

ĐỀ KIỂM TRA THƯỜNG XUYÊN BÀI BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ là $\vec{a} = (2; -1; 4)$. Tọa độ của vectơ $-\vec{a}$ là
A. $(-2; 1; -4)$ **B.** $(2; -1; -4)$ **C.** $(-2; -1; 4)$ **D.** $(2; 1; 4)$
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ là $\vec{a} = (1; 2; 3)$ và $\vec{b} = (4; 5; 6)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ tương ứng là
A. $(5; 7; 9)$ **B.** $(3; 7; 9)$ **C.** $(5; 3; 9)$ **D.** $(3; 5; 9)$
- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ là $\vec{u} = (1; 2; 3)$ và $\vec{v} = (4; -5; 6)$. Tìm tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.
A. 12. **B.** 20. **C.** 14. **D.** 28
- Câu 4:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và điểm $B(3; 4; 5)$. Tọa độ điểm C là trung điểm của đoạn thẳng AB là
A. $(2; 3; 4)$ **B.** $(1; 3; 5)$ **C.** $(2; 4; 3)$ **D.** $(2; 2; 3)$
- Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 2; -5)$, $B(1; 2; 4)$, $C(2; 5; -2)$. Tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$ là
A. $G(6; 9; -3)$ **B.** $G(2; 3; -1)$ **C.** $G(2; 3; 1)$ **D.** $G(6; 9; 3)$
- Câu 6:** Trong không gian Oxz , cho hai vectơ là $\vec{a} = (1; 2; 3)$ và $\vec{b} = (2; -1; 1)$. Tìm biểu thức tọa độ của vectơ $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.
A. $(-1; 8; 7)$ **B.** $(3; 4; 5)$ **C.** $(-1; 7; 7)$ **D.** $(4; 5; 6)$
- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng với điểm $M(2; 2; -1)$ qua mặt phẳng (Oyz) là
A. $M'(2; -2; 1)$ **B.** $M'(-2; 0; 0)$ **C.** $M'(-2; -2; 1)$ **D.** $M'(-2; 2; -1)$
- Câu 8:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Điểm đối xứng với M qua trục Oy là
A. $M_2(1; 2; 3)$ **B.** $M_3(-1; 2; -3)$ **C.** $M_4(-1; -2; -3)$ **D.** $M_1(1; -2; -3)$
- Câu 9:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC , với $A(1; 2; 1)$, $B(-3; 0; 3)$, $C(2; 4; -1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
A. $D(6; 6; -3)$ **B.** $D(6; -6; 3)$ **C.** $D(6; 6; 3)$ **D.** $D(6; -6; -3)$
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ là $\vec{a} = (1; -2; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 1; 2)$. Tích vô hướng $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng
A. 12. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ là $\vec{a} = (1; 0; 0)$ và $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$. Góc giữa hai vectơ này là

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1); B(2; -1; 3)$ và điểm $M(a; b; 0)$ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a + b$ là

- A. 3. B. -2. C. 1. D. 2.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; -2; 3), B(-2; 1; 2), C(3; -1; 2)$.

- a) $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; 1)$.
 b) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.
 c) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
 d) Tọa độ chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC là $\left(-\frac{47}{29}; \frac{13}{29}; 2\right)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 3; 5), B(1; 1; 3), C(4; -2; 3)$.

- a) Tọa độ trung điểm của BC là $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; 3\right)$.
 b) Độ dài đoạn thẳng BC là $3\sqrt{2}$.
 c) Cosin $\angle BAC$ bằng $\frac{7\sqrt{19}}{38}$.
 d) Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$. Tọa độ hình chiếu của trọng tâm tam giác ABD lên mặt phẳng Oyz là $(2; 0; 0)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - \vec{k}$, với $\vec{i}, \vec{k}$ là hai vectơ đơn vị trên hai trục tọa độ Ox, Oz , hai điểm $B(-1; 2; 3), C(1; 4; 1)$.

- a) $A(3; 0; -1)$.
 b) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.
 c) Điểm $D(a; b; c)$ là điểm đối xứng của A qua B . Khi đó $a + b + c = 6$.
 d) Điểm $M(m; n; p)$ trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $2m - n + 2024p = 0$.

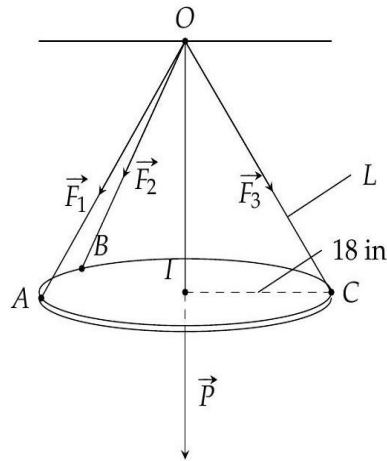
Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 3), B(2; 1; 5), C(2; 4; 2)$.

- a) Tọa độ trung điểm của AB là $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 4\right)$.

- b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (5; 7; 10)$.
- c) Góc giữa hai đường thẳng AB và AC bằng 30° .
- d) Điểm $I(a; b; c)$ nằm trên mặt phẳng (Oxz) thỏa mãn $T = |3\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $a - 2b + 2c = 15$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Nếu $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$ thì giá trị $m+n$ bằng bao nhiêu?
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; -1; 1)$ và $B(3; -1; 1)$. Điểm $M(a; b; c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$. Tính $a - 2b + c$.
- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 3)$, $B(3; 2; 8)$ và $C(-2; m; 4)$. Tìm m để tam giác ABC vuông tại A .
- Câu 4:** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 2; 5)$, $B(2; 4; -3)$, $C(3; 3; 1)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) . Độ dài GM ngắn nhất bằng bao nhiêu?
- Câu 5:** Trong không gian với một hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilomet), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì sau 5 phút tiếp theo, khoảng cách từ máy bay đến gốc tọa độ O bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)
- Câu 6:** Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều (Hình vẽ bên). Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L . Trọng lượng của chiếc đèn là 24 N và bán kính của chiếc đèn là 18 in ($1 \text{ inch} = 2,54 \text{ cm}$). Gọi F là độ lớn của các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ trên mỗi sợi dây. Khi đó $F = F(L)$ là một hàm số với biến số là L . Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây (tính bằng inch), biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 10 N.



LỜI GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ là $\vec{a} = (2; -1; 4)$. Tọa độ của vectơ $-\vec{a}$ là
- A.** $(-2; 1; -4)$ **B.** $(2; -1; -4)$ **C.** $(-2; -1; 4)$ **D.** $(2; 1; 4)$

Lời giải

Ta có $-\vec{a} = (-2; 1; -4)$.

- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ là $\vec{a} = (1; 2; 3)$ và $\vec{b} = (4; 5; 6)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ tương ứng là
- A.** $(5; 7; 9)$ **B.** $(3; 7; 9)$ **C.** $(5; 3; 9)$ **D.** $(3; 5; 9)$

Lời giải

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (1 + 4; 2 + 5; 3 + 6) = (5; 7; 9)$.

- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ là $\vec{u} = (1; 2; 3)$ và $\vec{v} = (4; -5; 6)$. Tìm tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.
- A.** 12. **B.** 20. **C.** 14. **D.** 28

Lời giải

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 6 = 12$.

- Câu 4:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và điểm $B(3; 4; 5)$. Tọa độ điểm C là trung điểm của đoạn thẳng AB là
- A.** $(2; 3; 4)$ **B.** $(1; 3; 5)$ **C.** $(2; 4; 3)$ **D.** $(2; 2; 3)$

Lời giải

$$\begin{cases} x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = 3 \\ z_C = \frac{z_A + z_B}{2} = 4. \end{cases}$$

Ta có $C(2;3;4)$. Vậy $C(2;3;4)$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;-5)$, $B(1;2;4)$, $C(2;5;-2)$. Tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$ là

- A.** $G(6;9;-3)$ **B.** $G(2;3;-1)$ **C.** $G(2;3;1)$ **D.** $G(6;9;3)$

Lời giải

$$\begin{cases} x_G = \frac{3+1+2}{3} \\ y_G = \frac{2+2+5}{3} \\ z_G = \frac{-5+4-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 2 \\ y_G = 3 \\ z_G = -1. \end{cases}$$

Ta có $G(2;3;-1)$. Vậy $G(2;3;-1)$.

Câu 6: Trong không gian Oxz , cho hai vectơ là $\vec{a} = (1;2;3)$ và $\vec{b} = (2;-1;1)$. Tìm biểu thức tọa độ của vectơ $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

- A.** $(-1;8;7)$ **B.** $(3;4;5)$ **C.** $(-1;7;7)$ **D.** $(4;5;6)$

Lời giải

$$\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = (3 \cdot 1 - 2 \cdot 2; 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1); 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = (-1;8;7)$$

Ta có $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = (-1;8;7)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng với điểm $M(2;2;-1)$ qua mặt phẳng (Oyz) là

- A.** $M'(2;-2;1)$ **B.** $M'(-2;0;0)$ **C.** $M'(-2;-2;1)$ **D.** $M'(-2;2;-1)$

Lời giải

Điểm đối xứng với điểm $M(2;2;-1)$ qua mặt phẳng (Oyz) là $M'(-2;2;-1)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Điểm đối xứng với M qua trục Oy là

- A.** $M_2(1;2;3)$ **B.** $M_3(-1;2;-3)$ **C.** $M_4(-1;-2;-3)$ **D.** $M_1(1;-2;-3)$

Lời giải

Ta có $M(1;-2;3)$.

Vậy điểm đối xứng với M qua trục Oy là $M_4(-1;-2;-3)$.

Câu 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC , với $A(1;2;1)$, $B(-3;0;3)$, $C(2;4;-1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A.** $D(6;6;-3)$ **B.** $D(6;-6;3)$ **C.** $D(6;6;3)$ **D.** $D(6;-6;-3)$

Lời giải

Gọi $D(x;y;z)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; -2; 2); \overrightarrow{DC} = (2 - x; 4 - y; -1 - z)$.

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = 2 - x \\ -2 = 4 - y \\ 2 = -1 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \\ z = -3 \end{cases}. \text{ Vậy } D(6; 6; -3).$$

$ABCD$ là hình bình hành

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ là $\vec{a} = (1; -2; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 1; 2)$. Tích vô hướng $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng

A. 12.

B. 2.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (-1; -1; 5)$.

Suy ra $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 11$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ là $\vec{a} = (1; 0; 0)$ và $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$. Góc giữa hai vectơ này là

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0^2}} = \frac{1}{2}$$

Ta có: suy ra $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1); B(2; -1; 3)$ và điểm $M(a; b; 0)$ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a + b$ là

A. 3.

B. -2.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Ta thấy $M(a; b; 0) \in (Oxy)$. Gọi $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB

Ta có: $MA^2 + MB^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = (\overline{IA} - \overline{IM})^2 + (\overline{IB} - \overline{IM})^2$

$$= (\overline{IA}^2 + \overline{IM}^2 - 2\overline{IA} \cdot \overline{IM}) + (\overline{IB}^2 + \overline{IM}^2 - 2\overline{IB} \cdot \overline{IM}) = 2\overline{IM}^2 + 2\overline{IA}^2 = 2\overline{IM}^2 + 7$$

Suy ra $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ ngắn nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (Oxy) .

Suy ra $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$. Như vậy $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; -2; 3), B(-2; 1; 2), C(3; -1; 2)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; 1)$.

b) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.

c) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

d) Tọa độ chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC là $\left(-\frac{47}{29}; \frac{13}{29}; 2\right)$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1)$.

b) Sai: Ta có $\overrightarrow{AC} = (2; 1; -1) \Rightarrow 3\overrightarrow{AC} = (6; 3; -3)$. Do đó $\overrightarrow{AB} \neq 3\overrightarrow{AC}$.

c) Đúng: Vì $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; 1), \overrightarrow{AC} = (2; 1; -1)$ suy ra $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Vậy A, B, C không thẳng hàng.

d) Sai: Gọi $A'(x; y; z)$ là chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC .

Ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 & (1) \\ \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA'} \text{ cùng phương} & (2) \end{cases}$$

Ta có: $\overrightarrow{AA'} = (x-1; y+2; z-3), \overrightarrow{BC} = (5; -2; 0), \overrightarrow{BA'} = (x+2; y-1; z-2)$.

(1) $\Leftrightarrow 5 \cdot (x-1) - 2 \cdot (y+2) + 0 \cdot (z-3) = 0 \Leftrightarrow 5x - 2y = 9$.

(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{-2} \\ z-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5y=1 \\ z=2 \end{cases}$. Suy ra
$$\begin{cases} x = \frac{47}{29} \\ y = -\frac{13}{29} \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{47}{29}; -\frac{13}{29}; 2\right)$$
.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 3; 5), B(1; 1; 3), C(4; -2; 3)$.

a) Tọa độ trung điểm của BC là $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; 3\right)$.

b) Độ dài đoạn thẳng BC là $3\sqrt{2}$.

c) Cosin $\angle BAC$ bằng $\frac{7\sqrt{19}}{38}$.

d) Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$. Tọa độ hình chiếu của trọng tâm tam giác ABD lên mặt phẳng Oyz là $(2; 0; 0)$.

Lời giải

a) Đúng: Gọi M là trung điểm BC .

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2} \\ z_M = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{3+3}{2} = 3 \end{cases} \quad \text{suy ra } M\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; 3\right).$$

b) Đúng. Ta có $BC = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-1)^2 + (3-3)^2} = 3\sqrt{2}$.

c) Sai: Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; -2; -2), \overrightarrow{AC} = (3; -5; -2)$.

$$\cos \widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{0 \cdot 3 + (-2) \cdot (-5) + (-2) \cdot (-2)}{\sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-2)^2}} = \frac{7\sqrt{19}}{38}$$

d) Sai: Gọi $D(x; y; z)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; -2; -2); \overrightarrow{DC} = (4-x; -2-y; 3-z)$.

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 4-x \\ -2 = -2-y \\ -2 = 3-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{suy ra } D(4; 0; 5).$$

$ABCD$ là hình bình hành

$$\begin{cases} x_G = \frac{1+1+4}{3} \\ y_G = \frac{3+1+0}{3} \\ z_G = \frac{5+3-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 2 \\ y_G = \frac{4}{3} \\ z_G = \frac{7}{3} \end{cases} \quad \text{suy ra } G\left(2; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . Ta có

Vậy hình chiếu của G lên mặt phẳng Oyz là $H\left(0; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - \vec{k}$, với $\vec{i}, \vec{k}$ là hai vectơ đơn vị trên hai trục tọa độ Ox, Oz , hai điểm $B(-1; 2; 3), C(1; 4; 1)$.

a) $A(3; 0; -1)$.

b) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

c) Điểm $D(a; b; c)$ là điểm đối xứng của với A qua B . Khi đó $a + b + c = 6$.

d) Điểm $M(m; n; p)$ trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $2m - n + 2024p = 0$.

Lời giải

a) Đúng: Vì $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - \vec{k}$ nên $A(3; 0; -1)$.

b) Sai: Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 2; 4), \overrightarrow{AC} = (-2; 4; 2)$.

Vì $4:2:4 \neq -2:4:2$ nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương suy ra A, B, C không thẳng hàng.

c) Đúng: Vì D là điểm đối xứng với A qua B nên B là trung điểm của AD .

Ta có
$$\begin{cases} x_D = 2x_B - x_A = -5 \\ y_D = 2y_B - y_A = 4 \\ z_D = 2z_B - z_A = 7. \end{cases}$$
 suy ra $D(-5; 4; 7)$. Do đó $a = -5, b = 4, c = 7$. Vậy $a + b + c = 6$.

d) Đúng. Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$$\begin{cases} 3 - x - 1 - x + 1 - x = 0 \\ 0 - y + 2 - y + 4 - y = 0 \\ -1 - z + 3 - z + 1 - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I(1; 2; 1)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 \end{aligned}$$

Do $IA^2 + IB^2 + IC^2$ không thay đổi nên $MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của điểm I trên mặt phẳng (Oxy) .

Do đó $M(1; 2; 0)$ suy ra $m = 1, n = 2, p = 0$.

Vậy $2m - n + 2024p = 2 - 2 + 0 = 0$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 3), B(2; 1; 5), C(2; 4; 2)$.

a) Tọa độ trung điểm của AB là $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 4\right)$.

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (5; 7; 10)$.

c) Góc giữa hai đường thẳng AB và AC bằng 30° .

d) Điểm $I(a; b; c)$ nằm trên mặt phẳng (Oxz) thỏa mãn $T = |3\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $a - 2b + 2c = 15$.

Lời giải

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3+5}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 4\right)$$

a) Đúng: Gọi I là trung điểm AB . Ta có

b) Đúng: Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (5; 7; 10)$.

c) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2), \overrightarrow{AC} = (1; 2; -1)$.

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{|1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}$$

Suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$.

$$3\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2-x) - (2-x) = 0 \\ 3(1-y) - (4-y) = 0 \\ 3(5-z) - (2-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{13}{2} \end{cases}$$

d) Sai: Gọi $K(x; y; z)$ thỏa mãn

Suy ra $K\left(2; -\frac{1}{2}; \frac{13}{2}\right)$. Khi đó $T = |3\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}| = |3\overrightarrow{IK} + 3\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{IK} - \overrightarrow{KC}| = |2\overrightarrow{IK}| = 2IK$.

T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi I là hình chiếu của K trên (Oxz) suy ra $I\left(2; 0; \frac{13}{2}\right)$.

Suy ra $a = 2, b = 0, c = \frac{13}{2}$. Vậy $a - 2b + 2c = 15$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; m-1; 3), \vec{b} = (1; 3; -2n)$. Nếu $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$ thì giá trị $m+n$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Nếu $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$ thì tồn tại số thực t sao cho $\vec{a} = t \cdot \vec{b}$. Suy ra

$$\begin{cases} 2 = 1t \\ m-1 = 3t \\ 3 = -2nt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases} \text{ do đó } m+n = \frac{25}{4}.$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; -1; 1)$ và $B(3; -1; 1)$. Điểm $M(a; b; c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$. Tính $a - 2b + c$.

Lời giải

Gọi $M(x; y; z)$ ta có $\overrightarrow{AM} = (x+1; y+1; z-1)$ và $\overrightarrow{MB} = (3-x; -1-y; 1-z)$.

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 3(3-x) \\ y+1 = 3(-1-y) \\ z-1 = 3(1-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Do đó:

Suy ra $M(2; -1; 1)$. Suy ra $a = 2, b = -1, c = 1$ suy ra $a - 2b + c = 2 + 2 + 1 = 5$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 3), B(3; 2; 8)$ và $C(-2; m; 4)$. Tìm m để tam giác ABC vuông tại A .

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 1; 5), \overrightarrow{AC} = (-2; m-1; 1)$.

Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -6 + m - 1 + 5 = 0 \Leftrightarrow m = 2$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 2; 5), B(2; 4; -3), C(3; 3; 1)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) . Độ dài GM ngắn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

G là trọng tâm tam giác ABC , suy ra $G\left(\frac{1+2+3}{3}; \frac{2+4+3}{3}; \frac{5+(-3)+1}{3}\right) = (2; 3; 1)$.

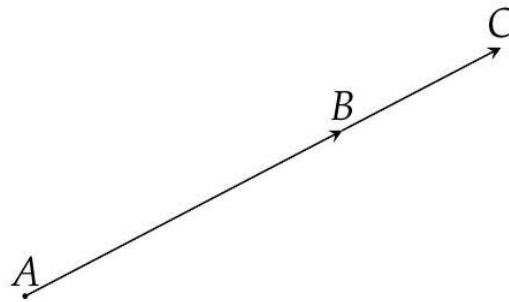
Gọi H là hình chiếu vuông góc của G trên mặt phẳng (Oxy) , khi đó GH là khoảng cách từ G đến mặt phẳng (Oxy) , ta có $GH = d(G, (Oxy)) = 1$.

Với M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) , ta có $GM \geq GH = 1$.

Do đó GM ngắn nhất $\Leftrightarrow M \equiv H$. Vậy độ dài GM ngắn nhất bằng 1.

Câu 5: Trong không gian với một hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilomet), ra đã phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì sau 5 phút tiếp theo, khoảng cách từ máy bay đến gốc tọa độ O bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải



Gọi $C(x; y; z)$ là vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $AB = 2BC$.

Do đó: $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \left(\frac{940-800}{2}; \frac{550-500}{2}; \frac{8-7}{2}\right) = (70; 25; 0,5)$

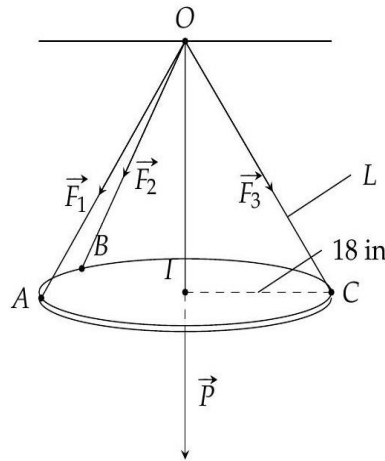
Mặt khác, $\overrightarrow{BC} = (x-940; y-550; z-8)$ nên $\begin{cases} x-940 = 70 \\ y-550 = 25 \\ z-8 = 0,5. \end{cases}$

Từ đó $\begin{cases} x = 1010 \\ y = 575 \\ z = 8,5 \end{cases}$ và vì vậy $C(1010;575;8,5)$.

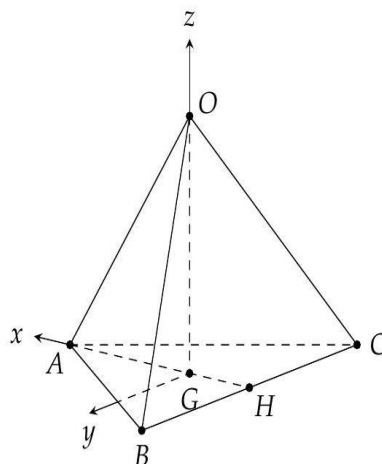
Vậy tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(1010;575;8,5)$.

Khi đó, khoảng cách từ máy bay đến gốc O là $\sqrt{1010^2 + 575^2 + 8,5^2} \approx 1162$.

Câu 6: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều (Hình vẽ bên). Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L . Trọng lượng của chiếc đèn là 24 N và bán kính của chiếc đèn là 18 in ($1 \text{ inch} = 2,54 \text{ cm}$). Gọi F là độ lớn của các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ trên mỗi sợi dây. Khi đó $F = F(L)$ là một hàm số với biến số là L . Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây (tính bằng inch), biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 10 N .



Lời giải



Vì tam giác ABC là tam giác đều, độ dài ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng $L > 0$.

Ta chọn hệ trục như hình vẽ, với G là trọng tâm tam giác ABC và H là trung điểm BC .

Trong đó A, H nằm trên trục Gx và O nằm trên trục Gz .

Bán kính của chiếc đèn là 18 nên $AG = 18$ suy ra $AB = 18\sqrt{3}$ và $BH = HC = 9\sqrt{3}$.

Do đó, ta có $G(0,0,0), A(18,0,0), B(-9,9\sqrt{3},0), C(-9,-9\sqrt{3},0)$.

Xét tam giác vuông AOG , suy ra $OG = \sqrt{OA^2 - AG^2} = \sqrt{L^2 - 18^2}$ nên $O(0;0;\sqrt{L^2 - 18^2})$.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (18; 0; -\sqrt{L^2 - 18^2}), \overrightarrow{OB} = (-9; 9\sqrt{3}; -\sqrt{L^2 - 18^2})$ và $\overrightarrow{OC} = (-9; -9\sqrt{3}; -\sqrt{L^2 - 18^2})$.

Suy ra $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = L$ và $|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{F_3}|$.

Tồn tại hằng số $c \neq 0$ sao cho $\overrightarrow{F_1} = c \cdot \overrightarrow{OA} = (18c; 0; -c\sqrt{L^2 - 18^2})$;

$\overrightarrow{F_2} = c \cdot \overrightarrow{OB} = (-9c; 9c\sqrt{3}; -c\sqrt{L^2 - 18^2})$; $\overrightarrow{F_3} = c \cdot \overrightarrow{OC} = (-9c; -9c\sqrt{3}; -c\sqrt{L^2 - 18^2})$

Suy ra $\vec{P} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = (0; 0; -3c\sqrt{L^2 - 18^2})$, trong đó $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên bóng đèn.

Mà trọng lượng của bóng đèn là 24N nên

$$|\vec{P}| = 24 \Leftrightarrow 9c^2(L^2 - 18^2) = 24^2 \Leftrightarrow c = \frac{8}{\sqrt{L^2 - 18^2}}, \forall L \in (18; +\infty)$$

Vậy $F = |\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{F_3}| = \frac{8L}{\sqrt{L^2 - 18^2}}$. Xét hàm số $F = \frac{8L}{\sqrt{L^2 - 18^2}}$ trên $(18; +\infty)$.

$$F' = \frac{-2592}{(L^2 - 18^2)\sqrt{L^2 - 18^2}} < 0, \forall L \in (18; +\infty)$$

Ta có

Mỗi sợi dây được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 10 N.

Suy ra $F(L) \leq 10 \Leftrightarrow F(L) \leq F(30) \Leftrightarrow L \geq 30$.

Vậy chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây bằng 30 in thỏa mãn yêu cầu bài toán.