \frac{b-c}{2(b+c)} + \frac{c-a}{2(c+a)} \\ &= \frac{a-b}{2(a+b)} + \frac{(b-a) + (a-c)}{2(b+c)} + \frac{c-a}{2(c+a)} \\ &= \frac{a-b}{2} \cdot \left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b+c} \right) + \frac{a-c}{2} \cdot \left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} \right) \\ &= \frac{a-b}{2} \cdot \frac{c-a}{(a+b)(b+c)} + \frac{a-c}{2} \cdot \frac{a-b}{(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{(a-b)(a-c)}{2(b+c)} \cdot \left(\frac{-1}{a+b} + \frac{1}{c+a} \right) \\ &= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{2(b+c)(a+b)(c+a)} \geq 0 \text{ (Do } a \geq b \geq c \geq 0) \end{aligned}$$

Vậy $A \geq \frac{3}{2}$

TRƯỜNG THCS XUÂN PHÚ

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG

MÔN: TOÁN 8

Thời gian: 150 phút

Bài 1. (2 điểm)

- a) Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 1) - 6$
- b) Đa thức $f(x) = 4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x - 2; x + 1$. Tính $2a - 3b$

Bài 2. (2 điểm)

- a) Cho $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Chứng minh rằng $a_n + a_{n+1}$ là một số chính phương
- b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phân số $\frac{10n^2 + 9n + 4}{20n^2 + 20n + 9}$ tối giản

Bài 3. (3 điểm)

- a) Cho $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Hãy rút gọn phân thức: $P = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$
- b) Tìm tích: $M = \frac{1^4 + 4}{3^4 + 4} \cdot \frac{5^4 + 4}{7^4 + 4} \cdot \frac{9^4 + 4}{11^4 + 4} \cdots \frac{17^4 + 4}{19^4 + 4}$

Bài 4. (4 điểm)

- a) Cho $x = by + cz; y = ax + cz; z = ax + by$ và $x + y + z \neq 0; xyz \neq 0$.

CMR: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$

b) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, tính giá trị của biểu thức $P = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

$$P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$$

Bài 5. (3 điểm) Cho biểu thức :

- Rút gọn biểu thức P
- Tìm x để $P < 1$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Bài 6. (3 điểm). Cho hình vuông $ABCD$, gọi E, F thứ tự là trung điểm của AB, BC .

- Chứng minh rằng: $CE \perp DF$
- Gọi M là giao điểm của CE và DF . Chứng minh rằng: $AM = AD$

Bài 7. (3 điểm) Cho tam giác ABC . Vẽ ở ngoài tam giác các hình vuông $ABDE, ACFH$.

- Chứng minh rằng $EC = BH; EC \perp BH$
- Gọi M, N thứ tự là tâm của các hình vuông $ABDE, ACFH$. Gọi I là trung điểm của BC . Tam giác MNI là tam giác gì ? Vì sao ?

ĐÁP ÁN

Bài 1.

- $(x+1)(x-3)(x^2-2x+2)$
- Đa thức $f(x) = 4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x-2; x+1$ nên:
 $f(2) = 0 \Rightarrow 32 + 2a + b = 0 \quad (1)$
 $f(-1) = 0 \Rightarrow -4 - a + b = 0 \quad (2)$
 Từ (1) và (2) ta tìm được $a = -12; b = -8$
 Vậy $2a - 3b = 0$

Bài 2.

- Ta có: $a_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1$

$$a_n + a_{n+1} = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n + 1 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = n^2 + 2n + 1$$

$= (n+1)^2$ là một số chính phương.

- Gọi d là ƯCLN của $10n^2 + 9n + 4$ và $20n^2 + 20n + 9$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10n^2 + 9n + 4 : d \\ 20n^2 + 20n + 9 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20n^2 + 18n + 8 : d \\ 20n^2 + 20n + 9 : d \end{cases} \Rightarrow 2n + 1 : d \Rightarrow d \text{ là số tự nhiên lẻ}$$

Mặt khác : $2n + 1 : d \Rightarrow 4n^2 + 4n + 1 : d \Rightarrow 20n^2 + 20n + 5 : d \Rightarrow 4 : d$, mà d lẻ nên $d = 1$

Vậy phân số trên tối giản

Bài 3.

- Từ $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ chỉ ra được $x + y + z = 0$ hoặc $x = y = z$

TH1: $x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z; x + z = -y; y + z = -x \Rightarrow P = -1$

TH2: $x = y = z \Rightarrow P = \frac{1}{8}$

b) Nhận xét được: $n^4 + 4 = \left[(n-1)^2 + 1 \right] \left[(n+1)^2 + 1 \right]$. Do đó:

$$M = \frac{1 \cdot (2^2 + 1)}{(2^2 + 1) \cdot (4^2 + 1)} \cdot \frac{(4^2 + 1) \cdot (6^2 + 1)}{(6^2 + 1) \cdot (8^2 + 1)} \cdots \frac{(16^2 + 1) \cdot (18^2 + 1)}{(18^2 + 1) \cdot (20^2 + 1)} = \frac{1}{20^2 + 1} = \frac{1}{401}$$

Bài 4.

a) Từ giả thiết $\Rightarrow 2cz + z = x + y \Rightarrow 2cz = x + y - z$

$$\Rightarrow c = \frac{x + y - z}{2z} \Rightarrow c + 1 = \frac{x + y + z}{2z} \Rightarrow \frac{1}{c+1} = \frac{2z}{x + y + z}$$

Tương tự: $\frac{1}{1+a} = \frac{2x}{x+y+z}; \frac{1}{1+b} = \frac{2y}{x+y+z}$. Khi đó: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$$

b) Từ
Khi đó:

$$P = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3} = xyz \cdot \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = xyz \cdot \frac{3}{xyz} = 3$$

Bài 5. a) ĐKXD: $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$

Rút gọn P ta có: $P = \frac{x^2}{x-1}$

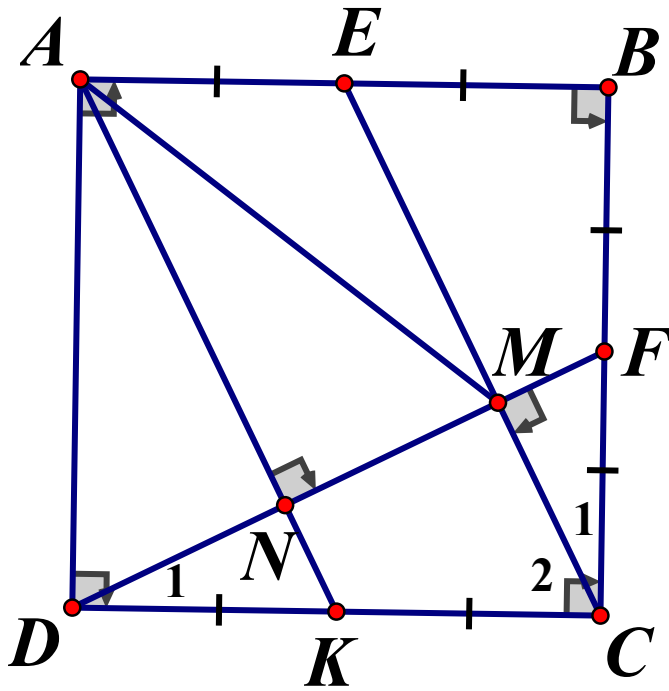
$$\begin{aligned} P < 1 &\Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{x-1} < 0 \\ b) &\Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1 \end{aligned}$$

Vậy với $x < 1$ và $x \neq 0; x \neq -1$ thì $P < 1$

$$c) \text{ Ta có: } P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 2$$

Khi $x > 1; x - 1 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $x - 1 + \frac{1}{x-1} \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$. Vậy GTNN của P bằng 4 $\Leftrightarrow x = 2$

Bài 6.



a) Chứng minh được $\triangle CBE = \triangle DFC (c.g.c) \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$

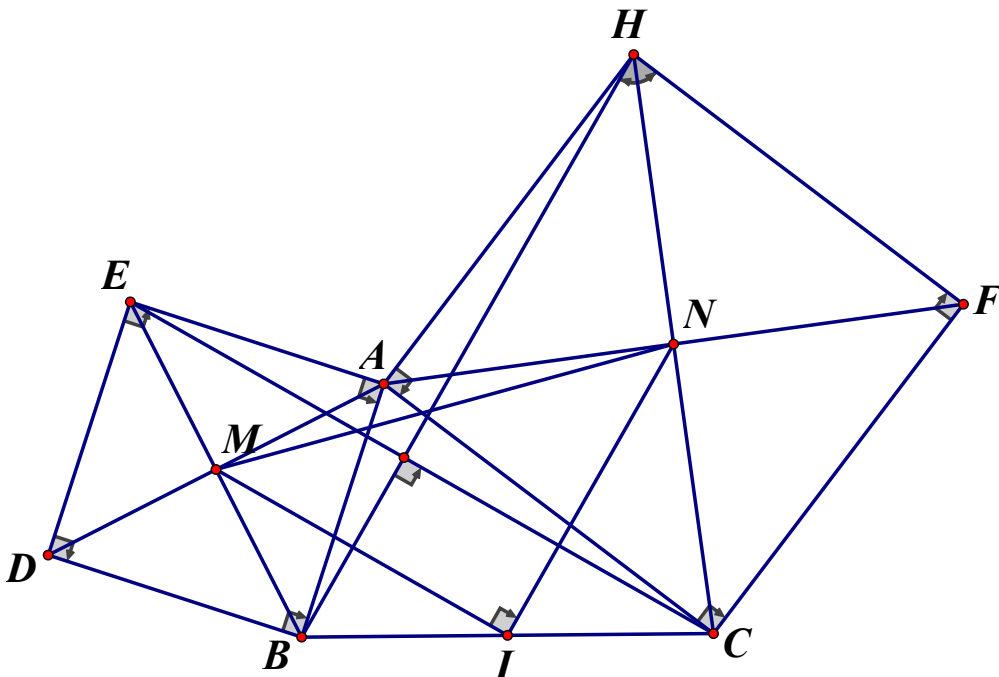
Lại có: $\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{D}_1 + \widehat{C}_2 = 90^\circ \Rightarrow CE \perp DF$

b) Gọi K là trung điểm của CD . Chứng minh được tứ giác $AECK$ là hình bình hành suy ra $AK \parallel CE$

Gọi N là giao điểm của AK và DF . $\triangle DCM$ có $DK = KC$ và $KN \parallel CM$ nên N là trung điểm của DM . Vì $CM \perp DM$ (câu a), $KN \parallel CM \Rightarrow KN \perp DM$

Tam giác $\triangle ADM$ có AN là đường cao đồng thời là trung tuyến nên là tam giác cân tại A .
 $\Rightarrow AM = AD$

Bài 7.



a) Chứng minh được: $\triangle EAC = \triangle BAH (c.g.c) \Rightarrow EC = BH, \angle AEC = \angle ABH$

Gọi K và O thứ tự là giao điểm của EC với BA và BH

Xét $\triangle AEK$ và $\triangle OBK$ có: $\angle AEK = \angle OBK; \angle AKE = \angle OKB \Rightarrow \angle EAK = \angle BOK$

$\Rightarrow \angle BOK = 90^\circ$. Vậy $EC \perp BH$

b) Ta có: $MI \parallel EC; MI = \frac{1}{2}EC; IN \parallel BH; IN = \frac{1}{2}BH$

Mà $EC \perp BH$ và $EC = BH$ nên $MI = IN$ và $MI \perp IN$

Vậy tam giác MIN vuông cân tại I

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8 MÔN: TOÁN 8 (Thời gian làm bài : 120 phút)

Câu 1. (3 điểm)

a) Cho biểu thức $A = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$. Chứng minh rằng nếu a, b, c là 3 cạnh của một tam giác thì $A > 0$

b) Chứng minh rằng $a^5 - a \vdots 30 (a \in \mathbb{Z})$

Câu 2. (2 điểm)

Giải phương trình : $|x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 2y - 1| + 4 = 2x - |x^2 - 3x + 2|$

Câu 3. (1,5 điểm)

Cho $a^3 + b^3 = 2$. Chứng minh rằng $a + b \leq 2$

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Một đường thẳng d qua O song song với 2 đáy cắt hai cạnh bên AD, BC lần lượt tại E và F . Chứng

minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{EF}$.

Câu 5. (2 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC sao cho $AN = CM$. Gọi K là giao điểm của AN và CM . Chứng minh rằng KD là tia phân giác của $\angle AKC$

Câu 1.

a)

$$\begin{aligned} A &= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 4a^2b^2 - (2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 + a^4 + b^4 + c^4) \\ &= (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) \\ &= [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) \end{aligned}$$

Do a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên

$$a+b+c > 0; a+b-c > 0; c+a-b > 0; c-a+b > 0 \Rightarrow A > 0$$

$$a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a(a+1)(a-1)[(a-4)^2 + 5]$$

$$b) = a(a+1)(a-1)(a-2)(a+2) + 5a(a+1)(a-1)$$

Do tích của số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 5 và trong 5 số nguyên liên tiếp luôn có ba số nguyên liên tiếp mà tích của chúng chia hết cho 6 và $(6, 5) = 1$

$$\text{Suy ra } a(a+1)(a-1)(a-2)(a+2) : 30 \text{ và } 5a(a+1)(a-1) : 30.$$

$$\text{Vậy } a^5 - a : 30$$

Câu 2.

$$|x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 2y - 1| + 4 = 2x - |x^2 - 3x + 2|$$

$$\Leftrightarrow |(x-y+1)^2 + x - 2| + |(x-1)(x-2)| = 2x - 4$$

(1)

Do

$$|(x-y+1)^2 + x - 2| + |(x-1)(x-2)| \geq 0 \quad (\forall x, y)$$

$$\Rightarrow 2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$\text{Với } x \geq 2 \text{ thì } |(x-y+1)^2 + x - 2| = (x-y+1)^2 + x - 2; |(x-1)(x-2)| = x^2 - 3x + 2$$

Khi đó từ phương trình (1)

$$\Rightarrow (x-y+1)^2 + x - 2 + (x-1) = 2(x-2) \Leftrightarrow (x-y+1)^2 = (x-2)(2-x+1-1) = -(x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)^2 + (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \text{ và } x-y+1=0 \Leftrightarrow x=2; y=3(tm)$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình là : } (x; y) = (2; 3)$$

Câu 3.

Giả sử

$$a+b > 2 \Leftrightarrow (a+b)^3 > 2^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a+b) > 8 \Leftrightarrow 2 + 3ab(a+b) > 8(a^3 + b^3 = 2)$$

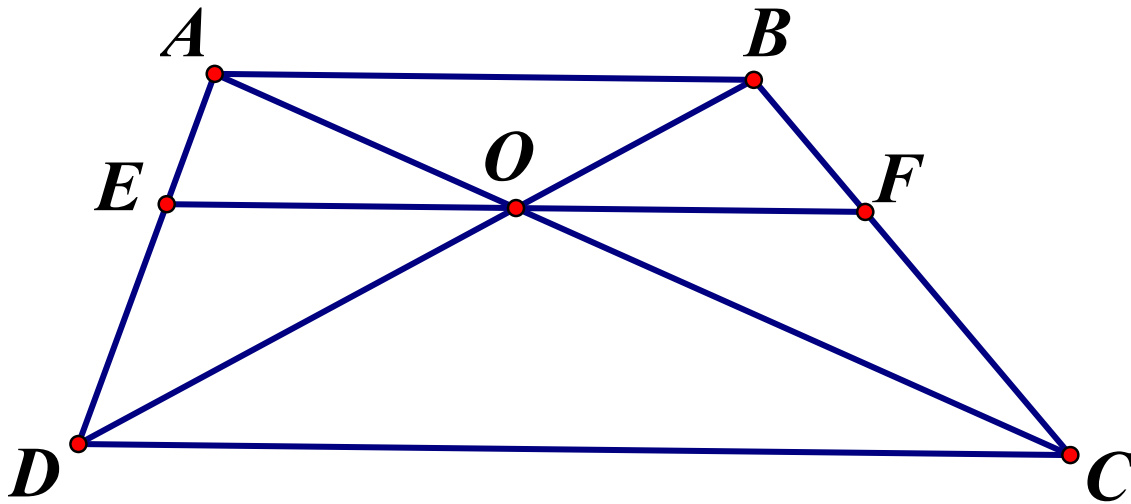
$$\Leftrightarrow 3ab(a+b) > 6 \Leftrightarrow ab(a+b) > 2 \Leftrightarrow ab(a+b) > a^3 + b^3 (a^3 + b^3 = 2)$$

$$\Leftrightarrow ab(a+b) > (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\Leftrightarrow ab > a^2 - ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 < 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 < 0 (Vo \quad ly')$$

Vậy $a + b \leq 2$

Câu 4.



Xét $\triangle ABD$ có $OE \parallel AB \Rightarrow \frac{OE}{AB} = \frac{OD}{DB}$ (Hệ quả định lý Talet) (1)

Xét $\triangle ABC$ có $OF \parallel DC \Rightarrow \frac{OF}{CD} = \frac{OB}{BD}$ (hệ quả định lý Talet) (2)

Xét $\triangle ABC$ có $OF \parallel AB \Rightarrow \frac{OF}{AB} = \frac{OC}{AC}$ (hệ quả định lý Talet) (3)

Xét $\triangle ABD$ có $OE \parallel DC \Rightarrow \frac{OE}{DC} = \frac{AO}{AC}$ (Hệ quả định lý Talet) (4)

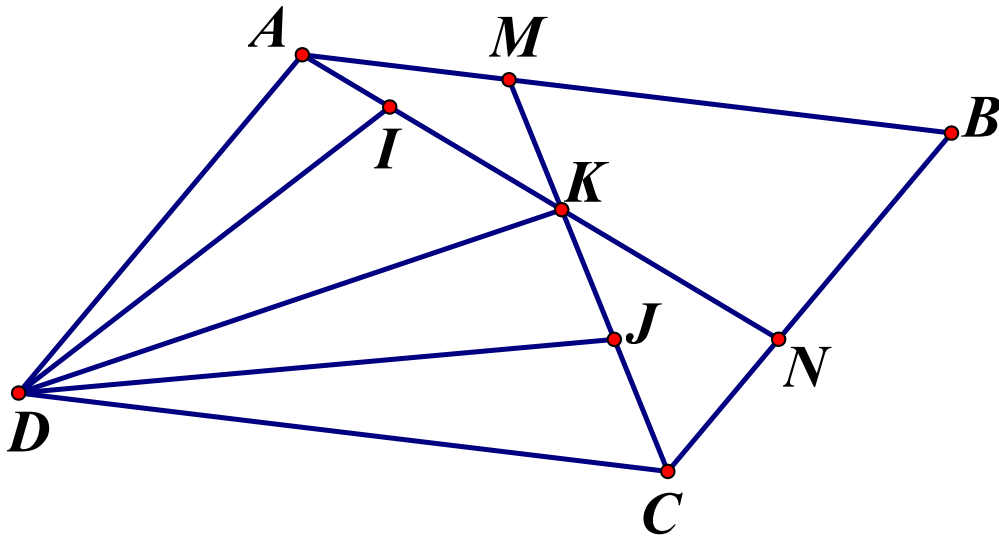
Từ (1), (2), (3), (4) suy ra

$$\frac{OE}{AB} + \frac{OF}{CD} + \frac{OF}{AB} + \frac{OE}{DC} = \frac{OD}{DB} + \frac{OB}{BD} + \frac{OC}{AC} + \frac{AO}{AC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OE}{AB} + \frac{OF}{AB} + \frac{OF}{CD} + \frac{OE}{DC} = \frac{OD}{DB} + \frac{OB}{BD} + \frac{OC}{AC} + \frac{AO}{AC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EF}{AB} + \frac{EF}{DC} = \frac{BD}{BD} + \frac{AC}{AC} \Leftrightarrow \frac{EF}{AB} + \frac{EF}{DC} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{EF}$$

Câu 5.



Kẻ DI, DJ lần lượt vuông góc với AK, CK

Ta có: $S_{AND} = \frac{1}{2} AN \cdot DI = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (Do chung đáy AD, cùng chiều cao hạ từ N) (1)

$S_{CDM} = \frac{1}{2} CM \cdot DJ = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (Do chung đáy CD, cùng chiều cao hạ từ M) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{2} AN \cdot DI = \frac{1}{2} CM \cdot DJ \Leftrightarrow DI = DJ$ (Vì $AN = CM$)

$\Rightarrow \triangle DIK = \triangle DJK$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông) $\Rightarrow \angle IKD = \angle JKD$

$\Rightarrow KD$ là tia phân giác $\angle AKC$