

CHUYÊN ĐỀ ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM GIẢI CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Sơ đồ khảo sát hàm số

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

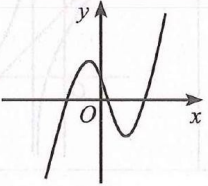
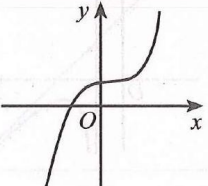
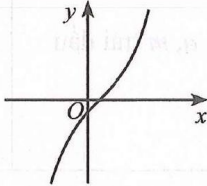
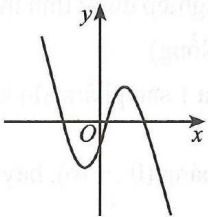
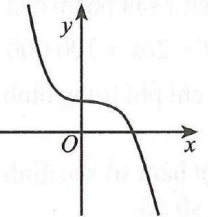
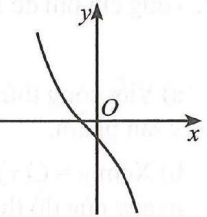
Bước 2. Xét sự biến thiên của hàm số

- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có).
- Lập bảng biến thiên của hàm số, bao gồm: tính đạo hàm của hàm số, xét dấu đạo hàm, xét chiều biến thiên và tìm cực trị của hàm số (nếu có), điền các kết quả vào bảng.

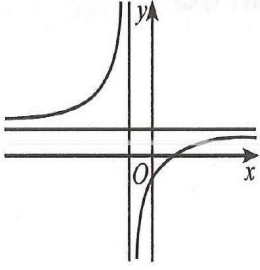
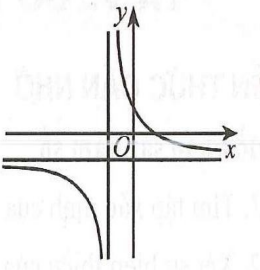
Bước 3. Vẽ đồ thị hàm số

- Vẽ các đường tiệm cận (nếu có).
- Xác định các điểm đặc biệt của đồ thị: cực trị, giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (trong trường hợp đơn giản),...
- Nhận xét về đặc điểm của đồ thị: chỉ ra tâm đối xứng, trục đối xứng (nếu có).

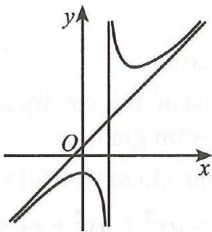
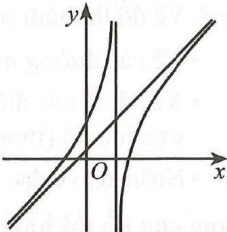
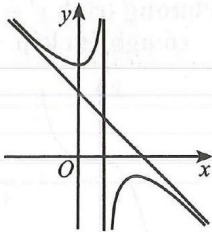
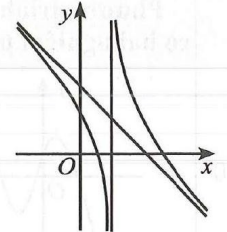
2. Dạng của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

	Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt	Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép	Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm
$a > 0$			
$a < 0$			

3. Dạng của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

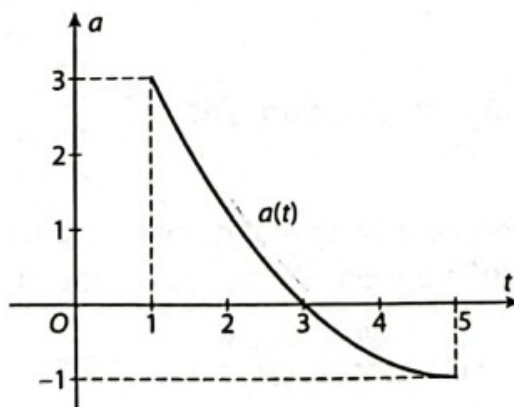
$ad - bc > 0$	$ad - bc < 0$
	

4. Dạng của đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$)

	Hàm số có cực trị	Hàm số không có cực trị
a, m cùng dấu		
a, m trái dấu		

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Gia tốc $a(t)$ của một vật chuyển động, t tính theo giây, từ giây thứ nhất đến giây thứ 5 là một hàm liên tục có đồ thị như sau:



- Lập bảng biến thiên của hàm vận tốc $y = v(t)$ của vật, với $t \in [1; 5]$
- Tại thời điểm nào vật chuyển động với vận tốc lớn nhất?

Câu 2: Một mẫu giấy in hình chữ nhật được thiết kế với vùng in có diện tích 300cm^2 , lề trái và lề phải là 2 cm, lề trên và lề dưới là 3 cm. Gọi $x(\text{cm})$ là chiều rộng của tờ giấy.

- Tính diện tích của tờ giấy theo x

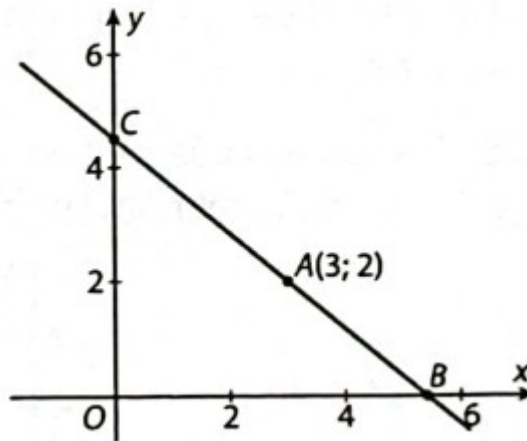
- Kí hiệu diện tích tờ giấy là $S(x)$. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = S(x)$
- Tìm kích thước của tờ giấy sao cho nguyên liệu giấy được sử dụng là ít nhất.

Câu 3: Giả sử chi phí để sản xuất x sản phẩm của một nhà máy được cho bởi $C(x) = 0,2x^2 + 10x + 5$

(triệu đồng). Khi đó chi phí trung bình để sản xuất một đơn vị sản phẩm là $f(x) = \frac{C(x)}{x}$

- Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$
- Số lượng sản phẩm cần sản xuất là bao nhiêu để chi phí trung bình là thấp nhất?

Câu 4: Cho điểm $A(3;2)$ trên mặt phẳng tọa độ. Một đường thẳng đi qua A cắt trục hoành tại B, cắt trục tung tại C tạo thành một tam giác OBC nằm trong góc phần tư thứ nhất, với O là gốc tọa độ.



- a) Biết hoành độ điểm B là $x = t$ với $t > 3$. Tính diện tích tam giác OBC theo t . Kí hiệu diện tích này là $S(t)$
- b) Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = S(t)$.
- c) Tìm vị trí điểm B để diện tích tam giác OBC là nhỏ nhất.

Câu 5: Một quần thể cá được nuôi trong một hồ nhân tạo lúc ban đầu có 80000 con. Sau t năm, số

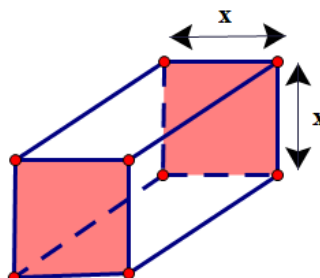
lượng quần thể cá nói trên được xác định bởi

$$N(t) = \frac{20(4 + 3t)}{1 + 0,05t} \quad (\text{nghìn con})$$

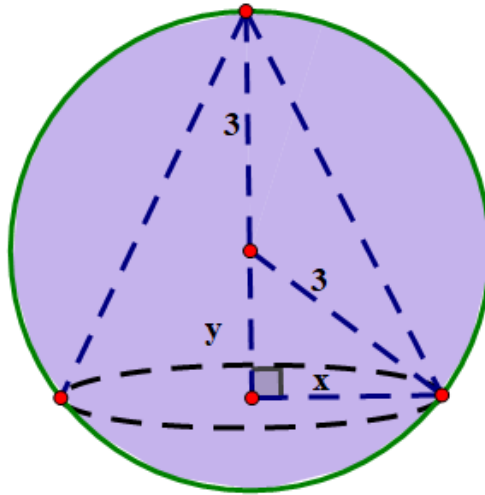
- a) Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = N(t)$.
- b) Số lượng tối đa có thể có của quần thể cá là bao nhiêu?

Câu 6: Một khối брун kiện hình hộp chữ nhật được quy định về kích cỡ như sau: tổng chiều dài và chu vi thiết diện ngang (hình vuông) là 240 cm. Gọi x là độ dài cạnh của thiết diện ngang.

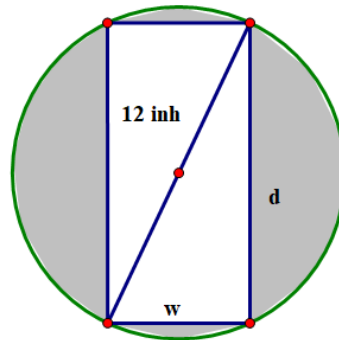
- a) Tính thể tích của khối брун kiện theo x .
- b) Kí hiệu $V(x)$ là thể tích của khối брун kiện. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = V(x)$.



Câu 7: Tìm thể tích lớn nhất của hình nón nội tiếp được trong hình cầu có bán kính bằng 3(xem hình vẽ)



Câu 8: Độ bền S của dầm gỗ hình chữ nhật tỉ lệ với tích của chiều rộng w và bình phương chiều sâu d của nó (xem hình vẽ). Tìm kích thước của dầm gỗ bền nhất có thể được cắt từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính bằng 12 inch.



Câu 9: Ước tính chi phí hằng năm (tính bằng tỉ đồng) để một nhà máy loại bỏ $p\%$ chất gây ô nhiễm

$$C = C(p) = \frac{528p}{100 - p}, 0 \leq p < 100.$$

được cho bởi công thức

a) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi thế nào khi p tăng?

b) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không? Vì sao?

c) Xét tính đơn điệu của hàm số $C'(p)$. Giải thích ý nghĩa thực tiễn của kết quả này.

Câu 10: Một xưởng mộc dùng gỗ gụ để sản xuất 5 chiếc bàn mỗi ngày. Chi phí cho mỗi lần vận chuyển nguyên liệu là 5000 USD, chi phí để lưu trữ một đơn vị nguyên liệu là 10 USD mỗi ngày, trong đó một đơn vị là lượng nguyên liệu cần thiết để sản xuất 1 chiếc bàn. Hỏi mỗi lần xưởng mộc nên đặt mua bao nhiêu đơn vị nguyên liệu và bao lâu đặt giao nguyên liệu một lần để chi phí trung bình hằng ngày (bao gồm chi phí vận chuyển và chi phí lưu trữ) trong chu kì sản xuất giữa các lần giao hàng là ít nhất?

Câu 11: Bác Hưng có một hàng rào thép dài 240 m và muốn rào cánh đồng thành một thửa ruộng hình chữ nhật giáp một con sông thẳng. Bác không cần rào phía cạnh con sông. Hỏi thửa ruộng có diện tích lớn nhất là bao nhiêu?

Câu 12: Doanh số bán hệ thống âm thanh nổi mới trong một khoảng thời gian dự kiến sẽ tuân theo

$$R = R(x) = \frac{5000}{1 + 5e^{-x}}, x \geq 0$$

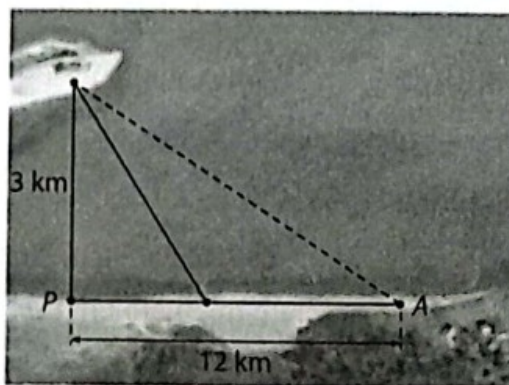
đường cong logistic

, trong đó thời gian x được tính bằng năm. Hỏi tốc độ bán hàng đạt tối đa vào năm nào?

Câu 13: Một chiếc hộp dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông và có thể tích là 2000cm^3 . Các kích thước của chiếc hộp là bao nhiêu nếu muốn lượng vật liệu dùng để sản xuất chiếc hộp là nhỏ nhất?

Câu 14: Một hòn đảo nhỏ cách điểm P trên bờ biển khoảng 3 km, một thị trấn ở điểm A cách điểm P 12 km (xem

hình vẽ). Nếu một người trên đảo chèo thuyền với vận tốc $2,5\text{km/h}$ và đi bộ với vận tốc 4km/h thì thuyền nên neo đậu ở vị trí nào trên đoạn PA để người đó đến thị trấn trong thời gian ngắn nhất?



Câu 15: Chứng tỏ rằng một thùng hình trụ có thể tích V cố định cần ít vật liệu sản xuất nhất (tức là có diện tích bề mặt nhỏ nhất) khi chiều cao của thùng gấp đôi bán kính đáy.

Câu 16: Ở 0°C , sự mất nhiệt H (tính bằng $\text{Kcal}/\text{m}^2\text{h}$, ở đây Kcal là kilocalories và $1\text{Kcal} = 1000\text{calo}$) từ cơ thể của một người có thể được mô hình hoá bằng công thức $H = 33(10\sqrt{v} - v + 10,45)$, trong đó v là tốc độ gió (tính bằng m/s) (Theo sách *Brief Calculus: An Applied Approach, 8th edition, Congate Learning, 2009*).

a) Xét tính đơn điệu của hàm số H và giải thích ý nghĩa thực tiễn của kết quả nhận được.

b) Tìm tốc độ thay đổi của H khi $v = 2\text{m/s}$. Giải thích ý nghĩa thực tiễn của kết quả này.

Câu 17: Doanh thu R (USD) từ việc cho thuê x căn hộ có thể được mô hình hoá bằng hàm số:

$$R = 2x(900 + 32x - x^2).$$

a) Tìm hàm doanh thu biên.

b) Tìm doanh thu biên khi $x = 14$ và giải thích ý nghĩa thực tiễn của nó.

c) Tìm lượng doanh thu tăng thêm khi số căn hộ cho thuê tăng từ 14 lên 15.

Câu 18: Một công ty ước tính rằng chi phí C (USD) để sản xuất x đơn vị sản phẩm có thể được mô hình hoá bằng công thức: $C = 800 + 0,04x + 0,0002x^2$. Tìm mức sản xuất sao cho chi phí trung

bình $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ cho mỗi đơn vị hàng hoá là nhỏ nhất.

Câu 19: a) Nếu $C(x)$ (USD) là chi phí sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì chi phí trung bình cho mỗi đơn

vi là $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$. Chứng minh rằng nếu chi phí trung bình là nhỏ nhất thì chi phí biên bằng chi phí trung bình.

b) Nếu $C(x) = 16000 + 200x + 4x^{3/2}$, hãy tìm:

(i) Chi phí, chi phí trung bình và chi phí biên khi sản xuất 100 đơn vị hàng hoá;

(ii) Mức sản xuất mà khi đó sẽ giảm thiểu chi phí trung bình;

(iii) Chi phí trung bình nhỏ nhất.

Câu 20: a) Chứng tỏ rằng nếu lợi nhuận $P(x)$ là cực đại thì doanh thu biên bằng chi phí biên.

b) Cho $C(x) = 16000 + 500x - 1,6x^2 + 0,004x^3$ là hàm chi phí và $P(x) = 1700 - 7x$ là hàm cầu. Hãy tìm mức sản xuất sẽ tối đa hoá lợi nhuận.

Câu 21: Lợi nhuận một xưởng thu được từ việc sản xuất một mặt hàng được cho bởi công thức $P(q) = -q^3 + 24q^2 + 780q - 5000$ (nghìn đồng) trong đó $q(\text{kg})$ là khối lượng sản phẩm sản xuất được. Xưởng chỉ sản xuất được tối đa 50 kg sản phẩm trong một tuần.

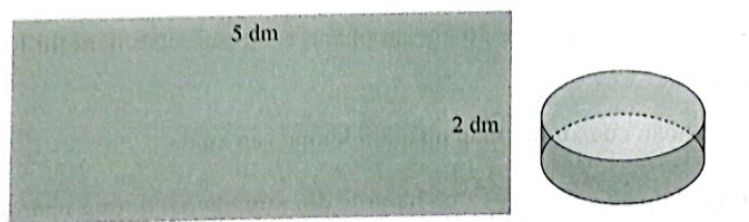
a) Xưởng sản xuất càng nhiều thì lợi nhuận càng cao.

b) Lợi nhuận lớn nhất khi xưởng sản xuất 26 kg sản phẩm trong một tuần.

c) Sau khi sản xuất được 26 kg sản phẩm, càng sản xuất thêm thì lợi nhuận càng giảm.

d) Lợi nhuận của xưởng thấp nhất khi không sản xuất.

Câu 22: Nam dùng một tấm bìa có kích thước $50\text{cm} \times 20\text{cm}$ để làm một chiếc lon hình trụ (không có nắp).



Hỏi cần chọn bán kính đáy hình trụ là bao nhiêu xăngtimét thì lon hình trụ đạt thể tích lớn nhất?

Câu 23: Một chủ nhà hàng kinh doanh phần ăn đồng giá có chiến lược kinh doanh như sau:

- Phí cố định được ước tính trong một năm là 50000 nghìn đồng.

- Chi phí một phần ăn ước tính khoảng 22 nghìn đồng.

- Giá niêm yết trên thực đơn là 30 nghìn đồng.

Trong bài này, giả định rằng tất cả các phần ăn chế biến sẵn đều được bán hết và kí hiệu x là số phần ăn phục vụ trong một năm, giả sử x thuộc khoảng $[5000; 25000]$

a) Gọi $C(x)$ là tổng chi phí hằng năm cho x phần ăn này. Xác định $C(x)$.

b) Chứng tỏ rằng giá thành của một phần ăn cho bởi biểu thức $D(x) = 22 + \frac{50000}{x}$ (nghìn đồng)

c) Sử dụng đồ thị, hãy xác định điểm hoà vốn của nhà hàng, tức là số lượng phần ăn tối thiểu phải được phục vụ hằng năm để hoạt động của nhà hàng tạo ra lợi nhuận. Hãy chứng minh điều đó.

d) Chứng minh rằng tổng lợi nhuận hằng năm cho x phần ăn được biểu thị bởi:

$$L(x) = 8x - 50000 \quad (\text{nghìn đồng}).$$

e) Mục tiêu của chủ nhà hàng là tạo ra lợi nhuận ít nhất là 120000 nghìn đồng mỗi năm. Biết rằng nhà hàng mở cửa 300 ngày một năm, hỏi trung bình mỗi ngày nhà hàng phải phục vụ ít nhất bao nhiêu phần ăn để đạt được mục tiêu trên?

Câu 24: Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích 800cm^3 với yêu cầu dùng ít vật liệu nhất.

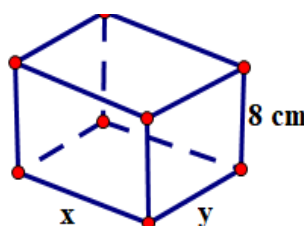
Chiều cao hộp là 8 cm, các kích thước khác là $x(\text{cm}), y(\text{cm})$ với $x > 0$ và $y > 0$.

a) Chứng tỏ rằng $y = \frac{100}{x}$.

b) Tìm diện tích toàn phần $S(x)$ của chiếc hộp theo x .

c) Khảo sát hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

d) Tìm kích thước của hộp để tiết kiệm vật liệu nhất. (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mi-li-mét.)



Câu 25: Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng.

Trong khoảng 70 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét (Nguồn: [A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016](#)).

a) Tìm thời điểm $t(0 \leq t \leq 70)$ sao cho con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng. Khoảng cách nhỏ nhất này là bao nhiêu?

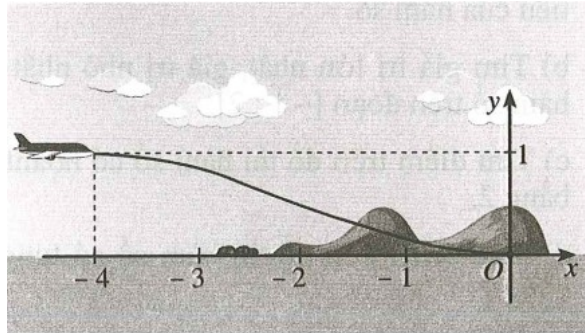
b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \leq t \leq 70$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 50km).

c) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \leq t \leq 70$. Xác định hàm số $v(t)$.

d) Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu đốt cháy các tên lửa hãm là bao nhiêu? Tại thời điểm $t = 25$ (giây) là bao nhiêu?

e) Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại?

Câu 26: Một máy bay loại nhỏ bắt đầu hạ cánh, đường bay của nó khi gắn với hệ trục tọa độ Oxy được mô phỏng ở hình. Biết đường bay của nó có dạng đồ thị hàm số bậc ba; vị trí bắt đầu hạ cánh có tọa độ $(-4; 1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số và máy bay tiếp đất tại vị trí gốc tọa độ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

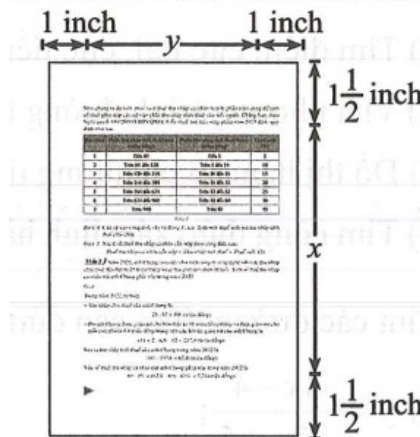


a) Tìm công thức xác định hàm số mô phỏng đường bay của máy bay trên đoạn $[-4; 0]$.

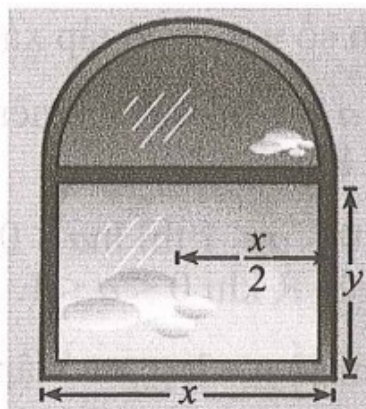
b) Khi máy bay cách vị trí hạ cánh theo phương ngang 3 dặm thì máy bay cách mặt đất bao nhiêu dặm? (Biết đơn vị trên hệ trục tọa độ là dặm).

c) Khi ở độ cao 0,5 dặm, máy bay cách vị trí hạ cánh theo phương ngang bao nhiêu dặm?

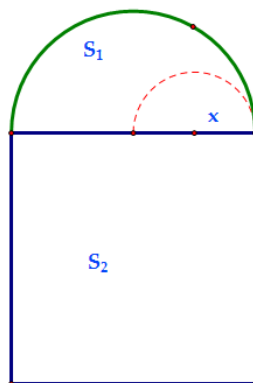
Câu 27: Một nhà in sử dụng các trang giấy hình chữ nhật để in sách. Sau khi để lề trái, lề phải, lề trên và lề dưới theo số liệu được cho ở hình thì diện tích phần in chữ trên trang sách là $24inch^2$. Tính kích thước của trang sách để diện tích giấy cần sử dụng là ít nhất?



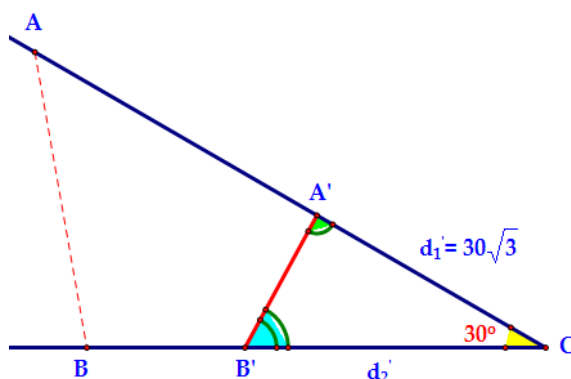
Câu 28: Một cửa sổ gồm phần dưới là một hình chữ nhật và phần vòm có hình bán nguyệt được mô tả ở hình. Tìm x, y để diện tích của cửa sổ lớn nhất, biết chu vi của cửa sổ là 5 m.



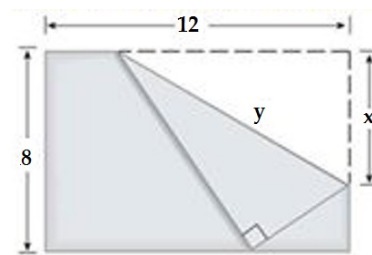
Câu 29: Cần phải làm cái cửa sổ mà phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là a mét (a chính là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi độ dài cạnh hình chữ nhật là dây cung của hình bán nguyệt). Gọi d là đường kính của hình bán nguyệt. Hãy xác định d để diện tích cửa sổ là lớn nhất.



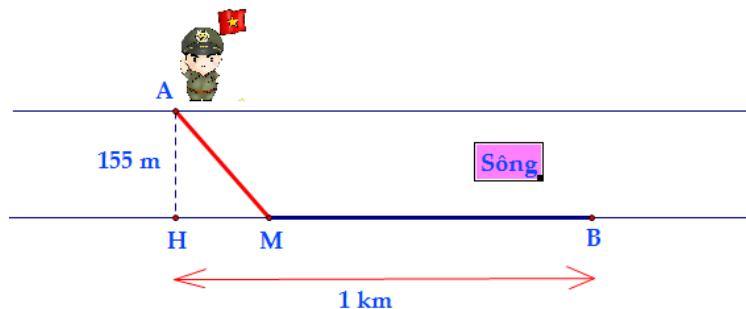
Câu 30: Hai chất điểm A và B chuyển động thẳng đều cùng hướng về O (như hình vẽ) biết rằng vận tốc $V_B = \frac{V_A}{\sqrt{3}}$ và góc $\angle AOB = 30^\circ$. Biết rằng khi khoảng cách giữa hai chất điểm A và B là nhỏ nhất thì A cách O một khoảng bằng $30\sqrt{3}(m)$. Tìm khoảng cách B đến O lúc đó?



Câu 31: Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài 12cm và chiều rộng 8cm. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho sau khi gấp, đỉnh của góc đó chạm dưới đáy như hình vẽ. Để độ dài nếp gấp là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?

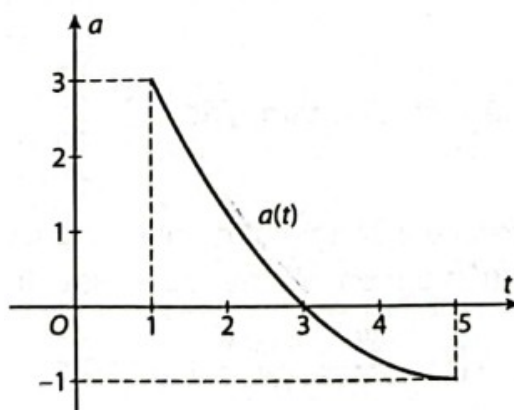


Câu 32: Trong bài thực hành của môn huấn luyện quân sự có tình huống chiến sĩ phải bơi qua một con sông để tấn công một mục tiêu ở phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 155m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng nửa vận tốc chạy trên bộ. Bạn hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất, nếu như dòng sông là thẳng, vận tốc dòng nước bằng 0 và mục tiêu B cách vị trí H là 1 km (xem hình vẽ)



LỜI GIẢI

Câu 1: Gia tốc $a(t)$ của một vật chuyển động, t tính theo giây, từ giây thứ nhất đến giây thứ 5 là một hàm liên tục có đồ thị như sau:



- a) Lập bảng biến thiên của hàm vận tốc $y = v(t)$ của vật, với $t \in [1; 5]$
 b) Tại thời điểm nào vật chuyển động với vận tốc lớn nhất?

Lời giải

Từ đồ thị của hàm $a(t), t \in [1; 5]$, ta có bảng biến thiên của hàm vận tốc $v(t)$ như sau:

t	1	3	5
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$	$v(1)$	v_{CB}	$v(5)$

Từ bảng biến thiên, ta thấy vật chuyển động với vận tốc lớn nhất tại giây thứ ba ($t = 3$).

Câu 2: Một mẫu giấy in hình chữ nhật được thiết kế với vùng in có diện tích $300cm^2$, lề trái và lề phải là 2 cm, lề trên và lề dưới là 3 cm. Gọi $x(cm)$ là chiều rộng của tờ giấy.
 a) Tính diện tích của tờ giấy theo x

b) Kí hiệu diện tích tờ giấy là $S(x)$. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = S(x)$

c) Tìm kích thước của tờ giấy sao cho nguyên liệu giấy được sử dụng là ít nhất.

Lời giải

Gọi $y(\text{cm})$ là chiều dài của tờ giấy. Theo giả thiết, ta có $(x-4)(y-6) = 300$. Suy ra $y = 6 + \frac{300}{x-4}$.

a) Diện tích của tờ giấy được thiết kế là: $S(x) = xy = \frac{x(6x+276)}{x-4}$.

b) Khảo sát sự biến thiên của hàm số $S(x)$:

Tập xác định: $(4; +\infty)$.

Sự biến thiên: Ta có $S(x) = 6x + 300 + \frac{1200}{x-4}$.

$$S'(x) = \frac{6(x-4)^2 - 1200}{(x-4)^2}, S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = 4 + 10\sqrt{2}$$

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(4 + 10\sqrt{2}; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(4; 4 + 10\sqrt{2})$

- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 4 + 10\sqrt{2}$.

- Giới hạn vô cực: $\lim_{x \rightarrow 4^+} S(x) = +\infty$, giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = +\infty$.

- Bảng biến thiên:

x	4	x_0	$+\infty$	
$S'(x)$		-	0	+
$S(x)$	$+\infty$		S_{CT}	$+\infty$

c) Kích thước của tờ giấy để nguyên liệu sử dụng ít nhất là:

Chiều rộng $x = 4 + 10\sqrt{2} \approx 18,14(\text{cm})$, Chiều dài $y = 6 + \frac{300}{x-4} = 6 + \frac{30}{\sqrt{2}} \approx 27,21(\text{cm})$.

Câu 3: Giả sử chi phí để sản xuất x sản phẩm của một nhà máy được cho bởi $C(x) = 0,2x^2 + 10x + 5$

(triệu đồng). Khi đó chi phí trung bình để sản xuất một đơn vị sản phẩm là $f(x) = \frac{C(x)}{x}$

a) Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$

b) Số lượng sản phẩm cần sản xuất là bao nhiêu để chi phí trung bình là thấp nhất?

Lời giải

a) Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0,2x^2 + 10x + 5}{x}$.

Tập xác định: $[1; +\infty)$.

Sự biến thiên: Ta có $f(x) = 0,2x + 10 + \frac{5}{x}$.

$$f'(x) = \frac{0,2x^2 - 5}{x^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \quad (\text{do } x \geq 1).$$

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$.

- Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 5$ với $f_{CT} = 12$.

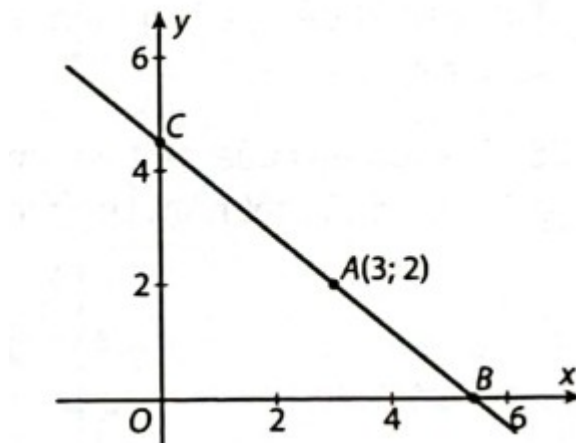
- Giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Bảng biến thiên:

x	1	5	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	15,2	12	$+\infty$

b) Số lượng sản phẩm cần sản xuất là $x = 5$ để chi phí trung bình là thấp nhất: $f_{CT} = 12$ (triệu đồng).

Câu 4: Cho điểm $A(3; 2)$ trên mặt phẳng tọa độ. Một đường thẳng đi qua A cắt trục hoành tại B, cắt trục tung tại C tạo thành một tam giác OBC nằm trong góc phần tư thứ nhất, với O là gốc tọa độ.



a) Biết hoành độ điểm B là $x = t$ với $t > 3$. Tính diện tích tam giác OBC theo t . Kí hiệu diện tích này là $S(t)$

b) Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = S(t)$.

c) Tìm vị trí điểm B để diện tích tam giác OBC là nhỏ nhất.

Lời giải

a) Đường thẳng qua A và B có phương trình $\frac{y-2}{-2} = \frac{x-3}{t-3}$. Hay $y = 2 - \frac{2}{t-3}(x-3)$.

Vậy điểm C có tung độ là $y_C = 2 + \frac{6}{t-3}$. Diện tích tam giác OBC là $S(t) = t \cdot y_C = \frac{2t^2}{t-3}$.

b) Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = S(t)$. Tập xác định: $(3; +\infty)$.

Sự biến thiên: Ta có $S(t) = 2t + 6 + \frac{18}{t-3}$.

$$S'(t) = \frac{2t^2 - 12t}{(t-3)^2}, S'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6 \quad (\text{do } t > 3).$$

- Hàm số $S(t)$ nghịch biến trên khoảng $(3; 6)$, đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$.

- Hàm số đạt cực tiểu tại $t = 6$ với $S_{CT} = 24$.

- Giới hạn vô cực: $\lim_{t \rightarrow 3^+} S(t) = +\infty$, giới hạn tại vô cực: $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = +\infty$.

- Bảng biến thiên:

t	3	6	$+\infty$
$S'(t)$		0	+
$S(t)$	$+\infty$	24	$+\infty$

c) Diện tích tam giác OBC nhỏ nhất với điểm $B(6; 0)$.

Câu 5: Một quần thể cá được nuôi trong một hồ nhân tạo lúc ban đầu có 80000 con. Sau t năm, số

lượng quần thể cá nói trên được xác định bởi $N(t) = \frac{20(4+3t)}{1+0,05t}$ (nghìn con)

a) Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = N(t)$.

b) Số lượng tối đa có thể có của quần thể cá là bao nhiêu?

Lời giải

a) Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = N(t)$. Tập xác định: $[0; +\infty)$.

Sự biến thiên:

$$N'(t) = \frac{56}{(1+0,05t)^2} > 0 \quad \text{với mọi } t \geq 0.$$

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- Hàm số không có cực trị.

- Giới hạn tại vô cực: $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 1200$.

- Bảng biến thiên:

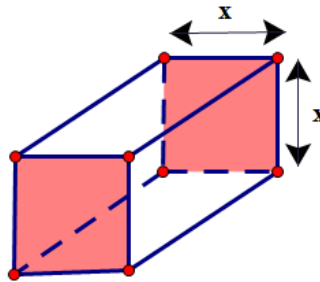
t	0	$+\infty$
$N'(t)$		+
$N(t)$	80	1200

b) Số lượng tối đa có thể có của quần thể cá là 1200000 con.

Câu 6: Một khối брун kiện hình hộp chữ nhật được quy định về kích cỡ như sau: tổng chiều dài và chu vi thiết diện ngang (hình vuông) là 240 cm. Gọi x là độ dài cạnh của thiết diện ngang.

a) Tính thể tích của khối брун kiện theo x .

b) Kí hiệu $V(x)$ là thể tích của khối брун kiện. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = V(x)$.



Lời giải

a) Chiều dài của khối брун kiện là: $y = 240 - 4x$.

Do đó, thể tích của khối брун kiện là: $V(x) = y \cdot x^2 = (240 - 4x)x^2$.

b) Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = V(x)$. Tập xác định: $(0; 60)$.

Sự biến thiên:

- Ta có: $V'(x) = 480x - 12x^2, V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 40$ (do $x > 0$).

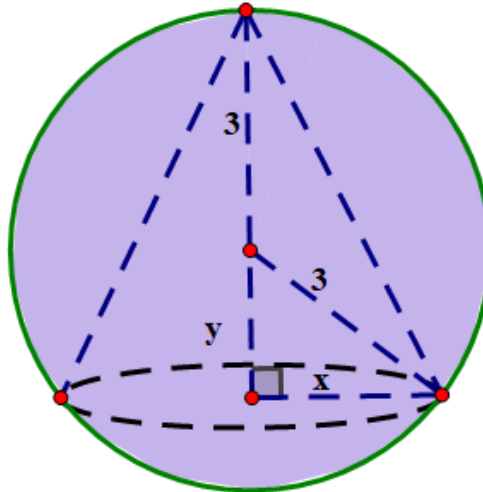
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 40)$, nghịch biến trên khoảng $(40; 60)$.

- Hàm số đạt cực đại tại $x = 40$ với $V_{CD} = 128000 \text{ (cm}^3\text{)}$.

- Bảng biến thiên:

x	0	40	$+\infty$	
V'(x)		+	0	-
V(x)	0	128000	0	

Câu 7: Tìm thể tích lớn nhất của hình nón nội tiếp được trong hình cầu có bán kính bằng 3(xem hình vẽ)



Lời giải

Theo kí hiệu trong hình bên, ta có thể tích của hình nón là $V = \frac{1}{3}(3+y)\pi x^2$.

Do $x^2 + y^2 = 9$ nên $V = \frac{1}{3}\pi(3+y)(9-y^2) = \frac{1}{3}\pi(-y^3 - 3y^2 + 9y + 27), 0 \leq y < 3$.

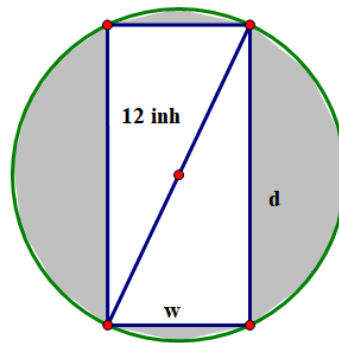
Ta có: $V' = \frac{1}{3}\pi(-3y^2 - 6y + 9) = \pi(-y^2 - 2y + 3); V' = 0 \Leftrightarrow y = 1$ (do $y \geq 0$).

Bảng biến thiên của hàm số:

y	0	1	3	
V'		+	0	-
V			$\frac{32\pi}{3}$	
	9π			0

Vậy thể tích lớn nhất của hình nón nội tiếp được trong hình cầu có bán kính bằng 3 là $\frac{32\pi}{3}$.

Câu 8: Độ bền S của dầm gỗ hình chữ nhật tỉ lệ với tích của chiều rộng w và bình phương chiều sâu d của nó (xem hình vẽ). Tìm kích thước của dầm gỗ bền nhất có thể được cắt từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính bằng 12 inch.



Lời giải

Từ đề bài suy ra công thức tính độ bền của dầm gỗ có dạng $S = kwd^2$ với hằng số $k > 0$ cố định nào đó (là hệ số tỉ lệ). Mặt khác, do $d^2 + w^2 = 144$ nên ta có

$$S = kw(144 - w^2) = k(144w - w^3), \quad 0 < w < 12.$$

Ta có: $S' = k(144 - 3w^2)$; $S' = 0 \Leftrightarrow w = 4\sqrt{3}$ (do $w > 0$).

Lập bảng biến thiên của hàm số:

w	0	$4\sqrt{3}$	12
S'		+	-
S	0	$k384\sqrt{3}$	0

Vậy dầm gỗ có độ bền lớn nhất khi có chiều rộng $w = 4\sqrt{3}$ inch và chiều sâu $d = 4\sqrt{6}$ inch.

Câu 9: Ước tính chi phí hằng năm (tính bằng tỉ đồng) để một nhà máy loại bỏ $p\%$ chất gây ô nhiễm

$$C = C(p) = \frac{528p}{100 - p}, \quad 0 \leq p < 100.$$

được cho bởi công thức

a) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi thế nào khi P tăng?

b) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không? Vì sao?

c) Xét tính đơn điệu của hàm số $C'(p)$. Giải thích ý nghĩa thực tiễn của kết quả này.

Lời giải

a) Ta có: $C'(p) = \frac{528(100 - p) + 528p}{(100 - p)^2} = \frac{52800}{(100 - p)^2} > 0$ với mọi $0 \leq p < 100$.

Suy ra hàm chi phí C đồng biến trên nửa khoảng $[0; 100)$.

Do đó, chi phí cần bỏ ra sẽ luôn tăng khi tăng tỉ lệ loại bỏ $p\%$ chất gây ô nhiễm.

b) Ta có $\lim_{p \rightarrow 100^-} C = \lim_{p \rightarrow 100^-} \frac{528p}{100 - p} = +\infty$. Do đó, để loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm thì cần chi phí vô hạn, nên nhà máy không thể loại bỏ được hoàn toàn chất gây ô nhiễm.

c) Ta có: $C''(p) = \frac{105600}{(100-p)^3} > 0$ với mọi $0 \leq p < 100$ nên hàm số $C'(p)$ đồng biến trên $[0; 100)$. Điều này cho thấy khi tỉ lệ phần trăm loại bỏ chất gây ô nhiễm p tăng thì chi phí cho việc loại bỏ 1 đơn vị phần trăm tiếp theo (từ mức $p\%$ lên mức $(p+1)\%$) cũng tăng, nghĩa là chi phí loại bỏ chất gây ô nhiễm càng ngày càng đắt đỏ.

Câu 10: Một xưởng mộc dùng gỗ gụ để sản xuất 5 chiếc bàn mỗi ngày. Chi phí cho mỗi lần vận chuyển nguyên liệu là 5000 USD, chi phí để lưu trữ một đơn vị nguyên liệu là 10 USD mỗi ngày, trong đó một đơn vị là lượng nguyên liệu cần thiết để sản xuất 1 chiếc bàn. Hỏi mỗi lần xưởng mộc nên đặt mua bao nhiêu đơn vị nguyên liệu và bao lâu đặt giao nguyên liệu một lần để chi phí trung bình hằng ngày (bao gồm chi phí vận chuyển và chi phí lưu trữ) trong chu kì sản xuất giữa các lần giao hàng là ít nhất?

Lời giải

Giả sử nguyên liệu được giao sau mỗi x ngày ($x > 0$). Để đảm bảo đủ nguyên liệu cho mỗi chu kì sản xuất, xưởng mộc phải đặt $5x$ đơn vị nguyên liệu cho mỗi lần giao hàng.

Trong mỗi ngày của chu kì sản xuất, lượng nguyên liệu cần được lưu trữ trung bình là $\frac{5x}{2}$ đơn vị nguyên liệu.

Do đó, chi phí để lưu trữ nguyên liệu trong x ngày của chu kì sản xuất là $10 \cdot \frac{5x}{2} \cdot x = 25x^2$ (USD).

Từ đây, chi phí cần bỏ ra cho mỗi chu kì sản xuất là $C(x) = 5000 + 25x^2$. Do đó, ta có hàm chi phí trung bình hằng ngày trong một chu kì sản xuất là $c(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{5000}{x} + 25x$.

Ta có: $c'(x) = -\frac{5000}{x^2} + 25$; $c'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10\sqrt{2} \approx 14,14$

Lập bảng biến thiên:

x	0	$10\sqrt{2}$	$+\infty$
c'	-	0	+
c	$+\infty$	$500\sqrt{2}$	$+\infty$

Vậy để chi phí trung bình hằng ngày trong một chu kì sản xuất là ít nhất thì xưởng mộc nên đặt giao nguyên liệu sau mỗi 14 ngày và mỗi lần giao $5 \cdot 14 = 70$ đơn vị nguyên liệu.

Câu 11: Bác Hưng có một hàng rào thép dài 240 m và muốn rào cánh đồng thành một thửa ruộng hình chữ nhật giáp một con sông thẳng. Bác không cần rào phía cạnh con sông. Hỏi thửa ruộng có diện tích lớn nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi $x, y(\text{m})$ lần lượt là chiều dài hai cạnh của thửa ruộng hình chữ nhật.

Giả sử cạnh giáp sông của thửa ruộng có độ dài là $y(\text{m})$.

Khi đó, theo đề bài ta có: $2x + y = 240$ hay $y = 240 - 2x$.

Do đó: $0 < x < 120; y > 0$.

Diện tích của thửa ruộng là $S = xy = x(240 - 2x) = 240x - 2x^2, 0 < x < 120$.

Ta có: $S' = 240 - 4x; S' = 0 \Leftrightarrow x = 60$ (với $0 < x < 120$). Khi đó $y = 240 - 2 \cdot 60 = 120$.

Lập bảng biến thiên:

x	0	60	$+\infty$
S'	+	0	-
S	0	7200	0

Vậy thửa ruộng có diện tích lớn nhất là $S = 60 \cdot 120 = 7200 (\text{m}^2)$ (khi cạnh giáp sông và cạnh đối diện có độ dài 120 m, hai cạnh kia có độ dài 60 m).

Chú ý. Nếu phải rào cả bốn cạnh của thửa ruộng thì dễ thấy thửa ruộng có diện tích lớn nhất khi nó là hình vuông, tức là bốn cạnh đều dài 60 m, và khi đó diện tích lớn nhất là 3600m^2 .

Câu 12: Doanh số bán hệ thống âm thanh nổi mới trong một khoảng thời gian dự kiến sẽ tuân theo

đường cong logistic $R = R(x) = \frac{5000}{1 + 5e^{-x}}, x \geq 0$, trong đó thời gian x được tính bằng năm. Hỏi tốc độ bán hàng đạt tối đa vào năm nào?

Lời giải

Hàm biểu thị tốc độ bán hàng là $R'(x) = \frac{25000e^{-x}}{(1 + 5e^{-x})^2}, x \geq 0$. Ta có:

$$R''(x) = \frac{-25000e^{-x}(1 + 5e^{-x})^2 + 25000e^{-x} \cdot 2(1 + 5e^{-x}) \cdot 5e^{-x}}{(1 + 5e^{-x})^4} = \frac{25000e^{-x}(5e^{-x} - 1)}{(1 + 5e^{-x})^3};$$

$$R''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 5 \approx 1,61.$$

Lập bảng biến thiên:

x	0	$\ln 5$	$+\infty$
R''	+	0	-
R'	$\frac{6250}{9}$	1250	0

Từ bảng biến thiên, ta thấy tốc độ bán hàng đạt tối đa vào thời điểm năm thứ hai.

Câu 13: Một chiếc hộp dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông và có thể tích là 2000cm^3 . Các kích thước của chiếc hộp là bao nhiêu nếu muốn lượng vật liệu dùng để sản xuất chiếc hộp là nhỏ nhất?

Lời giải

Gọi $x(\text{cm})$ là cạnh đáy của chiếc hộp. Khi đó, ta có chiều cao của chiếc hộp là $\frac{2000}{x^2}(\text{cm})$.

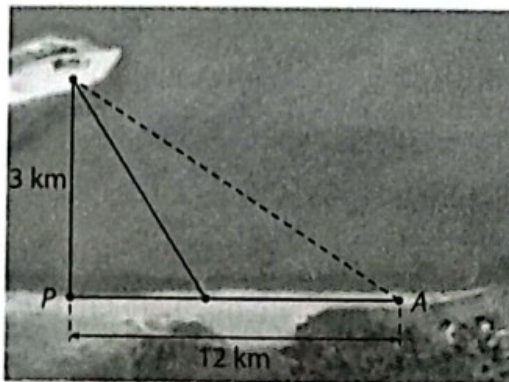
Suy ra, tổng diện tích bề mặt của chiếc hộp là $S = 2x^2 + 4x \cdot \frac{2000}{x^2} = 2x^2 + \frac{8000}{x}, x > 0$.

Ta có: $S' = 4x - \frac{8000}{x^2} = \frac{4x^3 - 8000}{x^2}; S' = 0 \Leftrightarrow x = 10\sqrt[3]{2}$

Bằng cách lập bảng biến thiên, dễ thấy lượng vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (tức là tổng diện tích bề mặt hộp nhỏ nhất) khi cạnh đáy của hộp là $10\sqrt[3]{2}\text{cm}$ và chiều cao của hộp là $\frac{20}{\sqrt[3]{4}}\text{cm}$.

Câu 14: Một hòn đảo nhỏ cách điểm P trên bờ biển khoảng 3 km, một thị trấn ở điểm A cách điểm P 12 km (xem

hình vẽ). Nếu một người trên đảo chèo thuyền với vận tốc $2,5\text{km/h}$ và đi bộ với vận tốc 4km/h thì thuyền nên neo đậu ở vị trí nào trên đoạn PA để người đó đến thị trấn trong thời gian ngắn nhất?



Lời giải

Gọi khoảng cách từ thị trấn đến chỗ neo thuyền là $x(\text{km})$, khi đó $0 \leq x \leq 12$. Từ đề bài, ta có khoảng cách từ hòn đảo đến nơi neo thuyền là $(12-x)^2 + 9(\text{km})$.

Thời gian để người đó từ hòn đảo đến thị trấn là $T = \frac{(12-x)^2 + 9}{2,5} + \frac{x}{4}$ (giờ).

Ta có: $T' = -\frac{2(12-x)}{2,5} + \frac{1}{4}; T' = 0 \Leftrightarrow x = 11,6875$. Mặt khác,
 $T(0) = 61,2; T(11,6875) \approx 6,56; T(12) = 6,6$.

Vậy, người đó cần neo thuyền tại vị trí cách thị trấn 11,6875 km để thời gian đi lại là ngắn nhất.

Câu 15: Chứng tỏ rằng một thùng hình trụ có thể tích V cố định cần ít vật liệu sản xuất nhất (tức là có diện tích bề mặt nhỏ nhất) khi chiều cao của thùng gấp đôi bán kính đáy.

Lời giải

Gọi bán kính đáy của thùng hình trụ là r . Suy ra, chiều cao của thùng hình trụ là $\frac{V}{\pi r^2}$.

Diện tích bề mặt của thùng hình trụ là $S = 2\pi r^2 + \frac{2\pi r V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, r > 0$.

Ta có: $S' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}; S' = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Bảng biến thiên của hàm số:

x	0	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$+\infty$
S'	-	0	+
S	$+\infty$	$S\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên: S đạt giá trị nhỏ nhất khi $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, khi đó chiều cao của hình trụ là

$$2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r$$

Đây là điều cần chứng minh.

Câu 16: Ở 0°C , sự mất nhiệt H (tính bằng $\text{Kcal}/\text{m}^2\text{h}$, ở đây Kcal là kilocalories và $1 \text{ Kcal} = 1000 \text{ calo}$) từ cơ thể của một người có thể được mô hình hoá bằng công thức $H = 33(10\sqrt{v} - v + 10,45)$, trong đó v là tốc độ gió (tính bằng m/s) (Theo sách *Brief Calculus: An Applied Approach, 8th edition, Congage Learning, 2009*).

a) Xét tính đơn điệu của hàm số H và giải thích ý nghĩa thực tiễn của kết quả nhận được.

b) Tìm tốc độ thay đổi của H khi $v = 2 \text{ m/s}$. Giải thích ý nghĩa thực tiễn của kết quả này.

Lời giải

$$H'(v) = 33 \left(\frac{5}{\sqrt{v}} - 1 \right), v > 0; H'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 25$$

a) Ta có:

Lập bảng biến thiên của hàm số:

v	0	25	$+\infty$
H'		+	0 -
H	344,85	1169,85	$-\infty$

Ta có thể thấy mức nhiệt mất từ cơ thể tăng khi tốc độ gió tăng. Tuy nhiên, nó đạt tối đa tại mức gió là 25 m/s , sau đó giảm dần khi tốc độ gió tiếp tục tăng.

$$H'(2) = 33 \left(\frac{5}{\sqrt{2}} - 1 \right) \approx 83,673$$

b) Ta có:

Điều này có nghĩa là mức độ nhiệt của cơ thể mất tiếp khi vận tốc gió tăng từ 2 m/s lên 3 m/s là khoảng $83,673 (\text{Kcal} / \text{m}^2 \text{h})$

Câu 17: Doanh thu R (USD) từ việc cho thuê x căn hộ có thể được mô hình hoá bằng hàm số:

$$R = 2x(900 + 32x - x^2).$$

a) Tìm hàm doanh thu biên.

b) Tìm doanh thu biên khi $x = 14$ và giải thích ý nghĩa thực tiễn của nó.

c) Tìm lượng doanh thu tăng thêm khi số căn hộ cho thuê tăng từ 14 lên 15.

Lời giải

a) Hàm doanh thu biên là $R' = 1800 + 128x - 6x^2$.

b) Ta có doanh thu biên khi $x = 14$ là $R'(14) = 2416$. Điều này nghĩa là, doanh thu tăng lên khi cho thuê thêm một căn hộ nữa (tức là cho thuê căn hộ thứ 15) là khoảng 2416 USD.

c) Ta có: $R(14) = 32256; R(15) = 34650$ suy ra $R(15) - R(14) = 2394$.

Vậy khi số căn hộ cho thuê tăng từ 14 lên 15 thì doanh thu tăng thêm 2394 USD, giá trị này xấp xỉ với mức đã ước tính ở câu b.

Câu 18: Một công ty ước tính rằng chi phí C (USD) để sản xuất x đơn vị sản phẩm có thể được mô hình hoá bằng công thức: $C = 800 + 0,04x + 0,0002x^2$. Tìm mức sản xuất sao cho chi phí trung bình

biên $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ cho mỗi đơn vị hàng hoá là nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có: $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{800}{x} + 0,04 + 0,0002x$

Suy ra, $\bar{C}'(x) = -\frac{800}{x^2} + 0,0002 = \frac{0,0002x^2 - 800}{x^2}$; $\bar{C}'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2000$ (do $x > 0$).

Bảng biến thiên của hàm số:

x	0	2000	$+\infty$
$\bar{C}'$		- 0 +	
$\bar{C}$	$+\infty$	0,84	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra với mức sản xuất là 2000 thì chi phí trung bình cho mỗi đơn vị hàng hoá là nhỏ nhất.

Câu 19: a) Nếu $C(x)$ (USD) là chi phí sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì chi phí trung bình cho mỗi đơn

vi là $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$. Chứng minh rằng nếu chi phí trung bình là nhỏ nhất thì chi phí biên bằng chi phí trung bình.

b) Nếu $C(x) = 16000 + 200x + 4x^{3/2}$, hãy tìm:

(i) Chi phí, chi phí trung bình và chi phí biên khi sản xuất 100 đơn vị hàng hoá;

(ii) Mức sản xuất mà khi đó sẽ giảm thiểu chi phí trung bình;

(iii) Chi phí trung bình nhỏ nhất.

Lời giải

a) Khi chi phí trung bình nhỏ nhất (tức đạt cực tiểu) thì $\bar{C}'(x) = \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2} = 0$ hay

$C'(x) = \frac{C(x)}{x}$, nói cách khác là chi phí biên bằng chi phí trung bình.

b) (i) Ta có hàm chi phí trung bình là $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{16000}{x} + 200 + 4x^{\frac{1}{2}}$; hàm chi phí biên là

$$C'(x) = 200 + 6x^{\frac{1}{2}}.$$

Suy ra $C(100) = 40000$; $\bar{C}(100) = 400$; $C'(100) = 200$.

Vậy chi phí, chi phí trung bình và chi phí biên ở mức sản xuất 100 đơn vị hàng hóa lần lượt là 40000 USD,

400 USD và 200 USD.

(II) Ta có: $\bar{C}'(x) = -\frac{16000}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$; $\bar{C}'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 400$ (do $x > 0$),

Bảng biến thiên:

x	0	400	$+\infty$
$\bar{C}'$		- 0 +	
$\bar{C}$	$+\infty$	320	$+\infty$

Vậy mức sản xuất là 400 đơn vị hàng hoá sẽ giảm thiểu chi phí trung bình.

(iii) Khi đó, chi phí trung bình nhỏ nhất là 320 USD.

- Câu 20:** a) Chứng tỏ rằng nếu lợi nhuận $P(x)$ là cực đại thì doanh thu biên bằng chi phí biên.
 b) Cho $C(x) = 16000 + 500x - 1,6x^2 + 0,004x^3$ là hàm chi phí và $P(x) = 1700 - 7x$ là hàm cầu.
 Hãy tìm mức sản xuất sẽ tối đa hoá lợi nhuận.

Lời giải

a) Ta có lợi nhuận $P(x) = R(x) - C(x)$ trong đó $R(x)$ là doanh thu và $C(x)$ là chi phí.

Khi lợi nhuận đạt cực đại tại x_0 thì $P'(x_0) = R'(x_0) - C'(x_0) = 0$ hay $R'(x_0) = C'(x_0)$, nói cách khác là doanh thu biên bằng chi phí biên.

b) Ta có hàm lợi nhuận:

$$\begin{aligned} P(x) &= x \cdot p(x) - C(x) = 1700x - 7x^2 - 16000 - 500x + 1,6x^2 - 0,004x^3 \\ &= -16000 + 1200x - 5,4x^2 - 0,004x^3. \end{aligned}$$

Suy ra, $P'(x) = 1200 - 10,8x - 0,012x^2$; $P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 100$ (do $x \geq 0$).

Bảng biến thiên:

x	0	100	$+\infty$
P'		+ 0 -	
P	-16000	46000	$-\infty$

Vậy mức sản xuất tối đa hoá lợi nhuận là 100 đơn vị hàng hoá.

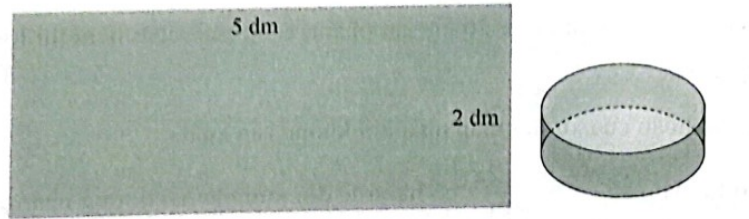
- Câu 21:** Lợi nhuận một xưởng thu được từ việc sản xuất một mặt hàng được cho bởi công thức $P(q) = -q^3 + 24q^2 + 780q - 5000$ (nghìn đồng) trong đó $q(\text{kg})$ là khối lượng sản phẩm sản xuất được. Xưởng chỉ sản xuất được tối đa 50 kg sản phẩm trong một tuần.
 a) Xưởng sản xuất càng nhiều thì lợi nhuận càng cao.

- b) Lợi nhuận lớn nhất khi xưởng sản xuất 26 kg sản phẩm trong một tuần.
 c) Sau khi sản xuất được 26 kg sản phẩm, càng sản xuất thêm thì lợi nhuận càng giảm.
 d) Lợi nhuận của xưởng thấp nhất khi không sản xuất.

Lời giải

a) S b) Đ c) Đ d) S

Câu 22: Nam dùng một tấm bìa có kích thước $50\text{cm} \times 20\text{cm}$ để làm một chiếc lon hình trụ (không có nắp).



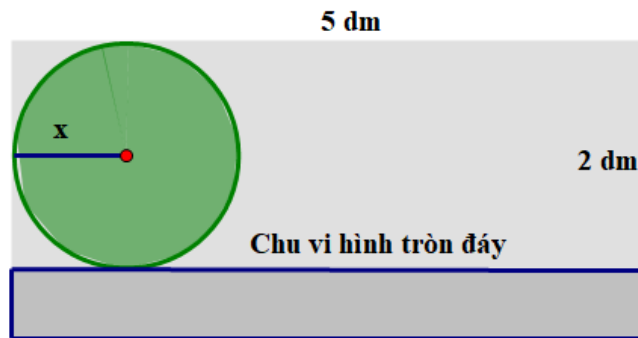
Hỏi cần chọn bán kính đáy hình trụ là bao nhiêu xăngtimét thì lon hình trụ đạt thể tích lớn nhất?

Lưu ý: Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của xăngtimét, bỏ qua phần hao hụt khi cắt và tạo hình, đáy và mặt bên phải là các bìa nguyên vẹn (không ghép nối).

Lời giải

Gọi $x(\text{dm})$ là bán kính đáy hình trụ ($x > 0$).

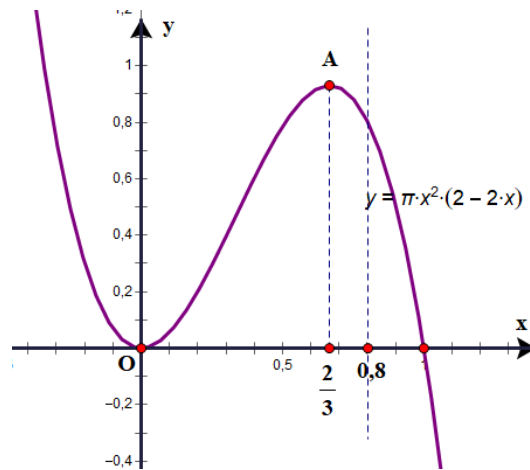
Phương án 1:



$$V(x) = \pi x^2 (2 - 2x) ; x \in \left(0; \frac{5}{2\pi}\right]$$

Thể tích lon hình trụ cho bởi công thức:

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số:



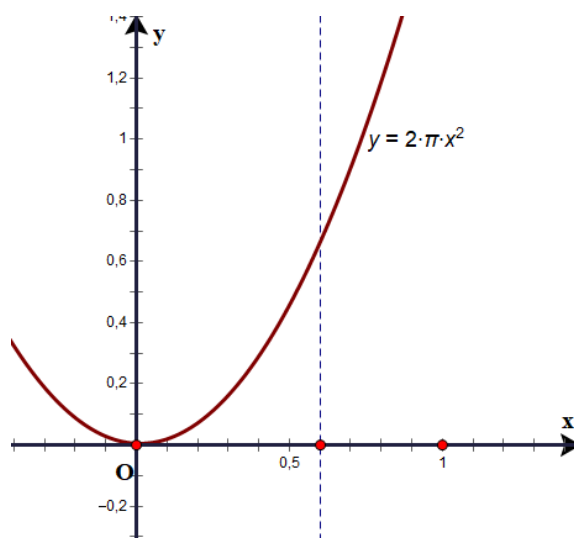
$V(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $\left(0; \frac{5}{2\pi}\right)$ là khoảng $0,93\text{dm}^3$ khi $x \approx 0,67\text{dm}$.

Phương án 2:



Thể tích lon hình trụ cho bởi công thức: $V(x) = 2\pi x^2$ với $x \in \left(0; \frac{5}{2(\pi+1)}\right]$.

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số:



$V(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $\left(0; \frac{5}{2(\pi+1)}\right]$ là khoảng $2,29\text{dm}^3$ khi $x \approx 0,60\text{dm}$.

Vậy thể tích lon hình trụ lớn nhất khi thiết kế theo phương án 2 và bán kính đáy khoảng $0,60\text{dm}$.

Câu 23: Một chủ nhà hàng kinh doanh phần ăn đồng giá có chiến lược kinh doanh như sau:

- Phí cố định được ước tính trong một năm là 50000 nghìn đồng.
- Chi phí một phần ăn ước tính khoảng 22 nghìn đồng.
- Giá niêm yết trên thực đơn là 30 nghìn đồng.

Trong bài này, giả định rằng tất cả các phần ăn chế biến sẵn đều được bán hết và kí hiệu x là số phần ăn phục vụ trong một năm, giả sử x thuộc khoảng $[5000; 25000]$

a) Gọi $C(x)$ là tổng chi phí hằng năm cho x phần ăn này. Xác định $C(x)$.

b) Chứng tỏ rằng giá thành của một phần ăn cho bởi biểu thức $D(x) = 22 + \frac{50000}{x}$ (nghìn đồng)

c) Sử dụng đồ thị, hãy xác định điểm hoà vốn của nhà hàng, tức là số lượng phần ăn tối thiểu phải được phục vụ hằng năm để hoạt động của nhà hàng tạo ra lợi nhuận. Hãy chứng minh điều đó.

d) Chứng minh rằng tổng lợi nhuận hằng năm cho x phần ăn được biểu thị bởi:
 $L(x) = 8x - 50000$ (nghìn đồng).

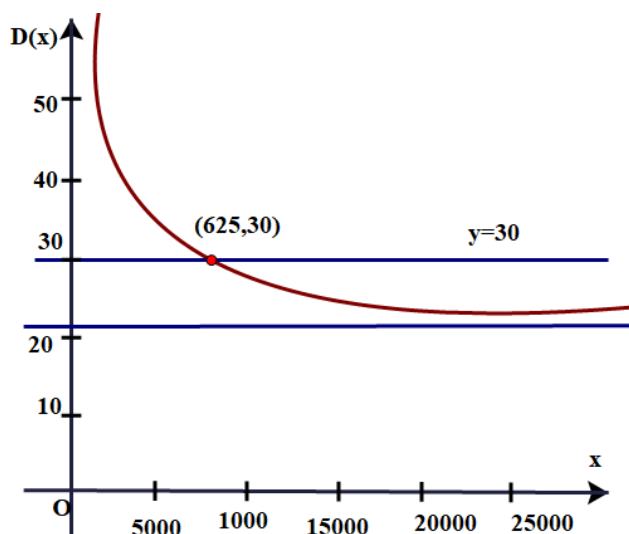
e) Mục tiêu của chủ nhà hàng là tạo ra lợi nhuận ít nhất là 120000 nghìn đồng mỗi năm. Biết rằng nhà hàng mở cửa 300 ngày một năm, hỏi trung bình mỗi ngày nhà hàng phải phục vụ ít nhất bao nhiêu phần ăn để đạt được mục tiêu trên?

Lời giải

a) $C(x) = 22x + 50000$

b) $D(x) = \frac{C(x)}{x} = 22 + \frac{50000}{x}$ nghìn đồng.

c) Vẽ đồ thị hàm số $D(x)$ và đường thẳng $y = 30$ trên cùng một hệ trục tọa độ



Quan sát đồ thị của hai hàm số, ta thấy giao điểm của đồ thị hàm số $D(x)$ và đường thẳng $y = 30$ là điểm có tọa độ $(6250; 30)$. Nghĩa là khi phục vụ được tối thiểu 6250 phần ăn thì chi phí một phần ăn đúng bằng tiền bán một phần ăn (là 30 nghìn đồng).

Đồ thị cũng cho thấy rằng nếu phục vụ được ít hơn 6250 phần ăn thì chi phí cho 1 phần ăn cao hơn giá bán 1 phần ăn, nghĩa là nhà hàng sẽ lỗ. Như vậy điểm hoà vốn là 6250.

d) $L(x) = 30x - (22x + 50000) = 8x - 50000$

e) Để đạt mục tiêu lợi nhuận hằng năm ít nhất là 120000 nghìn đồng thì số phần ăn cần bán được phải thoả mãn

bất phương trình sau: $L(x) \geq 120000 \Leftrightarrow 8x - 50000 \geq 120000 \Leftrightarrow x \geq 21250$.

Kết quả cho thấy hằng năm, nhà hàng cần phục vụ được tối thiểu 21250 phần ăn thì mới có lợi nhuận như mong muốn. Do nhà hàng mở cửa 300 ngày một năm nên trung bình mỗi ngày nhà hàng cần phục vụ được khoảng 70,8 phần ăn.

Vậy để đạt mục tiêu, trung bình mỗi ngày nhà hàng cần phục vụ ít nhất 71 phần ăn.

Câu 24: Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích 800cm^3 với yêu cầu dùng ít vật liệu nhất.

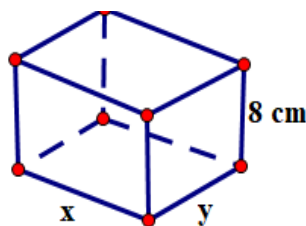
Chiều cao hộp là 8 cm, các kích thước khác là $x(\text{cm}), y(\text{cm})$ với $x > 0$ và $y > 0$.

a) Chứng tỏ rằng $y = \frac{100}{x}$.

b) Tìm diện tích toàn phần $S(x)$ của chiếc hộp theo x .

c) Khảo sát hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

d) Tìm kích thước của hộp để tiết kiệm vật liệu nhất. (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mi-li-mét.)



Lời giải

a) $V = 800 \Leftrightarrow xy \cdot 8 = 800 \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}$.

b) $S(x) = 2\left(x + \frac{100}{x}\right) \cdot 8 + 2x \cdot \frac{100}{x} = 16x + \frac{1600}{x} + 200$.

c) HS tự làm.

d) Khi $x = 10$ thì hàm số $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị này bằng 520.

Lúc đó, ta cũng có $y = 10$, nghĩa là khi làm đáy hộp là hình vuông có cạnh bằng 10 cm thì sẽ tiết kiệm vật liệu nhất.

Câu 25: Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng.

Trong khoảng 70 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét (Nguồn: A. Bigalke et al., *Mathematik, Grundkurs ma-I, Cornelsen 2016*).

a) Tìm thời điểm $t (0 \leq t \leq 70)$ sao cho con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng. Khoảng cách nhỏ nhất này là bao nhiêu?

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \leq t \leq 70$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 50km).

c) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \leq t \leq 70$. Xác định hàm số $v(t)$.

d) Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu đốt cháy các tên lửa hãm là bao nhiêu? Tại thời điểm $t = 25$ (giây) là bao nhiêu?

e) Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại?

Lời giải

a) Tại thời điểm $t \approx 18,11$ giây thì con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng và khoảng cách nhỏ nhất này xấp xỉ bằng 8,074 km.

b) 1) Tập xác định: $D = [0; 70]$.

2) Sự biến thiên

- Bảng biến thiên:

$$y' = -0,03t^2 + 2,2t - 30.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow t = t_1 = \frac{110 - \sqrt{3100}}{3} \approx 18,11 \quad \text{hoặc} \quad t = t_2 = \frac{110 + \sqrt{3100}}{3} \approx 55,23.$$

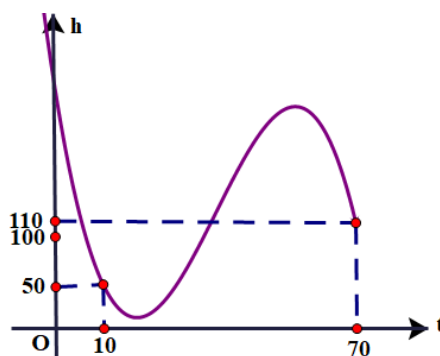
t	0	t_1	t_2	70	
y'	-	0	+	0	-
y	250	$h(t_1)$	$h(t_2)$	110	

Với $h(t_1) \approx 8,074, h(t_2) \approx 263,778$.

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(0; t_1)$ và $(t_2; 70)$, đồng biến trên khoảng $(t_1; t_2)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $t = t_1, y_{CT} \approx 8,074$; hàm số đạt cực đại tại $t = t_2, y_{CD} \approx 263,778$.

3) Đồ thị



- Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0; 250)$.

- Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(10; 50)$, $(70; 110)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = h(t)$ được cho ở hình bên.

c) Vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) được tính bởi:

$$v(t) = h'(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30.$$

d) Lúc bắt đầu đốt cháy các tên lửa hãm là tại thời điểm $t = 0$ (giây).

Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu đốt cháy các tên lửa hãm là:

$$v(0) = h'(0) = -30 (\text{km} / \text{giây}).$$

Vận tốc tức thời của con tàu tại thời điểm $t = 25$ (giây) là: $v(25) = h'(25) = 6,25 (\text{km} / \text{giây})$.

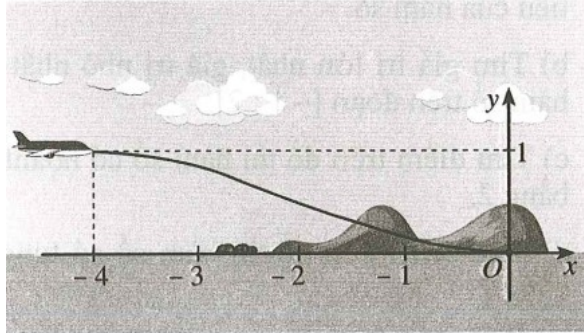
e) Ta có: $v'(t) = -0,06t + 2,2$; $v'(t) = 0$ khi $t = \frac{110}{3}$.

Bảng xét dấu của $v'(t)$ như sau:

t	0	$\frac{110}{3}$	70
$v'(t)$		+	-

Căn cứ vào bảng xét dấu $v'(t)$, ta có hàm số $v(t)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{110}{3}\right)$ nên tại thời điểm $t = 25$ (giây) thì vận tốc tức thời của con tàu đang tăng.

Câu 26: Một máy bay loại nhỏ bắt đầu hạ cánh, đường bay của nó khi gắn với hệ trục tọa độ Oxy được mô phỏng ở hình. Biết đường bay của nó có dạng đồ thị hàm số bậc ba; vị trí bắt đầu hạ cánh có tọa độ $(-4; 1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số và máy bay tiếp đất tại vị trí gốc tọa độ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.



- a) Tìm công thức xác định hàm số mô phỏng đường bay của máy bay trên đoạn $[-4; 0]$.
- b) Khi máy bay cách vị trí hạ cánh theo phương ngang 3 dặm thì máy bay cách mặt đất bao nhiêu dặm? (Biết đơn vị trên hệ trục tọa độ là dặm).
- c) Khi ở độ cao 0,5 dặm, máy bay cách vị trí hạ cánh theo phương ngang bao nhiêu dặm?

Lời giải

a) $y = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{16}x^2$.

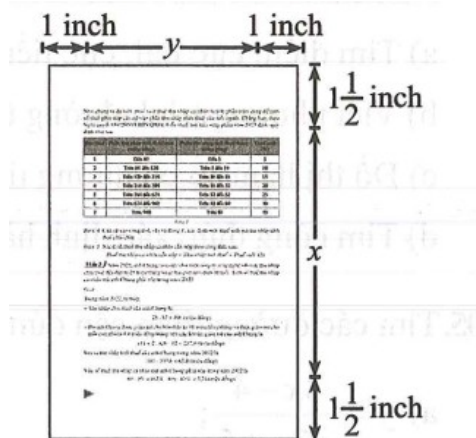
b) Thay $x = -3$, ta được $y = \frac{27}{32}$.

Vậy khi máy bay cách vị trí hạ cánh theo phương ngang 3 dặm thì máy bay cách mặt đất $\frac{27}{32} = 0,84375$ (dặm).

c) Thay $y = 0,5$ ta được $x = -2, x = -2 \pm 2\sqrt{3}$. Do $x \in [-4; 0]$ nên $x = -2$.

Vậy khi ở độ cao 0,5 dặm, máy bay cách vị trí hạ cánh theo phương ngang 2 dặm.

Câu 27: Một nhà in sử dụng các trang giấy hình chữ nhật để in sách. Sau khi để lề trái, lề phải, lề trên và lề dưới theo số liệu được cho ở hình thì diện tích phần in chữ trên trang sách là $24inch^2$. Tính kích thước của trang sách để diện tích giấy cần sử dụng là ít nhất?



Lời giải

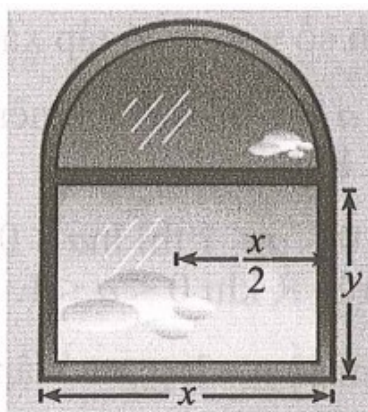
Diện tích một trang giấy là: $S = (x + 3)(y + 2) (inch^2)$.

Diện tích phần in chữ là: $xy = 24$. Suy ra $y = \frac{24}{x}$.

Khi đó,
$$S = (x+3)\left(\frac{24}{x} + 2\right) = 30 + 2x + \frac{72}{x}$$

S nhỏ nhất khi $x = 6, y = 4$. Vậy, kích thước của trang sách là 9 inch $\times$ 6 inch.

Câu 28: Một cửa sổ gồm phần dưới là một hình chữ nhật và phần vòm có hình bán nguyệt được mô tả ở hình. Tìm x, y để diện tích của cửa sổ lớn nhất, biết chu vi của cửa sổ là 5 m.



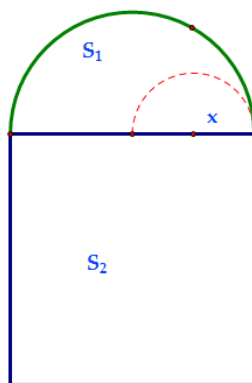
Lời giải

Chu vi của cửa sổ là: $x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 5$. Do đó, $y = \frac{10 - (2 + \pi)x}{4}$.

Diện tích của cửa sổ là:
$$S = xy + \pi \frac{x^2}{8} = \frac{-(4 + \pi)x^2 + 20x}{8}$$

Diện tích của cửa sổ lớn nhất khi $x = \frac{10}{4 + \pi} \approx 1,4(\text{m}), y = \frac{5}{4 + \pi} \approx 0,7(\text{m})$.

Câu 29: Cần phải làm cái cửa sổ mà phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là a mét (a chính là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi độ dài cạnh hình chữ nhật là dây cung của hình bán nguyệt). Gọi d là đường kính của hình bán nguyệt. Hãy xác định d để diện tích cửa sổ là lớn nhất.



Lời giải

Gọi x là bán kính của hình bán nguyệt. $0 < x < a$

Ta có chu vi của hình bán nguyệt là πx ,

Tổng ba cạnh của hình chữ nhật là $a - \pi x$.

Khi đó 1 cạnh của hình chữ nhật có độ dài là $2x$ và cạnh còn lại là $\frac{(a - \pi x) - 2x}{2}$.

Diện tích của cửa sổ là: $S = S_1 + S_2 = \frac{\pi x^2}{2} + 2x \cdot \frac{a - \pi x - 2x}{2}$

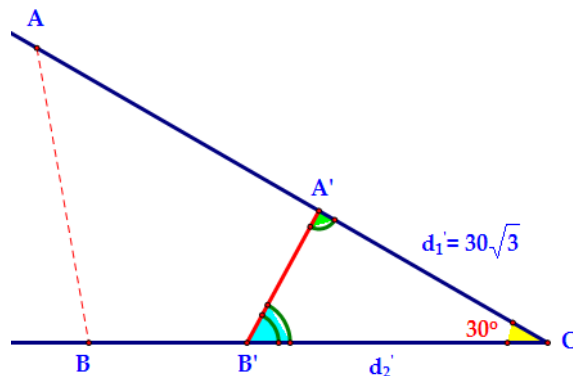
Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $S(x)$ với $0 < x < a$

$$\Rightarrow S(x) = ax - \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)x^2 \Rightarrow S'(x) = a - (\pi + 4)x \Rightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4 + \pi}$$

Đồng thời $S''(x) = -(\pi + 4) < 0, \forall x \in (0; a)$. Do đó $\max S = S\left(\frac{a}{4 + \pi}\right)$

Khi đó kích thước của nó là chiều cao bằng $\frac{a}{4 + \pi}$, và chiều rộng bằng $\frac{2a}{4 + \pi}$.

Câu 30: Hai chất điểm A và B chuyển động thẳng đều cùng hướng về O (như hình vẽ) biết rằng vận tốc $V_B = \frac{V_A}{\sqrt{3}}$ và góc $\angle AOB = 30^\circ$. Biết rằng khi khoảng cách giữa hai chất điểm A và B là nhỏ nhất thì A cách O một khoảng bằng $30\sqrt{3}(m)$. Tìm khoảng cách B đến O lúc đó?



Lời giải

Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách các vật A và B đến O lúc đầu ($t = 0$)

Đồng thời $d = AB$. Gọi t' là thời điểm mà d_{min} . Khi đó A ở A'. B ở B' như hình vẽ

Kí hiệu góc $\angle B'A'O = \beta, \angle A'B'O = \gamma$.

Áp dụng định lý hàm sin trong tam giác $\triangle A'B'O$ ta có:

$$\frac{d}{\sin 30} = \frac{OA'}{\sin \gamma} = \frac{OB'}{\sin \beta} \Leftrightarrow 2d = \frac{d_1 - AA'}{\sin \gamma} = \frac{d_2 - BB'}{\sin \beta} \Leftrightarrow 2d = \frac{d_1 - v_1 t}{\sin \gamma} = \frac{d_2 - v_2 t}{\sin \beta} (*)$$

Do $v_2 = \frac{v_1}{\sqrt{3}}$ và áp dụng $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{C - A}{D - B}$, ta có:

$$(*) \Leftrightarrow 2d = \frac{\sqrt{3}d_2 - d_1}{\sqrt{3} \sin \beta - \sin \gamma} \text{ mà } \sin \beta = \sin(180^\circ - \beta) = \sin(30^\circ + \gamma)$$

$$d = \frac{\sqrt{3}d_2 - d_1}{2[\sqrt{3}\sin(30^\circ + \gamma) - \sin \gamma]} = \frac{\sqrt{3}d_2 - d_1}{\sqrt{3}\cos \gamma + \sin \gamma}$$

Do đó ta có

Xét $f(\gamma) = \sqrt{3}\cos \gamma + \sin \gamma$. Ta có $d_{\min} \Leftrightarrow f(\gamma)_{\max}$

Cách 1: khảo sát hàm $f(\gamma)$ (xin dành cho bạn đọc)

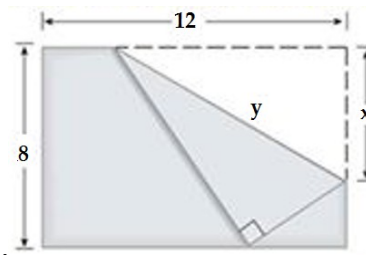
Cách 2: áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$|\sqrt{3}\cos \gamma + \sin \gamma| \leq \sqrt{3+1}\sqrt{\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma} = 2 \Rightarrow -2 \leq f(\gamma) \leq 2 \Rightarrow \max f(\gamma) = 2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan \gamma = \tan 30^\circ \Leftrightarrow \gamma = 30^\circ$ và khi đó $\beta = 120^\circ$

$$\text{Khi đó ta có } \frac{d}{\sin 30^\circ} = \frac{d_1'}{\sin 30^\circ} = \frac{d_2'}{\sin 120^\circ} \Rightarrow d_2' = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} d_1' = \sqrt{3}d_1' = 90 \text{ (m)}$$

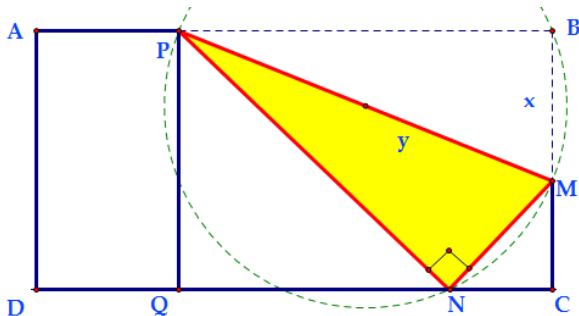
Câu 31: Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài 12cm và chiều rộng 8cm. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho sau khi gấp, đỉnh của góc đó chạm dưới đáy như hình vẽ. Để độ dài nếp gấp là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?



Lời giải

Gọi điểm như hình vẽ.

Kẻ $PQ \perp CD$. Điểm N chạm đáy CQ thì



$$MB > MC \Leftrightarrow x > 4$$

$$\text{Vì } \triangle MNC \text{ đồng dạng } \triangle NPQ \Rightarrow \frac{MN}{NP} = \frac{NC}{PQ} \Rightarrow \frac{x}{PB} = \frac{NC}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - (8-x)^2}}{8} \Rightarrow y^2 = \frac{x^3}{x-4}$$

$$\text{Hơn nữa do } PB \leq AB = 12 \Rightarrow \sqrt{y^2 - x^2} \leq 12 \Leftrightarrow x \in [18 - 6\sqrt{5}; 18 + 6\sqrt{5}]$$

Tóm lại, $18 - 6\sqrt{5} \leq x \leq 8$. Đặt $f(x) = \frac{x^3}{x-4}$. Bài toán trở thành tìm $\min_{x \in [18-6\sqrt{5}; 8]} f(x) = ?$

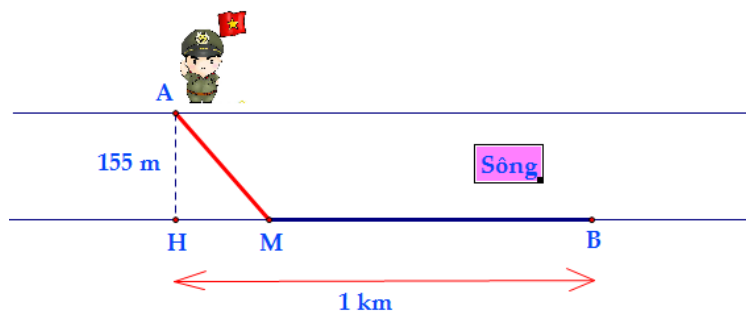
$$f'(x) = \frac{2x^2(x-6)}{(x-4)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 0 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{cases} f(6) = 6\sqrt{3} \approx 10,39 \\ f(18 - 6\sqrt{5}) = 6\sqrt{15} - 6\sqrt{3} \approx 12,8455 \Rightarrow \min f(x) = f(6) = 6\sqrt{3} \\ f(8) = 128 \end{cases}$$

Xét

Câu 32: Trong bài thực hành của môn huấn luyện quân sự có tình huống chiến sĩ phải bơi qua một con sông để tấn công một mục tiêu ở phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 155m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng nửa vận tốc chạy trên bộ. Bạn hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất, nếu như dòng sông là thẳng, vận tốc dòng nước bằng 0 và mục tiêu B cách vị trí H là 1 km (xem hình vẽ)



Lời giải

Gọi vận tốc bơi của chiến sĩ là $v > 0$ thì vận tốc chạy là $2v$

Độ dài cần bơi là $AM = x$ ta có điều kiện $155 \leq x \leq \sqrt{1000^2 + 155^2}$

Thời gian bơi là $\frac{x}{v}$. Độ dài $HM = \sqrt{x^2 - 155^2}$, $BM = 1000 - \sqrt{x^2 - 155^2}$

Thời gian chạy bộ là $\frac{1000 - \sqrt{x^2 - 155^2}}{2v}$

Tổng thời gian $f(x) = \frac{1}{2v} \left(2x + 1000 - \sqrt{x^2 - 155^2} \right), v > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2v} \left(2 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 155^2}} \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{310}{\sqrt{3}}$$

$$\min f(x) = f\left(\frac{310}{\sqrt{3}}\right) \approx 178,9786 \text{ m}$$

Lập bảng biến thiên, ta suy ra