

CÁC DẠNG BÀI TẬP BÀI HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

BẬC NHẤT HAI ẨN

Dạng 1: Nhận diện và tìm nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương pháp: Sử dụng kiến thức lý thuyết

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Hệ bất phương trình nào sau đây là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

a) $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y^2 < 0 \\ y - x > 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z < 0 \\ y < 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x + y < 3^2 \\ 4^2x + 3y < 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y \geq -1 \\ 2x^2 - 2y \leq -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 3y \geq -2 \\ 5|x| + 3y^2 \leq 4 \end{cases}$

Lời giải

a) Ta thấy hệ $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ gồm hai bất phương trình bậc nhất hai ẩn là $x < 0$ và $y \geq 0$ nên hệ trên là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

b) Ta thấy hệ $\begin{cases} x + y^2 < 0 \\ y - x > 1 \end{cases}$ không là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì $x + y^2 < 0$ không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn (chứa y^2)

c) Ta thấy hệ $\begin{cases} x + y + z < 0 \\ y < 0 \end{cases}$ không là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì $x + y + z < 0$ không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn (có 3 ẩn)

d) Ta có: $\begin{cases} -2x + y < 3^2 \\ 4^2x + 3y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y < 9 \\ 16x + 3y < 1 \end{cases}$ đây là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn và gồm hai bất phương trình bậc nhất hai ẩn là $-2x + y < 9$ và $16x + 3y < 1$.

e) Do bất phương trình $2x^2 - 2y \leq -3$ không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn, nên hệ bất phương trình đã cho không là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

f) Do bất phương trình $5|x| + 3y^2 \leq 4$ không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn, nên hệ bất phương trình đã cho không là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bài tập 2: Tìm các cặp số $(x; y)$ là nghiệm của hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x - 5 \leq 0 \\ -y + 1 \geq 0 \\ 3x + y \leq 4 \end{cases}$ trong đó $x \in \square, y \in \square$

b) $\begin{cases} x > 0 \\ 2x - 4 \leq 0 \\ y - 1 < 0 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases}$ trong đó $x \in \square, y \in \square$

a) Ta có $2x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$, do $x \in \square \Rightarrow x \in \{0; 1; 2\}$
 $-y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1$, do $y \in \square \Rightarrow y \in \{0; 1\}$

$$3x + y \leq 4 \text{ nên suy ra } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}; \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Mặt khác

Vậy các cặp số $(x; y)$, trong đó $x \in \square, y \in \square$ là nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là
 $(0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1)$

b) Ta có $\begin{cases} x > 0 \\ 2x - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 2$ do $x \in \square \Rightarrow x \in \{1; 2\}$

Do $\begin{cases} y - 1 < 0 \\ 2y + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3}{2} < y < 1$ do $y \in \square \Rightarrow y \in \{-1; 0\}$

Vậy các cặp số $(x; y)$, trong đó $x \in \square, y \in \square$ là nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là
 $(1; -1), (1; 0), (2; -1), (2; 0)$

Bài tập 3: Bạn An kinh doanh hai mặt hàng Handmade là vòng tay và vòng đeo cổ. Mỗi vòng tay làm trong 4 giờ, bán được 40 nghìn đồng. Mỗi vòng đeo cổ làm trong 6 giờ, bán được 80 nghìn đồng. Mỗi tuần bạn An bán được không quá 15 vòng tay và 4 vòng đeo cổ. Tính số giờ tối thiểu trong tuần An cần dùng để bán được ít nhất 400 nghìn đồng?

Lời giải

Gọi $x, y \in \square$ là số vòng tay và vòng đeo cổ trong tuần An làm được.

Theo giả thiết ta có
$$\begin{cases} 40x + 80y \geq 400 \\ 0 \leq x \leq 15 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Bài toán trở thành tìm nghiệm (x, y) để $L = 4x + 6y$ nhỏ nhất.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) là tam giác ABC với $A(0; 50), B(10; 0), C(2; 4)$ kẻ cả miền trong tam giác đó.

Tính giá trị của biểu thức $L = 4x + 6y$ tại tất cả các đỉnh của tam giác ABC ta thấy L nhỏ nhất khi $x = 2, y = 4$.

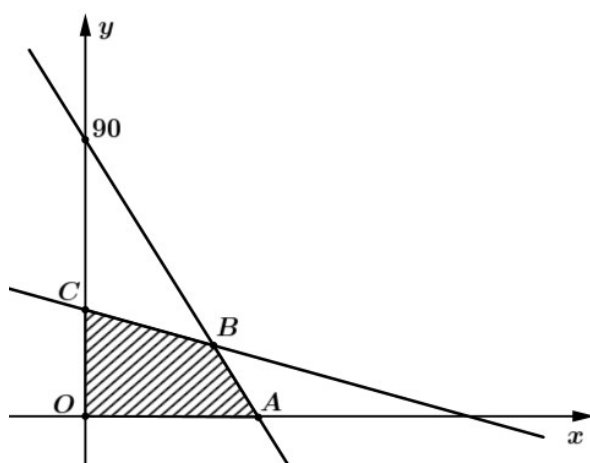
Vậy số giờ tối thiểu trong tuần An cần dùng là $L = 4.2 + 6.4 = 32$ giờ.

Bài tập 4: Một xưởng cơ khí có hai công nhân là Chiến và Bình. Xưởng sản xuất loại sản phẩm I và II . Mỗi sản phẩm I bán lãi 500 nghìn đồng, mỗi sản phẩm II bán lãi 400 nghìn đồng. Để sản xuất được một sản phẩm I thì Chiến phải làm việc trong 3 giờ, Bình phải làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất được một sản phẩm II thì Chiến phải làm việc trong 2 giờ, Bình phải làm việc trong 6 giờ. Một người không thể làm được đồng thời hai sản phẩm. Biết rằng trong một tháng Chiến không thể làm việc quá 180 giờ và Bình không thể làm việc quá 220 giờ. Tính số tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II được sản xuất ra. Điều kiện x, y nguyên

duyệt. Ta có hệ bất phương trình sau:
$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 180 \\ x + 6y \leq 220 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$
 . Miền nghiệm của hệ trên là



Tiền lãi trong một tháng của xưởng là $T = 0,5x + 0,4y$ (triệu đồng).

Ta thấy T đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C . Vì C có tọa độ không nguyên nên loại.

Tại $A(60; 0)$ thì $T = 30$ triệu đồng; tại $B(40; 30)$ thì $T = 32$ triệu đồng.

Vậy tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là 32 triệu đồng.

Bài tập 5: Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kiogam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kilogam thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn. Giá tiền một kg thịt bò là 160 nghìn đồng, một kg thịt lợn là 110 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua. Tìm x, y để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipid trong thức ăn?

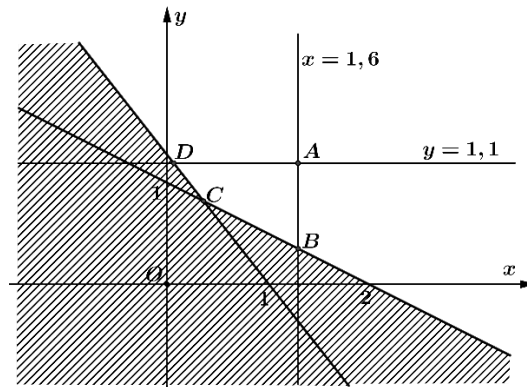
Lời giải

Theo bài ra ta có số tiền gia đình cần trả là $160.x + 110.y$ với x, y thỏa mãn:
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \end{cases}$$

Số đơn vị protein gia đình có là $0,8x + 0,6y \geq 0,9 \Leftrightarrow 8x + 6y \geq 9 \quad (d_1)$.

Số đơn vị lipid gia đình có là $0,2x + 0,4y \geq 0,4 \Leftrightarrow x + 2y \geq 2 \quad (d_2)$.

Tìm x, y thỏa mãn hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$$
 sao cho $T = 160x + 110y$ nhỏ nhất.



Vẽ hệ trục tọa độ ta tìm được tọa độ các điểm $A(1,6;1,1)$; $B(1,6;0,2)$; $C(0,6;0,7)$; $D(0,3;1,1)$

Nhận xét: $T(A) = 377$ nghìn, $T(B) = 278$ nghìn, $T(C) = 173$ nghìn, $T(D) = 169$ nghìn.

Vậy tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipid trong thức ăn thì $x = 0,6$ và $y = 0,7$.

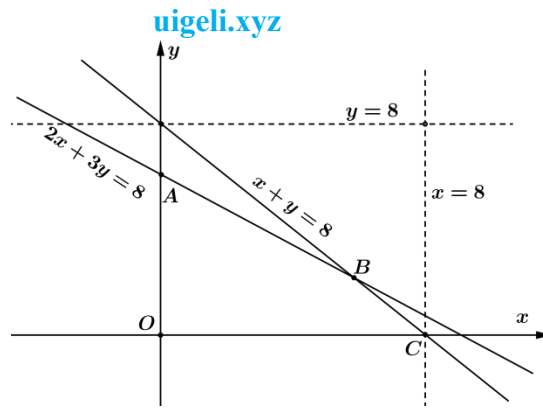
Bài tập 6: Một hộ nông dân định trồng dưa và củ đậu trên diện tích 8 ha. Trên diện tích mỗi ha, nếu trồng dưa thì cần 20 công và thu 3 triệu đồng, nếu trồng củ đậu thì cần 30 công và thu 4 triệu đồng. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu ha để thu được nhiều tiền nhất, biết rằng tổng số công không quá 180.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số ha trồng dưa và củ đậu.

Ta có: $0 \leq x \leq 8; 0 \leq y \leq 8; x + y \leq 8; 20x + 30y \leq 180 \Rightarrow 2x + 3y \leq 18$.

Số tiền thu được là $T(x, y) = 3x + 4y$. Ta có hệ
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 8 \\ x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \end{cases}$$



Miền nghiệm của hệ là miền tứ giác $OABC$ với $A(0;8), B(6;2), C(8;0)$.

Khi đó $T(x, y)$ đạt cực đại tại một trong các đỉnh của $OABC$.

Khi đó ta có: $T(0,0) = 0; T(0,8) = 24; T(6,2) = 26; T(8,0) = 24$.

Vậy cần trồng 6 ha dừa và 2 ha củ đậu.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cặp số $(x; y)$ nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 3y \leq 0 \\ x - 2y \geq 1 \end{cases}$

A. $(1;0)$. B. $(3;1)$. C. $(1;-3)$. D. $(-2;3)$.

Lời giải

Xét hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 3y \leq 0(1) \\ x - 2y \geq 1(2) \end{cases}$.

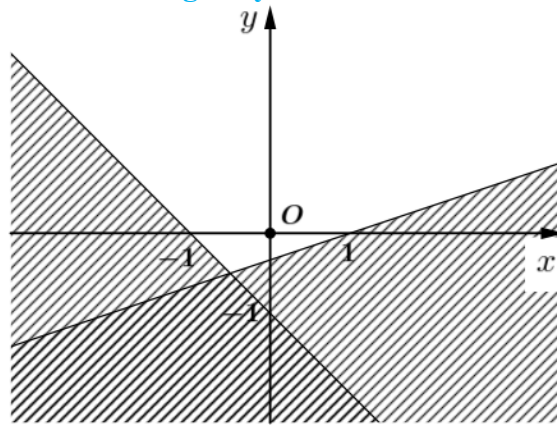
Với $x = 1; y = 0$ không là nghiệm của bất phương trình (1) nên $(1;0)$ không là nghiệm của hệ.

Với $x = 3; y = 1$ không là nghiệm của bất phương trình (1) nên $(3;1)$ không là nghiệm của hệ.

Với $x = 1; y = -3$ là nghiệm của cả hai bất phương trình (1) và (2) nên $(1;-3)$ là nghiệm của hệ.

Với $x = -2; y = 3$ không là nghiệm của bất phương trình (1) nên $(-2;3)$ không là nghiệm của hệ.

Câu 2: Miền nghiệm (phần không tô màu) dưới đây biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào?



- A. $\begin{cases} x - 3y - 1 \geq 0 \\ x + y + 1 > 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x - 3y - 1 < 0 \\ x + y + 1 > 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x - 3y - 1 < 0 \\ x + y + 1 \leq 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 4x + 3y - 3 < 0 \\ 2x - y + 2 > 0 \end{cases}$

Lời giải

Trên đồ thị ta thấy 2 đường thẳng trên là $x - 3y - 1 = 0$ và $x + y + 1 = 0$. Lại có điểm có tọa độ $O(0;0)$ là điểm thuộc miền nghiệm. Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào đáp án B ta được:

$$\begin{cases} 0 - 3 \cdot 0 - 1 < 0 \\ 0 + 0 + 1 > 0 \end{cases} \quad \text{nên miền nghiệm là của hệ bất phương trình} \quad \begin{cases} x - 3y - 1 < 0 \\ x + y + 1 > 0. \end{cases}$$

- Câu 3:** Cặp số $(x; y)$ nào sau đây **không** là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x + 4y - 1 > 0 \\ x + 2y - 3 \leq 0 \end{cases}$
- A. $(3;0)$ B. $(-1;2)$ C. $(2;0)$ D. $(0;0)$

Lời giải

Xét hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x + 4y - 1 > 0(1) \\ x + 2y - 3 \leq 0(2) \end{cases}$

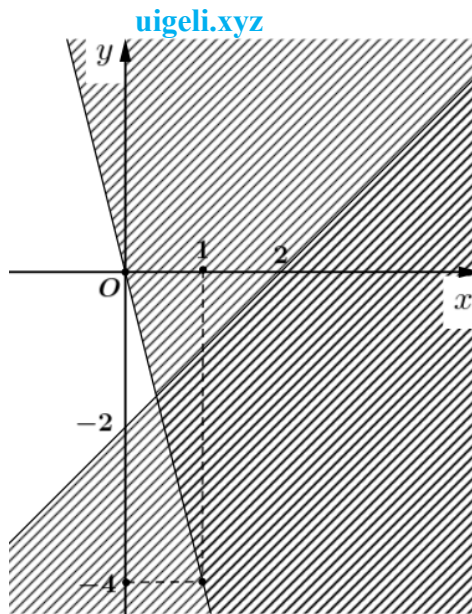
Với $x = 3; y = 0$ là nghiệm của bất phương trình (1) và (2) nên $(3;0)$ là nghiệm của hệ.

Với $x = -1; y = 2$ là nghiệm của bất phương trình (1) và (2) nên $(-1;2)$ là nghiệm của hệ.

Với $x = 2; y = 0$ là nghiệm của bất phương trình (1) và (2) nên $(2;0)$ là nghiệm của hệ.

Với $x = 0; y = 0$ không là nghiệm của bất phương trình (1) nên $(0;0)$ không là nghiệm của hệ.

- Câu 4:** Miền nghiệm (phần không tô màu) dưới đây biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào?



- A. $\begin{cases} 4x + y < 0 \\ x - y - 2 > 0 \end{cases}$
 B. $\begin{cases} 2x + y > 0 \\ x - 2y - 1 > 0 \end{cases}$
 C. $\begin{cases} x + 4y > 0 \\ x - y - 2 < 0 \end{cases}$
 D. $\begin{cases} 4x + y < 0 \\ x - y - 2 < 0 \end{cases}$

Lời giải

Trên đồ thị ta thấy 2 đường thẳng trên là $4x + y = 0$ và $x + y + 1 = 0$. Lại có điểm có tọa độ $(-1; 0)$ là điểm thuộc miền nghiệm. Thay tọa độ điểm $(-1; 0)$ vào đáp án D ta được:

$$\begin{cases} 4 \cdot (-1) + 0 < 0 \\ -1 - 0 - 2 < 0 \end{cases} \quad (\text{luôn đúng}) \quad \text{nên miền nghiệm là của hệ bất phương trình} \quad \begin{cases} 4x + y < 0 \\ x - y - 2 < 0 \end{cases}$$

Câu 5: Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x > 0 \\ x - y \leq 2 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$ chứa điểm nào sau đây?

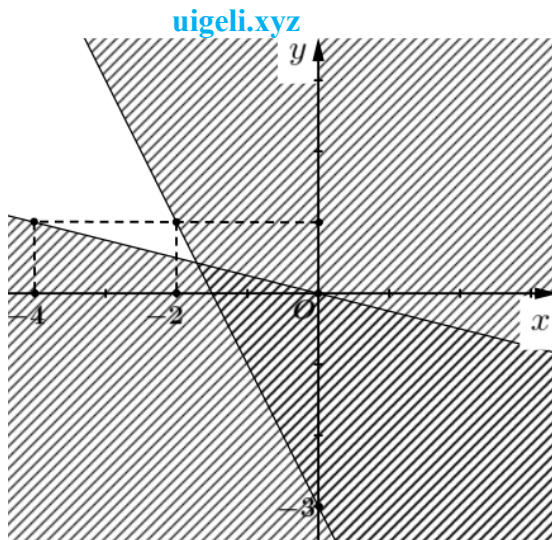
- A. $A\left(\frac{1}{2}; -1\right)$
 B. $B(1; 2)$
 C. $C(0; 2)$
 D. $D(3; -2)$

Lời giải

Thay tọa độ điểm $A\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ vào hệ phương trình $\begin{cases} x > 0 \\ x - y \leq 2 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$ ta được: $\begin{cases} \frac{1}{2} > 0 \\ \frac{1}{2} - (-1) \leq 2 \\ \frac{1}{2} + (-1) \leq 1 \end{cases}$ (luôn đúng)

Suy ra điểm $A\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Câu 6: Phần không tô màu là hình biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình nào?



- A. $\begin{cases} x+4y > 0 \\ 2x+y+3 > 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x+4y < 0 \\ 2x+y+3 \leq 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x+4y > 0 \\ 2x+y+3 \leq 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x+4y \geq 0 \\ 2x+y+3 \geq 0 \end{cases}$

Lời giải

Dựa vào hình vẽ ta thấy đồ thị gồm hai đường thẳng $x+4y=0$ và $2x+y+3=0$.

Ta thấy điểm có tọa độ $(-4;2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình: $x+4y > 0$.

Thay tọa độ điểm $(-4;2)$ vào bất phương trình $2x+y+3 \leq 0$ ta được $2 \cdot (-4) + 2 + 3 \leq 0$ (luôn đúng). Suy ra nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng $2x+y+3=0$ kể cả đường thẳng đó là miền nghiệm của bất phương trình $2x+y+3 \leq 0$.

Vậy phần không tô màu là hình biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x+4y > 0 \\ 2x+y+3 \leq 0. \end{cases}$$

Câu 7: Cặp số nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x+2y \leq 8 \\ 3x-y > 3 \end{cases}$?

- A. $(0;4)$ B. $(1;-1)$ C. $(4;1)$ D. $(2;3)$

Lời giải

Lần lượt thay các bộ số vào hệ bất phương trình ta được một nghiệm của hệ bất phương trình trên là $(4;1)$.

Câu 8: Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-y+2 > 0 \\ 2x+y > 3 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm

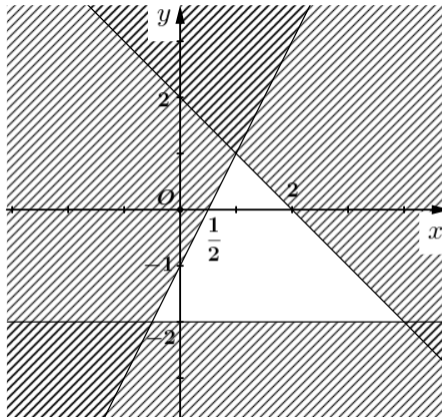
- A. $(1;1)$ B. $(-1;2)$ C. $(2;-1)$ D. $(1;2)$

Lời giải

Lần lượt thay các bộ số vào hệ bất phương trình ta được một nghiệm của hệ bất phương trình trên là $(1;2)$.

Vậy miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ 2x + y > 3 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm $(1; 2)$.

Câu 9: Phần không tô màu trong hình biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình nào dưới đây?



A. $\begin{cases} 2x - y < 1 \\ x + y < 2 \\ 3y - x > 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 2x - y \geq 1 \\ 2x + y > 2 \\ 3y - x > 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x - y < 1 \\ x + y \geq 2 \\ y \geq -2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2x - y \geq 1 \\ x + y \leq 2 \\ y \geq -2 \end{cases}$

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy đường thẳng (d_1) có phương trình là $2x - y = 1$, đường thẳng (d_2) có phương trình $x + y = 2$ và đường thẳng (d_3) có phương trình là $y = -2$.

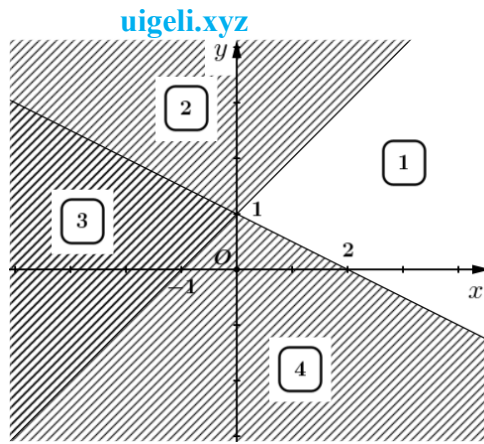
Do đó loại đáp án A và B.

Lại thấy điểm có tọa độ $(1; -1)$ thuộc miền biểu diễn nghiệm và thay vào đáp án C ta được:

$\begin{cases} 2 \cdot 1 - (-1) < 1 \\ 1 + (-1) \geq 2 \\ -1 \geq -2 \end{cases}$, ta thấy $1 + (-1) \geq 2$ (vô lý), do đó đáp án C không thỏa mãn.

Vậy phần không tô màu trong hình biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x - y \geq 1 \\ x + y \leq 2 \\ y \geq -2 \end{cases}$

Câu 10: Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y > -1 \\ x + 2y > 2 \end{cases}$ là miền nào sau đây :



A. Miền 1.

B. Miền 2.

C. Miền 3.

D. Miền 4.

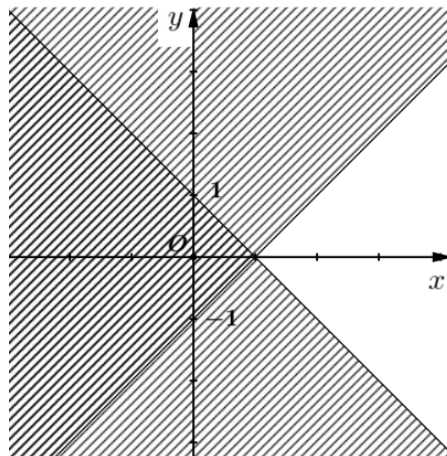
Lời giải

Vẽ các đường thẳng $x - y = -1$, $x + 2y = 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

Dễ thấy điểm $(2; 1)$ thỏa mãn cả hai bất phương trình của hệ đã cho.

Suy ra miền nghiệm của hệ bất phương trình đó là phần mặt phẳng miền 1.

Câu 11: Miền không gạch là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây



A. $\begin{cases} x + y > 1 \\ x - y < 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + y > 1 \\ x - y > 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + y < 1 \\ x - y < 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + y < 1 \\ x - y > 1 \end{cases}$

Lời giải

Chọn điểm $M(2; 0)$.

Thay vào các hệ bất phương trình ta thấy hệ $\begin{cases} x + y > 1 \\ x - y > 1 \end{cases}$ thỏa mãn.

Câu 12: Biết miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + 2y \leq 10 \\ 2y \leq 4 \\ 2x + 4y \leq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$ là một đa giác. Hãy tính diện tích của đa giác đó

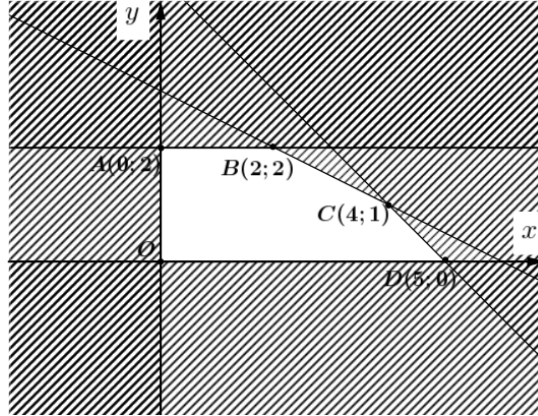
A. $\frac{15}{2}$.

B. $\frac{25}{2}$.

C. 20.

D. 10.

Ta có miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + 2y \leq 10 \\ 2y \leq 4 \\ 2x + 4y \leq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$
 là



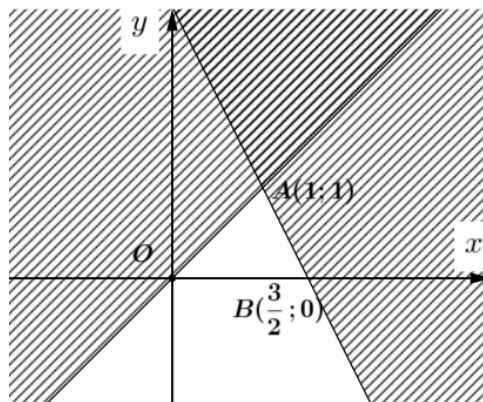
Ta có miền nghiệm của hệ bất phương trình là ngũ giác $OABCD$

Ta có
$$S = S_{AEBO} + S_{BEFC} + S_{CFD} = \frac{15}{2}$$

- Câu 13:** Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x - y \geq 0 \\ x + y - m > 0 \end{cases}$$
. Có bao nhiêu số tự nhiên $m \leq 50$ sao cho hệ bất phương trình trên vô nghiệm
- A.** 49. **B.** 48. **C.** 20. **D.** 10.

Lời giải

Ta có miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$$
 là

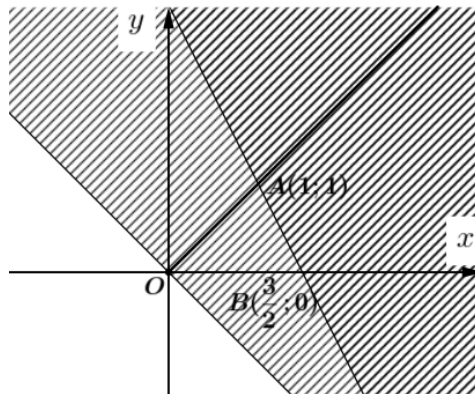


Hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi miền nghiệm của bất phương trình

$x + y - m > 0$ và miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$$
 không có điểm chung

Ta có đường thẳng $x + y - m = 0$ là đường thẳng song song với đường thẳng $x + y = 0$

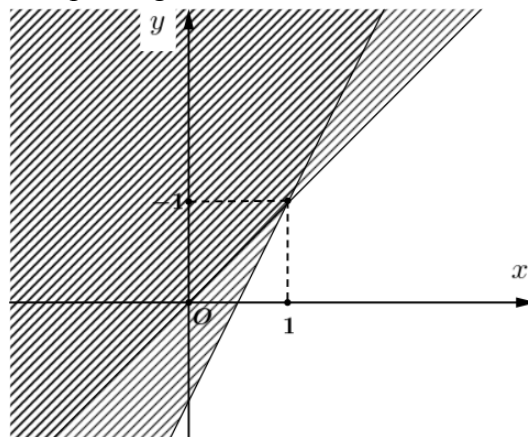
Mà miền nghiệm của bất phương trình $x + y > 0$ là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $x + y = 0$ chứa điểm A và không lấy đường thẳng $x + y = 0$



Từ hình vẽ ta có hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi $m \geq 2$

Vậy có $50 - 2 + 1 = 49$ số tự nhiên m thỏa yêu cầu bài toán

Câu 14: Phần không tô đậm trong hình vẽ dưới đây (không chứa biên), biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau?



A. $\begin{cases} x - y < 0 \\ 2x - y > 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x - y > 0 \\ 2x - y > 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - y > 0 \\ 2x - y < 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x - y < 0 \\ 2x - y < 1 \end{cases}$

Lời giải

Thay tọa độ điểm $M(1;0)$ vào lần lượt từng hệ bất phương trình ta thấy chỉ có B thỏa mãn.

Câu 15: Điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

A. $\begin{cases} x + 3y - 6 > 0 \\ 2x + y + 4 > 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + 3y - 6 > 0 \\ 2x + y + 4 < 0 \end{cases}$

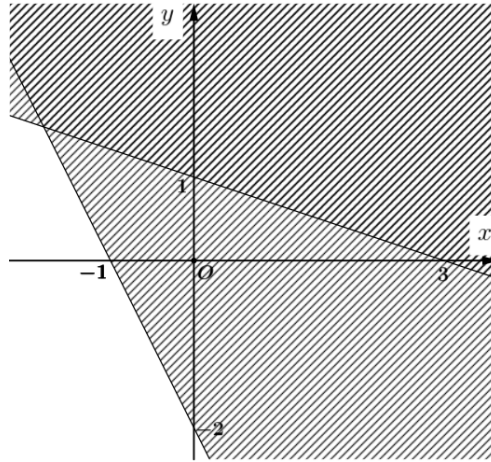
C. $\begin{cases} x + 3y - 6 < 0 \\ 2x + y + 4 > 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + 3y - 6 < 0 \\ 2x + y + 4 < 0 \end{cases}$

Lời giải

Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào các hệ bất phương trình ta thấy điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của cả hai bất phương trình câu C.

Câu 16: Miền góc không bị gạch sọc trong hình vẽ (kể cả hai cạnh của góc đó) là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?



A. $\begin{cases} x + 3y - 3 \geq 0 \\ 2x + y + 2 \geq 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + 3y - 3 \leq 0 \\ 2x + y + 2 \leq 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + 3y - 3 \leq 0 \\ 2x + y + 2 \geq 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + 3y - 3 \geq 0 \\ 2x + y + 2 \leq 0 \end{cases}$

Lời giải

Thay tọa độ điểm $M(-2;0)$ vào các hệ bất phương trình ta thấy điểm $M(-2;0)$ thuộc miền nghiệm của cả hai bất phương trình đáp án B.

Câu 17: Cặp số $(x; y)$ nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - 2y \geq 4 \\ x > 0 \end{cases}$

A. $(-1; 2)$

B. $(-2; -4)$

C. $(2; -4)$

D. $(0; 1)$

Lời giải

Thay tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình ta thấy điểm $(2; -4)$ thuộc miền nghiệm của cả ba bất phương trình trong hệ nên ta chọn câu C.

Câu 18: Cặp số $(x; y)$ nào sau đây **không là nghiệm** của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x \geq -3 \\ y \geq -1 \end{cases}$

A. $(3; 0)$

B. $(-1; 1)$

C. $(-2; 0)$

D. $(0; 0)$

Lời giải

Xét hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x \geq -3 \\ y \geq -1 \end{cases}$

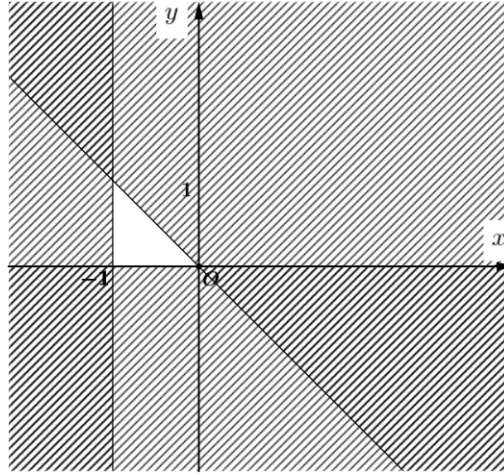
Với $x = 3; y = 0$ không là nghiệm của ba bất phương trình trong hệ nên $(3; 0)$ không là nghiệm của hệ.

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x + y \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Câu 19: Miền nghiệm của hệ bất phương trình là.

- A.** Một nửa mặt phẳng. **B.** Miền tứ giác. **C.** Miền tam giác. **D.** Miền ngũ giác.

Lời giải



$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x + y \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Từ hình vẽ nhận thấy hệ bất phương trình có miền nghiệm là một tam giác.

Câu 20: Điểm nào sau đây không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình

- A.** $M(0;1)$. **B.** $N(-1;1)$. **C.** $P(0;3)$. **D.** $Q(0;2)$.

Lời giải

Thay tọa độ điểm $M(0;1)$ vào hệ bất phương trình, ta thấy tọa độ điểm $M(0;1)$ không thỏa mãn.

$$\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3 \end{cases}$$

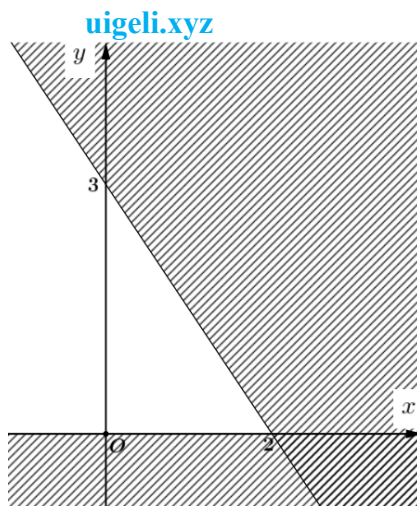
Câu 21: Miền nghiệm của hệ bất phương trình chứa điểm nào sau đây?

- A.** $A(1;0)$. **B.** $B(-2;3)$. **C.** $C(0;-1)$. **D.** $D(-1;0)$.

Lời giải

Thay lần lượt tọa độ các điểm A, B, C, D vào hệ bất phương trình, ta thấy tọa độ điểm $D(-1;0)$ thỏa mãn hệ.

Câu 22: Phần không gạch chéo ở hình sau đây biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau:



A. $\begin{cases} y > 0 \\ 3x + 2y < 6 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y > 0 \\ 3x + 2y < -6 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x > 0 \\ 3x + 2y < 6 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x > 0 \\ 3x + 2y > -6 \end{cases}$

Lời giải

Chọn điểm $M(0;1)$ thuộc miền không gạch chéo, thay tọa độ điểm $M(0;1)$ vào các hệ bất phương trình, ta thấy tọa độ điểm $M(0;1)$ thỏa mãn phương án A.

Câu 23: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$ là nghiệm của bất phương trình $(m-1)x + 3y + 1 \geq 0$.

A. 15

B. 16

C. 18

D. 17

Lời giải

Ta có $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(-1;5)$

Yêu cầu của bài toán tương đương điểm $A(-1;5)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $(m-1)x + 3y + 1 \geq 0$ tức là ta có $-m + 1 + 15 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 17$.

Với m có giá trị nguyên dương, ta có 17 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 24: Có hai cái giỏ đựng trứng gồm giỏ A và giỏ B , các quả trứng trong mỗi đều có hai loại là trứng lành và trứng hỏng. Tổng số trứng trong hai giỏ là 20 quả và số trứng trong giỏ A nhiều hơn số trứng trong giỏ B . Lấy ngẫu nhiên mỗi giỏ 1 quả trứng, biết xác suất để lấy được hai

quả trứng lành là $\frac{55}{84}$. Tìm số trứng lành trong giỏ A .

A. 6

B. 14

C. 11

D. 10

Lời giải

Gọi a là số trứng lành, b là số trứng hỏng trong giỏ A

Gọi x là số trứng lành, y là số trứng hỏng trong giỏ B

Lấy ngẫu nhiên mỗi giỏ 1 quả trứng, xác suất để lấy được hai quả trứng lành:

$$\frac{a}{a+b} \cdot \frac{x}{x+y} = \frac{55}{84}.$$

$$\begin{cases} (a,x):55 \\ (a+b)(x+y):84 \\ a+b+x+y=20 \\ (a+b)(x+y) \leq \left(\frac{a+b+x+y}{2}\right)^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=14 \\ x+y=6 \\ (a,x):55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=11 \\ x=5 \end{cases}$$

Do đó:

Vậy giỏ A có 11 quả trứng lành.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) $(3;-1)$ là một nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x+5y < 5 \\ -3x-y \leq -7 \end{cases}$
- b) $(3;-1)$ không là một nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x > 5 \\ y < 4 \\ x+y \leq 10 \end{cases}$
- c) $(3;-1)$ không là một nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} -x+5y > 1 \\ 3x+y > 5 \end{cases}$
- d) $(0;0)$ là một nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x+y > 3 \\ -x+3y \leq 5 \\ 3x-y \geq 7 \end{cases}$

Lời giải

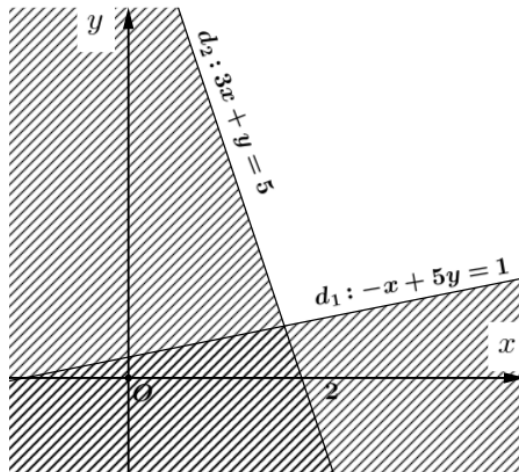
- a) Đúng: Thay $(3;-1)$ vào hệ bất phương trình $\begin{cases} x+5y < 5 \\ -3x-y \leq -7 \end{cases}$ ta được:

$$\begin{cases} 3+5(-1) < 5 \\ -3.3-(-1) \leq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 5 \\ -8 \leq -7 \end{cases} \text{ (đúng). Vậy } (3;-1) \text{ là một nghiệm của hệ bất phương trình.}$$

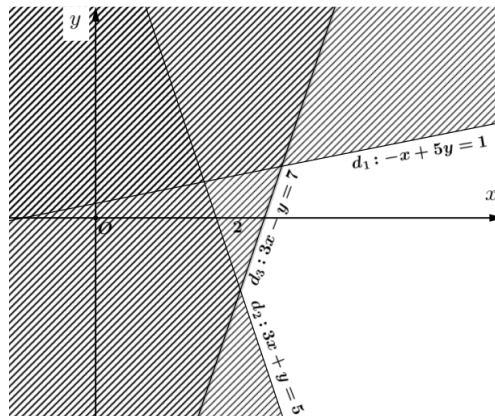
- b) Đúng: Thay $(3;-1)$ vào hệ bất phương trình $\begin{cases} x > 5 \\ y < 4 \\ x+y \leq 10 \end{cases}$ ta được: $\begin{cases} 3 > 5 \\ -1 < 4 \\ 3-1 \leq 10 \end{cases}$ (vô lí).

Vậy $(3;-1)$ không là một nghiệm của hệ bất phương trình.

- c) Đúng: Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} -x + 5y > 1 \\ 3x + y > 5 \end{cases}$ là miền không bị gạch ở hình sau (không kể bờ d_1, d_2):



- d) Sai: Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + y > 3 \\ -x + 3y \leq 5 \\ 3x - y \geq 7 \end{cases}$ là miền không bị gạch ở hình sau (không kể bờ d_1):



Câu 2: Xét tính, đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Điểm $M(1;2)$ không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 3y - 6 > 0 \\ 2x + y + 4 > 0 \end{cases}$
- b) Điểm $M(1;2)$ không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 3y - 6 < 0 \\ 2x + y - 4 < 0 \end{cases}$
- c) Điểm $(0;0)$ là một nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2x - 3y + 2 > 0 \end{cases}$
- d) Điểm $(1;1)$ là một nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2x - 3y + 2 > 0 \end{cases}$

Lời giải

a) Sai: Thay $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ vào hệ bất phương trình, ta được: $\begin{cases} 1 + 3.2 - 6 > 0 \\ 2.1 + 2 + 4 > 0 \end{cases}$ (đúng) nên suy ra điểm $M(1;2)$ thuộc miền nghiệm của hệ đã cho.

b) Đúng: Thay $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ vào hệ bất phương trình, ta được: $\begin{cases} 1 + 3.2 - 6 < 0 \\ 2.1 + 2 - 4 < 0 \end{cases}$ (sai) nên suy ra điểm $M(1;2)$ không thuộc miền nghiệm của hệ đã cho.

c) Đúng: Thay $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ vào hệ bất phương trình, ta được: $\begin{cases} 0 + 0 - 2 \leq 0 \\ 2.0 - 3.0 + 2 > 0 \end{cases}$ (đúng) do đó cặp số $(0;0)$ là một nghiệm của hệ đã cho.

d) Đúng: Thay $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ vào hệ bất phương trình, ta được: $\begin{cases} 1 + 1 - 2 \leq 0 \\ 2.1 - 3.1 + 2 > 0 \end{cases}$ (đúng), do đó cặp số $(1;1)$ là một nghiệm của hệ đã cho.

Câu 3: Bác Minh có kế hoạch đầu tư không quá 240 triệu đồng vào hai khoản X và khoản Y . Để đạt được lợi nhuận thì khoản Y phải đầu tư ít nhất 40 triệu đồng và số tiền đầu tư cho khoản X phải ít nhất gấp ba lần số tiền cho khoản Y . Khi đó:

a) Gọi x, y (đơn vị: triệu đồng) tiền bác Minh đầu tư vào kho ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x + y \leq 240 \\ y \geq 40 \\ x \geq 3y \end{cases}$$

b) Miền nghiệm của hệ bất phương trình tiền bác Minh đầu tư vào kho là một tứ giác

c) Điểm $C(200;40)$ không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình tiền bác Minh đầu tư vào kho

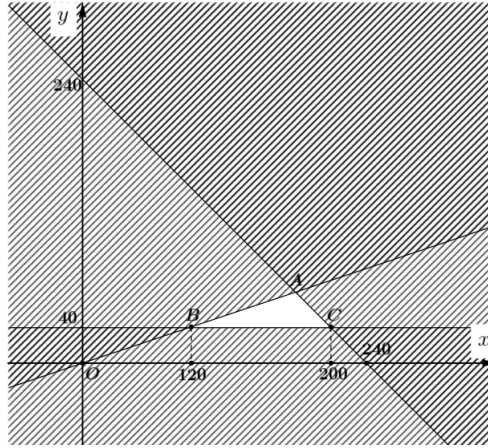
d) Điểm $A(180;60)$ là điểm có tung độ lớn nhất thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình tiền bác Minh đầu tư vào kho

Lời giải

a) Đúng: Gọi x, y (đơn vị: triệu đồng) tiền bác Minh đầu tư vào kho. Khi đó ta có hệ bất

phương trình:
$$\begin{cases} x + y \leq 240 \\ y \geq 40 \\ x \geq 3y \end{cases}$$

b) Sai: Miền nghiệm của hệ trên là miền tam giác ABC với $A(180;60); B(120;40)$, $C(200;40)$ như hình vẽ dưới:



c) Sai: Điểm $C(200;40)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình tiền bác Minh đầu tư vào kho

d) Đúng: Điểm $A(180;60)$ là điểm có tung độ lớn nhất thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình tiền bác Minh đầu tư vào kho.

Câu 4: Trong 1 lạng thịt bò chứa $26g$ protein, 1 lạng cá chứa $22g$ protein. Trung bình trong một ngày, một người đàn ông cần từ 56 đến $91g$ protein. Theo lời khuyên của bác sĩ, để tốt cho sức khỏe thì không nên ăn thịt nhiều hơn cá. Gọi x, y lần lượt là số lạng thịt bò, lạng cá mà một người đàn ông ăn trong một ngày. Khi đó:

a) Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết trong một ngày

$$\begin{cases} 26x + 22y \geq 56 \\ 26x + 22y \leq 91 \\ x \leq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

cho một người đàn ông là

b) Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết trong một ngày cho một người đàn ông là một ngũ giác

c) $(1; 2)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết trong một ngày cho một người đàn ông

d) Điểm $B\left(\frac{91}{48}; \frac{91}{48}\right)$ là điểm có hoành độ bé nhất thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết trong một ngày cho một người đàn ông

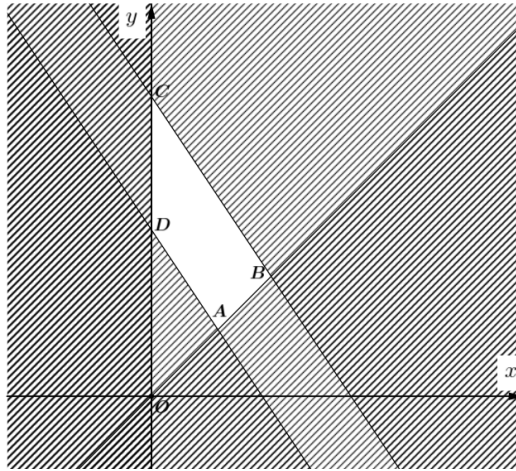
Lời giải

a) Đúng: Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết trong

$$\begin{cases} 26x + 22y \geq 56 \\ 26x + 22y \leq 91 \\ x \leq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

một ngày cho một người đàn ông là:

b) Sai: Miền nghiệm của hệ trên là miền tứ giác $ABCD$ với $A\left(\frac{7}{6}; \frac{7}{6}\right), B\left(\frac{91}{48}; \frac{91}{48}\right), C\left(0; \frac{91}{22}\right), D\left(0; \frac{28}{11}\right)$ ở hình dưới đây:



c) Đúng: Một nghiệm $(x_0; y_0)$ của hệ bất phương trình với x_0, y_0 là $(x_0; y_0) = (1; 2)$.

d) Sai: Điểm $B\left(\frac{91}{48}; \frac{91}{48}\right)$ là điểm có hoành độ lớn nhất

Câu 5: Cho các hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ 5x - y \geq -4 \\ x + 2y \leq 5 \end{cases}$, $\begin{cases} -x - y < 4 \\ -x + 2y > -2 \\ x + y < 8 \\ x \geq -6 \\ y \leq 6 \end{cases}$. Khi đó:

a) Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ 5x - y \geq -4 \\ x + 2y \leq 5 \end{cases}$ là tam giác.

b) Điểm $M(1; 1)$ thỏa mãn miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ 5x - y \geq -4 \\ x + 2y \leq 5 \end{cases}$.

$$\begin{cases} -x - y < 4 \\ -x + 2y > -2 \\ x + y < 8 \\ x \geq -6 \\ y \leq 6 \end{cases}$$

c) Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác.

$$\begin{cases} -x - y < 4 \\ -x + 2y > -2 \\ x + y < 8 \\ x \geq -6 \\ y \leq 6 \end{cases}$$

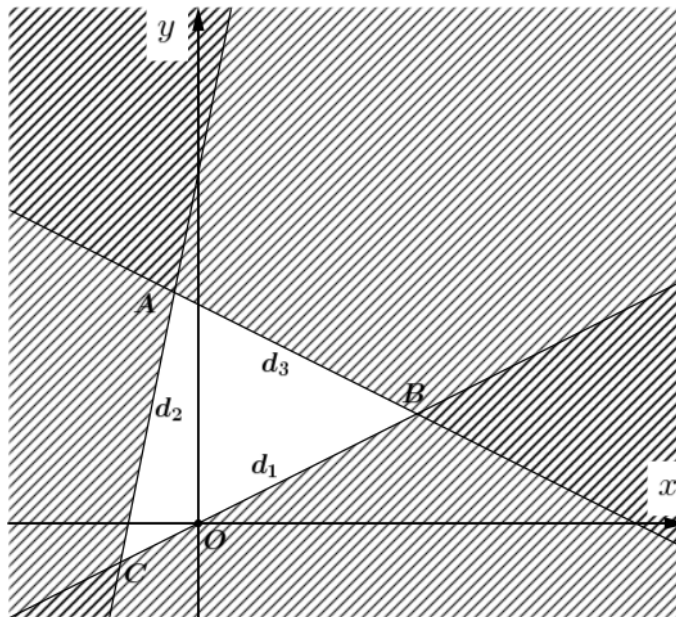
d) Điểm $O(0;0)$ không thỏa mãn miền nghiệm của hệ bất phương trình

Lời giải:

$$\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ 5x - y \geq -4 \\ x + 2y \leq 5 \end{cases}$$

a) Đúng: Miền nghiệm của hệ bất phương trình

Vẽ các đường thẳng $d_1: x - 2y = 0, d_2: 5x - y = -4, d_3: x + 2y = 5$.



b) Đúng: Ta thấy điểm $M(1;1)$ thỏa mãn miền nghiệm của hệ bất phương trình vì khi thay

$$x = 1, y = 1 \text{ vào hệ, ta có: } \begin{cases} 1 - 2 \cdot 1 \leq 0 \\ 5 \cdot 1 - 1 \geq -4 \\ 1 + 2 \cdot 1 \leq 5 \end{cases} \quad (\text{đúng})$$

c) Đúng: Gạch bỏ các phần không thuộc miền nghiệm của mỗi bất phương trình (nửa mặt phẳng có bờ là các đường d_1, d_2, d_3 và không chứa điểm M). Khi đó, miền nghiệm của bất phương trình chính là miền của tam giác ABC (kể cả ba cạnh của nó), trong đó

$$A\left(-\frac{3}{11}; \frac{29}{11}\right), B\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{4}\right), C\left(-\frac{8}{9}; -\frac{4}{9}\right).$$

$$\begin{cases} -x - y < 4 \\ -x + 2y > -2 \\ x + y < 8 \\ x \geq -6 \\ y \leq 6 \end{cases}$$

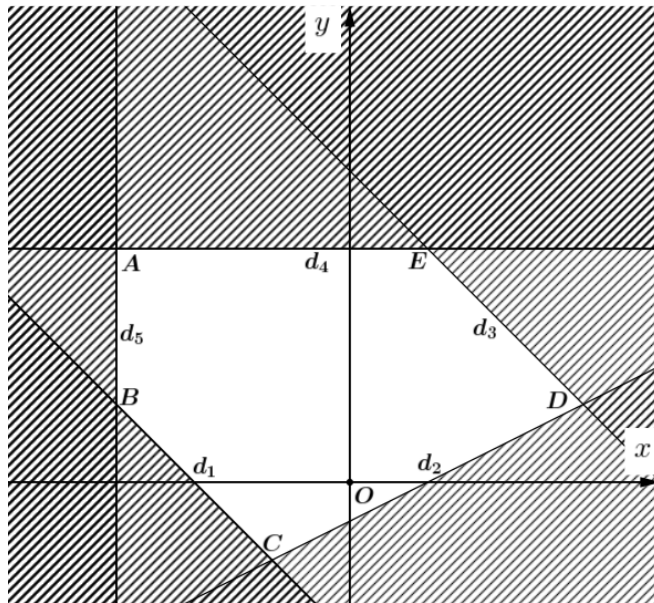
d) Đúng: Miền nghiệm của hệ bất phương trình

Vẽ các đường thẳng $d_1: -x - y = 4, d_2: -x + 2y = -2, d_3: x + y = 8, d_4: x = -6, d_5: y = 6$

Ta có điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình vì khi thay $x = 0, y = 0$ vào hệ,

$$\begin{cases} 0 < 4 \\ 0 > -2 \\ 0 \geq -6 \\ 0 \leq 6 \end{cases} \quad (\text{đúng})$$

Gạch bỏ các phần không thuộc miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ (nửa mặt phẳng có bờ là các đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 và không chứa điểm O). Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình chính là miền của ngũ giác $ABCDE$ (không kể các cạnh BC, CD, DE) với $A(-6;6), B(-6;2), C(-2;-2), D(6;2), E(2;6)$.



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Cho các cặp số sau: $(0;0); (1;1); (-1;1); (-1;-1)$. Hỏi có bao nhiêu cặp không là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2x - 3y + 2 > 0 \end{cases}$$

Lời giải

Ta thay cặp số $(-1;1)$ vào hệ ta thấy không thỏa mãn.

Vậy chỉ có một cặp số không là nghiệm của hệ bất phương trình.

Câu 2: Cho hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ -y + 1 \leq 0 \end{cases}$. Gọi $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ trên. Tìm giá trị nhỏ nhất của $3x_0 + y_0$.

Lời giải

Do $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ -y + 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_0 - 1 \geq 0 \\ -y_0 + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \geq \frac{1}{2} \\ y_0 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 3x_0 + y_0 \geq \frac{5}{2}$

Suy ra $3x_0 + y_0$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{5}{2}$ khi $\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ y_0 = 1 \end{cases}$

Câu 3: Cho hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Gọi $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ trên. Tìm giá trị lớn nhất của $x_0 \cdot y_0$

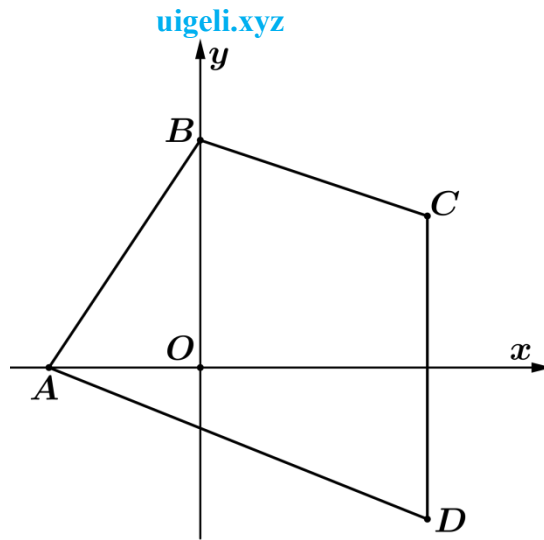
Lời giải

Do $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_0 + y_0 \leq 3 \\ x_0 \geq 0 \\ y_0 \geq 0 \end{cases}$

Mặt khác: $x_0 \cdot y_0 = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot y_0 \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2x_0 + y_0}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9}{8} \Rightarrow x_0 \cdot y_0 \leq \frac{9}{8}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x_0 = \frac{3}{4} \\ y_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$. Vậy $x_0 \cdot y_0$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{9}{8}$ khi $\begin{cases} x_0 = \frac{3}{4} \\ y_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$.

Câu 4: Trong mặt phẳng Oxy , cho tứ giác $ABCD$ có $A(-2; 0)$; $B(0; 3)$; $C(3; 2)$ và $D(3; -2)$ (tham khảo hình vẽ). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho điểm $M(m; m+1)$ nằm trên hình tứ giác $ABCD$ tính cả bốn cạnh AB, BC, CD, DA .



Lời giải

Nhận thấy hình tứ giác $ABCD$ tính cả 4 cạnh của nó là miền nghiệm của hệ bất phương trình gồm 4 bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng chứa điểm $O(0;0)$ và lần lượt có các bờ là các đường AB, BC, CD và DA .

Phương trình đường thẳng $AB: -3x + 2y = 6$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ AB (tính cả bờ AB) và chứa điểm $O(0;0)$ là $-3x + 2y \leq 6$.

Phương trình đường thẳng $BC: x + 3y = 9$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ BC (tính cả bờ BC) và chứa điểm $O(0;0)$ là $x + 3y \leq 9$.

Phương trình đường thẳng $CD: x = 3$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ CD (tính cả bờ CD) và chứa điểm $O(0;0)$ là $x \leq 3$.

Phương trình đường thẳng $DA: 2x + 5y = -4$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ DA (tính cả bờ DA) và chứa điểm $O(0;0)$ là $2x + 5y \geq -4$.

Như vậy hình tứ giác $ABCD$ tính cả 4 cạnh của nó là miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} -3x + 2y \leq 6 \\ x + 3y \leq 9 \\ x \leq 3 \\ 2x + 5y \geq -4 \end{cases} \quad (*)$$
 Điểm $M(m; m+1)$ nằm trên hình tứ giác $ABCD$ tính cả bốn cạnh của nó khi và chỉ khi $(m; m+1)$ là một nghiệm của hệ $(*)$, tức là

$$\begin{cases} -3m + 2(m+1) \leq 6 \\ m + 3(m+1) \leq 9 \\ m \leq 3 \\ 2m + 5(m+1) \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -4 \\ m \leq \frac{3}{2} \\ m \leq 3 \\ m \geq -\frac{9}{7} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{7} \leq m \leq \frac{3}{2} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1; 0; 1\}$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5: Một hộ nông dân định trồng dưa và củ đậu trên diện tích 8 ha. Trên diện tích mỗi ha, nếu trồng dưa thì cần 20 công và thu được 3 triệu đồng, nếu trồng củ đậu thì cần 30 công và thu được 4 triệu đồng. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu ha để thu được nhiều tiền nhất, biết rằng tổng số công không quá 180.

Lời giải

Giả sử cần trồng x (ha) dưa và y (ha) củ đậu. Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \end{cases}$$

Khi đó hộ nông dân thu về số tiền là $T = 3x + 4y = (x + y) + (2x + 3y) \leq 8 + 18 = 26$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$.

Câu 6: Người ta dự định dùng 2 nguyên liệu là mía và củ cải đường để chiết xuất ít nhất 140 kg đường kính (độ tinh khiết cao) và 9 kg đường cát (có lẫn tạp chất màu). Từ mỗi tấn mía giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20 kg đường kính và 0,6 kg đường cát. Từ mỗi tấn củ cải đường giá 3 triệu đồng ta chiết xuất được 10 kg đường kính và 1,5 kg đường cát. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất. Biết cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ cung cấp không quá 10 tấn mía và không quá 9 tấn củ cải đường.

Lời giải

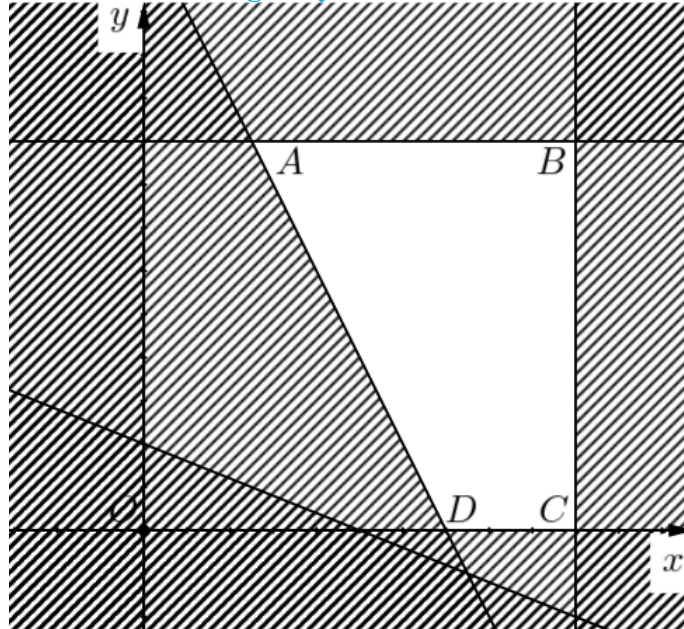
Đặt x và y lần lượt là số tấn mía và củ cải đường cần dùng.

Từ giả thiết, ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases}$$

Ta cần xác định x, y thỏa mãn hệ trên và $T = 4x + 3y$ có giá trị nhỏ nhất.

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:



Ta được miền nghiệm của hệ là tứ giác $ABCD$ với $A(5;4)$, $B\left(\frac{5}{2};9\right)$, $C(10;9)$, $D(10;2)$.

Thay tọa độ các điểm trên vào T , ta được chi phí nguyên liệu ít nhất khi $x=5$ và $y=4$.

Vậy cần dùng 5 tấn mía và 4 tấn củ cải đường thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 2: Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương pháp: Cách xác định miền nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

- Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong hệ và gạch bỏ miền còn lại.
- Miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Biểu diễn miền nghiệm của mỗi hệ bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ:

a)
$$\begin{cases} y - x < -1 \\ x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x + y > 5 \\ x - y > 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 7x + 4y \leq 2400 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ x - 3y + 3 \leq 0 \end{cases}$$

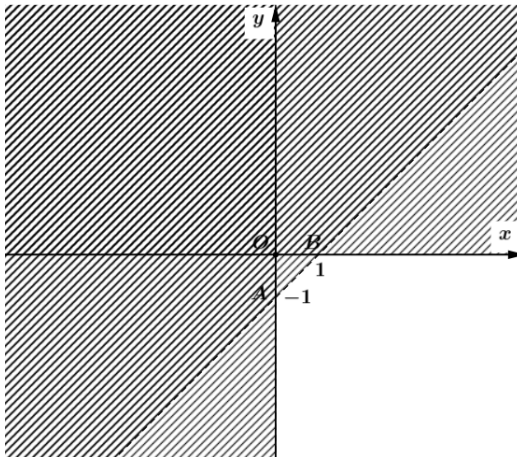
f)
$$\begin{cases} x + y > 0 \\ -2x - 3y + 6 > 0 \\ x - 2y + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Lời giải

a) Xác định miền nghiệm của bất phương trình $y - x < -1$. Vẽ đường thẳng $d: -x + y = -1$

Vì $-0 + 0 = 0 > -1$ nên tọa độ điểm $O(0;0)$ không thỏa mãn bất phương trình $y - x < -1$.

Do đó miền nghiệm của bất phương trình $y - x < -1$ là nửa mặt phẳng bờ d không chứa gốc tọa độ O . Miền nghiệm của bất phương trình $x > 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy chứa điểm $(1;0)$ không kể trục Oy . Miền nghiệm của bất phương trình $y < 0$ là nửa mặt phẳng bờ Ox chứa điểm $(0;-1)$ không kể trục Ox .



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là miền không bị gạch sọc (không kể đoạn thẳng AB và các trục tọa độ).

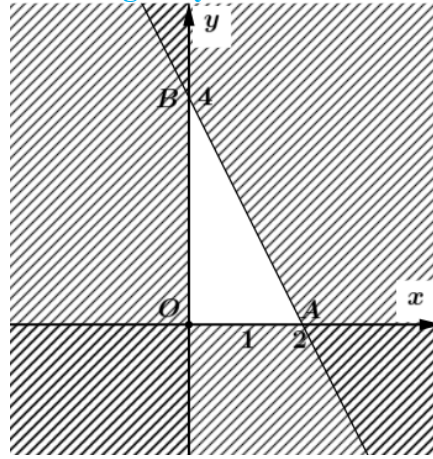
b) Miền nghiệm của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy chứa điểm $(1;0)$ kể cả trục Oy . Miền nghiệm của bất phương trình $y \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Ox chứa điểm $(0;1)$ kể cả trục Ox . Xác định miền nghiệm của bất phương trình $2x + y \leq 4$

Vẽ đường thẳng $d: 2x + y = 4$

Vì $2 \cdot 0 + 0 = 0 < 4$ nên tọa độ điểm $O(0;0)$ thỏa mãn bất phương trình $2x + y \leq 4$

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình $2x + y \leq 4$ là nửa mặt phẳng bờ d chứa gốc tọa độ O

Vậy miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là miền tam giác OAB (kể cả các đoạn thẳng OA, OB, AB).



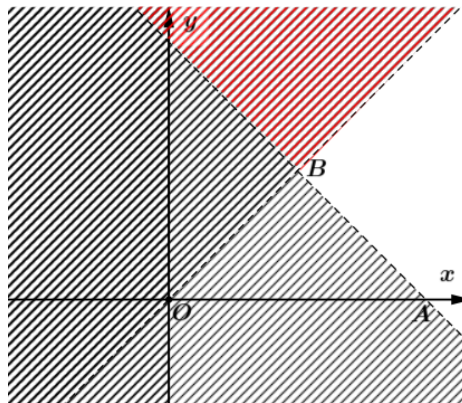
c) Miền nghiệm của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy chứa điểm $(1; 0)$ kể cả trục Oy . Xác định miền nghiệm của bất phương trình $x + y > 5$. Vẽ đường thẳng $d: x + y = 5$

Vì $0 + 0 = 0 < 5$ nên tọa độ điểm $O(0; 0)$ không thỏa mãn bất phương trình $x + y > 5$.

Do đó miền nghiệm của bất phương trình $x + y > 5$ là nửa mặt phẳng bờ d không chứa gốc tọa độ O . Xác định miền nghiệm của bất phương trình $x - y < 0$. Vẽ đường thẳng $d': x - y = 0$

Vì $1 - 0 = 1 > 0$ nên tọa độ điểm $(1; 0)$ không thỏa mãn bất phương trình $x - y < 0$

Do đó miền nghiệm của bất phương trình $x - y < 0$ là nửa mặt phẳng bờ d' không chứa điểm $(1; 0)$. Vậy miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là miền gạch sọc màu đỏ (không kể d và d')



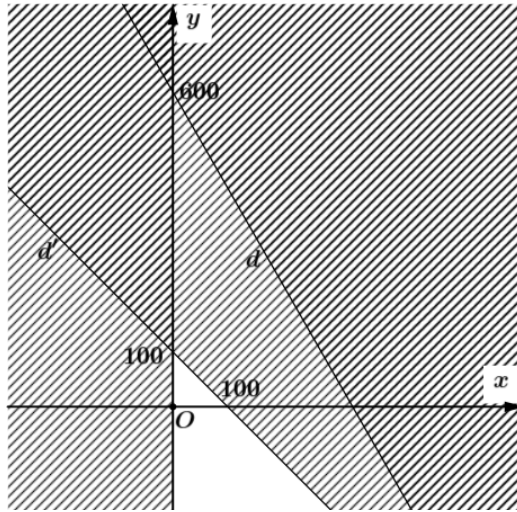
d) Xác định miền nghiệm D_1 của bất phương trình $7x + 4y \leq 2400$ và gạch bỏ miền còn lại.

Vẽ đường thẳng $d: 7x + 4y = 2400$.

Vì $7 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 < 2400$ nên tọa độ điểm $O(0; 0)$ thỏa mãn bất phương trình $7x + 4y \leq 2400$.

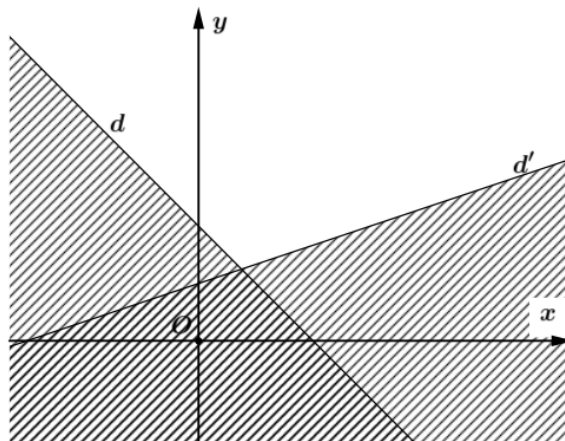
Do đó miền nghiệm D_1 của bất phương trình $7x + 4y \leq 2400$ là nửa mặt phẳng bờ d chứa gốc tọa độ O . Tương tự miền nghiệm D_2 của bất phương trình $x + y \leq 100$ là nửa mặt phẳng bờ d' chứa gốc tọa độ O . Tương tự miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt

phẳng bờ Oy chứa điểm $(1;0)$. Khi đó miền không bị gạch chính là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ. Vậy miền nghiệm của hệ là miền không bị gạch trong hình.



e) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ các đường thẳng $d : x + y - 2 = 0$ và $d' : x - 3y + 3 = 0$.

Xét điểm $O(0;0)$ ta thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình $x + y - 2 \geq 0$ và $x - 3y + 3 \leq 0$ do đó miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không bị gạch sọc trên hình vẽ cả hai đường thẳng d và d' .

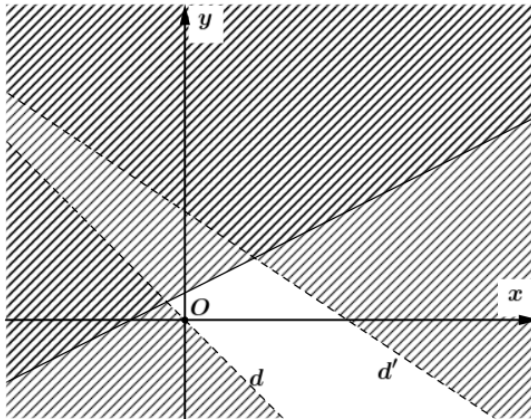


b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ ba đường thẳng lần lượt là $d : x + y = 0$, $d' : -2x - 3y + 6 = 0$ và $d'' : x - 2y + 1 = 0$. Xét điểm $O(0;0)$ thì ta thấy $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình $-2x - 3y + 6 > 0$ và $x - 2y + 1 \geq 0$.

Do đó $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $-2x - 3y + 6 > 0$ và $x - 2y + 1 \geq 0$.

Xét điểm $M(1;0)$ ta thấy $(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x + y > 0$ do đó điểm $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm bất phương trình $x + y > 0$.

Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không bị gạch sọc trên hình vẽ kể cả đường thẳng d'' .

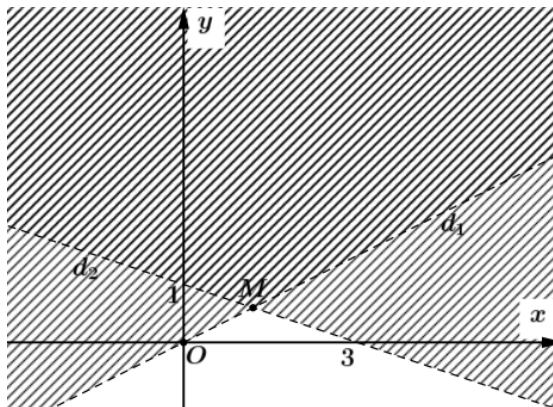


Bài tập 2: Biểu diễn hình học tập nghiệm của mỗi hệ bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ:

- a)
$$\begin{cases} x - 2y > 0 \\ x + 3y < 3 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} -x + 2y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} 3x - y \geq -1 \\ 2x + y \leq 6 \\ x + 3y \geq 3 \end{cases}$$
- d)
$$\begin{cases} x + y > 0 \\ 2x - 3y + 6 > 0 \\ x - 2y + 1 \geq 0 \end{cases}$$
- e)
$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
- f)
$$(x - y)(x^3 + y^3) \geq 0$$

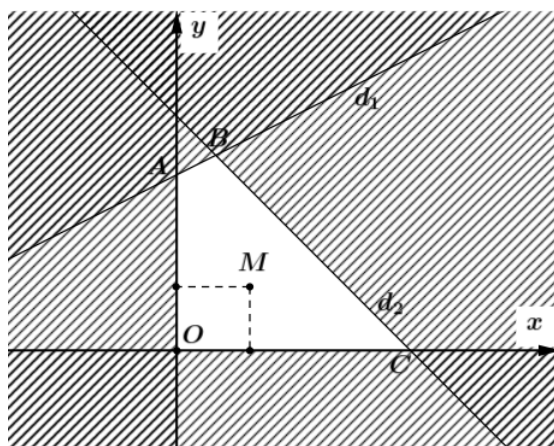
Lời giải

a) Vẽ các đường thẳng $d_1: x - 2y = 0$; $d_2: x + 3y = 3$. Điểm $M(1; 0)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta gạch sọc các nửa mặt phẳng bờ $d_1; d_2$ không chứa điểm M . Miền không bị gạch sọc (miền chứa điểm M), không tính các bờ $d_1; d_2$ (hình vẽ) là miền nghiệm của hệ đã cho.



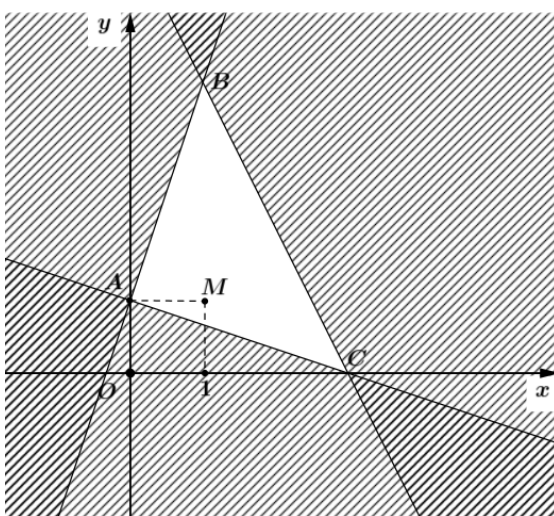
b) Vẽ các đường thẳng $d_1: -x + 2y = 6$; $d_2: x + y = 4$; trục $Oy: x = 0$; trục $Ox: y = 0$.

Điểm $M(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta gạch sọc các nửa mặt phẳng bờ $d_1; d_2; Ox; Oy$ không chứa điểm M . Miền không bị gạch sọc là hình tứ giác $OABC$ kể cả bốn cạnh OA, AB, BC, CO trong hình vẽ dưới là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



c) Vẽ các đường thẳng $d_1: 3x - y = -1$; $d_2: 2x + y = 6$; $d_3: x + 3y = 3$

Điểm $M(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta gạch sọc các nửa mặt phẳng bờ $d_1; d_2; d_3$ không chứa điểm M . Miền không bị gạch sọc là hình tam giác ABC không tính cạnh AC trong hình vẽ dưới là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



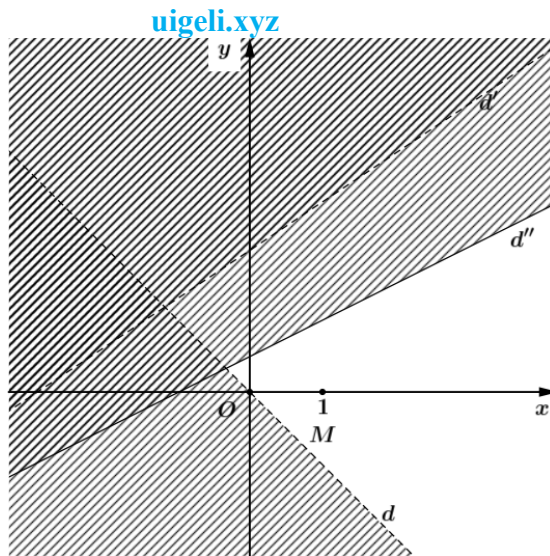
d) Vẽ các đường thẳng $d: x + y = 0$, $d': 2x - 3y + 6 = 0$ và $d'': x - 2y + 1 = 0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

Xét điểm $O(0;0)$ ta có $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình $2x - 3y + 6 > 0$ và $x - 2y + 1 \geq 0$.

Do đó $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của các bất phương trình $2x - 3y + 6 > 0$ và $x - 2y + 1 \geq 0$.

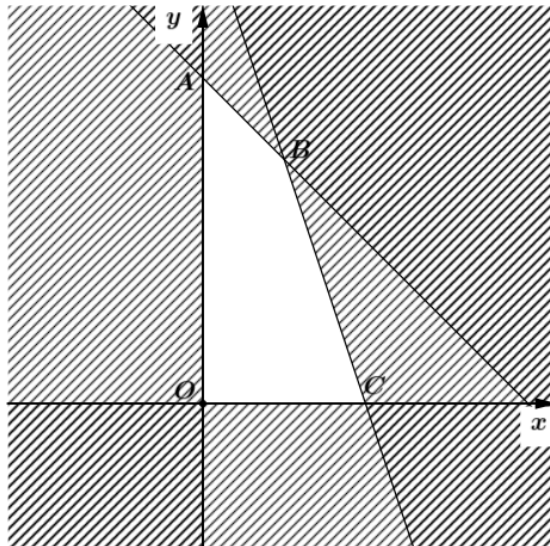
Xét điểm $M(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x + y > 0$ do đó điểm $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $x + y > 0$.

Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không bị gạch sọc trên hình vẽ kể cả đường thẳng d'' .



e) Biểu diễn từng miền nghiệm của mỗi bất phương trình trên mặt phẳng Oxy

Miền không gạch chéo (miền tứ giác $OABC$, bao gồm cả các cạnh) trong hình vẽ dưới đây là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



f) Ta có: $(x-y)(x^3+y^3) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases} \quad (1) \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x-y \leq 0 \\ x+y \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

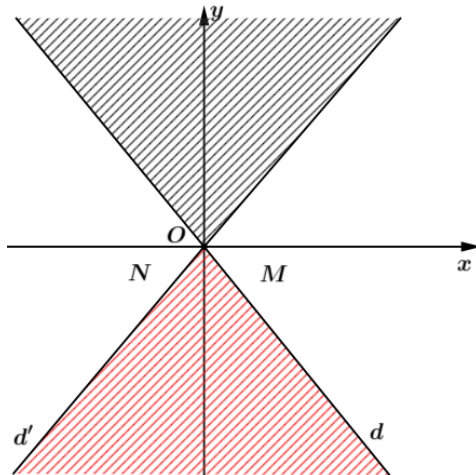
Như vậy miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là gồm hai miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) và (2) .

Vẽ các đường thẳng $d: x+y=0$ và $d': x-y=0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

Xét điểm $M(1;0)$ ta có $(1;0)$ là nghiệm của các bất phương trình của hệ (1) do đó $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) .

Xét điểm $N(-1;0)$ ta có $(-1;0)$ là nghiệm của các bất phương trình của hệ (2) do đó $N(-1;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình (2) .

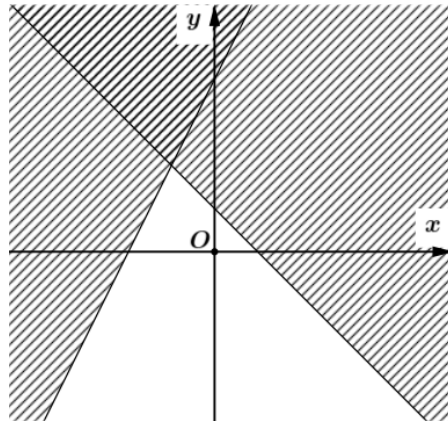
Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được gạch sọc trên hình vẽ kẻ cả hai đường thẳng d và d' .



B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Miền không bị gạch chéo (kể cả các đường thẳng d_1 và d_2) là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào?



A. $\begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ 2x - y + 4 \leq 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ 2x - y + 4 \geq 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + y - 1 \leq 0 \\ 2x - y + 4 \geq 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + y - 1 \leq 0 \\ 2x - y + 4 \leq 0 \end{cases}$

Lời giải

Điểm O nằm trong miền nghiệm của hệ, ta có $\begin{cases} 0 + 0 - 1 \leq 0 \\ 2 \cdot 0 - 0 + 4 \geq 0 \end{cases}$ nên hệ cần tìm $\begin{cases} x + y - 1 \leq 0 \\ 2x - y + 4 \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x - 4y + 12 \geq 0 \\ x + y - 5 \geq 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$$

Câu 2: Miền nghiệm của hệ bất phương trình: là miền chứa điểm nào trong các điểm sau?

A. $M(1; -3)$.

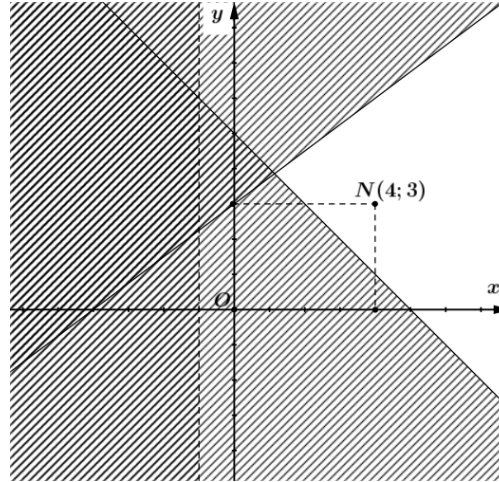
B. $N(4; 3)$.

C. $P(-1; 5)$.

D. $Q(-2; -3)$.

Lời giải

Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình như hình vẽ:



Suy ra miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền chứa điểm $N(4; 3)$.

Câu 3: Điểm $O(0; 0)$ không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình nào dưới đây?

A. $\begin{cases} x + 3y - 6 < 0 \\ 2x + y + 4 > 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + 3y \geq 0 \\ 2x + y - 4 < 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + 3y < 0 \\ 2x + y + 4 > 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + 3y - 6 < 0 \\ 2x + y + 4 \geq 0 \end{cases}$

Lời giải

Với điểm $O(0; 0)$, lần lượt thay $x = 0$, $y = 0$ vào từng hệ bất phương trình đã cho, ta được:

Phương án A: $\begin{cases} -6 < 0 \\ 4 > 0 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Phương án B: $\begin{cases} 0 \geq 0 \\ -4 < 0 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Phương án C: $\begin{cases} 0 < 0 \\ 4 > 0 \end{cases}$ (Không thỏa mãn vì $0 < 0$ là sai).

Phương án D: $\begin{cases} -6 < 0 \\ 4 \geq 0 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Câu 4: Miền biểu diễn nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} y \geq -2 \\ x \geq 2 \\ 2x + y \leq 8 \end{cases}$ là một miền đa giác. Tính diện tích S của đa giác đó.

A. $S = 25$.

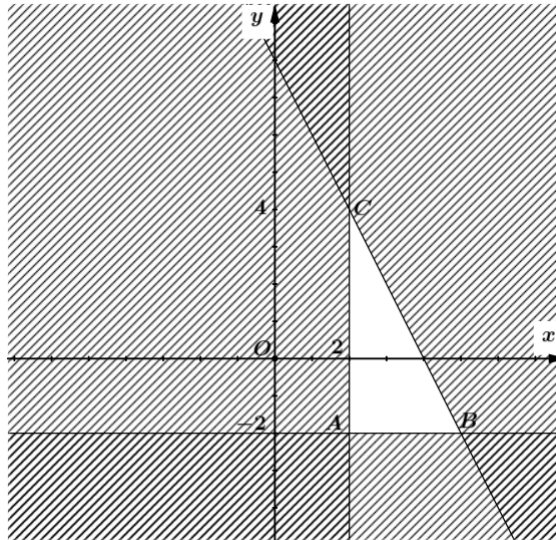
B. $S = 4$.

C. $S = 9$.

D. $S = 18$.

Lời giải

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tam giác ABC kể cả các cạnh AB, BC, CA trong đó $A(2; -2), B(5; -2)$ và $C(2; 4)$.



Để thấy $\triangle ABC$ vuông tại A do đó ta có: $S = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$.

Câu 5: Trong mặt phẳng Oxy , miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau trên mặt

phẳng tọa độ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y > 0 \\ x + y \leq 100 \\ 2x + y < 120 \end{cases}$ là hình gì?

A. Tứ giác.

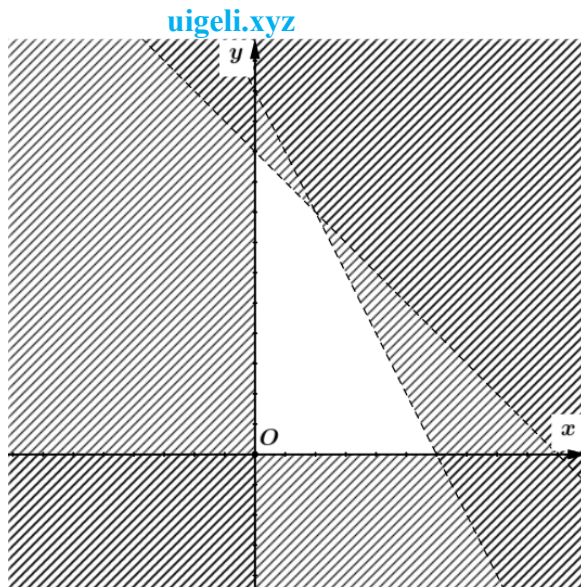
B. Tam giác.

C. Hình vuông.

D. Hình bình hành.

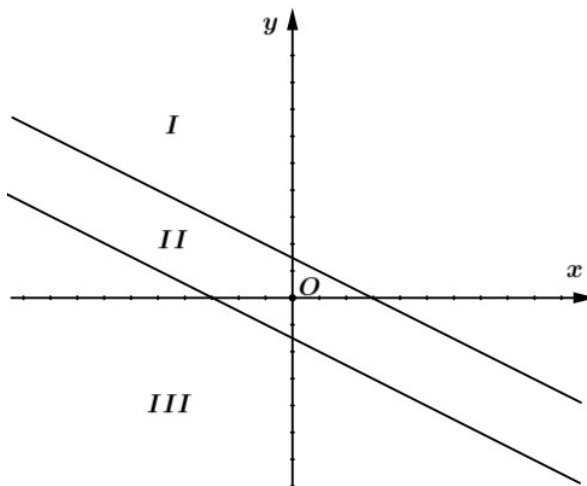
Lời giải

Đặt $d_1 : x = 0; d_2 : y = 0; d_3 : x + y - 100 = 0; d_4 : 2x + y - 120 = 0$.



Hình biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là một tứ giác.

Câu 6: Hai đường thẳng $d: x + 2y + 3 = 0$ và $d': x + 2y - 3 = 0$ chia mặt phẳng tọa độ thành 3 miền **I**, **II**, **III** có bờ là 2 đường thẳng d và d' không kể các điểm nằm trên 2 đường thẳng đó:



Xác định miền nghiệm của bất phương trình $|x + 2y| < 3$.

A. Miền I và III.

B. Miền II.

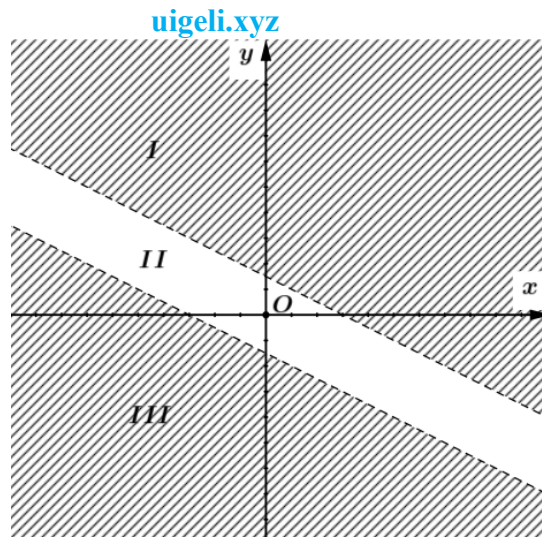
C. Miền I.

D. Miền III.

Lời giải

$$|x + 2y| < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y < 3 & (1) \\ x + 2y > -3 & (2) \end{cases}$$

Xét bất phương trình:



Xác định miền nghiệm của bất phương trình (1): $x + 2y < 3$

Lấy $O(0;0) \notin (d')$. Thay tọa độ điểm O và bất phương trình (1) ta thấy: $0 + 2.0 < 3$, đúng

Suy ra điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình (1):

Xác định miền nghiệm của bất phương trình (2): $x + 2y > -3$

Lấy $O(0;0) \notin (d)$. Thay tọa độ điểm O và bất phương trình (2) ta thấy: $0 + 2.0 > -3$, đúng

Suy ra điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình (2)

Vậy miền nghiệm của bất phương trình đã cho là phần không gạch chéo trên hình (miền II).

Câu 7: Gọi (S) là tập hợp các điểm $M(x;y)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy với $(x;y)$ thỏa mãn hệ bất

phương trình:
$$\begin{cases} x - y - 1 \leq 0 \\ x + 4y + 9 \geq 0 \\ x - 2y + 3 \geq 0 \end{cases}$$
. Tìm điểm $M(x;y)$ trong miền (S) sao cho biểu thức $T = 3x - 2y - 4$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $(5;4)$.

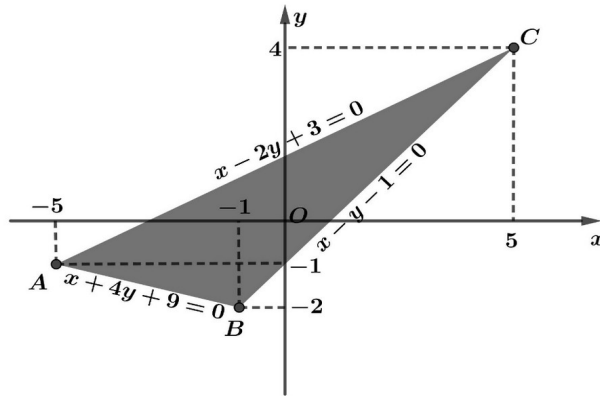
B. $(-1;-2)$.

C. $(-5;-1)$.

D. $(-2;5)$.

Lời giải

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tam giác ABC gồm cả biên và phần trong của tam giác (phần tô đậm trong hình)



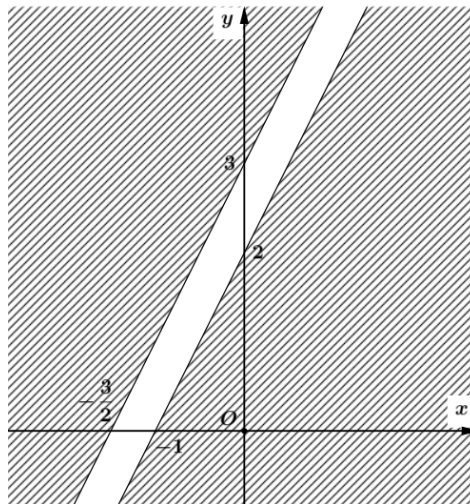
Tọa độ $A(-5; -1)$ là giao của hai đường thẳng: $\begin{cases} x + 4y + 9 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$, $B(-1; -2)$ là giao của hai đường thẳng: $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + 4y + 9 = 0 \end{cases}$, $C(5; 4)$ là giao của hai đường thẳng: $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$

Thay tọa độ điểm $A(-5; -1)$ vào biểu thức T ta được $T = -15 + 2 - 4 = -17$.

Thay tọa độ điểm $B(-1; -2)$ vào biểu thức T ta được $T = -3 + 4 - 4 = -3$.

Thay tọa độ điểm $C(5; 4)$ vào biểu thức T ta được $T = 15 - 8 - 4 = 3$.

Câu 8: Hình sau đây biểu diễn cho hệ bất phương trình nào? (miền nghiệm là phần tô màu)



A. $\begin{cases} x - y \leq 3 \\ x + 2y \geq 5x + 4 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 2x + 4y \geq 10x + 8 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 2x - y + 2 \leq 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} -2x + y \leq 3 \\ 2x + 4y \geq 10x + 8 \end{cases}$

Lời giải

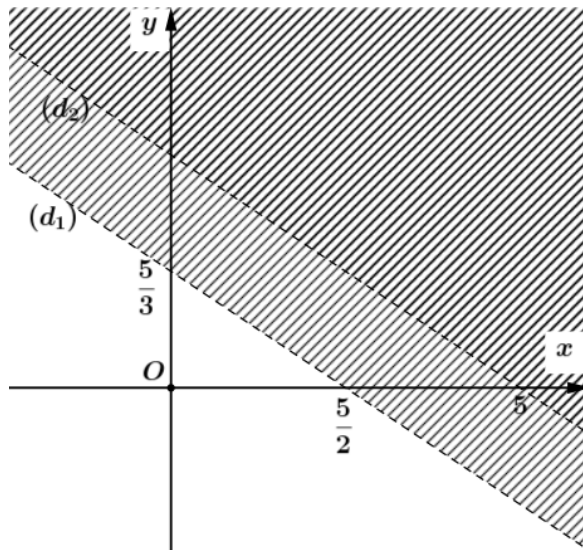
Điểm $O(0; 0)$ không thuộc miền nghiệm của hệ.

- Câu 9:** Cho hệ
$$\begin{cases} 2x + 3y < 5 & (1) \\ x + \frac{3}{2}y < 5 & (2) \end{cases}$$
. Gọi S_1 là tập nghiệm của bất phương trình (1), S_2 là tập nghiệm của bất phương trình (2) và S là tập nghiệm của hệ thì
- A.** $S_1 \subset S_2$ **B.** $S_2 \subset S_1$ **C.** $S_2 = S$ **D.** $S_1 \neq S$

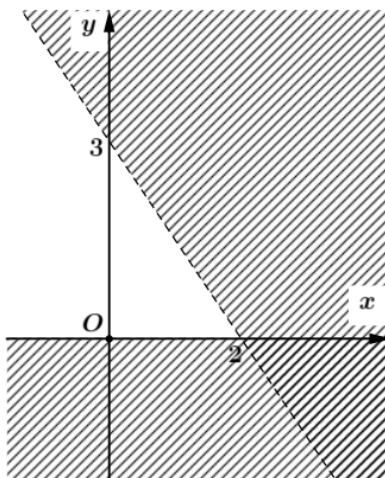
Lời giải

Trước hết, ta vẽ hai đường thẳng: $(d_1): 2x + 3y = 5$ và $(d_2): x + \frac{3}{2}y = 5$.

Ta thấy $(0; 0)$ là nghiệm của cả hai bất phương trình. Điều đó có nghĩa gốc tọa độ thuộc cả hai miền nghiệm của hai bất phương trình. Say khi gạch bỏ các miền không thích hợp, miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ.



- Câu 10:** Phần không gạch chéo ở hình sau đây là biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong bốn hệ A, B, C, D?

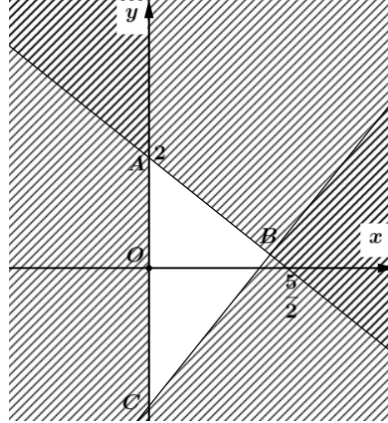


- A.** $\begin{cases} y > 0 \\ 3x + 2y < 6 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} y > 0 \\ 3x + 2y < -6 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x > 0 \\ 3x + 2y < 6 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x > 0 \\ 3x + 2y > -6 \end{cases}$

Lời giải

Dựa vào hình vẽ ta thấy đồ thị gồm hai đường thẳng $(d_1): y = 0$ và $(d_2): 3x + 2y = 6$. Miền nghiệm gồm phần y nhận giá trị dương mà $(0; 0)$ thỏa mãn bất phương trình $3x + 2y < 6$.

Câu 11: Miền tam giác ABC kẻ cả ba cạnh sau đây là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong bốn hệ bất phương trình dưới đây?



- A. $\begin{cases} y \geq 0 \\ 5x - 4y \geq 10 \\ 5x + 4y \leq 10 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x > 0 \\ 5x - 4y \leq 10 \\ 4x + 5y \leq 10 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - 5y \leq 10 \\ 5x + 4y \leq 10 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x \geq 0 \\ 5x - 4y \leq 10 \\ 4x + 5y \leq 10 \end{cases}$

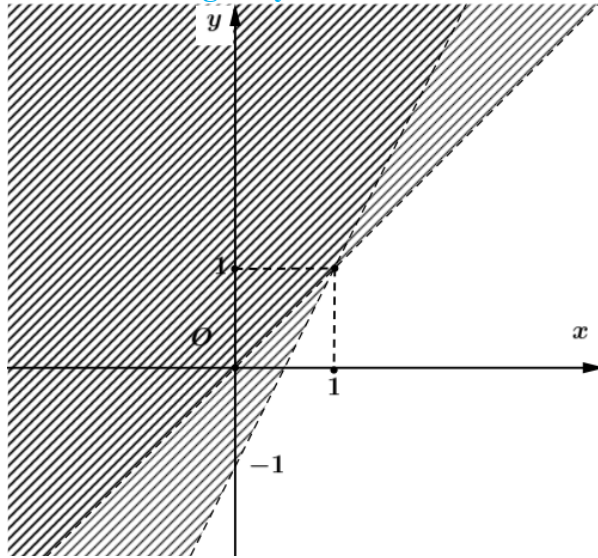
Lời giải

Cạnh AC có phương trình $x = 0$ và cạnh AC nằm trong miền nghiệm nên $x \geq 0$ là một bất phương trình của hệ.

Cạnh AB qua hai điểm $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$ và $(0; 2)$ nên có phương trình: $\frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow 4x + 5y = 10$

Vậy hệ bất phương trình cần tìm là $\begin{cases} x \geq 0 \\ 5x - 4y \leq 10 \\ 4x + 5y \leq 10 \end{cases}$

Câu 12: Phần không bị gạch chéo trong hình vẽ dưới đây (không chứa biên), biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau?



A. $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 2x - y \geq 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x - y > 0 \\ 2x - y > 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - y < 0 \\ 2x - y > 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x - y < 0 \\ 2x - y < 1 \end{cases}$

Lời giải

Chọn điểm $M(1;0)$ thử vào các hệ bất phương trình.

Xét đáp án B ta có $\begin{cases} 1 - 0 > 0 \\ 2 \cdot 1 - 0 > 1 \end{cases}$ đúng và miền nghiệm không chứa biên.

Câu 13: Miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x + 2y - 100 \leq 0 \\ 2x + y - 80 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

là một đa giác có diện tích bằng

A. 1200.

B. 1300.

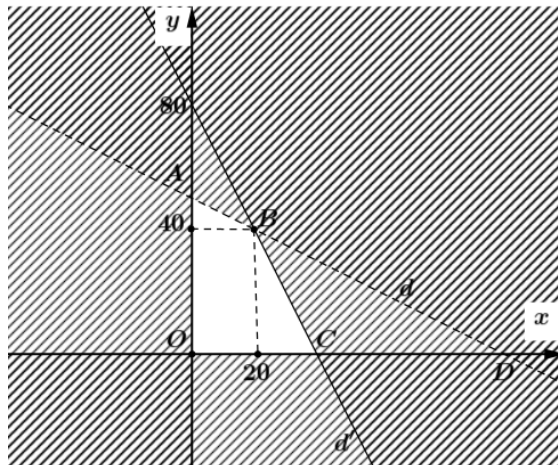
C. 1100.

D. 1400.

Lời giải

Ta biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình ta được hình tứ giác $OABC$ như hình vẽ trong đó ta có: $d: x + 2y - 100 = 0$; $d': 2x + y - 80 = 0$, $d \cap Oy = A(0; 50)$; $d' \cap Ox = C(40; 0)$

$d \cap d' = B(20; 40)$; $d \cap Ox = D(100; 0)$



Ta có $S_{OABC} = S_{OAB} - S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 100 - \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 40 = 1300$

Câu 14: Một công ty trong một đợt quảng cáo và bán khuyến mãi hàng hóa (1 sản phẩm mới của công ty) cần thuê xe để chở 140 người và 9 tấn hàng. Nơi thuê chỉ có 2 loại xe A và B. Trong đó xe loại A có 10 chiếc, xe loại B có 9 chiếc. Xe A chỉ chở tối đa 20 người và 0,6 tấn hàng, xe B chở tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng. Hệ bất phương trình nào dưới đây dùng để xác định số xe A, xe B cần thuê.

A. $\begin{cases} 0 < x \leq 10 \\ 0 < y \leq 9 \\ 20x + 10y \geq 140 \\ 0.6x + 1.5y \leq 9 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 0 < x < 10 \\ 0 < y < 9 \\ 20x + 10y < 140 \\ 0.6x + 1.5y \geq 9 \end{cases}$ C. $\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 20x + 10y \leq 140 \\ 0.6x + 1.5y \leq 9 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 20x + 10y \geq 140 \\ 0.6x + 1.5y \geq 9 \end{cases}$

Lời giải

Gọi x là số xe A cần thuê, y là số xe B cần thuê.

Điều kiện: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases}$

Số người cần chở là: $20x + 10y \geq 140$

Số hàng cần chở là: $0.6x + 1.5y \geq 9$

Ta cần tìm x, y thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 20x + 10y \geq 140 \\ 0.6x + 1.5y \geq 9 \end{cases}$

Câu 15: Một hộ nông dân định trồng đậu và cà phê trên diện tích 8 ha với tổng số công không vượt quá 180. Nếu trồng đậu thì cần 20 công, nếu trồng cà phê thì cần 30 công. Hệ bất phương trình nào dưới đây dùng để xác định diện tích trồng đậu và trồng cà phê?

A. $\begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \geq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + 3y < 18 \\ x > 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x + y < 8 \\ 2x + y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Lời giải

Gọi x là diện tích trồng đậu, y là diện tích trồng cà phê. Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 8 \end{cases}$

Số công cần dùng là: $20x + 30y \leq 180$

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ta cần tìm x, y thoả mãn hệ:

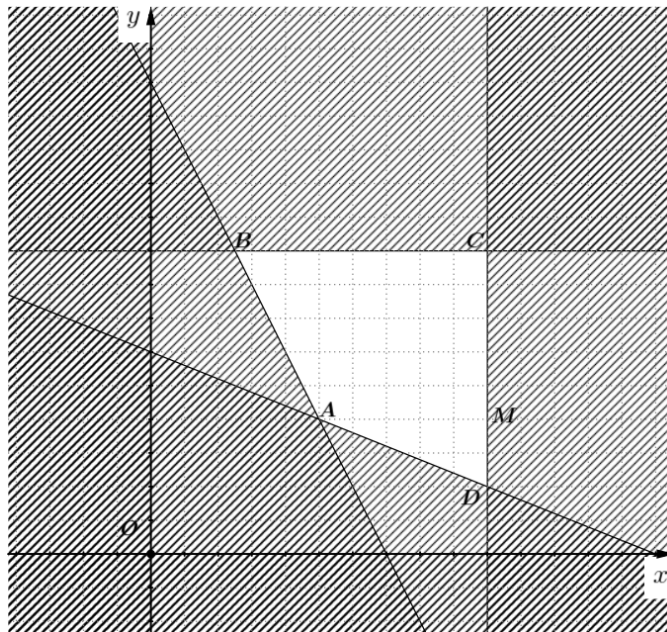
PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \leq 14 \\ 2x + 5y \leq 30 \end{cases}$$

Câu 1: Cho hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Điểm $K(7;7)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình
- Miền nghiệm của hệ bất phương trình chứa gốc toạ độ
- Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác
- Diện tích miền nghiệm của hệ bất phương trình là một số nguyên

Lời giải



- Đúng: Điểm $K(7;7)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình
- Sai: Miền nghiệm của hệ bất phương trình chứa gốc toạ độ
- Đúng: Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác
- Sai: Diện tích miền nghiệm của hệ bất phương trình không là số nguyên

$$\begin{cases} x + 2y - 10 \leq 0 \\ 2x + y - 8 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ta có miền nghiệm của hệ là miền tứ giác $ABCD$.

Với $A(5;4), B\left(\frac{5}{2};9\right), C(10;9), D(10;2)$

Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên DC, BC ta có $M(10;4), N(5;9)$

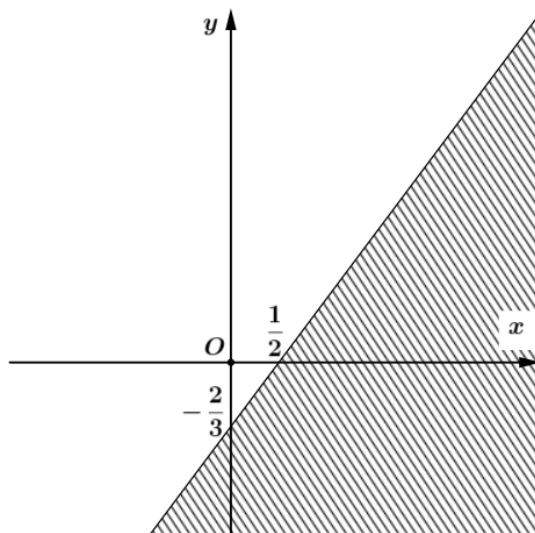
Ta có $S_{ABCD} = S_{AMCN} + S_{ABN} + S_{ADM} = 5.5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 2.5 = \frac{145}{4}$

Câu 2: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - \frac{3}{2}y \geq 1 \\ 4x - 3y \leq 2 \end{cases}$ có tập nghiệm S . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\left(-\frac{1}{4}; -1\right) \notin S$

b) $S = \{(x; y) | 4x - 3y = 2\}$

c) Miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần không bị gạch chéo như hình vẽ dưới đây:



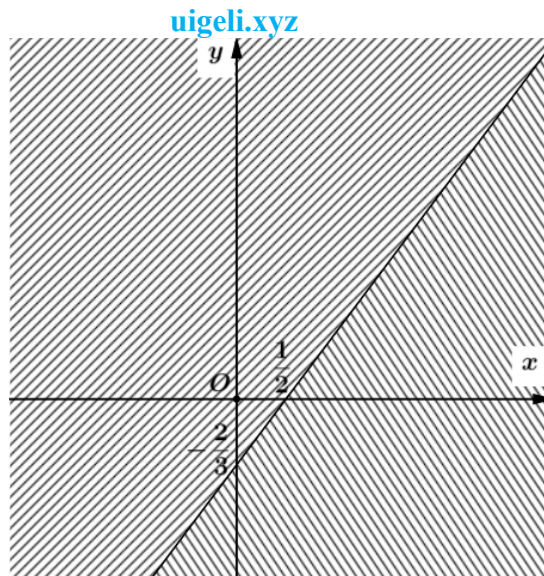
d) Biểu diễn hình học của S là nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ và kẻ cả bờ d , với d là đường thẳng $4x - 3y = 2$.

Lời giải

a) Sai: $\left(-\frac{1}{4}; -1\right) \in S$

b) Đúng: $S = \{(x; y) | 4x - 3y = 2\}$

c) Sai: Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình.



Trước hết, ta vẽ hai đường thẳng: $(d_1): 2x - \frac{3}{2}y = 1$; $(d_2): 4x - 3y = 2$

Thử trực tiếp ta thấy $(0;0)$ là nghiệm của phương trình (2) nhưng không phải là nghiệm của phương trình (1) .

d) Sai: Sau khi gạch bỏ các miền không thích hợp, tập hợp nghiệm của bất phương trình chính là các điểm thuộc đường thẳng $(d): 4x - 3y = 2$.

Câu 3: Trong một cuộc thi pha chế, hai đội A, B được sử dụng tối đa $24g$ hương liệu, 9 lít nước và $210g$ đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần $30g$ đường, 1 lít nước và $1g$ hương liệu; pha chế 1 lít nước táo cần $10g$ đường, 1 lít nước và $4g$ hương liệu. Gọi x, y lần lượt là số lít nước cam và nước táo mà mỗi đội cần pha chế

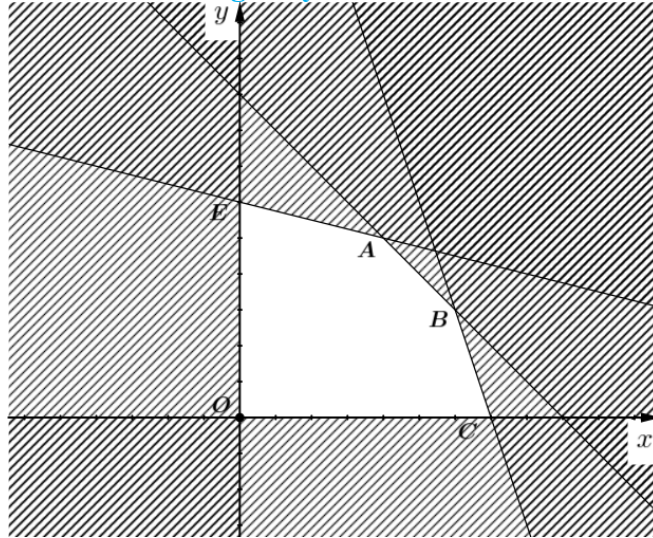
$$\begin{cases} 30x + 10y > 210 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

a) Hệ phương trình thoả mãn các yêu cầu đề bài là

b) Miền nghiệm của hệ bất phương trình chứa gốc toạ độ $O(0;0)$

c) Điểm $M(4;3)$ không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình

d) Biểu diễn miền nghiệm của hệ phương trình là phần không bị gạch chéo như hình dưới đây:



Lời giải

a) Sai: Để pha chế x lít nước cam cần $30x$ g đường, x lít nước và x g hương liệu.
 Để pha chế y lít nước táo cần $10y$ g đường, y lít nước và $4y$ g hương liệu.

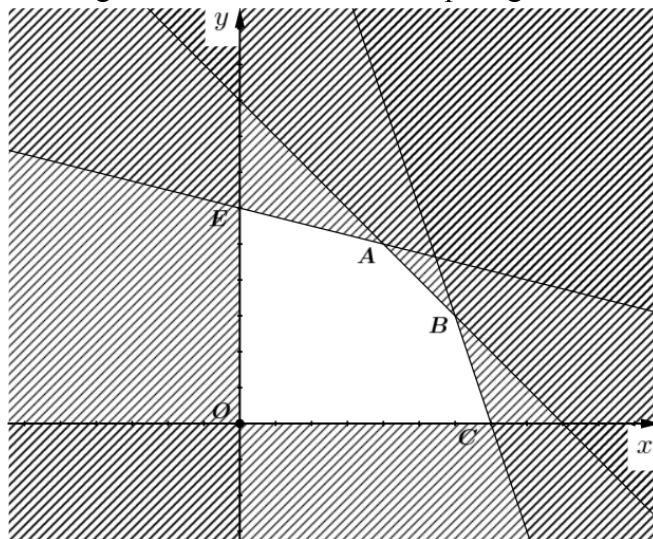
$$\begin{cases} 30x + 10y \leq 210 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Theo bài ra ta có hệ bất phương trình:

b) Đúng: Miền nghiệm của hệ bất phương trình chứa gốc tọa độ $O(0;0)$

c) Sai: Điểm $M(4;3)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình

d) Đúng: Ta biểu diễn miền nghiệm của hệ $(*)$ trên mặt phẳng tọa độ như sau:



Miền nghiệm là ngũ giác $ABCDE$.

Câu 4: Bà Lan được tư vấn bổ sung chế độ ăn kiêng đặc biệt bằng cách sử dụng hai loại thực phẩm khác nhau là X và Y . Mỗi gói thực phẩm X chứa 20 đơn vị canxi, 20 đơn vị sắt và 10 đơn vị vitamin B . Mỗi gói thực phẩm Y chứa 20 đơn vị canxi, 10 đơn vị sắt và 20 đơn vị vitamin B . Yêu cầu hàng ngày tối thiểu trong chế độ ăn uống là 240 đơn vị canxi, 160 đơn vị sắt và 140 đơn vị vitamin B . Mỗi ngày không được dùng quá 12 gói mỗi loại. Khi đó:

a) Hệ bất phương mô tả số gói thực phẩm X và thực phẩm Y mà bà Lan cần dùng mỗi ngày trong chế độ ăn kiêng để đáp ứng đủ nhu cầu cần thiết đối với canxi, sắt và vitamin B là

$$\begin{cases} x + y \geq 12 \\ 2x + y \geq 16 \\ x + 2y \geq 14 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 12 \end{cases}$$

b) Miền nghiệm của hệ bất phương mô tả số gói thực phẩm X và thực phẩm Y mà bà Lan cần dùng mỗi ngày trong chế độ ăn kiêng để đáp ứng đủ nhu cầu cần thiết đối với canxi, sắt và vitamin B là một ngũ giác

c) Biết 1 gói thực phẩm loại X giá 20000 đồng, 1 gói thực phẩm loại Y giá 25000 đồng. Bà Lan cần dùng 10 gói thực phẩm loại X và 2 gói thực phẩm loại Y để chi phí mua là ít nhất

d) Điểm $(10;8)$ không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương mô tả số gói thực phẩm X và thực phẩm Y mà bà Lan cần dùng mỗi ngày trong chế độ ăn kiêng để đáp ứng đủ nhu cầu cần thiết đối với canxi, sắt và vitamin B

Lời giải

a) Đúng: Gọi x, y lần lượt là số gói thực phẩm loại X , loại Y mà bà Lan cần dùng trong một ngày. Ta có: $0 \leq x \leq 12, 0 \leq y \leq 12$.

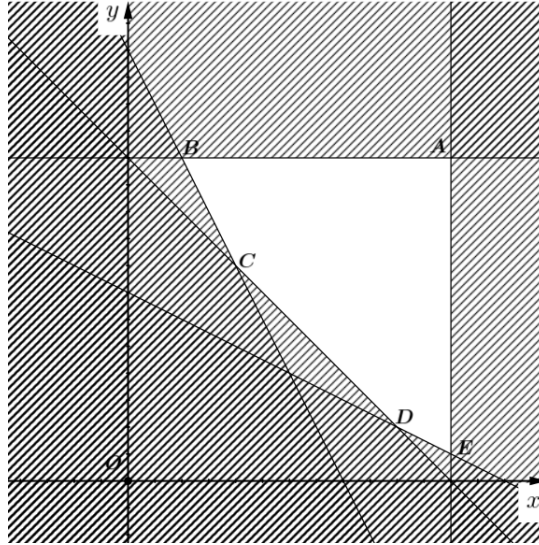
Số đơn vị canxi được cung cấp là: $20x + 20y$ ta có: $20x + 20y \geq 240$ hay $x + y \geq 12$.

Số đơn vị sắt được cung cấp là: $20x + 10y$ ta có: $20x + 10y \geq 160$ hay $2x + y \geq 16$.

Số đơn vị vitamin B được cung cấp là: $10x + 20y$ ta có: $10x + 20y \geq 140$ hay $x + 2y \geq 14$.

$$\begin{cases} x + y \geq 12 \\ 2x + y \geq 16 \\ x + 2y \geq 14 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 12 \end{cases}$$

Ta có hệ bất phương trình:



b) Đúng: Miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là miền ngũ giác $ABCDE$ với $A(12;12)$, $B(2;12)$, $C(4;8)$, $D(10;2)$, $E(12;1)$

c) Đúng: Số tiền bà Lan dùng để mua các gói thực phẩm X, Y trong một ngày là: $T = 20x + 25y$ (nghìn đồng).

Tính giá trị của T tại các cặp số $(x; y)$ là tọa độ các đỉnh trên rồi so sánh các giá trị đó, ta được T đạt giá trị nhỏ nhất bằng 250 nghìn đồng tại $x = 10; y = 2$.

Vậy để đáp ứng đủ nhu cầu cần thiết đối với canxi, sắt và vitamin B nhưng với chi phí thấp nhất thì mỗi ngày bà Lan cần dùng 10 gói thực phẩm loại X và 2 gói thực phẩm loại Y .

d) Sai: Điểm $(10; 8)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương mô tả số gói thực phẩm X và thực phẩm Y mà bà Lan cần dùng mỗi ngày trong chế độ ăn kiêng để đáp ứng đủ nhu cầu cần thiết đối với canxi, sắt và vitamin B .

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Dạng 3: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và các bài toán thực tế

Phương pháp: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T(x; y) = ax + by$ với $(x; y)$ nghiệm đúng một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho trước.

- **Bước 1:** Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Kết quả thường được miền nghiệm S là đa giác.
- **Bước 2:** Tính giá trị của F tương ứng với $(x; y)$ là tọa độ của các đỉnh của đa giác.
- **Bước 3:** Kết luận:
 - ♣ Giá trị lớn nhất của F là số lớn nhất trong các giá trị tìm được.
 - ♣ Giá trị nhỏ nhất của F là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 gam đường để pha chế nước cam và nước táo.

- Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường, 1 lít nước và 1 g hương liệu;
- Để pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu.

Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để đạt được số điểm thưởng cao nhất?

Lời giải

Giả sử x, y lần lượt là số lít nước cam và số lít nước táo mà mỗi đội cần pha chế, $x, y \in \mathbb{Q}$

Suy ra $30x + 10y$ là số gam đường cần dùng

$x + y$ là số lít nước cần dùng

$x + 4y$ là số gam hương liệu cần dùng.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 30x + 10y \leq 210 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 21 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \end{cases} (*)$$

Theo giả thiết ta có hệ bất phương trình:

Số điểm thưởng nhận được sẽ là $P = 60x + 80y$.

Ta đi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P với x, y thỏa mãn $(*)$.

Vẽ các đường thẳng: $d_1: 3x + y = 21$; $d_2: x + y = 9$; $d_3: x + 4y = 24$ trong mặt phẳng Oxy .

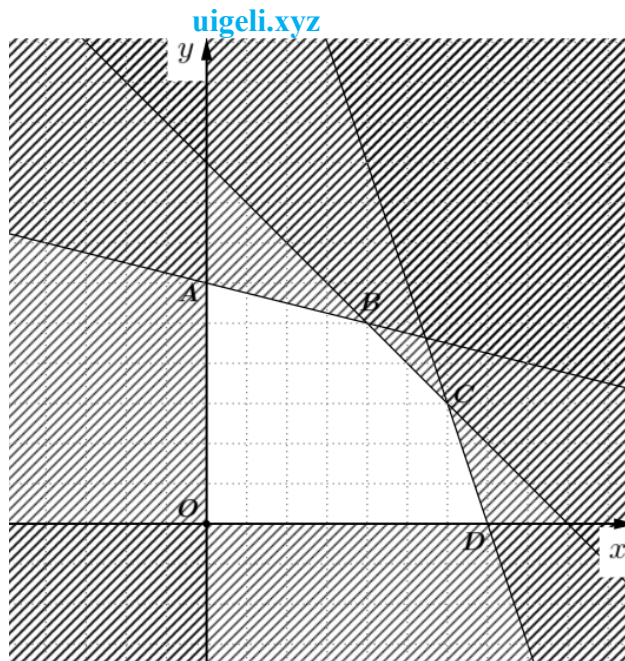
Xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ $(*)$

Miền nghiệm của hệ $(*)$ là miền ngũ giác không bị gạch chéo.

Tìm giao điểm của các cặp đường thẳng ta được các đỉnh của ngũ giác là:

$$O(0;0); A(0;6); B(4;5); C(6;3); D(7;0)$$

Thay tọa độ các điểm này vào biểu thức P ta được: P đạt giá trị lớn nhất tại điểm B , tức là khi $x = 4; y = 5$.



Vậy cần pha chế 4 lít nước cam và 5 lít nước táo để đạt được số điểm thưởng cao nhất.

Bài tập 2: Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm I và II

- Mỗi kg sản phẩm loại I cần 2 kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40 nghìn;
- Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4 kg nguyên liệu và 15 giờ, đem lại mức lời 30 nghìn.

Xưởng có 200 kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

Lời giải

Gọi $x, y (x, y \in \mathbb{R})$ kg lần lượt là khối lượng sản phẩm loại I và loại II cần sản xuất.

Khi đó yêu cầu về tổng số nguyên liệu sử dụng ta có bất phương trình: $2x + 4y \leq 200$.

Yêu cầu tổng số giờ làm việc ta có bất phương trình: $30x + 15y \leq 1200$.

Lợi nhuận thu được là: $L = 40x + 30y$ (nghìn đồng).

Bài toán đưa về tìm x, y thỏa mãn hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 2x + 4y \leq 200 \\ 30x + 15y \leq 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + 2y \leq 100 \\ 2x + y \leq 80 \end{cases}$$

(*) sao cho $L = 40x + 30y$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta vẽ các đường thẳng: $d_1: x + 2y = 100$; $d_2: 2x + y = 80$ trong mặt phẳng Oxy .

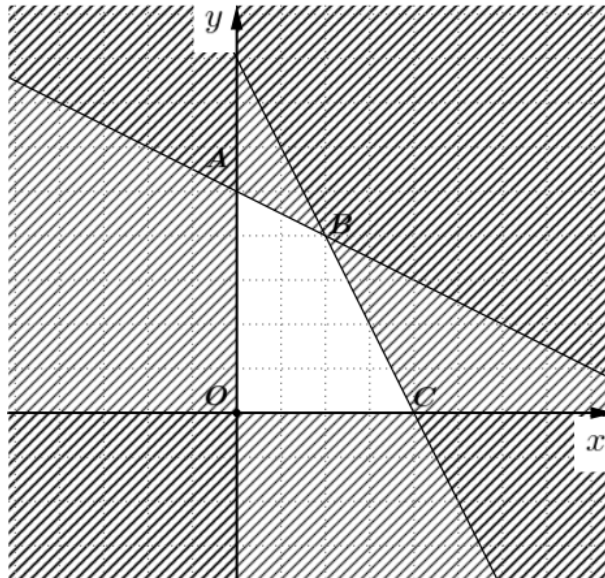
Xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ (*)

Miền nghiệm của hệ (*) là miền không bị gạch chéo.

Tìm giao điểm của các cặp đường thẳng ta được các đỉnh của ngũ giác là:

$$O(0;0); A(20;40); B(40;0); C(0;50)$$

Thay tọa độ các điểm này vào biểu thức L ta được: L đạt giá trị lớn nhất tại điểm A tức là khi $x = 20; y = 40$.



Vậy xưởng nên sản xuất 20 kg loại I và 40 kg loại II để có mức lời cao nhất.

Bài tập 3: Một nhà khoa học đã nghiên cứu về tác động phối hợp của hai loại Vitamin A và B đã thu được kết quả như sau: Trong một ngày, mỗi người cần từ 400 đến 1000 đơn vị Vitamin cả A lẫn B và có thể tiếp nhận không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B . Do tác động phối hợp của hai loại vitamin trên nên mỗi ngày một người sử dụng số đơn vị vitamin B không ít hơn một nửa số đơn vị vitamin A và không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A . Tính số đơn vị vitamin mỗi loại ở trên để một người dùng mỗi ngày sao cho chi phí rẻ nhất, biết rằng mỗi đơn vị vitamin A có giá 9 đồng và mỗi đơn vị vitamin B có giá 7,5 đồng.

Lời giải

Gọi $x, y (x, y \in \mathbb{R})$ lần lượt là số đơn vị vitamin A và B để một người cần dùng trong một ngày.

Trong một ngày, mỗi người cần từ 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B nên ta có:

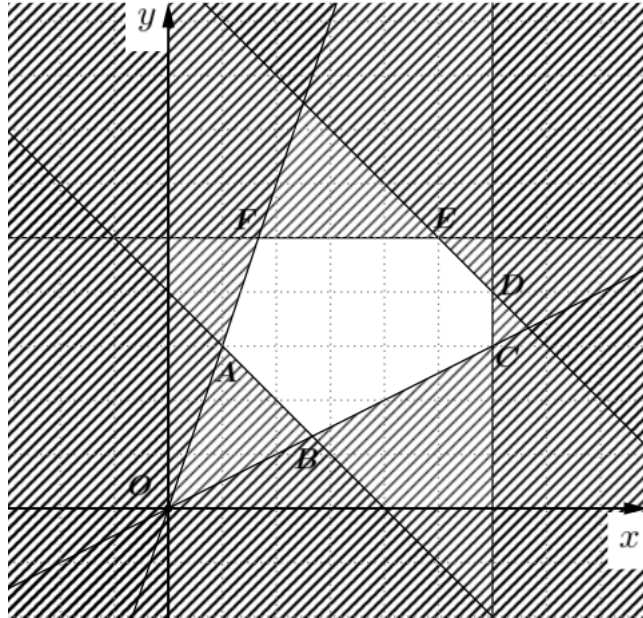
$$400 \leq x + y \leq 1000.$$

Hàng ngày, mỗi người tiếp nhận không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B nên ta có: $x \leq 600, y \leq 500$.

Mỗi ngày một người sử dụng số đơn vị vitamin B không ít hơn một nửa số đơn vị vitamin A và không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A nên ta có: $0,5x \leq y \leq 3x$.

Số tiền cần dùng mỗi ngày là: $T(x, y) = 9x + 7,5y$.

Bài toán trở thành: Tìm x, y thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 600, 0 \leq y \leq 500 \\ 400 \leq x + y \leq 1000 \\ 0,5x \leq y \leq 3x \end{cases} \quad (*)$$
 để $T(x, y) = 9x + 7,5y$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Ta vẽ các đường thẳng: $d_1 : x = 600$; $d_2 : y = 500$; $d_3 : x + y = 400$; $d_4 : x + y = 1000$;

$d_5 : 0,5x - y = 0$; $d_6 : 3x - y = 0$ trong mặt phẳng Oxy .

Xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ (*)

Miền nghiệm của hệ (*) là miền không bị gạch chéo. Tìm giao điểm của các cặp đường thẳng ta được các đỉnh của lục giác là:

$$A(100; 300); B\left(\frac{800}{3}; \frac{400}{3}\right); C(600; 300); D(600; 400); E(500; 500); F\left(\frac{500}{3}; 500\right)$$

Thay tọa độ các điểm này vào biểu thức $T(x; y)$ ta được: $T(x; y)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm A , tức là khi $x = 100; y = 300$.

Vậy cần 100 đơn vị vitamin A , 300 đơn vị vitamin B để một người dùng mỗi ngày sao cho chi phí rẻ nhất.

Bài tập 4: Công ty bao bì Dược cần sản xuất 3 loại hộp giấy: đựng thuốc B₁, đựng cao sao vàng và đựng "Quy sâm đại bổ hoàn". Để sản xuất các loại hộp này, công ty dùng các tấm bìa có kích thước giống nhau. Mỗi tấm bìa có hai cách cắt khác nhau.

- Cách thứ nhất cắt được 3 hộp B₁, một hộp cao Sao vàng và 6 hộp Quy sâm.
- Cách thứ hai cắt được 2 hộp B₁, 3 hộp cao Sao vàng và 1 hộp Quy sâm.

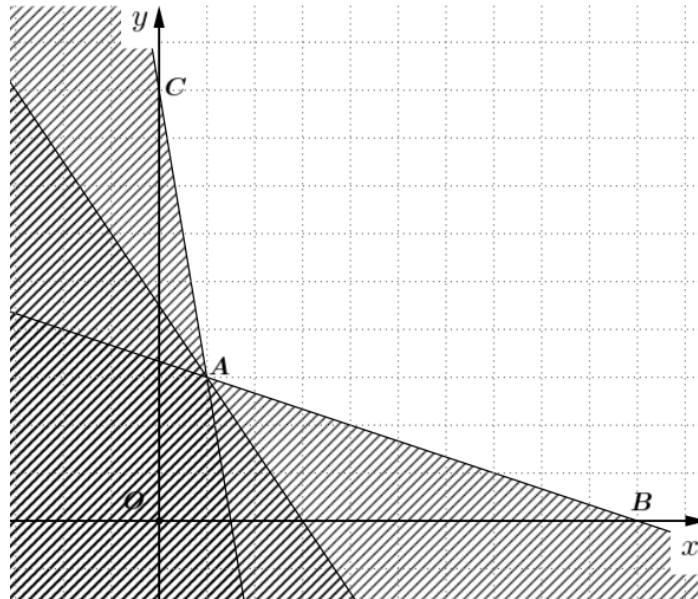
Theo kế hoạch, số hộp Quy sâm ít nhất phải có là 900 hộp, số hộp B₁ tối thiểu là 900 hộp, số hộp cao sao vàng tối thiểu là 1000 hộp. Cần phương án sao cho tổng số tấm bìa phải dùng là ít nhất?

Lời giải

Gọi x, y ($x, y \in \mathbb{N}$) lần lượt là số tấm bìa cắt theo cách thứ nhất, thứ hai.

$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 900 \\ x + 3y \geq 1000 (*) \\ 6x + y \geq 900 \end{cases}$$

Bài toán đưa đến tìm x, y thỏa mãn hệ sao cho $L = x + y$ nhỏ nhất.



Ta vẽ các đường thẳng: $d_1: 3x + 2y = 900$; $d_2: x + 3y = 1000$; $d_3: 6x + y = 900$ trong mặt phẳng Oxy .

Xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ (*)

Miền nghiệm của hệ (*) là miền không bị gạch chéo. Tìm giao điểm của các cặp đường thẳng ta được các đỉnh có tọa độ hữu hạn của miền nghiệm là: $A(100; 300)$; $B(1000; 0)$; $C(0; 900)$.

Thay tọa độ các điểm này vào biểu thức L ta được: L đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm A tức là khi $x = 100$; $y = 300$.

Vậy cần cắt theo cách thứ nhất 100 tấn và cắt theo cách thứ hai 300 tấn thì tổng số bìa phải dùng là ít nhất.

Bài tập 5: Một nhà máy sản xuất, sử dụng ba loại máy đặc chủng để sản xuất sản phẩm A và sản phẩm B trong một chu trình sản xuất. Để sản xuất một tấn sản phẩm A cần 4 triệu đồng người ta sử dụng máy I trong 1 giờ, máy II trong 2 giờ và máy III trong 3 giờ. Để sản xuất ra một tấn sản phẩm B cần được 3 triệu đồng người ta sử dụng máy I trong 6 giờ, máy II trong 3 giờ và máy III trong 2 giờ. Biết rằng máy I chỉ hoạt động không quá 36 giờ, máy hai hoạt động không quá 23 giờ và máy III hoạt động không quá 27 giờ. Hãy lập kế hoạch sản xuất cho nhà máy để tiền lãi được nhiều nhất.

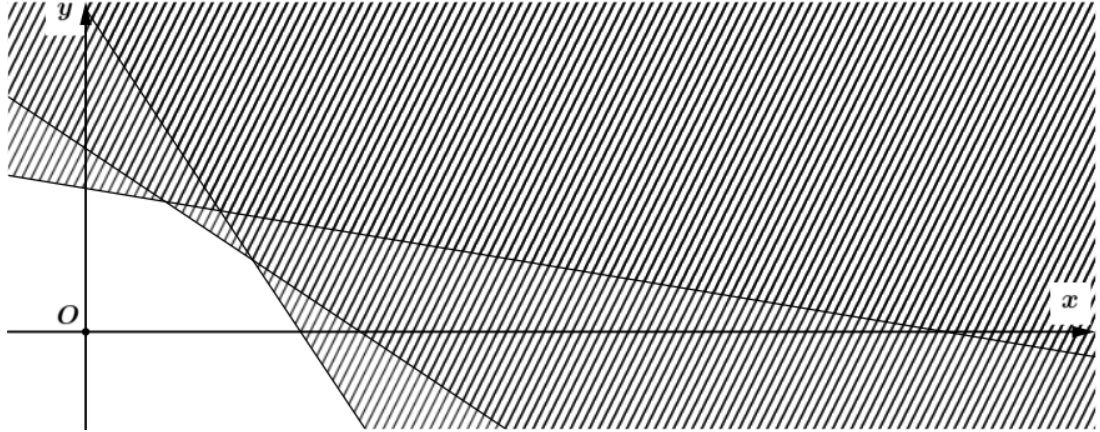
Lời giải

Gọi $x \geq 0, y \geq 0$ (tấn) là sản lượng cần sản xuất của sản phẩm A và sản phẩm B ta có:

$x + 6y$ là thời gian hoạt động của máy I ; $2x + 3y$ là thời gian hoạt động của máy II .

$3x + 2y$ là thời gian hoạt động của máy III ; Số tiền lãi của nhà máy: $T = 4x + 3y$ (triệu đồng).

Bài toán trở thành: Tìm $x \geq 0, y \geq 0$ thỏa mãn
$$\begin{cases} x + 6y \leq 36 \\ 2x + 3y \leq 23 \quad (*) \\ 3x + 2y \leq 27 \end{cases}$$
 để $T = 4x + 3y$ đạt giá trị lớn nhất.



Ta vẽ các đường thẳng: $d_1: x + 6y = 36; d_2: 2x + 3y = 23; d_3: 3x + 2y = 27$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

Xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ $(*)$

Miền nghiệm của hệ $(*)$ là phần miền ngũ giác không bị gạch chéo.

Tìm giao điểm của các cặp đường thẳng ta được các đỉnh có tọa độ hữu hạn của miền nghiệm là:

$$O(0;0); A(7;3); B(9;0); C(0;6); D\left(\frac{45}{8}; \frac{81}{16}\right)$$

Thay tọa độ các điểm này vào biểu thức T ta được: T đạt giá trị lớn nhất tại điểm A , tức là khi $x = 7; y = 3$.

Vậy nhà máy cần sản xuất 7 tấn sản phẩm A và 3 tấn sản phẩm B để tiền lãi được nhiều nhất.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho cặp $(x; y)$ là nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + 3y + 6 < 0 \\ x - 2y + 3 > 0 \\ y + 2 > 0 \end{cases}$$
. Hãy tính giá trị lớn nhất của biểu thức $f(x; y) = 2025x - 2024y$.

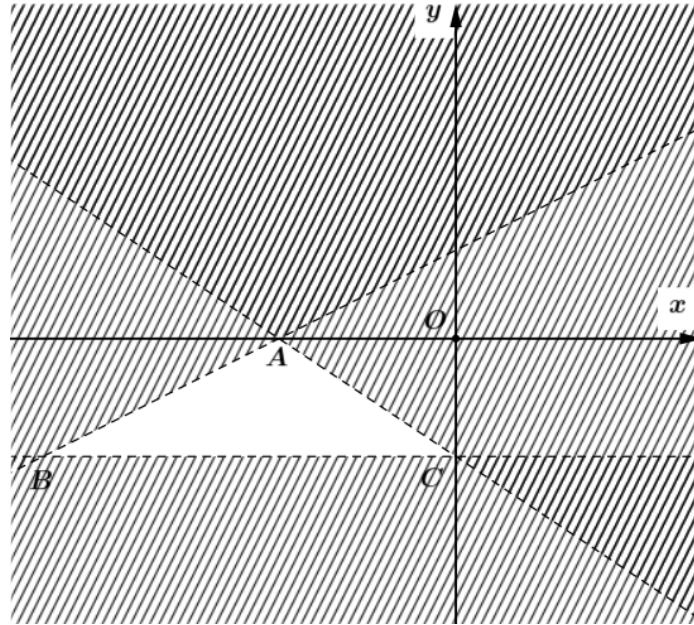
A. 2022. B. 6066. C. 4044. D. 4048.

Lời giải

$$\begin{cases} 2x + 3y + 6 < 0 (1) \\ x - 2y + 3 > 0 (2) \\ y + 2 > 0 (3) \end{cases}$$

Xét:

Ta vẽ các đường thẳng $(d_1): 2x + 3y + 6 = 0, (d_2): x - 2y + 3 = 0, (d_3): y + 2 = 0$ trên cùng hệ trục tọa độ



Lấy điểm $O(0;0)$ ta thấy $O(0;0) \notin (1), O(0;0) \in (2), O(0;0) \in (3)$. Ta gạch bỏ các phần chứa điểm $O(0;0)$ của các mặt phẳng có bờ là đường thẳng d_1 gạch bỏ phần mặt phẳng không chứa điểm $O(0;0)$ của đường thẳng d_3, d_2 . Ta được miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền trong của $\triangle ABC$

$$(d_1) \cap (d_2) = A(-3;0), (d_2) \cap (d_3) = B(-7;-2), (d_1) \cap (d_3) = C(0;-2)$$

Với $A(-3;0): f(x;y) = 2025 \cdot (-3) - 2024 \cdot 0 = -6075$

Với $B(-7;-2): f(x;y) = 2025 \cdot (-7) - 2024 \cdot (-2) = -10127$

Với $C(0;-2): f(x;y) = 2025 \cdot 0 - 2024 \cdot (-2) = 4048$

Vậy giá trị lớn nhất của $f(x;y) = 2025x - 2024y$ là 4048

Câu 2: Cho cặp $(x;y)$ là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} -x + y + 2 < 0 \\ 2x - y - 4 < 0 \\ y + 2 > 0 \end{cases}$. Hãy tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(x;y) = 2022x - 2021y - 2023$

A. 2018.

B. 2019.

C. 2022.

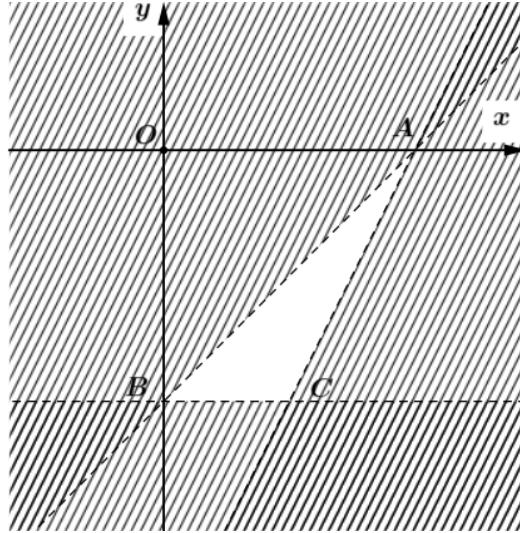
D. 4041.

Lời giải

$$\begin{cases} -x + y + 2 < 0(1) \\ 2x - y - 4 < 0(2) \\ y + 2 > 0(3) \end{cases}$$

Xét:

Ta vẽ các đường thẳng $(d_1): -x + y + 2 = 0, (d_2): 2x - y - 4 = 0, (d_3): y + 2 = 0$ trên cùng hệ trục tọa độ



Lấy điểm $O(0;0)$ ta thấy $O(0;0) \notin (1), O(0;0) \in (2), O(0;0) \in (3)$. Ta gạch bỏ các phần chứa điểm $O(0;0)$ của mặt phẳng có bờ là đường thẳng d_1 gạch bỏ các phần mặt phẳng không chứa điểm $O(0;0)$ của đường thẳng d_2, d_3 . Ta được miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền trong của $\triangle ABC$

$$(d_1) \cap (d_2) = A(2;0), (d_2) \cap (d_3) = B(1;-2), (d_1) \cap (d_3) = C(0;-2)$$

Với $A(2;0): f(x; y) = 2022.2 - 2021.0 - 2023 = 2021$

Với $B(1;-2): f(x; y) = 2022.1 - 2021.(-2) - 2023 = 4041$

Với $C(0;-2): f(x; y) = 2022.0 - 2021.(-2) - 2023 = 2019$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x; y) = 2022x - 2021y + 2023$ là 2019

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất $F_{\min}$ của biểu thức $F(x; y) = 6x + 5y$ với x, y thỏa mãn hệ $\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases}$ là:

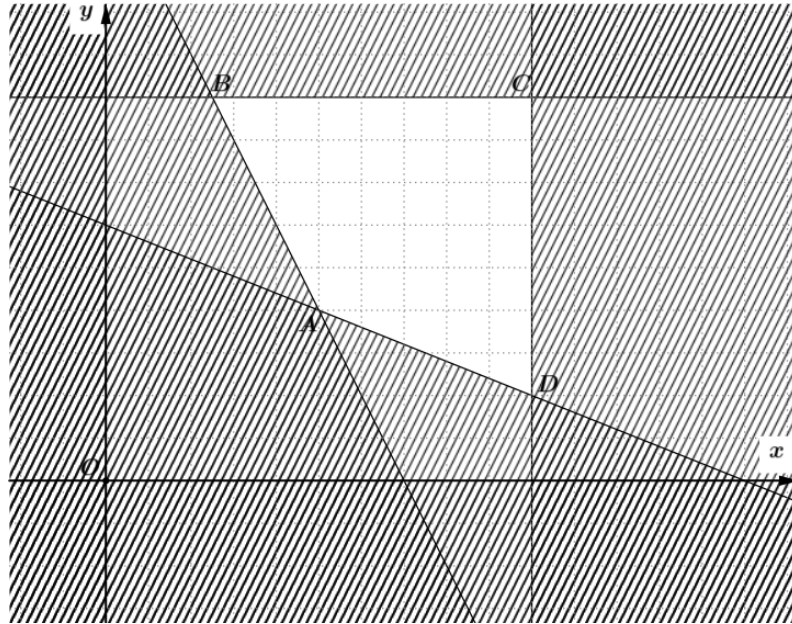
A. $F_{\min} = 45$. B. $F_{\min} = 60$. C. $F_{\min} = 50$. D. $F_{\min} = 40$.

Lời giải

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ các đường thẳng

$$d_1: 2x + y - 14 = 0, \quad d_2: 2x + 5y - 30 = 0; \Delta: y = 9, \quad \Delta': x = 10.$$

Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng (tứ giác $ABCD$ kể cả biên) không bị gạch chéo như hình vẽ.



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ các đường thẳng

$$A(5; 4), \quad B\left(\frac{5}{2}; 9\right), \quad C(10; 9), \quad D(10; 2).$$

Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là

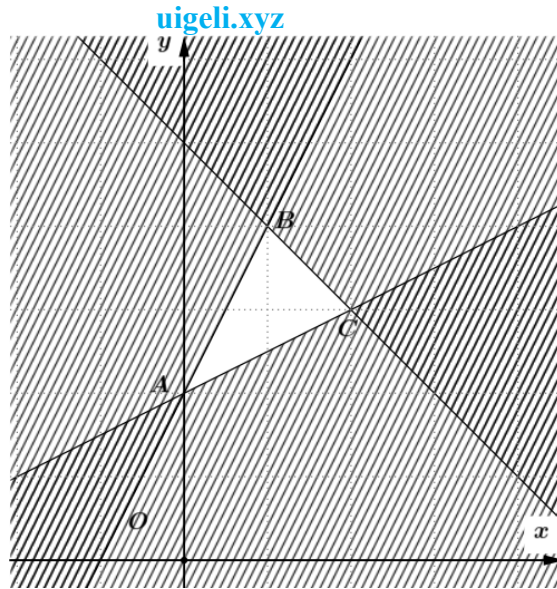
$$\begin{cases} F(5; 4) = 50 \\ F\left(\frac{5}{2}; 9\right) = 60 \\ F(10; 9) = 105 \\ F(10; 2) = 70 \end{cases} \longrightarrow F_{\min} = 50.$$

Ta có

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = 6x + 5y$ là $F_{\min} = 50$.

$$\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$$

Câu 4: Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tam giác ABC (như hình vẽ).



Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = 3x + y$, với $(x; y)$ là nghiệm của hệ bất phương trình trên.

A. 2.

B. 9.

C. 7.

D. 10.

Lời giải

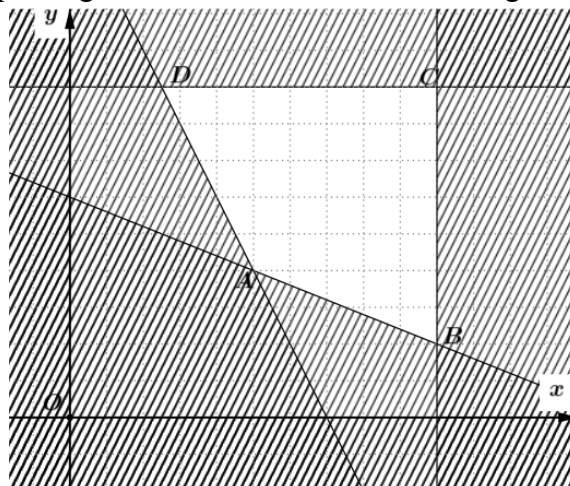
Miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là miền tam giác ABC với $A(0; 2)$, $B(1; 4)$, $C(2; 3)$.

Biểu thức $F = 3x + y$ có giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của tam giác ABC .

Tại $A(0; 2)$ thì $F = 2$; tại $B(1; 4)$ thì $F = 7$; tại $C(2; 3)$ thì $F = 9$.

Vậy giá trị lớn nhất của $F = 9$ khi $x = 2$; $y = 3$.

Câu 5: Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases}$$
 là miền tứ giác $ABCD$ (như hình vẽ).



Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = x + 6y$, với $(x; y)$ là nghiệm của hệ bất phương trình trên.

A. 29.

B. 64.

C. 22.

D. 20.

Lời giải

Miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là miền tứ giác $ABCD$ với $A(5;4), B(10;2), C(10;9), D\left(\frac{5}{2};9\right)$.

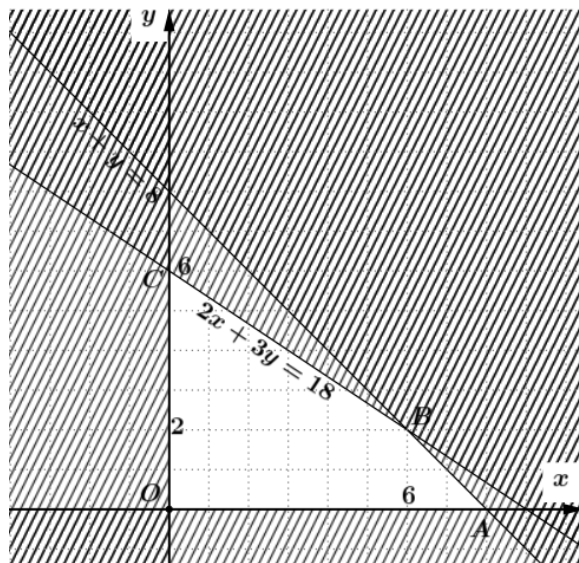
Người ta chứng minh được: Biểu thức $F = x + 6y$ có giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Tại $A(5;4)$ thì $F = 29$; tại $B(10;2)$ thì $F = 22$

Tại $C(10;9)$ thì $F = 64$; tại $D\left(\frac{5}{2};9\right)$ thì $F = \frac{113}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $F = 22$ khi $x = 10, y = 2$.

Câu 6: Trên miền tứ giác $OABC$, phần không bị gạch sọc như hình vẽ bên dưới. Giá trị lớn nhất của biểu thức $F = 2x + 3y + 2025$ bằng:



A. 2022.

B. 2038.

C. 2043.

D. 4044.

Lời giải

Tứ giác $OABC$ có tọa độ các đỉnh là: $O(0;0), A(8;0), B(6;2), C(0;6)$.

Đặt $F(x, y) = 2x + 3y + 2022 = F$

Tại đỉnh $O(0;0)$, ta có $F(0,0) = 2022$;

Tại đỉnh $A(8;0)$, ta có $F(8,0) = 2040$;

Tại đỉnh $B(6;2)$, ta có $F(6,2) = 2043$;

Tại đỉnh $C(0;6)$, ta có $F(0,6) = 2034$.

Vậy biểu thức $F = 2x + 3y + 2025$ đạt giá trị lớn nhất bằng 2043 đạt được tại $B(6;2)$ hoặc tại $C(0;6)$.

Câu 7: Một câu lạc bộ CGV của trường có 5 thành viên và mỗi người chỉ làm việc tối đa trong 5 giờ để dự định làm tối thiểu 220 tấm thiệp gửi lời chúc mừng đến các em học sinh lớp 10 đầu năm học mới. Cần 5 phút để một người làm một tấm thiệp loại A với chi phí 2 000 đồng và cần 9 phút để một người làm một tấm thiệp loại B với chi phí 1 500 đồng. Hỏi câu lạc bộ làm bao nhiêu tấm thiệp loại A và bao nhiêu tấm thiệp loại B để tổn chi phí thấp nhất?

- A. 100 tấm thiệp loại A và 120 tấm thiệp loại B.
- B. 120 tấm thiệp loại A và 100 tấm thiệp loại B.
- C. 220 tấm thiệp loại A và 0 tấm thiệp loại B.
- D. 0 tấm thiệp loại A và 220 tấm thiệp loại B.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số tấm thiệp loại A và số tấm thiệp loại B mà câu lạc bộ đã làm

(Điều kiện $x, y \geq 0$). Thời gian làm xong số thiệp là $5x + 9y$ phút.

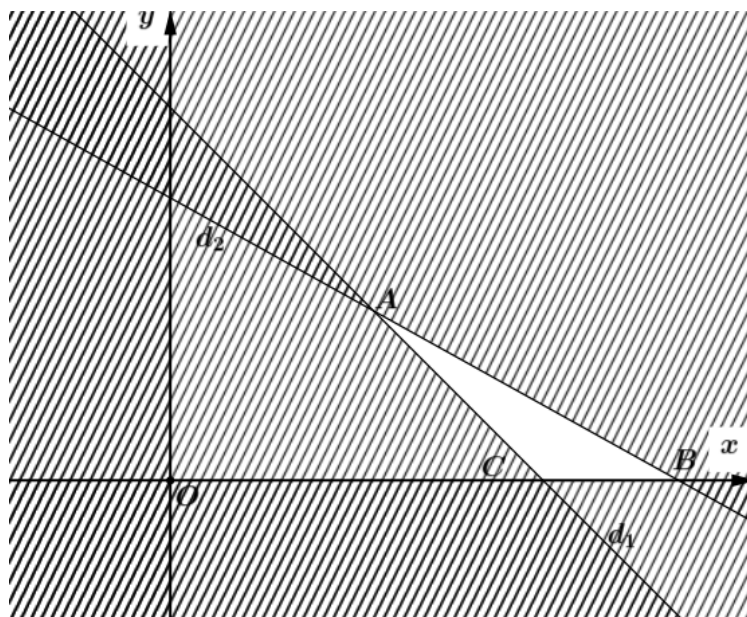
Vì phải làm tối thiểu 220 tấm thiệp nên ta có bất phương trình $x + y \geq 220$

Vì tổng thời gian của các em học sinh không vượt quá 1500 phút nên ta có bất phương trình $5x + 9y \leq 1500$

Khi đó ta có hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 220 \\ 5x + 9y \leq 1500 \end{cases}$$

Hệ bất phương trình có miền nghiệm là tam giác ABC với $A(120;100)$, $B(300;0)$ và $C(220;0)$ (như hình vẽ bên dưới).



Chi phí dùng để làm x tấm thiệp loại A và y tấm thiệp loại B là $F(x; y) = 2000x + 1500y$ đồng.

Ta thấy $F(220; 0) = 440000$, $F(300; 0) = 600000$ và $F(120; 100) = 390000$ nên chi phí thấp nhất để là các tấm thiệp là 390000 đồng khi làm 120 tấm thiệp loại A và 100 tấm thiệp loại B.

Câu 8: Có ba nhóm máy A, B, C dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II . Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng sau:

Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm	
		Loại I	Loại II
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

Một đơn vị sản phẩm loại I lãi ba triệu đồng, một đơn vị sản phẩm loại II lãi năm triệu đồng. Lãi suất cao nhất mà đơn vị thu được là

- A.** 10 triệu đồng. **B.** 15 triệu đồng. **C.** 16 triệu đồng. **D.** 17 triệu đồng.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại I và số sản phẩm loại II được sản xuất

(Điều kiện $x, y \geq 0$)

Số máy loại A cần để sản xuất không vượt quá 10 nên $2x + 2y \leq 10$ hay $x + y \leq 5$.

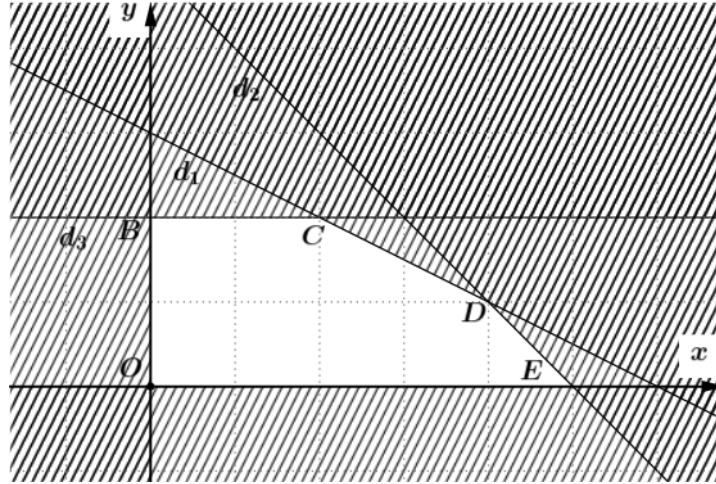
Số máy loại B cần để sản xuất không vượt quá 4 nên $0x + 2y \leq 4$ hay $y \leq 2$.

Số máy loại C cần để sản xuất không vượt quá 12 nên $2x + 4y \leq 12$ hay $x + 2y \leq 6$.

Vì số máy của mỗi nhóm được cho chi tiết trong bảng nên ta có hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 5 \\ y \leq 2 \\ x + 2y \leq 6 \end{cases}$$

Hệ bất phương trình có miền nghiệm là ngũ giác $OBCDE$ với $O(0; 0), B(0; 2), C(2; 2), D(4; 1)$ và $E(5; 0)$ (như hình vẽ bên dưới).



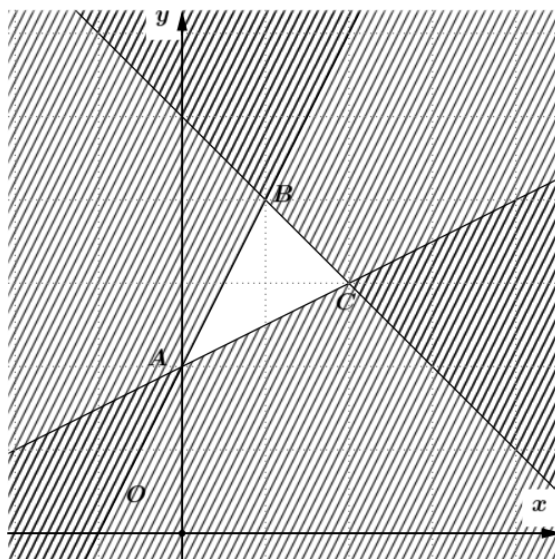
Lợi nhuận thu được khi sản xuất x sản phẩm loại I và y sản phẩm loại II là $F(x; y) = 3x + 5y$

Ta thấy $F(0; 0) = 0$, $F(0; 2) = 10$, $F(2; 2) = 16$, $F(4; 1) = 17$ và $F(5; 0) = 15$ nên lợi nhuận thu được nhiều nhất là 17 triệu đồng khi sản xuất 4 sản phẩm loại I và 1 sản phẩm loại II.

- Câu 9:** Gọi (S) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ có tọa độ thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$$
. Trong (S) điểm có tọa độ (x, y) làm cho biểu thức $F(x; y) = y - x$ đạt giá trị nhỏ nhất là
- A.** $(2; 3)$ **B.** $(1; 4)$ **C.** $(2; 0)$ **D.** $(4; 1)$

Lời giải

Miền nghiệm của hệ
$$\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$$
 là miền trong của tam giác ABC kể cả biên (như hình vẽ)



Ta có $A(0; 2)$, $B(1; 4)$, $C(2; 3)$

Ta thấy rằng $F(x; y) = y - x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại một đỉnh của tam giác ABC

Tại $A(0;2)$ thì $F=2$; tại $B(1;4)$ thì $F=3$; tại $C(2;3)$ thì $F=1$.

Vậy $\min F=1$ khi $x=2$ và $y=3$.

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ x + 2y - 10 \leq 0 \end{cases}$$

Câu 10: Các số x và y thỏa mãn hệ bất phương trình $F(x; y) = x + 2y$ là

A. 6.

B. 8.

C. 10.

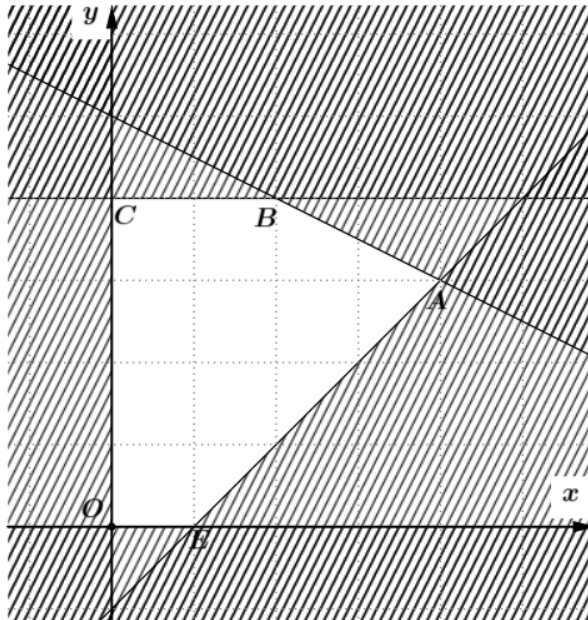
D. 12.

Lời giải

Vẽ đường thẳng $d_1: x - y - 1 = 0$, đường thẳng d_1 qua hai điểm $(0; -1)$ và $(1; 0)$.

Vẽ đường thẳng $d_2: x + 2y - 10 = 0$, đường thẳng d_2 qua hai điểm $(0; 5)$ và $(2; 4)$.

Vẽ đường thẳng $d_3: y = 4$.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền ngũ giác $ABCOE$ với tọa độ các điểm lần lượt là $A(4;3), B(2;4), C(0;4), E(1;0)$.

Ta có: $F(4;3)=10$, $F(2;4)=10$, $F(0;4)=8$, $F(1;0)=1$, $F(0;0)=0$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $F(x; y) = x + 2y$ bằng 10.

$$\begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ x - y \leq 2 \\ 5x + y \geq -4 \end{cases}$$

Câu 11: Các số x và y thỏa mãn hệ bất phương trình $F(x; y) = x + y$ là

A. $\min F(x; y) = \frac{2}{3}$.

B. $\min F(x; y) = 0$.

C. $\min F(x; y) = \frac{-8}{3}$

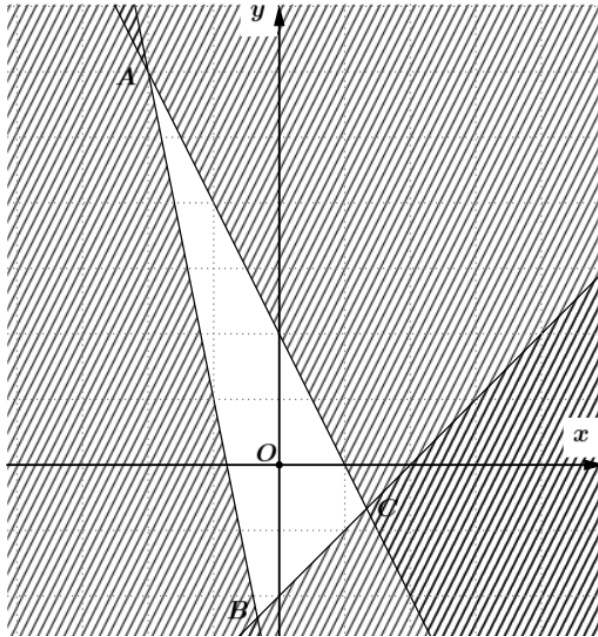
D. $\min F(x; y) = 4$

Lời giải

$$\begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ x - y \leq 2 \\ 5x + y \geq -4 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tam giác ABC với toạ độ các

điểm lần lượt là $A(-2; 6), C\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right), B\left(\frac{-1}{3}; \frac{-7}{3}\right)$



Biểu thức $F(x; y) = x + y$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị ấy đạt được tại một trong các đỉnh của tam giác ABC

$$F(-2; 6) = 4; F\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}; F\left(\frac{-1}{3}; \frac{-7}{3}\right) = \frac{-8}{3}$$

Vậy $\min F(x; y) = \frac{-8}{3}$

Câu 12: Các số x và y thỏa mãn hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 3x - y \geq -1 \\ 2x + y \leq 6 \\ x + 3y \geq 3 \end{cases} (*)$$

biểu thức $f(x; y) = 2x - 3y + 1$ là

A. $\min f(x; y) = -9$ và $\max f(x; y) = 7$

B. $\min f(x; y) = -2$ và $\max f(x; y) = 7$

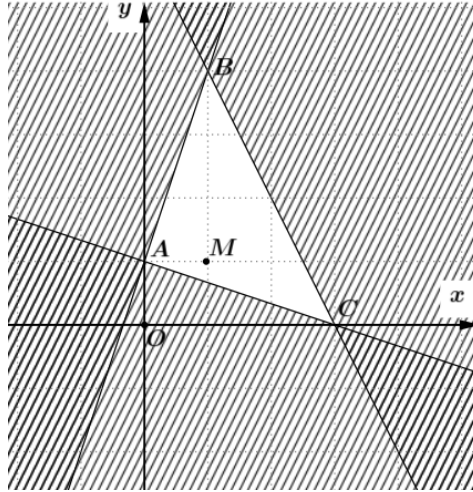
C. $\min f(x; y) = -9$ và $\max f(x; y) = -2$

D. $\min f(x; y) = -9$ và $\max f(x; y) = -7$

Lời giải

Trước hết ta biểu diễn miền nghiệm của hệ $(*)$.

Vẽ các đường thẳng $d_1: 3x - y = -1$; $d_2: 2x + y = 6$; $d_3: x + 3y = 3$



Điểm $M(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ $d_1; d_2; d_3$ không chứa điểm M . Miền không bị tô đậm là hình tam giác ABC , tính cả ba cạnh AB, BC, CA trong hình vẽ dưới là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Tìm tọa độ các điểm A, B, C :

$$\{A\} = d_1 \cap d_3 \text{ nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ } \begin{cases} 3x - y = -1 \\ x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Vậy } A(0;1).$$

$$\{B\} = d_1 \cap d_2 \text{ nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ } \begin{cases} 3x - y = -1 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}. \text{ Vậy } B(1;4).$$

$$\{C\} = d_2 \cap d_3 \text{ nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ } \begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}. \text{ Vậy } C(3;0).$$

Tính giá trị của $f(x; y) = 2x - 3y + 1$ tại tất cả các đỉnh của tam giác ABC :

$(x; y)$	$A(0;1)$	$B(1;4)$	$C(3;0)$
$f(x; y) = 2x - 3y + 1$	-2	-9	7

Suy ra $\min f(x; y) = f(1; 4) = -9$ và $\max f(x; y) = f(3; 0) = 7$.

Câu 13: Lượng calo từ tinh bột khuyến nghị hàng ngày cho một người bình thường khoảng 480 đến 1200 calo. Để nạp đủ chất thì người ta cần nạp cả hai loại tinh bột hấp thu nhanh và tinh bột hấp thu chậm vào cơ thể. Biết rằng trong 100 g gạo (chứa tinh bột hấp thu nhanh) có khoảng 150 calo và 100 g yến mạch (chứa tinh bột hấp thu chậm) có khoảng 50 calo. Hôm nay bạn An đã ăn ít nhất là 200 g gạo. Hỏi bạn ấy cần ăn nhiều nhất bao nhiêu gam yến mạch để có thể nạp vào cơ thể lượng calo tối thiểu cần thiết.

A. 800 gam.

B. 200 gam.

C. 320 gam.

D. 360 gam.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số gam gạo và yến mạch bạn An cần nạp vào cơ thể để có lượng calo tối thiểu cần thiết.

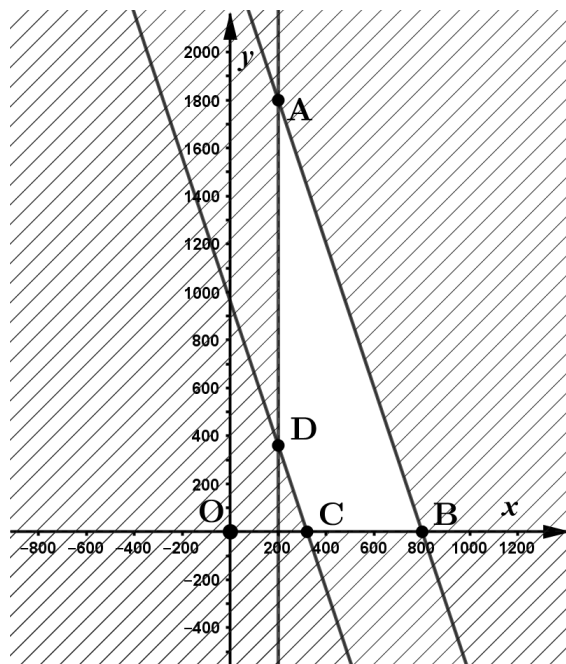
$$\begin{cases} 1,5x + 0,5y \leq 1200 \\ 1,5x + 0,5y \geq 480 \\ x \geq 200 \\ y > 0 \end{cases} \quad (I)$$

Ta có hệ bất phương trình:

Bài toán đưa về tìm x, y là nghiệm của hệ bất phương trình (I) sao cho $T = 1,5x + 0,5y$ có giá trị nhỏ nhất.

Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (I) . Miền nghiệm của hệ bất phương trình (I) là miền tứ giác $ABCD$ (trừ cạnh BC) với tọa độ các điểm như sau:

$$A(200;1800), B(800;0), C(320;0), D(200;360)$$



Tính giá trị biểu thức $T = 1,5x + 0,5y$ tại cặp số $(x; y)$ là tọa độ các đỉnh A, D của tứ giác $ABCD$ rồi so sánh các giá trị đó.

Tại $A(200;1800): T = 1,5 \cdot 200 + 0,5 \cdot 1800 = 1200$

Tại $D(200;360): T = 1,5 \cdot 200 + 0,5 \cdot 360 = 480$

Ta được $T = 1,5x + 0,5y$ đạt được giá trị nhỏ nhất khi tại D nên số lượng yến mạch nhiều nhất An cần ăn là 360 gam để có thể nạp vào cơ thể lượng calo tối thiểu cần thiết.

Câu 14: Kinh Đô là một thương hiệu bánh nổi tiếng ở Việt Nam. Trong dịp tết trung thu An muốn đặt mua hai loại bánh để làm quà biếu cho bạn bè. Theo báo giá trên website thì bánh nướng một trứng thập cẩm Jambon là 50.000 VNĐ/1 cái còn bánh nướng một trứng đậu xanh là 40.000 VNĐ/1 cái. An dự định chi không quá 2.300.000 VNĐ để mua bánh với mong muốn mua được ít nhất 10 cái bánh nướng một trứng thập cẩm Jambon và không quá 15 bánh nướng một trứng đậu xanh. Hỏi An phải mua bao nhiêu cái bánh nướng một trứng thập cẩm Jambon và bao nhiêu cái bánh nướng một trứng đậu xanh để số bánh mua được là nhiều nhất.

A. 34 và 15.

B. 38 và 12.

C. 33 và 16.

D. 30 và 20.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số lượng bánh nướng một trứng thập cẩm Jambon và bánh nướng một trứng đậu xanh mà An có thể mua. Theo giả thuyết, ta có: $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x \geq 10, 0 \leq y \leq 15$.

Tổng số bánh là $T = x + y$. Số tiền An cần chi là $50000x + 40000y$ (VNĐ).

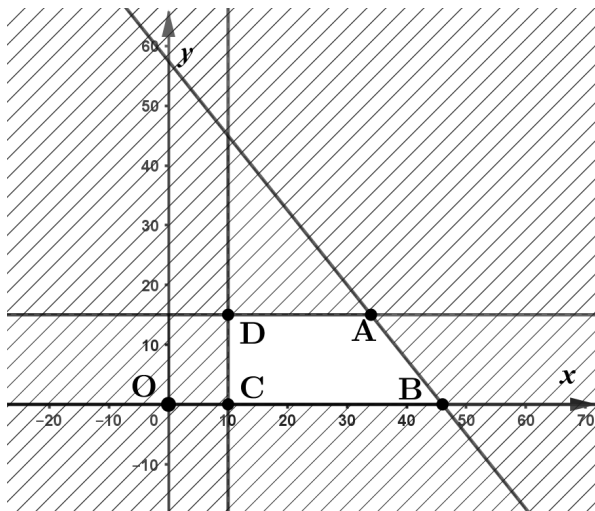
Do An dự định chi không quá 2.300.000 VNĐ nên $50000x + 40000y \leq 2300000$ hay $5x + 4y \leq 230$.

Ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 5x + 4y \leq 230 \\ x \geq 10 \\ 0 \leq y \leq 15 \end{cases} \quad (I)$$

Bài toán đưa về tìm x, y là nghiệm của hệ bất phương trình (I) sao cho $T = x + y$ có giá trị lớn nhất.

Trước hết ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (I). Miền nghiệm của hệ bất phương trình (I) là miền tứ giác $ABCD$ với $A(34;15), B(46;0), C(10;0), D(10;15)$



Tính giá trị biểu thức $T = x + y$ tại các cặp số $(x; y)$ là tọa độ các đỉnh của tứ giác $ABCD$ rồi so sánh các giá trị đó.

Tại $A(34;15): T = 34 + 15 = 49$;

Tại $B(46;0): T = 46 + 0 = 46$;

Tại $C(10;0): T = 10 + 0 = 10$;

Tại $D(10;15): T = 10 + 15 = 25$;

Ta được $T = x + y$ đạt được giá trị lớn nhất khi $x = 34, y = 15$ ứng với tọa độ đỉnh $A(34;15)$

Vậy để mua được nhiều bánh nhất thì cần mua số bánh nướng một trứng thập cẩm Jambon và bánh nướng một trứng đậu xanh lần lượt là 34 và 15 cái.

Câu 15: Một nhà máy sản xuất giày thể thao dùng hai loại nguyên liệu vải, cao su để sản xuất ra hai loại giày chạy bộ và giày tập luyện đa năng. Để sản xuất một đôi giày phải dùng một số gam nguyên liệu khác nhau. Tổng số kilôgam nguyên liệu mỗi loại mà nhà sản xuất đó có trong một ngày và số gam từng loại nguyên liệu cần thiết để sản xuất ra một đôi giày mỗi loại được cho trong bảng sau:

Loại nguyên liệu	Số kilôgam nguyên liệu có trong một ngày	Số gam từng loại nguyên liệu cần để sản xuất một đôi giày	
		Giày chạy bộ	Giày tập luyện đa năng
Vải	12	200	150
Cao su	15	150	300

Biết một đôi giày chạy bộ được bán với giá 2 triệu đồng và một đôi giày tập luyện đa năng được bán với giá 2,5 triệu đồng. Hỏi với số giày sản xuất được trong một ngày thì số tiền bán được nhiều nhất là bao nhiêu?

- A.** 152 triệu đồng. **B.** 160 triệu đồng. **C.** 125 triệu đồng. **D.** 120 triệu đồng.

Lời giải

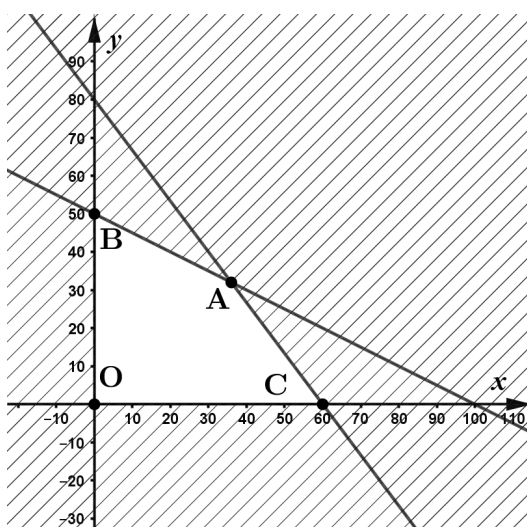
Gọi x, y lần lượt là số đôi giày chạy bộ và giày tập luyện đa năng ($x, y \in \mathbb{N}$).

$$\begin{cases} 2x + 1,5y \leq 120 \\ 1,5x + 3y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ta có hệ bất phương trình:

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên hệ trục tọa độ Oxy ta được như hình.

Miền nghiệm là miền tứ giác $ABOC$ với các đỉnh $A(36; 32), B(0; 50), C(60; 0), O(0; 0)$



Gọi F là số tiền lãi (triệu đồng) thu được ta có $F = 2x + 2,5y$.

Tính giá trị của F tại các đỉnh của tứ giác $ABOC$:

Tại $O(0;0)$: $F = 2.0 + 2,5.0 = 0$;

Tại $A(36;32)$: $F = 2.36 + 2,5.32 = 152$;

Tại $B(0;50)$: $F = 2.0 + 2,5.50 = 125$;

Tại $C(60;0)$: $F = 2.60 + 2,5.0 = 120$;

F đạt được giá trị lớn nhất bằng 152 tại $A(36;32)$.

Câu 16: Trong một cuộc thi về “bữa ăn dinh dưỡng”, ban tổ chức yêu cầu để đảm bảo lượng dinh dưỡng thì mỗi gia đình có 4 thành viên cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị Lipit trong thức ăn hằng ngày. Mỗi cân thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị Lipit, 1 kg thịt heo chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị Lipit. Biết rằng người nội trợ chỉ mua tối đa 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt heo. Biết rằng 1kg thịt bò giá 200.000đ, 1 kg thịt heo giá 100.000đ. Tìm chi phí thấp nhất cho khẩu phần thức ăn đảm bảo chất dinh dưỡng?

A. 190.000 đồng. **B.** 150.000 đồng. **C.** 180.000 đồng. **D.** 170.000 đồng.

Lời giải

Gọi x là số kg thịt bò, y là số kg thịt heo cần mua ($0 \leq x \leq 1,6$; $0 \leq y \leq 1,1$).

Chi phí để mua thức ăn là $f(x;y) = 200000x + 100000y$

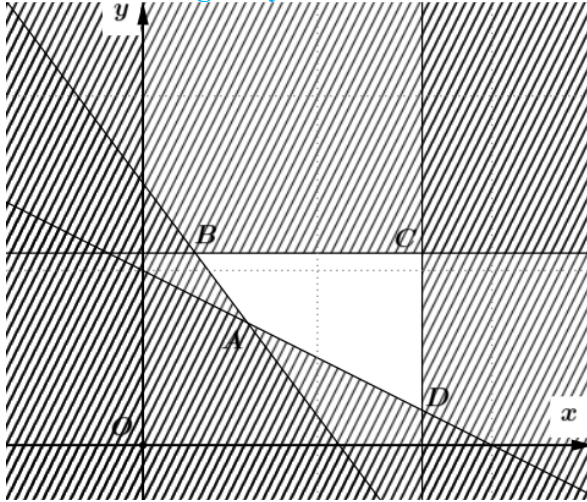
Lượng dinh dưỡng protein của đồ ăn là: $800x + 600y$

Lượng dinh dưỡng Lipit của đồ ăn là: $200x + 400y$.

Theo giả thiết, ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 800x + 600y \geq 900 \\ 200x + 400y \geq 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$$

Bài toán đưa về: Tìm (x,y) là nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases} \quad (*)$$

sao cho $f(x;y) = 200000x + 100000y$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là miền tứ giác $ABCD$. Xét tại biên A, B, C, D ta có:

Tại A : $f(0,6;0,7) = 200000.0,6 + 100000.0,7 = 190000$

Tại B : $f(0,3;1,1) = 200000.0,3 + 100000.1,1 = 170000$

Tại C : $f(1,6;1,1) = 200000.1,6 + 100000.1,1 = 430000$

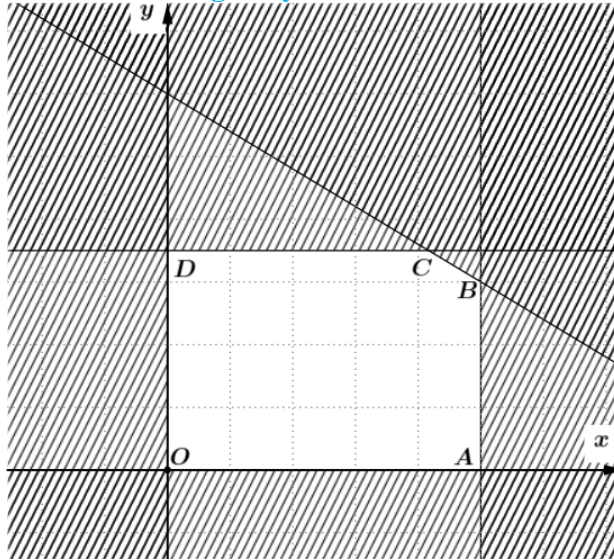
Tại D : $f(1,6;0,2) = 200000.1,6 + 100000.0,2 = 340000$

Vậy chi phí thấp nhất cho khẩu phần thức ăn đảm bảo dinh dưỡng là 170000 đ.

Câu 17: Một máy cán thép có thể sản xuất hai sản phẩm thép tấm và thép cuộn (máy không thể sản xuất hai loại thép cùng lúc và có thể làm việc 40 giờ một tuần). Công suất sản xuất thép tấm là 250 tấn/giờ, công suất sản xuất thép cuộn là 150 tấn/giờ. Mỗi tấn thép tấm có giá 25 USD, mỗi tấn thép cuộn có giá 30 USD. Biết rằng mỗi tuần thị trường chỉ tiêu thụ tối đa 5000 tấn thép tấm và 3500 tấn thép cuộn. Hỏi cần sản xuất bao nhiêu tấn thép mỗi loại trong một tuần để lợi nhuận thu được là cao nhất.

- A.** 5000 tấn thép tấm và 3000 tấn thép cuộn.
- B.** 4500 tấn thép tấm và 3500 tấn thép cuộn.
- C.** 3500 tấn thép tấm và 2000 tấn thép cuộn.
- D.** 5000 tấn thép tấm và 3500 tấn thép cuộn.

Lời giải



Gọi x, y lần lượt là số tấn thép tấm và số tấn thép cuộn mà máy cán thép này sản xuất trong một tuần ($x, y > 0$).

Số tiền lãi thu được là: $f(x; y) = 25x + 30y$ (USD).

Thời gian để sản xuất x tấn thép tấm là $\frac{x}{250}$ (giờ);

Thời gian để sản xuất y tấn thép cuộn là $\frac{y}{150}$ (giờ).

Ta có hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 5000 \\ 0 \leq y \leq 3500 \\ \frac{x}{250} + \frac{y}{150} \leq 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 5000 \\ 0 \leq y \leq 3500 \\ 3x + 5y \leq 30000 \end{cases} \quad (*)$$

Tìm (x, y) là nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$ sao cho $f(x; y) = 25x + 30y$ đạt giá trị lớn nhất. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$ là miền ngũ giác $OABCD$ (kể cả biên) trong đó

$M(x; y)$	O	A	B	C	D
$f(x; y) = 25x + 30y$	0	125000	215000	$\frac{627500}{3}$	105000

Suy ra $f(x, y)$ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ khi $(x; y) = (5000; 3000)$.

Như vậy cần phải sản xuất 5000 tấn thép tấm và 3000 tấn thép cuộn trong một tuần để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Câu 18: Người ta định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 120 kg hóa chất A và 9 kg hóa chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng có thể chiết xuất được 20 kg chất A và

0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất. Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.

- A.** $3,5$ tấn nguyên liệu loại I và $4,5$ tấn nguyên liệu loại II.
B. $4,5$ tấn nguyên liệu loại I và $3,5$ tấn nguyên liệu loại II.
C. $5,5$ tấn nguyên liệu loại I và $4,5$ tấn nguyên liệu loại II.
D. $4,5$ tấn nguyên liệu loại I và $5,5$ tấn nguyên liệu loại II.

Lời giải

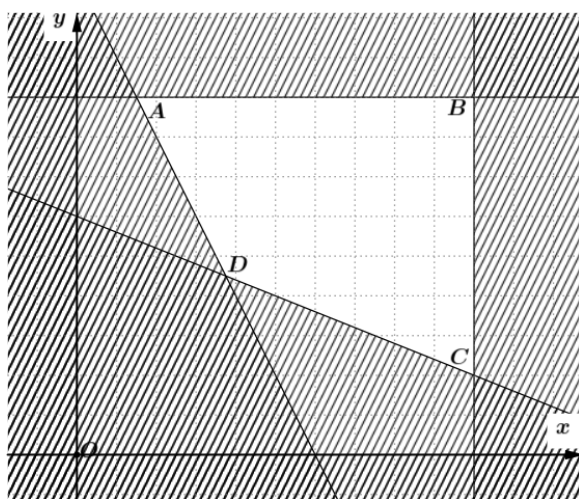
Gọi số tấn nguyên liệu loại I cần sử dụng là: x (tấn); số tấn nguyên liệu loại II cần sử dụng là: y (tấn). Điều kiện: $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 9$.

Chi phí mua nguyên liệu cần bỏ ra là: $f(x; y) = 4x + 3y$ (triệu đồng).

Khi đó số kg chất A thu được là: $20x + 10y$; số kg chất B thu được là: $0,6x + 1,5y$.

Ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 20x + 10y \geq 120 \\ 0,6x + 1,5y \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 12 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases}$$
 . Vẽ các đường thẳng:

$(d_1): x = 10, (d_2): y = 9, (d_3): 2x + y = 12, (d_4): 2x + 5y = 30$. Ta có miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác $ABCD$ (phần không bị gạch chéo) như hình vẽ:



$$(d_2) \cap (d_3) = A\left(\frac{3}{2}; 9\right), (d_2) \cap (d_1) = B(10; 9),$$

$$(d_1) \cap (d_4) = C(10; 2), (d_4) \cap (d_3) = D\left(\frac{15}{4}; \frac{9}{2}\right)$$

$M(x; y)$	A	B	C	D
$f(x; y) = 4x + 3y$	33	67	46	28,5

Do đó $f(x; y)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $D\left(\frac{15}{4}; \frac{9}{2}\right)$.

Vậy để chi phí nguyên liệu là ít nhất ta cần sử dụng $\frac{15}{4} = 3,75$ tấn nguyên liệu loại I và $\frac{9}{2} = 4,5$ tấn nguyên liệu loại II.

Câu 19: Bác Hai có một mảnh đất rộng 6 ha. Bác dự tính trồng cà chua và bắp cho mùa vụ sắp tới. Nếu trồng bắp thì bác Hai cần mười ngày để trồng một ha. Nếu trồng cà chua thì bác Hai cần hai mươi ngày để trồng một ha. Biết rằng mỗi ha bắp sau thu hoạch bán được 30 triệu đồng, mỗi ha cà chua sau thu hoạch bán được 50 triệu đồng và bác Hai chỉ còn 100 ngày để canh tác cho kịp mùa vụ. Số tiền nhiều nhất mà bác Hai có thể thu được sau mùa vụ này là bao nhiêu.

- A. 180 triệu. B. 250 triệu. C. 260 triệu. D. 270 triệu.

Lời giải

Gọi diện tích bác Hai trồng bắp là $x, (x \geq 0)$. Số ngày công trồng bắp là $10x$

Gọi diện tích bác Hai trồng cà chua là $y, (y \geq 0)$. Số ngày công trồng cà chua là $20y$

Số tiền bác Hai thu được khi canh tác 6 ha đất trong 100 ngày là $30x + 50y$ (triệu đồng)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 6 \\ 10x + 20y \leq 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0(1) \\ y \geq 0(2) \\ x + y - 6 \leq 0(3) \\ x + 2y - 10 \leq 0(4) \end{cases}$$

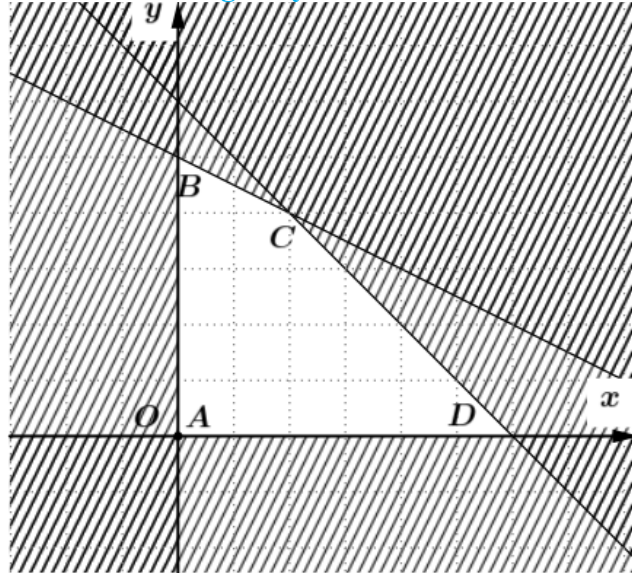
Dựa vào dữ kiện của đề bài ta có hệ bất phương trình

Ta vẽ các đường thẳng $(d_1): x = 0, (d_2): y = 0, (d_3): x + y - 6 = 0, (d_4): x + 2y - 10 = 0$ trên cùng hệ trục tọa độ

Lấy điểm $M(1;1)$ ta thấy $M(1;1) \in (1), M(1;1) \in (2), M(1;1) \in (3), M(1;1) \in (4)$. Ta gạch bỏ các phần không chứa điểm $M(1;1)$ của mặt phẳng có bờ là đường thẳng $d(1), d(2), d(3), (d_4)$. Ta được miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền trong và viền của đa giác $ABCD$

$$(d_1) \cap (d_2) = A(0;0), (d_1) \cap (d_3) = D(6;0),$$

$$(d_2) \cap (d_4) = B(0;5), (d_3) \cap (d_4) = C(2;4)$$



Với $A(0;0)$ Số tiền bác Hai thu được là: $30.0 + 50.0 = 0$ triệu

Với $B(0;5)$ Số tiền bác Hai thu được là: $30.0 + 50.5 = 250$ triệu

Với $C(2;4)$ Số tiền bác Hai thu được là: $30.2 + 50.4 = 260$ triệu

Với $D(6;0)$ Số tiền bác Hai thu được là: $30.6 + 50.0 = 180$ triệu

Câu 20: Nhân dịp tết Trung Thu cửa hàng cô Ba muốn sản xuất hai loại bánh là bánh đậu xanh và bánh thập cẩm. Với mỗi bánh đậu xanh cần 0.06kg đường và 0.08kg đậu. Với mỗi bánh thập cẩm cần 0.08kg đường và 0.04kg đậu. Biết rằng cô Ba chỉ mua được 300kg đường và 200kg đậu và với mỗi bánh đậu xanh bán ra cửa hàng lãi 18000 đồng, mỗi bánh thập cẩm bán ra lãi 20000 đồng. Giả sử cô Ba không mua thêm được nhiên liệu và số bánh làm ra luôn bán hết thì số tiền lời nhiều nhất có thể thu được sau tết Trung Thu là bao nhiêu.

A. 45000000

B. 75000000

C. 78000000

D. 95000000

Lời giải

Gọi số bánh đậu xanh làm được là x ($x \geq 0$). Lượng đường cần dùng là $0.06x$, lượng đậu cần dùng là $0.08x$

Gọi số bánh thập cẩm làm được là y ($y \geq 0$). Lượng đường cần dùng là $0.08x$, lượng đậu cần dùng là $0.04x$

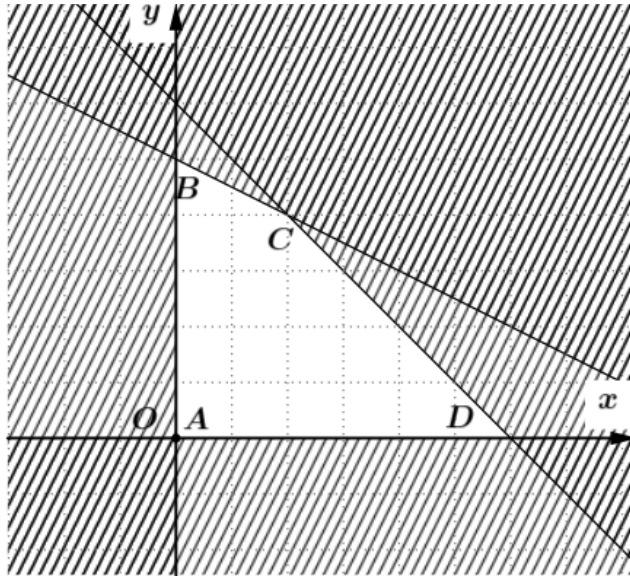
Số tiền cô Ba khi bán hết số bánh làm ra là $18000x + 20000y$ (đồng)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0.06x + 0.08y \leq 300 \\ 0.08x + 0.04y \leq 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0(1) \\ y \geq 0(2) \\ 3x + 4y - 15000 \leq 0(3) \\ 2x + y - 5000 \leq 0(4) \end{cases}$$

Ta có hệ bất phương trình

Ta vẽ các đường thẳng $(d_1): x = 0, (d_2): y = 0, (d_3): 3x + 4y - 15000 = 0$

$(d_4): 2x + y - 5000 = 0$ trên cùng hệ trục tọa độ.



Lấy điểm $M(1;1)$ ta thấy $M(1;1) \in (1), M(1;1) \in (2), M(1;1) \in (3), M(1;1) \in (4)$. Ta gạch bỏ các phần không chứa điểm $M(1;1)$ của mặt phẳng có bờ là đường thẳng $d(1), d(2), d(3), (d_4)$. Ta được miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền trong và viền của đa giác $ABCD$

$$(d_1) \cap (d_2) = A(0;0), (d_1) \cap (d_3) = B(0;3750), (d_2) \cap (d_4) = D(2500;0), (d_3) \cap (d_4) = C(1000;3000)$$

Với $A(0;0)$ Số tiền cô Ba thu được là: $18000.0 + 20000.0 = 0$ đồng

Với $B(0;3750)$ Số tiền cô Ba thu được là: $1800.0 + 20000.3750 = 75000000$ đồng

Với $C(1000;3000)$ Số tiền cô Ba thu được là: $18000.1000 + 20000.3000 = 78000000$ đồng

Với $D(2500;0)$ Số tiền cô Ba thu được là: $18000.2500 + 20000.0 = 45000000$ đồng.

Câu 21: Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000.000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích, cùng thời lượng một phút quảng cáo, trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa 16.000.000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

- A. 5 phút trên sóng phát thanh và 3 phút trên truyền hình
- B. 3 phút trên sóng phát thanh và 5 phút trên truyền hình
- C. 4 phút trên sóng phát thanh và 3 phút trên truyền hình
- D. 3 phút trên sóng phát thanh và 4 phút trên truyền hình

Lời giải

Gọi thời lượng công ty đặt quảng cáo trên sóng phát thanh là x (phút), trên truyền hình là y (phút). Chi phí cho việc này là: $800.000x + 4.000.000y$ (đồng)

Mức chi này không được phép vượt quá mức chi tối đa, tức:

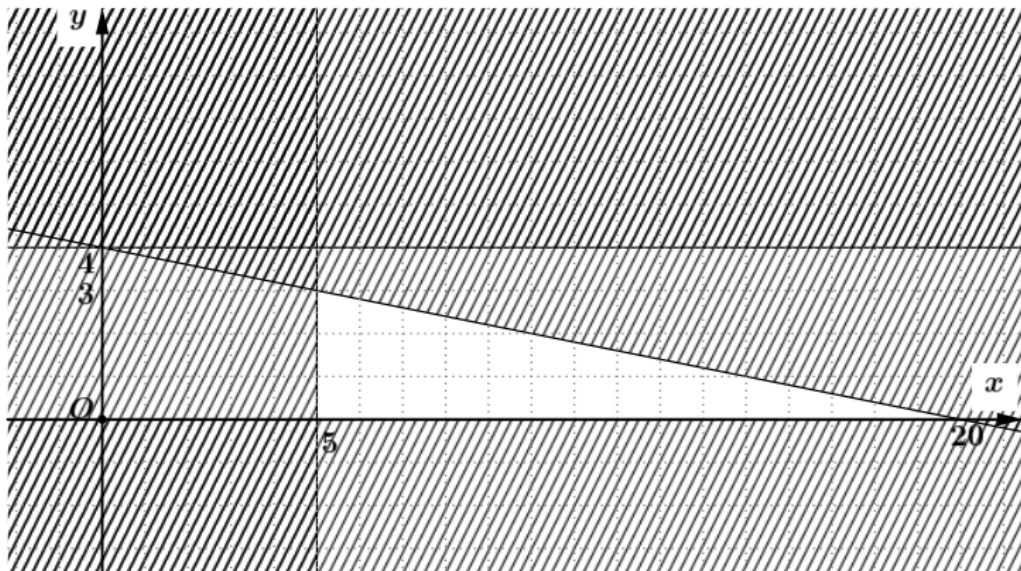
$$800.000x + 4.000.000y \leq 16.000.000 \quad \text{hay} \quad x + 5y - 20 \leq 0$$

$$\begin{cases} x + 5y - 20 \leq 0 \\ x \geq 5 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases} \quad (*)$$

Theo giả thiết thì bài toán trở thành: Tìm x, y thoả mãn hệ (*) sao cho $M(x, y) = x + 6y$ đạt giá trị lớn nhất.

Trước tiên ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (*)

Trong mặt phẳng tọa độ vẽ các đường thẳng $(d): x + 5y - 20 = 0$, $(d''): x = 5$, $(d'''): y = 4$



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là phần mặt phẳng (tam giác) không bị gạch chéo như hình vẽ

Giá trị lớn nhất của $M(x, y) = x + 6y$ đạt tại một trong các điểm $(5; 3)$, $(5; 0)$, $(20; 0)$

Ta có $M(5; 3) = 23$, $M(5; 0) = 5$, $M(20; 0) = 20$ suy ra giá trị lớn nhất của $M(x, y)$ bằng 23 tại $(5; 3)$ tức là nếu đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh là 5 phút và trên truyền hình là 3 phút thì sẽ đạt hiệu quả nhất.

Câu 22: Trong một cuộc thi gói bánh vào dịp năm mới, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 20 kg gạo nếp, 2 kg thịt ba chỉ, 5 kg đậu xanh để gói bánh chưng và bánh ống. Để gói một cái bánh chưng cần 0,4 kg gạo nếp, 0,05 kg thịt và 0,1 kg đậu xanh, để gói một cái bánh ống cần 0,6 kg gạo nếp, 0,075 kg thịt và 0,15 kg đậu xanh. Mỗi cái bánh chưng nhận được 5 điểm thưởng, mỗi cái bánh ống nhận được 7 điểm thưởng. Hỏi cần phải gói mấy cái bánh mỗi loại để được nhiều điểm thưởng nhất.

- A. 50 cái bánh chưng.
 B. 40 cái bánh chưng
 C. 35 cái bánh chưng và 5 cái bánh ống.
 D. 31 cái bánh chưng và 14 cái bánh ống.

Lời giải

Gọi x, y ($x \geq 0, y \geq 0$) lần lượt là số bánh chưng và bánh ống gói được.

Điểm thưởng là $L(x; y) = 5x + 7y$ (đồng).

Số kg gạo nếp cần dùng là: $0,4x + 0,6y$

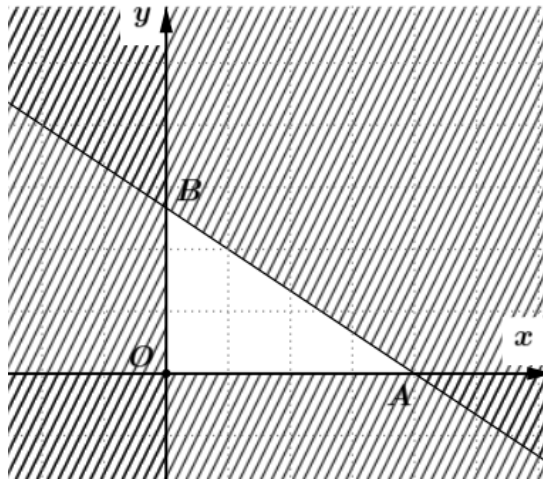
Số kg thịt ba chỉ cần dùng là: $0,05x + 0,075y$.

Số kg đậu xanh cần dùng là: $0,1x + 0,15y$.

$$\begin{cases} 0,4x + 0,6y \leq 20 \\ 0,05x + 0,075y \leq 2 \\ 0,1x + 0,15y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 100 \\ 2x + 3y \leq 80 \\ 2x + 3y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình:

Bài toán trở thành: Trong các nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$, tìm nghiệm $(x_0; y_0)$ sao cho $L(x; y) = 5x + 7y$ lớn nhất.



Miền nghiệm của $(*)$ là tam giác OAB như hình vẽ với $O(0; 0), A(40; 0), B\left(0; \frac{80}{3}\right)$.

$$L(0; 0) = 0, L(40; 0) = 200, L\left(0; \frac{80}{3}\right) = \frac{560}{3}$$

Ta có:

Suy ra giá trị lớn nhất của $L(x; y)$ bằng 200 khi $(x; y) = (40; 0)$

Vậy cần gói 40 cái bánh chưng để số điểm thưởng đạt được cao nhất.

Câu 23: Một người thợ mộc làm hai loại sản phẩm là bàn và ghế. Mỗi cái bàn khi bán lãi 150 nghìn đồng, mỗi cái ghế khi bán lãi 50 nghìn đồng. Người thợ mộc có thể làm 40 giờ/tuần và tốn 6 giờ để làm một cái bàn, 3 giờ để làm một cái ghế. Khách hàng yêu cầu người thợ mộc làm số

ghế ít nhất là gấp ba lần số bàn. Một cái bàn chiếm chỗ bằng 4 cái ghế và ta có phòng để được nhiều nhất 4 cái bàn. Hỏi người thợ mộc phải sản xuất như thế nào để số tiền lãi thu về là lớn nhất.

- A. Sản xuất 16 cái bàn và 48 cái ghế trong 7 tuần.
- B. Sản xuất 4 cái bàn và 32 cái ghế trong 3 tuần.
- C. Sản xuất 1 cái bàn và 10 cái ghế trong 1 tuần.
- D. Sản xuất 40 cái ghế trong 3 tuần.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số bàn và số ghế mà người thợ mộc sản xuất trong một tuần ($x \geq 0; y \geq 0$).

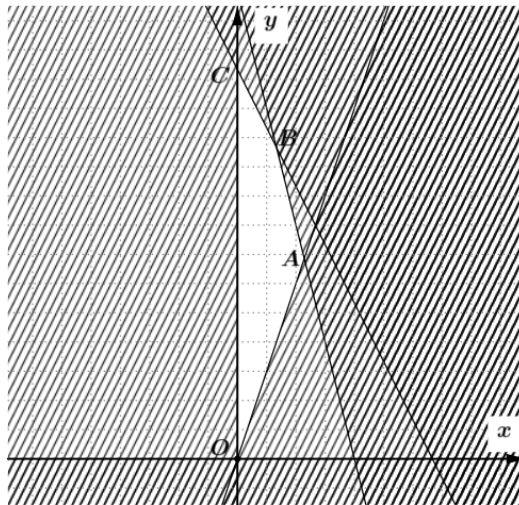
Khi đó số tiền mà người thợ mộc thu được là: $f(x; y) = 150x + 50y$ (nghìn đồng).

Yêu cầu bài toán trở thành tìm x và y để hàm số $f(x; y) = 150x + 50y$ đạt giá trị lớn nhất với

$$\begin{cases} 6x + 3y \leq 40 \\ y \geq 3x \\ x + \frac{y}{4} \leq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y \leq 40 \\ y \geq 3x \\ 4x + y \leq 16 \\ x, y \geq 0 \end{cases} (*)$$

x, y thỏa mãn hệ sau

Miền nghiệm của hệ (*) là tứ giác $OABC$ (kể cả biên)



Ta có tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình: $x = 4; y = 32 \Rightarrow A\left(\frac{16}{7}; \frac{48}{7}\right)$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 6x + 3y = 40 \\ 4x + y = 16 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{4}{3}; \frac{32}{3}\right)$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = 0 \\ 6x + 3y = 40 \end{cases} \Rightarrow C\left(0; \frac{40}{3}\right)$

Thay tọa độ của từng điểm A, B, C vào hệ (*), ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $x = 4; y = 32$. Vậy người thợ này cần sản xuất 4 cái bàn và 32 cái ghế trong vòng 3 tuần để thu về số tiền lãi lớn nhất.

Câu 24: Một công ty thời trang chuẩn bị cho một đợt khuyến mãi nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hai nền tảng mạng xã hội **Tik Tok** và **You Tube**. Biết chi phí cho 1000000 lượt xem quảng cáo trên **Tik Tok** là 20 triệu đồng, chi phí cho 1000000 lượt xem quảng cáo trên **You Tube** là 40 triệu đồng. **Tik Tok** chỉ nhận các hợp đồng trên 6000000 lượt xem. **You Tube** do các công ty có nhu cầu quảng cáo lớn nên chỉ nhận các hợp đồng dưới 3000000 lượt xem. Theo các phân tích, cùng một lượng lượt xem quảng cáo thì trên **You Tube** cho hiệu quả gấp 3 lần quảng cáo trên **Tik Tok**. Công ty thời trang dự tính chi 160 triệu cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo để đạt hiệu quả cao nhất. Tính $T = x + 3y$ với x (triệu lượt) là số lượt xem trên **Tik Tok**, y (triệu lượt) là số lượt xem trên **You Tube**

- A. 6. B. 8. C. 9. D. 12.

Lời giải

Gọi số lượt xem trên **TikTok** là x (triệu lượt) với $x \geq 6$. Chi phí quảng cáo là $20x$ (triệu đồng)

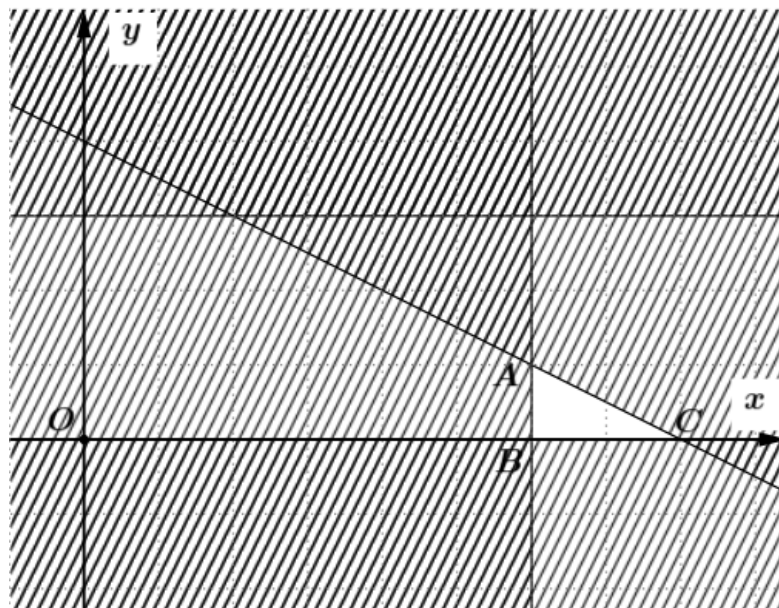
Gọi số lượt xem trên **You Tube** là y (triệu lượt) với $0 \leq y \leq 3$. Chi phí quảng cáo là $40y$ (triệu đồng)

Hiệu quả thu được lớn nhất là giá trị lớn nhất của biểu thức: $T = x + 3y$

$$\begin{cases} x \geq 6 \\ 0 \leq y \leq 3 \\ 20x + 40y \leq 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6(1) \\ 0 \leq y \leq 3(2) \\ x + 2y - 8 \leq 0(3) \end{cases}$$

Dựa vào dữ kiện của đề bài ta có hệ bất phương trình

Ta vẽ các đường thẳng $(d_1): x = 6, (d_2): y = 0, (d_3): x + 2y - 8 = 0, (d_4): y = 3$ trên cùng hệ trục tọa độ



Lấy điểm $M(1;1)$ ta thấy $M(1;1) \notin (1), M(1;1) \in (2), M(1;1) \in (3)$. Ta gạch bỏ các phần chứa điểm $M(1;1)$ của mặt phẳng có bờ là đường thẳng (d_1) , gạch bỏ phần không chứa điểm

$M(1;1)$ của mặt phẳng có bờ là đường thẳng $d(2), d(3), (d_4)$. Ta được miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền trong và viền của tam giác ABC

$$(d_1) \cap (d_2) = B(6;0), (d_1) \cap (d_3) = A(6;1), (d_2) \cap (d_3) = C(8;0)$$

Với $A(6;1)$ thì hiệu quả thu được: $T = 6 + 3.1 = 9$

Với $B(6;0)$ thì hiệu quả thu được: $T = 6 + 3.0 = 6$

Với $C(8;0)$ thì hiệu quả thu được: $T = 8 + 3.0 = 8$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Một gia đình cần ít nhất 900 gam chất protein và 400 gam chất lipid trong thức ăn mỗi ngày. Biết rằng thịt bò chứa 80% protein và 20% lipid. Thịt lợn chứa 60% protein và 40% lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất là 1600 gam thịt bò, 1100 gam thịt lợn, giá tiền 1 kg thịt bò là 45000 đồng, 1 kg thịt lợn là 35000 đồng. Giả sử gia đình mua x kg thịt bò và y kg thịt lợn. Khi đó:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 4x + 3y \geq 4,5 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$$

a) là hệ bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán

b) Miền nghiệm của hệ trên là miền của tam giác

c) Gọi T (nghìn đồng) là số tiền phải trả cho x (kilogram) thịt bò và y (kilogram) thịt lợn. Khi đó, chi phí để mua x kg thịt bò và y kg thịt lợn là: $T = 35x + 45y$ (nghìn đồng).

d) Gia đình đó mua 0,6 kg thịt bò và 0,7 kg thịt lợn thì chi phí là ít nhất.

Lời giải

a) Đúng: Giả sử gia đình đó mua x kg thịt bò và y kg thịt lợn.

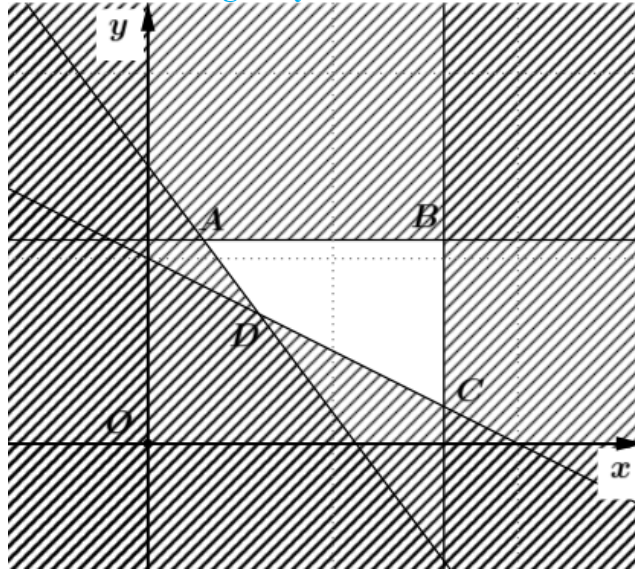
Điều kiện: $0 \leq x \leq 1,6; 0 \leq y \leq 1,1$.

Khi đó lượng protein có được là $80\%x + 60\%y$ và lượng lipid có được là $20\%x + 40\%y$.

Vì gia đình đó cần ít nhất 0,9 kg protein và 0,4 kg lipid trong thức ăn mỗi ngày nên điều kiện tương ứng là: $80\%x + 60\%y \geq 0,9$; $20\%x + 40\%y \geq 0,4$.

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 4x + 3y \geq 4,5 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$$

Ta có hệ bất phương trình:



b) Sai: Miền nghiệm của hệ trên là miền của tứ giác lồi $ABCD$ (kể cả biên) được mô tả ở hình bên.

c) Sai: Chi phí để mua x kg thịt bò và y kg thịt lợn là: $T = 45x + 35y$ (nghìn đồng).

d) Đúng: Ta đã biết T đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh tứ giác $ABCD$ trong đó: $A(0,3;1,1); B(1,6;1,1); C(1,6;0,2); D(0,6;0,7)$

Với $A(0,3;1,1)$ ta có $T = 45.0,3 + 35.1,1 = 52$

Với $B(1,6;1,1)$ ta có $T = 45.1,6 + 35.1,1 = 110,5$

Với $C(1,6;0,2)$ ta có $T = 45.1,6 + 35.0,2 = 79$

Với $D(0,6;0,7)$ ta có $T = 45.0,6 + 35.0,7 = 51,5$

So sánh các giá trị trên ta thấy được T đạt giá trị nhỏ nhất bằng 51,5 (nghìn đồng), khi đó $\begin{cases} x = 0,6 \\ y = 0,7 \end{cases}$ (tức là gia đình đó mua 0,6 kg thịt bò và 0,7 kg thịt lợn thì chi phí là ít nhất).

Câu 2: Một phân xưởng sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần thời gian làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai. Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc. Phân xưởng làm việc 8 tiếng mỗi ngày và thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một chiếc mũ kiểu thứ nhất là 24 nghìn đồng, một chiếc mũ kiểu thứ hai là 15 nghìn đồng. Gọi số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai mà phân xưởng cần sản xuất trong một ngày lần lượt là x, y .

a) Thời gian để làm ra x chiếc mũ kiểu thứ nhất và y chiếc mũ kiểu thứ hai là $\frac{2x-y}{60}$ (giờ)

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 200 \\ 0 \leq y \leq 240 \\ 2x + y \leq 480 \end{cases}$$

b) Hệ bất phương trình thoả mãn yêu cầu đề bài là

c) Phân xưởng cần sản xuất 120 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai thì thu được số tiền lãi là cao nhất.

d) Số tiền lãi mà phân xưởng thu được cao nhất là 6 480 000 đồng.

Lời giải

a) Sai: Gọi số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai mà phân xưởng cần sản xuất trong một ngày lần lượt là x, y ($x, y \geq 0, x, y \in \mathbb{N}$).

Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai là: $\frac{1}{60}$ (giờ).

Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất là: $2 \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{30}$ (giờ).

Thời gian để làm ra x chiếc mũ kiểu thứ nhất và y chiếc mũ kiểu thứ hai là:

$$\frac{1}{30}x + \frac{1}{60}y = \frac{2x + y}{60} \text{ (giờ)}$$

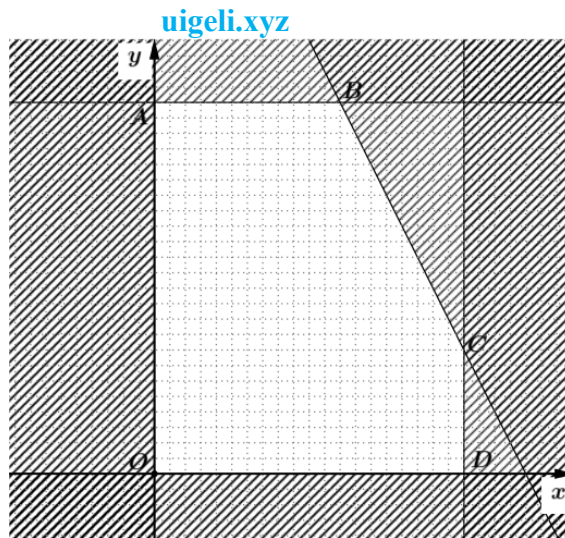
b) Đúng: Theo giả thiết, x và y phải thoả mãn các điều kiện: $0 \leq x \leq 200, 0 \leq y \leq 240$;

$$\frac{2x + y}{60} \leq 8 \quad \text{hay} \quad 2x + y \leq 480.$$

Tổng số tiền lãi thu được khi bán x chiếc mũ kiểu thứ nhất và y chiếc mũ kiểu thứ hai là:
 $T = 24x + 15y$ (nghìn đồng).

Bài toán đưa về: Tìm các số nguyên x, y là nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 200 \\ 0 \leq y \leq 240 \quad (II) \\ 2x + y \leq 480 \end{cases} \quad \text{sao cho } T = 24x + 15y \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$



c) Đúng: Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (II) .

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (II) là miền ngũ giác $OABCD$ với $O(0;0)$, $A(0;240)$, $B(120;240)$, $C(200;80)$, $D(200;0)$.

Ta có biểu thức $T = 24x + 15y$ có giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của ngũ giác $OABCD$.

Tính giá trị của biểu thức $T = 24x + 15y$ tại cặp số $(x; y)$ là tọa độ các đỉnh của ngũ giác $OABCD$ rồi so sánh các giá trị đó. Ta được T đạt giá trị lớn nhất bằng 6480 khi $x = 120, y = 240$ ứng với tọa độ đỉnh B .

d) Đúng: Vậy để thu được tiền lãi là cao nhất thì trong một ngày, phân xưởng cần sản xuất 120 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Khi đó tiền lãi thu được là 6480 nghìn đồng hay 6480000 đồng.

Câu 3: Một phân xưởng may áo vest và quần âu để chuẩn bị cho dịp cuối năm. Biết may 1 áo vest hết $2m$ vải và cần 20 giờ; 1 quần âu hết $1,5m$ vải và cần 5 giờ. Xí nghiệp được giao sử dụng không quá $900m$ vải và số giờ công không vượt quá 6000 giờ. Theo khảo sát thị trường, số lượng quần bán ra không nhỏ hơn số lượng áo và không vượt quá 2 lần số lượng áo. Khi xuất ra thị trường, 1 chiếc áo lãi 350 nghìn đồng, 1 chiếc quần lãi 100 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số áo vest và quần âu phân xưởng cần may

$$\begin{cases} 2x + 1,5y \leq 900 \\ 20x + 5y \leq 6000 \\ x \leq y \leq 2x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a) Hệ phương trình thỏa mãn điều kiện của bài toán là

b) Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền tứ giác

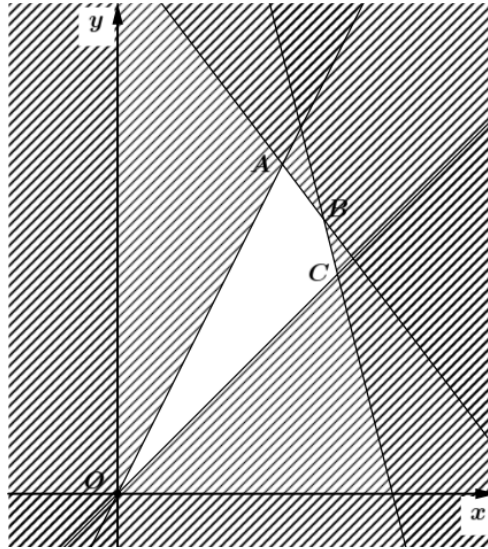
c) Phân xưởng cần may 225 áo vest và 300 quần âu thì thu được tiền lãi cao nhất (giả sử rằng thị trường tiêu thụ luôn đón nhận sản phẩm của xí nghiệp).

d) Tiền lãi cao nhất mà phân xưởng thu được là 108750000 đồng.

Lời giải

a) Đúng: Điều kiện $(x \geq 0, y \geq 0; x, y \in \mathbb{Q})$

Tiền lãi thu được $T = 350x + 100y$ (nghìn đồng).



$$\begin{cases} 2x + 1,5y \leq 900 \\ 20x + 5y \leq 6000 \\ x \leq y \leq 2x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ta có hệ bất phương trình:

b) Đúng: Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền tứ giác $OABC$ với

$O(0;0), A(180;360), B(225;300); C(240;240)$

c) Đúng: Ta được T đạt giá trị lớn nhất khi $x = 225, y = 300$ ứng với toạ độ đỉnh $B(225;300)$.

d) Đúng: Vậy để thu được tiền lãi cao nhất thì phân xưởng cần may 225 chiếc áo vest và 300 quần âu.

Câu 4: Bác An đầu tư 1,2 tỉ đồng vào ba loại trái phiếu, trái phiếu chính phủ với lãi suất 7% một năm, trái phiếu ngân hàng với lãi suất 8% một năm và trái phiếu doanh nghiệp rủi ro cao với lãi suất 12% một năm. Vì lí do giảm thuế, bác An muốn số tiền đầu tư trái phiếu chính phủ gấp ít nhất 3 lần số tiền đầu tư trái phiếu ngân hàng. Hơn nữa, để giảm thiểu rủi ro, bác An đầu tư không quá 200 triệu đồng cho trái phiếu doanh nghiệp. Gọi x là số tiền mua trái phiếu ngân hàng và y là số tiền mua trái phiếu doanh nghiệp

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + y \leq 1200 \\ y \geq 200 \end{cases}$$

a) Hệ phương trình thoả mãn yêu cầu đề bài là

b) Nếu bác an chỉ đầu tư 300 triệu đồng mua trái phiếu ngân hàng thì lợi nhuận trong một năm mà bác An nhận được là 94 triệu đồng.

c) Bác An nên đầu tư 250 triệu đồng trái phiếu ngân hàng, 200 triệu trái phiếu doanh nghiệp và 750 trái phiếu chính phủ thì lợi nhuận thu được sau một năm là lớn nhất.

d) Lợi nhuận bác An thu được nhiều nhất sau một năm là $96,5$ triệu đồng.

Lời giải

	Trái phiếu chính phủ	Trái phiếu ngân hàng	Trái phiếu doanh nghiệp
Lãi suất	7% / năm	8% / năm	12% / năm

Đổi 1,2 tỉ đồng = 1200 (triệu đồng)

Gọi x là số tiền mua trái phiếu ngân hàng và y là số tiền mua trái phiếu doanh nghiệp.

Khi đó $x \geq 0, y \geq 0$.

Bác An đầu tư 1,2 tỉ đồng vào ba loại trái phiếu, trái phiếu chính phủ nên số tiền đầu tư trái phiếu chính phủ là $1200 - x - y$ (triệu đồng)

Số tiền đầu tư trái phiếu chính phủ gấp ít nhất 3 lần số tiền đầu tư trái phiếu ngân hàng nên ta có: $1200 - x - y \geq 3x \Leftrightarrow 4x + y \leq 1200$

Bác An đầu tư không quá 200 triệu đồng cho trái phiếu doanh nghiệp nên $y \leq 200$

a) Sai: Từ điều kiện của bài toán ta có số tiền bác An đầu tư trái phiếu phải thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + y \leq 1200 \\ y \leq 200 \end{cases}$$

Miền nghiệm là miền tứ giác $OABC$ với: $O(0;0)$, $A(300;0)$, $B(250;200)$, $C(0;200)$

Lợi nhuận thu được sau một năm là:

$$F(x; y) = (1200 - x - y) \cdot 7\% + x \cdot 8\% + y \cdot 12\% = 84 + 0,01x + 0,05y$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $F(x; y)$ khi $(x; y)$ thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + y \leq 1200 \\ y \leq 200 \end{cases}$

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = 3x - 2y$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc

$$\begin{cases} x + y - 3 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

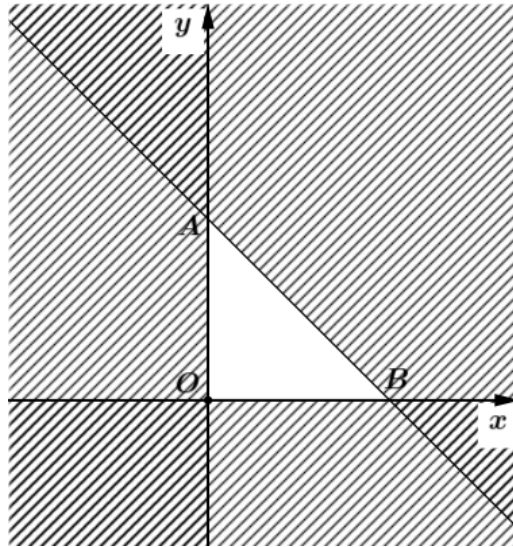
nhất hai ẩn

Lời giải

Biểu diễn miền nghiệm của hệ phương trình
miền tam giác OAB .

$$\begin{cases} x + y - 3 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

trên hệ trục tọa độ Oxy ta được



Tọa độ các đỉnh của tam giác là $O(0;0); A(0;3); B(3;0)$.

Tính các giá trị của F tại các đỉnh của đa giác ta có: $F(0;0) = 0$; $F(0;3) = -6$; $F(3;0) = 9$

Vậy F đạt giá trị lớn nhất bằng 9.

Câu 2: Gọi $(x; y)$ là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x - 2y - 2 \leq 0 \\ 4x - 3y + 12 \geq 0 \\ x + 3y + 3 \geq 0 \\ 2x + y - 4 \leq 0 \end{cases}$$

thức $F = 4x + 5y - 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

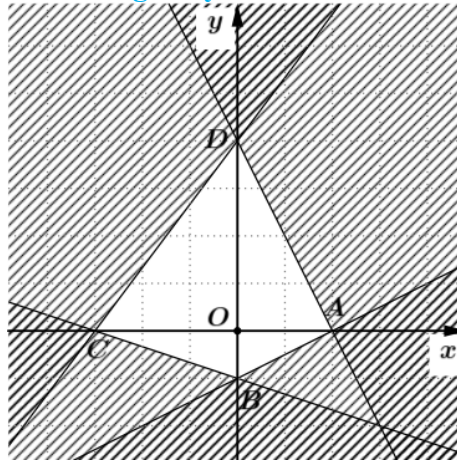
Lời giải

Vẽ các đường thẳng $d_1: x - 2y - 2 = 0$; $d_2: 4x - 3y + 12 = 0$; $d_3: x + 3y + 3 = 0$;

$d_4: 2x + y - 4 = 0$

Xét điểm $O(0;0)$ ta có O thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình (miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần không bị gạch chéo trong hình vẽ dưới đây).

Trong hình vẽ trên miền nghiệm của hệ là tứ giác $ABCD$.



Tại $A(2;0)$ ta có $F(2;0) = 2$.

Tại $B(0;-1)$ ta có $F(0;-1) = -11$.

Tại $C(-3;0)$ ta có $F(-3;0) = -18$.

Tại $D(0;4)$ ta có $F(0;4) = 14$.

Vậy với $(x;y)$ là nghiệm của hệ thì F đạt giá trị lớn nhất là 14 khi $x=0; y=4$.

Câu 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x;y) = 4x + 3y$ trong miền đa giác lồi sau

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases}$$

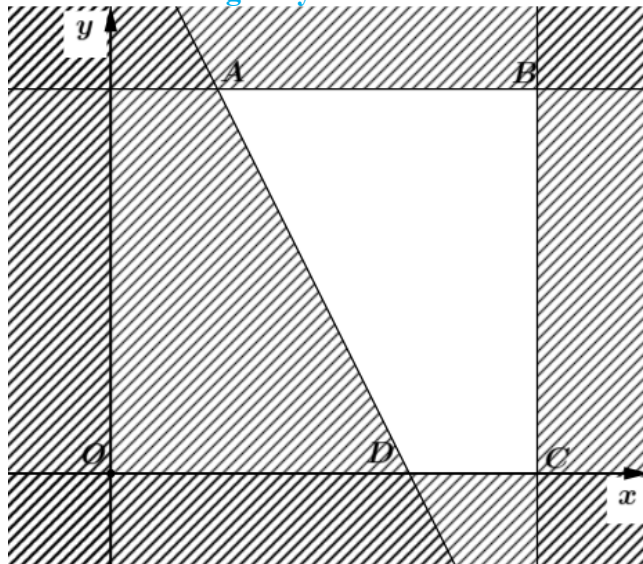
Lời giải

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ phương trình trên hệ trục tọa độ Oxy ta được

$$A\left(\frac{5}{2}; 9\right); B(10; 9); C(10; 2); D(5; 4)$$

miền tứ giác $ABCD$. Tọa độ các đỉnh của tứ giác là



Tính các giá trị của f tại các đỉnh đa giác ta có: $f\left(\frac{5}{2}; 9\right) = 37$; $f(10; 9) = 67$; $f(10; 2) = 46$;
 $f(5; 4) = 32$; $f(x; y)$
 . Vậy đạt giá trị nhỏ nhất bằng 32.

Câu 4: Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ x + 3y \geq -2 \\ x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$
. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y) = 2x - 3y$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

B

C

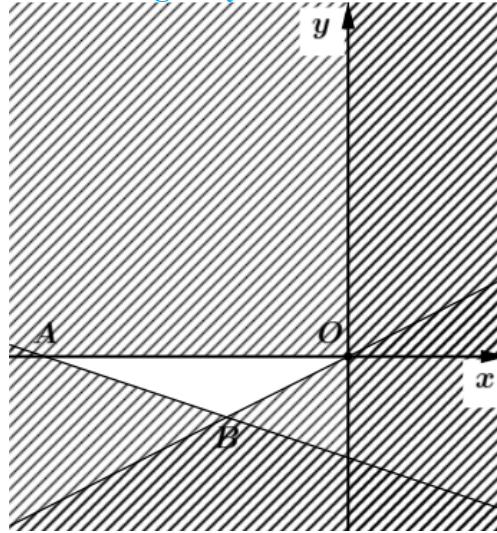
Lời giải

$$\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ x + 3y \geq -2 \\ x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ phương trình trên hệ trục tọa độ Oxy ta được miền

$$A(-2; 0); B(0; 0); C\left(-\frac{4}{5}; -\frac{2}{5}\right)$$

tam giác ABC . Tọa độ các đỉnh của tứ giác là



Tính các giá trị của tại các đỉnh tam giác ta có:

$$f(-2; 0) = -4; f(0; 0) = 0; f\left(-\frac{4}{5}; -\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5}$$

Vậy $f(x; y) = 0$ đạt giá trị lớn nhất là 0.

Câu 5: Cho x, y thỏa $\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ y+1 \geq 0 \\ x-y+3 \geq 0 \end{cases}$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 2x + y$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

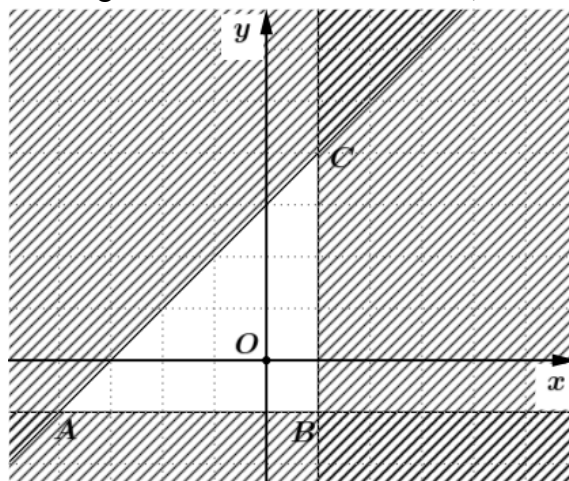
A

D

Ta có $\begin{cases} x-1 \leq 0 & (1) \\ y+1 \geq 0 & (2) \\ x-y+3 \geq 0 & (3) \end{cases}$ B

C

Vẽ các đường thẳng sau trên cùng hệ trục tọa độ: $d_1: x-1=0$; $d_2: y+1=0$; $d_3: x-y+3=0$



Điểm O thỏa mãn cả ba bất phương trình (1), (2), (3) nên miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền được tô màu. Kể cả các đường thẳng d_1, d_2, d_3 .

Gọi $A(-4; -1)$ là giao điểm của d_2 và d_3 . Tại $A(-4; -1) \Rightarrow M = -9$.
 $B(1; -1)$ là giao điểm của d_1 và d_2 . Tại $B(1; -1) \Rightarrow M = 1$.
 $C(1; 4)$ là giao điểm của d_1 và d_3 . Tại $C(1; 4) \Rightarrow M = 6$.
 Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 2x + y$ bằng -9

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ x + 2y - 10 \leq 0 \end{cases}$$

Câu 6: Giá trị lớn nhất của biểu thức $F(x; y) = x + 2y$ với điều kiện là

Lời giải

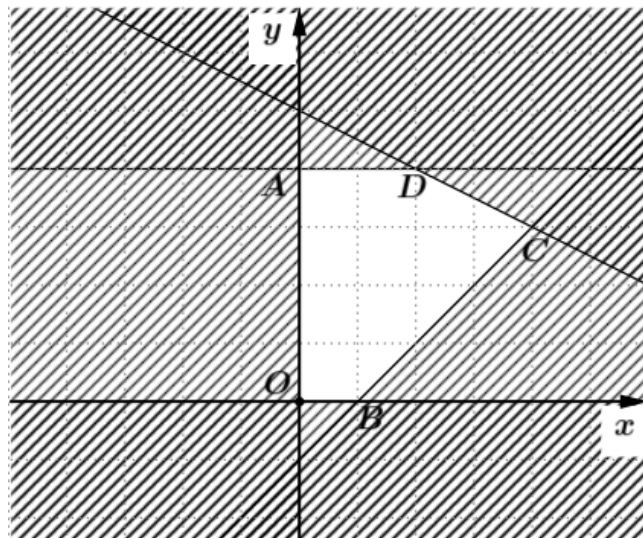
Trên cùng hệ trục tọa độ Oxy :

Vẽ miền nghiệm của $0 \leq y \leq 4$ có biên là trục hoành Ox và đường thẳng $y = 4$.

Vẽ miền nghiệm của $x \geq 0$ có biên là trục tung Oy .

Vẽ miền nghiệm của đường thẳng $x - y - 1 \leq 0$ có biên là đường thẳng $x - y - 1 = 0$.

Vẽ miền nghiệm của đường thẳng $x + 2y - 10 \leq 0$ có biên là đường thẳng $x + 2y - 10 = 0$.



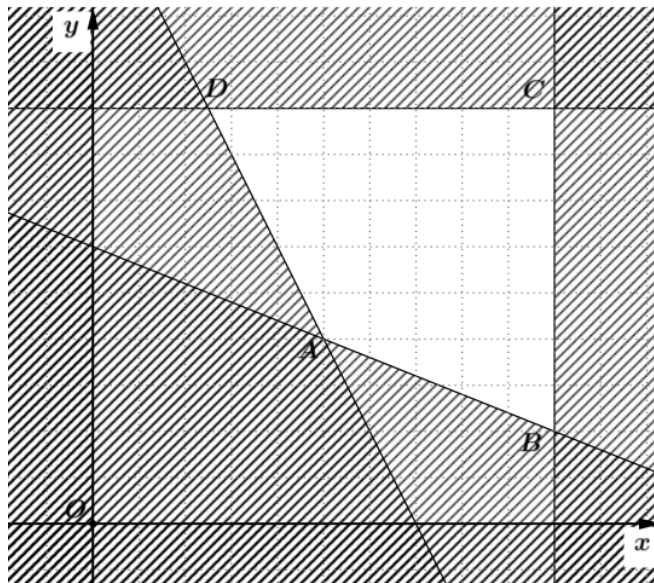
Khi đó $F(x; y) = x + 2y$ sẽ đạt lớn nhất tại một trong các điểm $A(0;4)$, $B(1;0)$, $O(0;0)$, $C(4;3)$ và $D(2;4)$.

Thử với từng điểm ta có $F(x; y) = x + 2y$ đạt giá trị lớn nhất bằng 10 tại điểm $C(4;3)$ hoặc $D(2;4)$.

$$\begin{cases} 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases}$$

Câu 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(x; y) = 4x + 3y$ biết

Miền nghiệm của hệ trên là tứ giác $ABCD$ (kể cả bờ)



Ta có : $A(5; 4); B(10; 2); C(10; 9); D\left(\frac{5}{2}; 9\right)$

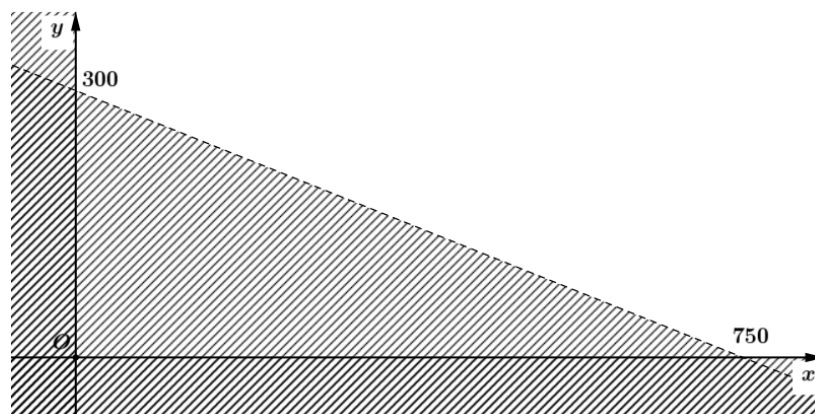
Các giá trị : $f(5; 4) = 32; f(10; 2) = 46; f(10; 9) = 67; f\left(\frac{5}{2}; 9\right) = 37$

Suy ra $f(x; y)$ nhỏ nhất khi $(x; y) = (5; 4)$.

Câu 8: Nhân dịp tết trung thu, một rạp xiếc tổ chức lưu diễn tại các xã. Vé được bán ra gồm 2 loại: Loại 1 (dành cho trẻ dưới 13 tuổi): 20000 đồng/vé; Loại 2 (dành cho người từ 13 tuổi trở lên): 50000 đồng/vé. Người ta tính toán rằng, để không phải bù lỗ thì số tiền mỗi buổi biểu diễn phải đạt tối thiểu 15 triệu đồng. Gọi x, y lần lượt là số vé loại 1 và loại 2 mà rạp xiếc bán được. Trong trường hợp rạp xiếc có lãi, tính giá trị nhỏ nhất của $x + y$.

Lời giải

Từ giả thiết, ta có
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 20000x + 50000y > 15000000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 5y > 1500 \end{cases}$$



Vẽ các đường thẳng $x = 0; y = 0; 2x + 5y = 1500$ trên cùng hệ trục tọa độ, khi đó miền nghiệm của hệ là phần không gian không bị gạch (không kể bờ). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + y$ chỉ có thể đạt được tại các điểm $(0;300); (750;0)$. Thay tọa độ các điểm $(0;300); (750;0)$ vào biểu thức $x + y$, ta có giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + y$ là 300.

Tuy nhiên, do miền nghiệm của hệ không lấy bờ nên ta có $x + y \geq 301$.

Câu 9: Trong một tuần, bạn An có thể thu xếp được tối đa 12 giờ để tập thể dục giảm cân bằng hai môn: đạp xe và cử tạ tại phòng tập. Cho biết mỗi giờ đạp xe sẽ tiêu hao 350 calo, mỗi giờ tập cử tạ sẽ tiêu hao 700 calo. An muốn tiêu hao nhiều calo nhưng không vượt quá 7000 calo một tuần. Do tuần này xe đạp bị hỏng nên bạn An không thể đạp xe được. Để lượng calo tiêu hao là nhiều nhất thì bạn An cần tập tạ trong bao nhiêu giờ?

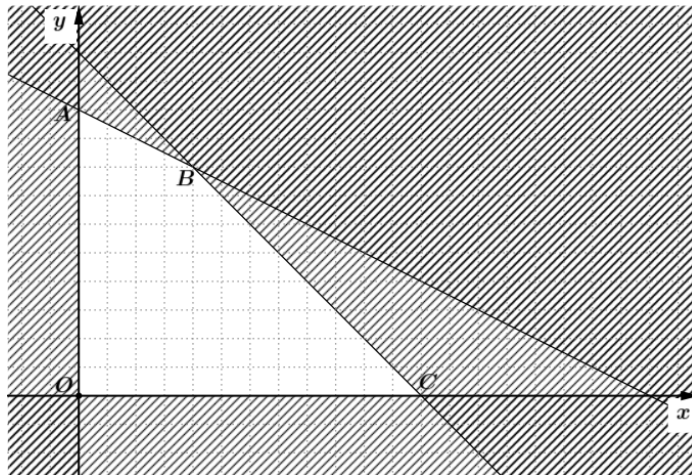
Lời giải

Gọi x là số giờ đạp xe và y là số giờ cử tạ trong tuần của An.

$$\begin{cases} x + y \leq 12 \\ 350x + 700y \leq 7000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ta có hệ bất phương trình:

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình ta được miền tứ giác $OABC$ có tọa độ các đỉnh là: $O(0;0); A(0;10); B(4;8); C(12;0)$.



Số calo tiêu hao $G = 350x + 700y$ đạt giá trị lớn nhất bằng 7000 tại $(4;8)$ hoặc tại $(0;10)$.

Câu 10: Trong một cuộc thi gói bánh vào dịp năm mới, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 20 kg gạo nếp, 2kg thịt ba chỉ, 5kg đậu xanh để gói bánh chưng và bán hồng. Để gói một cái bánh chưng cần 0,4kg gạo nếp, 0,05 kg thịt và 0,1 kg đậu xanh; để gói một cái bánh hồng cần 0,6 kg gạo nếp, 0,075 kg thịt và 0,15kg đậu xanh. Mỗi cái bánh chưng nhận được 5 điểm thưởng, mỗi cái bánh hồng nhận được 7 điểm thưởng. Hỏi điểm thưởng cao nhất có thể đạt được là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số bánh chưng và bánh hồng gói được lần lượt là $x, y (x \geq 0; y \geq 0)$ khi đó số điểm thưởng là: $T(x; y) = 5x + 7y$.

Số kg gạo nếp cần dùng là: $0,4x + 0,6y$

Số kg thịt ba chỉ cần dùng là: $0,06x + 0,75y$

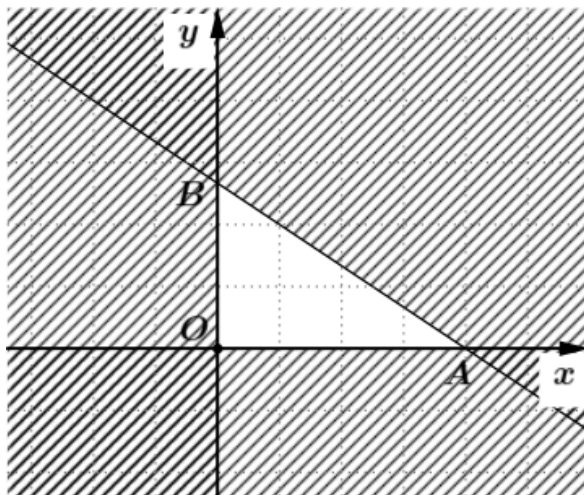
Số kg đậu xanh cần dùng là: $0,1x + 0,15y$

Theo yêu cầu bài toán ta có miền nghiệm là hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 0,4x + 0,6y \\ 0,06x + 0,75y \\ 0,1x + 0,15y \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 100 \\ 2x + 3y \leq 80 \\ 2x + 3y \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 80 \\ x, y \geq 0 \end{cases} (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tam giác OAB với $O(0;0); A(40;0); B\left(0; \frac{80}{3}\right)$.



Ta có: $f(0;0) = 0; f(40;0) = 200; f\left(0; \frac{80}{3}\right) = \frac{560}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của $f(x; y)$ là $f(40;0) = 200$.

Câu 11: Trong năm nay, một cửa hàng điện lạnh dự định kinh doanh hai loại máy điều hòa: điều hòa hai chiều và điều hòa một chiều với số vốn ban đầu không vượt quá 1,2 tỉ đồng



	Điều hoà hai chiều	Điều hoà một chiều
Giá mua vào	20 triệu đồng/1 máy	10 triệu đồng/1 máy
Lợi nhuận dự kiến	3,5 triệu đồng/1 máy	2 triệu đồng/1 máy

Cửa hàng ước tính rằng tổng nhu cầu của thị trường sẽ không vượt quá 100 máy cả hai loại. Cần đầu tư kinh doanh x loại máy hai chiều và y loại máy một chiều thì lợi nhuận thu được là lớn nhất. Tính $x + y$?

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số máy điều hoà hai chiều và số máy điều hoà một chiều mà chủ cửa hàng đầu tư
 $(x \geq 0; y \geq 0)$

$$x + y \leq 100$$

Vì nhu cầu của thị trường không vượt quá 100 máy cả hai loại nên

$$20x + 10y$$

Số tiền đầu tư là (triệu đồng)

$$20x + 10y \leq 1200$$

Vì số vốn ban đầu không qua 1,2 tỉ nên

$$F(x; y) = 3,5x + 2y$$

Lợi nhuận thu về dự kiến:

(triệu đồng)

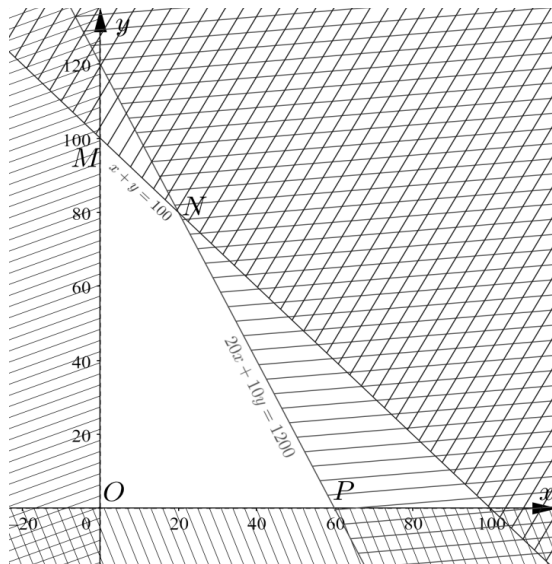
$$F(x; y)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm trên miền hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 100 \\ 20x + 10y \leq 1200 \end{cases} \quad (*)$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác $OMNP$ với

$$O(0;0); M(0;100); N(20;80); P(60;0)$$



Tính giá trị của $F(x; y)$ tại các đỉnh của tứ giác ta thu được giá trị lớn nhất của $F(x; y)$ là $F(20; 80)$. Vậy $x = 20; y = 80$ nên $x + y = 100$.

Câu 12: Một bãi đậu xe ban đêm có diện tích đậu xe là 150m^2 (không tính lối đi cho xe ra vào). Cho biết xe du lịch cần diện tích 3m^2 mỗi chiếc và phải trả phí 40 nghìn đồng, xe tải cần diện tích 5m^2 mỗi chiếc và phải trả phí 50 nghìn đồng. Nhân viên quản lí không thể phục vụ quá 40 xe một đêm. Hãy tính số lượng xe mỗi loại mà chủ bãi xe có thể cho đăng kí đậu xe để có doanh thu cao nhất.



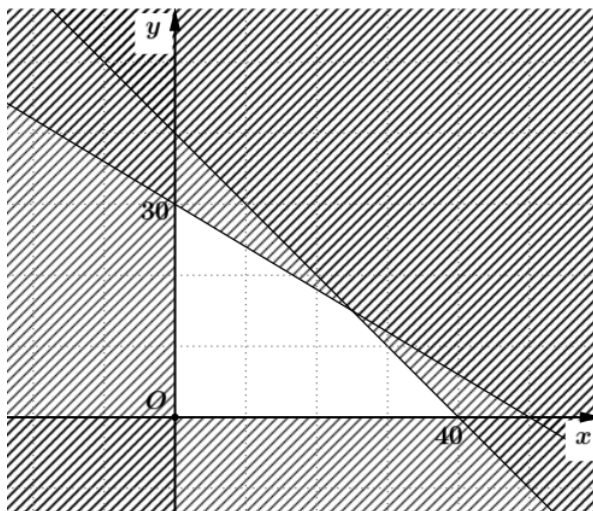
Lời giải

Gọi x là số xe du lịch và y là số xe tải mà chủ bãi xe nên cho đậu một đêm.

$$\begin{cases} x + y \leq 40 \\ 3x + 5y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ta có hệ bất phương trình:

Miền không gạch chéo bao gồm cả các cạnh trong hình dưới đây là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên.



Số tiền chủ bãi xe thu được $F = 40x + 50y$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1750 nghìn đồng tại điểm có toạ độ $(25; 15)$.

Vậy để có doanh thu cao nhất chủ bãi xe có thể cho đăng kí 25 chiếc xe du lịch và 15 chiếc xe tải.

