

CHUYÊN ĐỀ TOÁN THỰC TẾ: TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

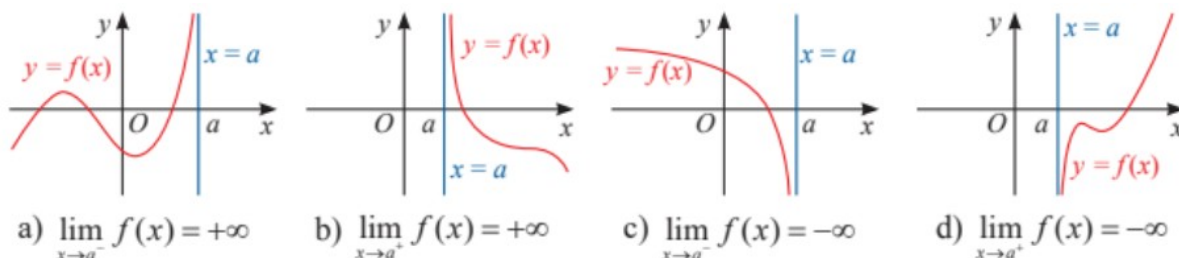
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = a$ được gọi là một đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như Hình 2.

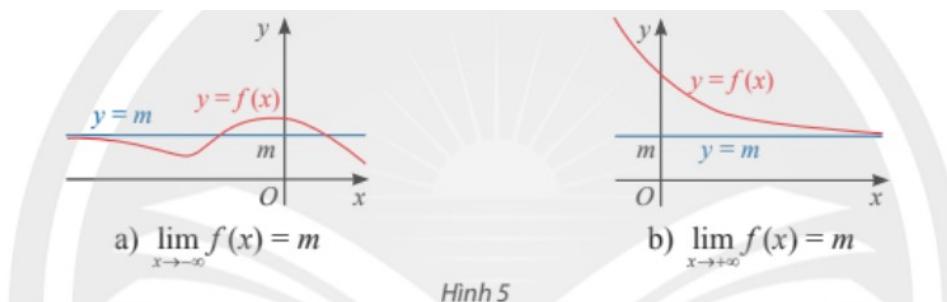


Hình 2

2. Đường tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = m$ được gọi là một đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$.

Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như Hình 5.

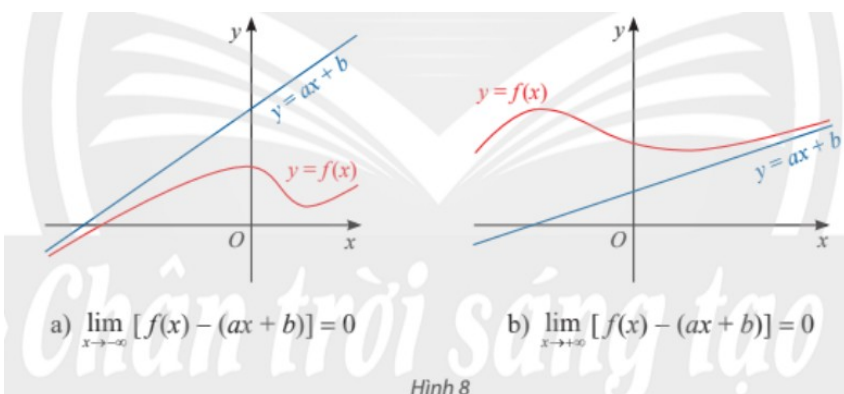


Hình 5

3. Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$, được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như Hình 8.



Hình 8

Nhận xét:

a) Trong trường hợp tổng quát, có thể tìm các hệ số a, b trong phương trình của đường tiệm cận xiên

$$y = ax + b \text{ theo công thức như sau: } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] \text{ hoặc}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

b) Khi $a = 0$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = b$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x) = 200 \left(5 - \frac{9}{2+x} \right)$, trong đó $x \geq 1$ (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014).

a) Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

b) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Câu 2. Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x + 50$

(triệu đồng). Khi đó $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ giảm và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Tính chất này nói lên điều gì?

Câu 3. Trong Hình 11, đường viền bóng của đèn ngủ lên tường là đồ thị của hàm số $y = 55 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 144}$

với x và y tính bằng đơn vị centimét. Chứng minh rằng $y = 55 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 144}$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số này.



Hình 11

Câu 4. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng 144 m^2 . Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(m)$.

a) Viết biểu thức tính chu vi $P(x)$ (mét) của mảnh vườn.

b) Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $P(x)$.

Câu 5. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t \geq 0$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = y(t)$. Từ đó, có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian t trở nên rất lớn?

(Theo: www.researchgate.net/publication/264903978_Microrespirometric_characterization_of_activated_sludge_inhibition_by_copper_and_zinc)

Câu 6. Một bình chứa 200 ml dung dịch muối với nồng độ 5mg/ml .

- a) Tính nồng độ dung dịch muối trong bình sau khi thêm vào $x\text{ ml}$ dung dịch muối với nồng độ 10mg/ml .
- b) Phải thêm bao nhiêu mililít vào bình để có dung dịch muối với nồng độ 9 mg/ml ? Nồng độ muối trong bình có thể đạt đến 10mg/ml được không?

Câu 7. Chi phí để làm sạch $p\%$ lượng dầu loang từ một sự cố trên biển có thể được xấp xỉ bởi công thức

$$C(p) = \frac{2000p}{100 - p} \text{ (tỉ đồng)}$$

- a) Tính chi phí để làm sạch $95\%, 96\%, 97\%, 98\%$ và 99% lượng dầu loang.
- b) Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $C(p)$.

Câu 8. Hằng tháng, một công ty chuyên sản xuất mặt hàng A phải trả chi phí cố định là 50 triệu đồng (để thuê mặt bằng và lương nhân viên) và chi phí cho nguyên liệu là $10000x$ (đồng) với x là số lượng sản phẩm A được nhập về.

- a) Viết công thức tính chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ mà công ty cần chi để sản xuất một sản phẩm.
- b) Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $\bar{C}(x)$.

Câu 9. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức

$$S(x) = 200 \left(5 - \frac{9}{2+x} \right), \text{ trong đó } x \geq 1 \text{ (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014).}$$

- a) Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- b) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Câu 10. Tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của một học viên sau t tuần học được

$$\text{cho bởi công thức: } S(t) = \frac{100t^2}{65+t^2} \text{ với } t > 0.$$

- a) Xem $y = S(t) = \frac{100t^2}{65+t^2}$ là một hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- b) Nêu nhận xét về tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó khi thời gian t càng lớn.

Câu 11. Tổng chi phí để sản xuất x sản phẩm của một xí nghiệp được tính theo công thức:

$$T = 20x + 100000 \text{ (nghìn đồng).}$$

- a) Viết công thức tính chi phí trung bình $C(x)$ của 1 sản phẩm khi sản xuất được x sản phẩm.

- b) Xem $y = C(x)$ là một hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- c) Xét tính đơn điệu của hàm số $y = C(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.
- d) Nêu nhận xét về chi phí để tạo ra 1 sản phẩm khi x càng lớn.

LỜI GIẢI

Câu 1. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x) = 200\left(5 - \frac{9}{2+x}\right)$, trong đó $x \geq 1$ (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014).

- a) Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- b) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Lời giải

a) Xét hàm số $y = S(x) = 200\left(5 - \frac{9}{2+x}\right)$ với $x \in [1; +\infty)$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} 200\left(5 - \frac{9}{2+x}\right) = 1000$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} 200\left(5 - \frac{9}{2+x}\right) = 1000$. Do đó đường thẳng $y = 1000$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho trên nửa khoảng $[1; +\infty)$.

b) Ta có đồ thị hàm số $y = S(x), x \in [1; +\infty)$ nhận đường thẳng $y = 1000$ làm tiệm cận ngang, tức là khi x càng lớn thì số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) sẽ tiến gần đến 1000 sản phẩm.

Câu 2. Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x + 50$

(triệu đồng). Khi đó $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ giảm và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Tính chất này nói lên điều gì?

Lời giải

Có $f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2x + 50}{x} = 2 + \frac{50}{x}$. Có $f'(x) = -\frac{50}{x^2} < 0$. Do đó hàm số $f(x)$ giảm.

Có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{50}{x}\right) = 2$.

Tính chất này nói lên rằng chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm sẽ giảm khi số lượng sản phẩm được sản xuất tăng lên và giới hạn của chi phí trung bình là 2 triệu đồng khi số lượng sản phẩm tiến gần đến vô cùng. Điều này có thể hiểu là khi sản xuất nhiều sản phẩm hơn, chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm sẽ giảm và tiến gần đến một giá trị ổn định.

Câu 3. Trong Hình 11, đường viền bóng của đèn ngủ lên tường là đồ thị của hàm số $y = 55 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 144}$ với x và y tính bằng đơn vị centimét. Chứng minh rằng $y = 55 - \frac{1}{2}x$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số này.



Hình 11

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(55 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 144} \right) - \left(55 - \frac{1}{2}x \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(x - \sqrt{x^2 + 144} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{-144}{x + \sqrt{x^2 + 144}} \right) = 0$.

Tương tự ta cũng có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(55 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 144} \right) - \left(55 - \frac{1}{2}x \right) \right] = 0$.

Do đó $y = 55 - \frac{1}{2}x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = 55 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 144}$.

Câu 4. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng 144 m^2 . Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(\text{m})$.

a) Viết biểu thức tính chu vi $P(x)$ (mét) của mảnh vườn.

b) Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $P(x)$.

Lời giải

a) Cạnh còn lại của mảnh vườn có độ dài là $\frac{144}{x}(\text{m})(x > 0)$.

Chu vi mảnh vườn là $P(x) = 2 \left(x + \frac{144}{x} \right) = \frac{2x^2 + 288}{x}(\text{m}) (x > 0)$.

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + 288}{x} = +\infty$. Tương tự $\lim_{x \rightarrow 0^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 288}{x} = -\infty$.

Vậy $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [P(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 \left(x + \frac{144}{x} \right) - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{288}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [P(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 \left(x + \frac{144}{x} \right) - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{288}{x} = 0$$

Tương tự

Do đó $y = 2x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Câu 5. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t \geq 0$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = y(t)$. Từ đó, có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian t trở nên rất lớn?

(Theo: www.researchgate.net/publication/264903978_Microrespirometric_characterization_of_activated_sludge_inhibition_by_copper_and_zinc)

Lời giải

$$\text{Có } \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{15t}{9t^2 + 1} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{\frac{15}{t}}{9 + \frac{1}{t^2}} \right) = 5$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(5 - \frac{15t}{9t^2 + 1} \right) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(5 - \frac{\frac{15}{t}}{9 + \frac{1}{t^2}} \right) = 5$$

Do đó $y = 5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số và hàm số không có tiệm cận đứng, tiệm cận xiên.

Nhận xét:

Khi thời t trở nên rất lớn, nồng độ oxygen trong hồ sẽ tiến dần về giá trị cố định là 5 mg/l . Điều này có thể được hiểu sau một thời gian dài, môi trường trong hồ sẽ đạt đến một trạng thái ổn định nồng độ oxygen không thay đổi nhiều.

Câu 6. Một bình chứa 200 ml dung dịch muối với nồng độ 5 mg/ml .

a) Tính nồng độ dung dịch muối trong bình sau khi thêm vào $x \text{ ml}$ dung dịch muối với nồng độ 10 mg/ml .

b) Phải thêm bao nhiêu mililit vào bình để có dung dịch muối với nồng độ 9 mg/ml ? Nồng độ muối trong bình có thể đạt đến 10 mg/ml được không?

Lời giải

a) Nồng độ dung dịch muối trong bình sau khi thêm vào $x \text{ ml}$ dung dịch muối với nồng độ 10 mg/ml là

$$C(x) = \frac{1000 + 10x}{200 + x}$$

b) Để có dung dịch muối với nồng độ 9 mg/ml , ta phải thêm vào bình $x \text{ ml}$ với x thỏa mãn $C(x) = 9$.

Khi đó ta có $x = 800 (\text{ml})$. Rõ ràng $C(x)$ là hàm đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = 10$. Do đó, nồng độ muối trong bình không thể đạt đến 10 mg/ml .

Câu 7. Chi phí để làm sạch $p\%$ lượng dầu loang từ một sự cố trên biển có thể được xấp xỉ bởi công thức

$$C(p) = \frac{2000p}{100-p} \text{ (tỉ đồng)}$$

a) Tính chi phí để làm sạch 95%, 96%, 97%, 98% và 99% lượng dầu loang.

b) Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $C(p)$.

Lời giải

a) $C(95) = \frac{2000 \cdot 95}{100 - 95} = 38000$ tỉ đồng; $C(96) = \frac{2000 \cdot 96}{100 - 96} = 48000$ tỉ đồng; $C(97) = \frac{2000 \cdot 97}{100 - 97} = 64667$ tỉ đồng

$C(98) = \frac{2000 \cdot 98}{100 - 98} = 98000$ tỉ đồng; $C(99) = \frac{2000 \cdot 99}{100 - 99} = 198000$ tỉ đồng

b) Tiệm cận đứng: $p = 100$

Câu 8. Hằng tháng, một công ty chuyên sản xuất mặt hàng A phải trả chi phí cố định là 50 triệu đồng (để thuê mặt bằng và lương nhân viên) và chi phí cho nguyên liệu là $10000x$ (đồng) với x là số lượng sản phẩm A được nhập về.

a) Viết công thức tính chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ mà công ty cần chi để sản xuất một sản phẩm.

b) Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $\bar{C}(x)$.

Lời giải

a) $\bar{C}(x) = \frac{50000000}{x} + 10000$

b) Tiệm cận đứng: $x = 0$; Tiệm cận ngang: $y = 10000$

Câu 9. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức

$S(x) = 200 \left(5 - \frac{9}{2+x} \right)$, trong đó $x \geq 1$ (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014).

a) Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

b) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Lời giải

a) Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 200 \left(5 - \frac{9}{2+x} \right) = 200 \cdot 5 = 1000$

Vậy đường thẳng $y = 1000$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = S(x)$.

b) Ta có đồ thị hàm số $S(x)$ nhận đường thẳng $y = 1000$ làm tiệm cận ngang, tức là khi x đủ lớn thì số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) sẽ tiến gần đến mức 1000 và số lượng sản phẩm bán không thể vượt mức 1000 cho dù thời gian x có kéo dài đến vô cùng.

Câu 10. Tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của một học viên sau t tuần học được

cho bởi công thức: $S(t) = \frac{100t^2}{65+t^2}$ với $t > 0$.

a) Xem $y = S(t) = \frac{100t^2}{65+t^2}$ là một hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

b) Nêu nhận xét về tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó khi thời gian t càng lớn.

Lời giải

a) Tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 100$.

b) Do đường thẳng $y = 100$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = S(t)$ nên khi t càng lớn thì tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sẽ tiến gần đến mức 100 từ/phút và không thể vượt mức 100 từ/phút cho dù thời gian t có kéo dài đến vô cùng.

Câu 11. Tổng chi phí để sản xuất x sản phẩm của một xí nghiệp được tính theo công thức:

$$T = 20x + 1000000 \text{ (nghìn đồng)}.$$

a) Viết công thức tính chi phí trung bình $C(x)$ của 1 sản phẩm khi sản xuất được x sản phẩm.

b) Xem $y = C(x)$ là một hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

c) Xét tính đơn điệu của hàm số $y = C(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

d) Nêu nhận xét về chi phí để tạo ra 1 sản phẩm khi x càng lớn.

Lời giải

a) $C(x) = \frac{20x + 1000000}{x}$ (nghìn đồng).

b) Tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 20$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

d) Do đường thẳng $y = 20$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = C(x)$ nên khi x càng lớn thì chi phí để tạo ra 1 sản phẩm sẽ giảm gần đến mức 20 nghìn đồng và không thể giảm hơn 20 nghìn đồng cho dù số sản phẩm sản xuất được có thể lớn vô cùng.