ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x^2-4$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

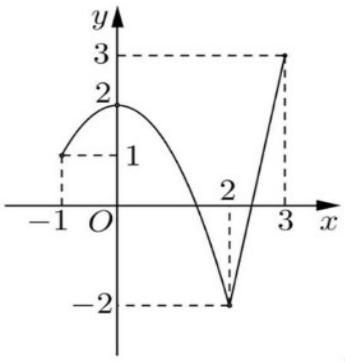
Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;3]$ như hình vẽ dưới đây.



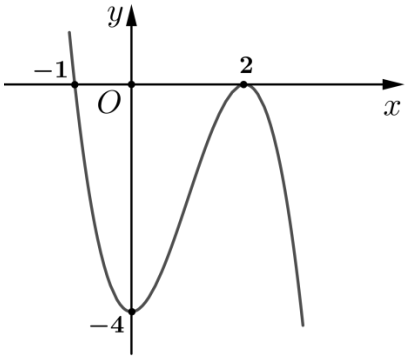
Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=g(x)=f(\sin x+1)$ trên tập $\mathbb{R}$.

A. $M=3$. **B.** $M=0$. **C.** $M=1$. **D.** $M=2$.

Câu 4: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}$ là đường thẳng có phương trình?

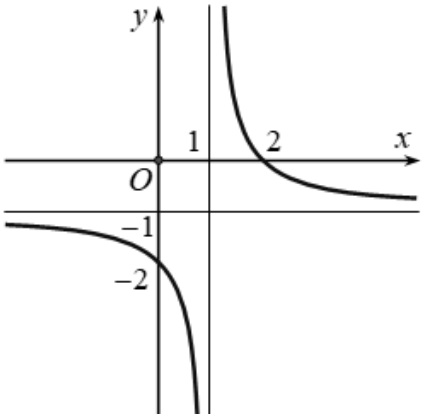
A. $y=-x-1$. **B.** $y=x-1$. **C.** $y=-x+1$. **D.** $y=x+1$.

Câu 5: Đường cong ở hình sau là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=-x^3+3x^2-4.$ **B.** $y=x^3-4.$ **C.** $y=x^2-4.$ **D.** $y=-x^2-4.$

Câu 6: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên □ .

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên □ .

Câu 7: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ là:

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $(-2;-2)$. **D.** $(0;-2)$.

Câu 8: Khẳng định nào sau đây đúng về tính đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{2x+4}{1-x}$?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

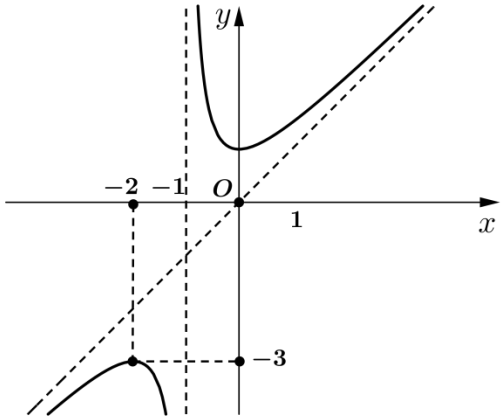
C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Câu 9: Một chất điểm chuyển động thẳng với phương trình $s(t)=t^3+3t-1$, trong đó t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t=5$ (giây)?

A. $139\left(\dfrac{m}{s}\right)$. **B.** $78\left(\dfrac{m}{s}\right)$. **C.** $30\left(\dfrac{m}{s}\right)$. **D.** $77\left(\dfrac{m}{s}\right)$.

Câu 10: Đồ thị trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số



A. $y=x-\dfrac{1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

Câu 11: Thể tích V (đơn vị: cm^3) của 1 kg nước tại nhiệt độ T (đơn vị: $^\circ\text{C}$) được tính bởi hàm số $V(T)$, $T\in[0;30]$. Biết hàm số $V(T)$ có bảng biến thiên như sau:

T	0		T_1		30
$V'(T)$		$-$	0	$+$	
$V(T)$	$V(0)$	↘	$V(T_1)$	↗	$V(30)$

Với $T_1\approx 3{,}97\,^\circ\text{C}$. Hỏi thể tích $V(T)$ giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

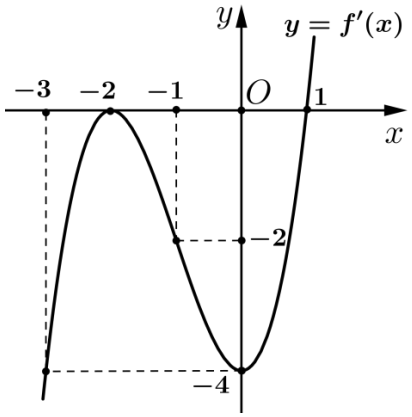
A. $(0;3{,}97)$. **B.** $(0;5)$. **C.** $(0;10)$. **D.** $(0;30)$.

Câu 12: Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số $N(t)=-t^3+12t^2$, $0\le t\le 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần). Hỏi số người bị nhiễm bệnh tăng trong khoảng thời gian nào?

A. $(0;10)$ **B.** $(0;8)$. **C.** $(8;10)$. **D.** $(8;12)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\square$ và hàm số $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



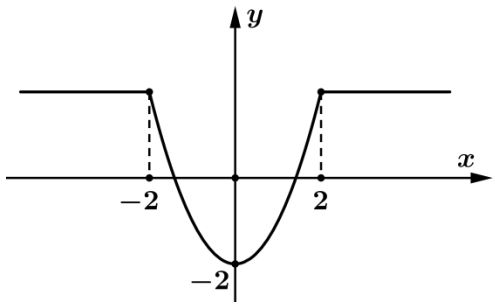
a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

c) $f'(2)=4$.

d) Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2+x+2024$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x=-2$ và $x=2$

b) Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng -2 đạt được tại $x=0$

d) Hàm số $f(x)$ không có giá trị lớn nhất

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)=\frac{x^2+4x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số là bằng nhau

b) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm có toạ độ $(-1;2)$

c) Đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x)$

d) Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$ là $y=2x+5$

Câu 4: Chi phí nhiên liệu của một chiếc tầu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với

lập phương của vận tốc, khi $v=10$ (km/giờ) thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Khi vận tốc $v=10$ (km/giờ) thì chi phí nguyên liệu cho phần thứ nhất trên 1km đường sông là 48000 đồng.

b) Hàm số xác định tổng chi phí nguyên liệu trên 1km đường sông với vận tốc x (km/h) là $f(x)=\dfrac{480}{x}+0,03x^3$.

c) Khi vận tốc $v=30$ (km/giờ) thì tổng chi phí nguyên liệu trên 1km đường sông là 43000 đồng.

d) Vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1km đường sông nhỏ nhất là $v=20$ (km/giờ).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+4x+2}{x+2}$ có trục đối xứng là đường thẳng $y=ax+b$. Tính tổng tất cả các giá trị của T biết $T=a+b$.

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi $M(x_1;y_1),\ N(x_2;y_2)$ là hai điểm thuộc (C) sao cho MN đối xứng nhau qua điểm $I(1;-3)$. Tính giá trị của biểu thức $T=\left|x_1^2-x_2^2\right|$.

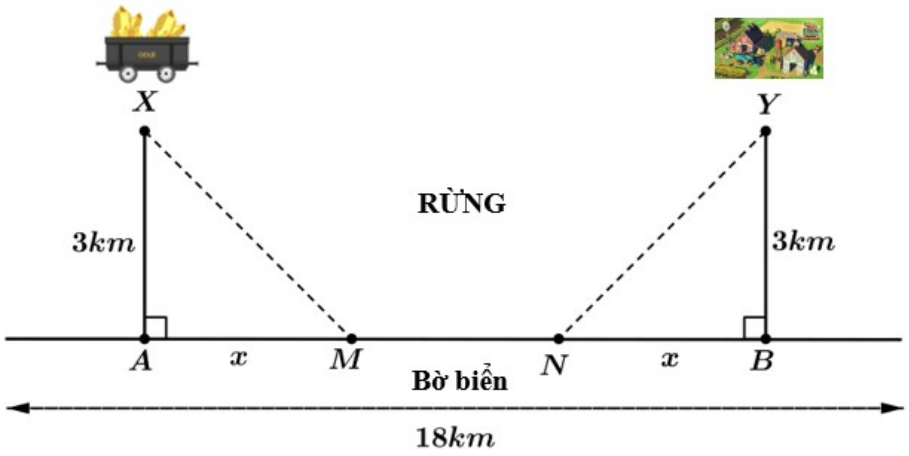
Câu 3: Giả sử hàm nhu cầu đối với một loại hàng hóa được cho bởi công thức $p=\dfrac{60}{1+0,2x},12>x\geq 0$, trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán. Để bán được 10 đơn vị sản phẩm thì giá bán là bao nhiêu nghìn đồng?

Câu 4: Trong hệ trục toạ độ (Oxy), cho đồ thị hàm số (C): $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ với $x>-1$ mô tả chuyển động của một chiếc thuyền trên biển. Một trạm phát sóng đặt tại điểm $I(-1;-1)$, biết hoành độ điểm M thuộc đồ thị (C) mà tại đó thuyền thu được sóng tốt nhất là $x_0=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}-b$ (loại trừ các điều kiện ảnh hưởng đến việc thu phát sóng). Tính giá trị biểu thức $P=a.n+b$?

Câu 5: Trong Vật lí, ta biết rằng khi mắc song song hai điện trở R_1 và R_2 thì điện trở tương đương R của mạch điện được tính theo công thức $R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016). Giả sử một điện trở 10Ω được mắc song song với một biến trở x thì điện trở tương đương R là hàm số $y=\dfrac{10x}{x+10},x>0$. Điện trở tương đương của mạch **không thể** vượt quá bao nhiêu?

Câu 6: Ông Vinh đang ở trong rừng để đào vàng và ông ta tìm thấy vàng ở điểm X cách điểm A một khoảng 3 km. Điểm A nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Trại của Ông

Vinh nằm ở vị trí Y cách điểm B một khoảng 3 km. Điểm B cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng $AB = 3$ km, $AM = NB = x$ km và $AX = BY = 3$ km (minh hoạ như hình vẽ sau)



Khi đang đào vàng, Ông Vinh không may bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo phương trình $y = 50\log(t+2)$. Trong đó, y là nồng độ, t là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Ông Vinh cần quay trở lại trại để lấy thuốc giải độc. Ông ấy chạy trong rừng và trên bãi biển với vận tốc lần lượt là 5 km/h và 13 km/h. Để về đến trại Ông Vinh cần chạy từ trong rừng qua điểm M, N trên bãi biển. Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi ông Vinh về đến trại (làm tròn đáp án đến hàng phần chục).

LỜI GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^2 - 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Do hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^2 - 4 < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

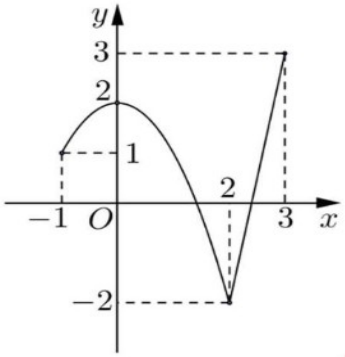
Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng 0.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;3]$ như hình vẽ dưới đây.



Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=g(x)=f(\sin x+1)$ trên tập $\mathbb{R}$.

A. $M=3$. **B.** $M=0$. **C.** $M=1$. **D.** $M=2$.

Lời giải

Đặt $t=\sin x+1$. Với $\forall x\in\mathbb{R}, \sin x\in[-1;1]\Rightarrow t\in[0;2]$.

Xét hàm số $y=f(t), t\in[0;2]$. Từ đồ thị đã cho ta có $M=\max\limits_{[0;2]} f(t)=f(0)=2.$

Câu 4: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}$ là đường thẳng có phương trình?

A. $y=-x-1$. **B.** $y=x-1$. **C.** $y=-x+1$. **D.** $y=x+1$.

Lời giải

$$a=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2-3x+4}{x+2}:x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-3x+4}{x^2+2x}=-1,$$

Ta có

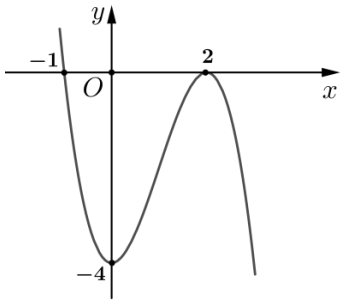
$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x^2-3x+4}{x+2}-(-1)x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+4}{x+2}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^2-3x+4}{x+2}:x\right)=-1,\ \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-x^2-3x+4}{x+2}-(-1)x\right]=-1$$

Tương tự:

Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}$ là đường thẳng có phương trình $y=-x-1$.

Câu 5: Đường cong ở hình sau là đồ thị của hàm số nào?



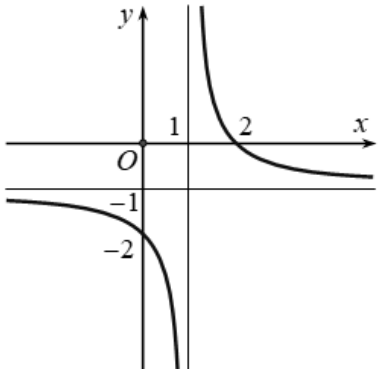
A. $y=-x^3+3x^2-4.$ **B.** $y=x^3-4.$ **C.** $y=x^2-4.$ **D.** $y=-x^2-4.$

Lời giải

Xét dáng hình của đồ thị, ta loại được hàm số $y=x^2-4$ và $y=-x^2-4$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ nên ta loại hàm số $y=x^3-4$ và nhận hàm số $y=-x^3+3x^2-4.$

Câu 6: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên □ .

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên □ .

Lời giải

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi xuống từ trái qua phải và nhận đường thẳng $x=1$ làm tiệm cận đứng.

Do đó, hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 7: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ là:

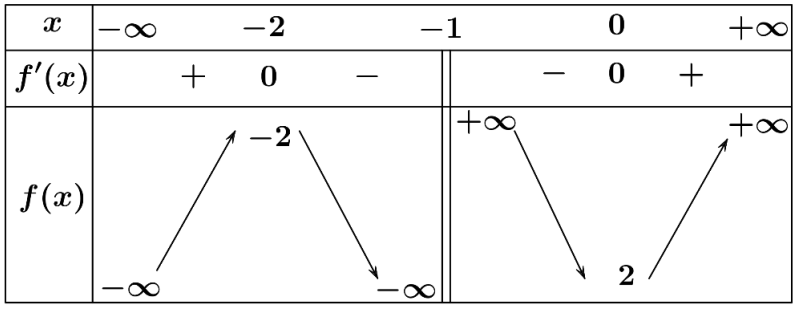
A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $(-2;-2)$. **D.** $(0;-2)$.

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ có tập xác định là □ $\setminus\{-1\}$ và có đạo hàm $y'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

Giải phương trình: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Vậy điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-2;-2)$.

Câu 8: Khẳng định nào sau đây đúng về tính đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{2x+4}{1-x}$?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y = \dfrac{2x+4}{1-x} \Rightarrow y' = \dfrac{6}{(1-x)^2} > 0, \forall x \neq 1$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 9: Một chất điểm chuyển động thẳng với phương trình $s(t) = t^3 + 3t - 1$, trong đó t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ (giây)?

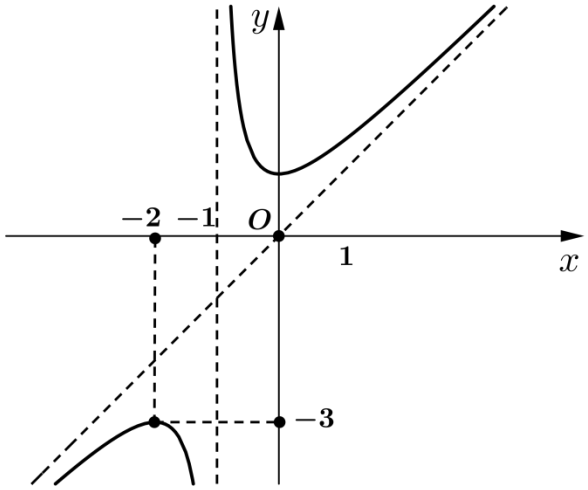
A. 139 $\left(\dfrac{m}{s}\right)$. **B.** 78 $\left(\dfrac{m}{s}\right)$. **C.** 30 $\left(\dfrac{m}{s}\right)$. **D.** 77 $\left(\dfrac{m}{s}\right)$.

Lời giải

Ta có: $v(t) = s'(t) = 3t^2 + 3$.

Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ là $v(5) = 78 \left(\dfrac{m}{s}\right)$.

Câu 10: Đồ thị trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số



A. $y=x-\dfrac{1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

Lời giải

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;1)$ nên loại hàm số $y=x-\dfrac{1}{x+1}$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-2;-3)$ nên loại hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$.

Câu 11: Thể tích V (đơn vị: cm^3) của 1 kg nước tại nhiệt độ T (đơn vị: $^\circ\text{C}$) được tính bởi hàm số $V(T)$, $T\in[0;30]$. Biết hàm số $V(T)$ có bảng biến thiên như sau:

T	0		T_1		30
$V'(T)$		$-$	0	$+$	
$V(T)$	$V(0)$	↘	$V(T_1)$	↗	$V(30)$

Với $T_1\approx 3{,}97\,^\circ\text{C}$. Hỏi thể tích $V(T)$ giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

A. $(0;3{,}97)$. **B.** $(0;5)$. **C.** $(0;10)$. **D.** $(0;30)$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra, thể tích $V(T)$ giảm trong khoảng nhiệt độ từ $0\,^\circ\text{C}$ đến $3{,}97\,^\circ\text{C}$.

Câu 12: Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số $N(t)=-t^3+12t^2$, $0\le t\le 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần). Hỏi số người bị nhiễm bệnh tăng trong khoảng thời gian nào?

A. $(0;10)$ **B.** $(0;8)$. **C.** $(8;10)$. **D.** $(8;12)$.

Lời giải

Ta có $N'(t)=-3t^2+24t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=8\end{array}\right.$.

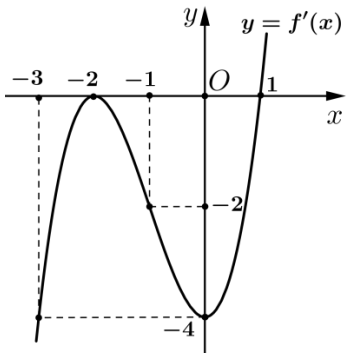
Bảng biến thiên

t	0		8		12
$N'(t)$		$+$	0	$-$	
$N(t)$	0	↗	256	↘	0

Từ bảng biến thiên ta thấy số người bị nhiễm bệnh tăng trong khoảng thời gian $(0;8)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\square$ và hàm số $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

c) $f'(2)=4$.

d) Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2+x+2024$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

a) Sai: Vì từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta thấy $f'(x)\geq 0$ với $\forall x\geq 1$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

b) Sai: Vì từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ chỉ đổi dấu một lần qua $x=1$ nên hàm số có một điểm cực trị.

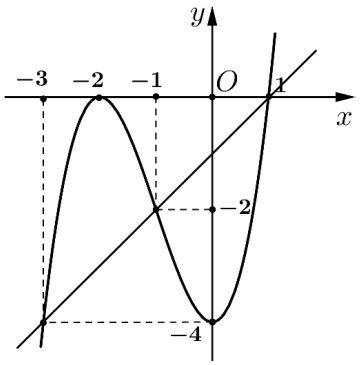
c) Sai: Từ đồ thị ta có hàm số $f'(x)$ có dạng: $f'(x)=a(x+2)^2(x-1)$.

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đi qua $(0;-4)$ nên: $-4=a(0+2)^2(0-1)\Leftrightarrow a=1$.

Vậy $f'(x)=(x+2)^2(x-1)\Rightarrow f'(2)=(2+2)^2(2-1)=16$.

d) Đúng: Ta có: $g'(x)=f'(x)-x+1=0\Leftrightarrow f'(x)=x-1$.

Vẽ đường thẳng $y=x-1$ trên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị hàm số $y=f'(x)$.



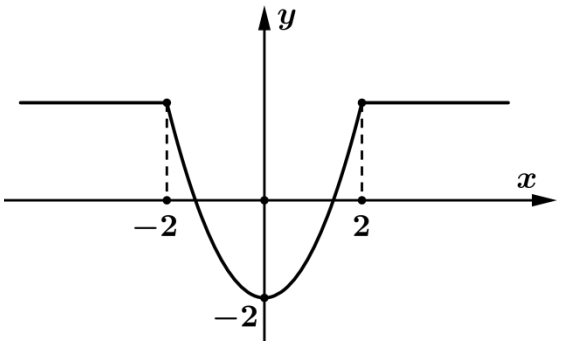
Khi đó: $f'(x)=x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(-3)$	↗	$g(-1)$	↘	$g(1)$	↗	$+\infty$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$ nên $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x=-2$ và $x=2$

b) Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng -2 đạt được tại $x=0$

d) Hàm số $f(x)$ không có giá trị lớn nhất

Lời giải

a) Đúng: Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x=-2$ và $x=2$

b) Sai: Hàm số $f(x)$ chỉ có một điểm cực trị là $x=0$

c) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng -2 đạt được tại $x=0$

d) Sai: Ta thấy $f(x)\le 2,\forall x\in\mathbb{R}$ và có xảy ra dấu bằng nên hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2+4x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số là bằng nhau

b) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm có toạ độ $(-1;2)$

c) Đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x)$

d) Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$ là $y=2x+5$

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{x^2+4x-1}{x-1}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Xét đạo hàm $y'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$+\infty$ ‖	↘	10	↗	$+\infty$

a) Đúng: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-1;1)$ và $(1;3)$.

b) Đúng: Đồ thị hàm số đạt cực đại tại điểm $(-1;2)$

c) Đúng: Xét $\lim\limits_{x\to 1^-}y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^+}y=+\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+4x-1}{x-1}$.

d) Sai: Xét $\lim\limits_{x\to\infty}\left[y-(x+5)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$ nên đường thẳng $y=x+5$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+4x-1}{x-1}$.

Câu 4: Chi phí nhiên liệu của một chiếc tầu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v=10$ (km/giờ) thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Khi vận tốc $v=10$ (km/giờ) thì chi phí nguyên liệu cho phần thứ nhất trên 1km đường sông là 48000 đồng.

b) Hàm số xác định tổng chi phí nguyên liệu trên 1km đường sông với vận tốc x (km/h) là $f(x)=\frac{480}{x}+0,03x^3$.

c) Khi vận tốc $v=30$ (km/giờ) thì tổng chi phí nguyên liệu trên 1km đường sông là 43000 đồng.

d) Vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1km đường sông nhỏ nhất là $v=20$ (km/giờ).

Lời giải

a) Đúng: Thời gian tàu chạy quãng đường 1km là: $\frac{1}{10}$ (giờ)

Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là: $\frac{1}{10}\cdot 480000=48000.$ (đồng).

b) Sai: Gọi x (km/h) là vận tốc của tàu, $x>0$

Thời gian tàu chạy quãng đường 1km là: $\frac{1}{x}$ (giờ)

Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là: $\frac{1}{x}\cdot 480=\frac{480}{x}$ (nghìn đồng)

Hàm chi phí cho phần thứ hai là $p=kx^3$ (nghìn đồng/ giờ)

Khi $x=10\Rightarrow p=30\Rightarrow k=0,03$ nên $p=0,03x^3$ (nghìn đồng/ giờ)

Do đó chi phí phần 2 để chạy 1km là: $\frac{1}{x}\cdot 0,03x^3=0,03x^2$ (nghìn đồng)

Vậy tổng chi phí: $f(x)=\frac{480}{x}+0,03x^2$.

c) Đúng: Tổng chi phí: $f(x)=\frac{480}{x}+0,03x^2$.

Thay $x=v=30$ (km/giờ) vào ta có $f(30)=\frac{480}{30}+0,03.30^2=43$ (nghìn đồng).

d) Đúng: $f(x)=\frac{480}{x}+0,03x^2=\frac{240}{x}+\frac{240}{x}+0,03x^2\geq 3\sqrt[3]{1728}=36.$

Dấu ''='' xảy ra khi $x=20$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho đồ thị hàm số $f(x)=\frac{x^2+4x+2}{x+2}$ có trục đối xứng là đường thẳng $y=ax+b$. Tính tổng tất cả các giá trị của T biết $T=a+b$.

Lời giải

Ta có: $f(x)=x+2-\frac{2}{x+2},\forall x\in(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng và tiệm cận xiên lần lượt là đường $x=-2$ hay $x+2=0$ và đường $y=x+2$ hay $x-y+2=0$.

Đồ thị hàm số đã cho có các trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên nên phương trình có dạng là:

$\frac{x+2}{1} \pm \frac{x-y+2}{\sqrt{2}} = 0$ hay $y = \left(\sqrt{2}+1\right)x + 2 + 2\sqrt{2}$ và $y = \left(1-\sqrt{2}\right)x + 2 - 2\sqrt{2}$.

Khi đó $T = a + b$ thì $T_1 = 3 + 3\sqrt{2}$ và $T_2 = 3 - 3\sqrt{2}$.

Do đó tổng tất cả các giá trị của T là $T_1 + T_2 = \left(3+3\sqrt{2}\right) + \left(3-3\sqrt{2}\right) = 6$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi $M\left(x_1; y_1\right),\ N\left(x_2; y_2\right)$ là hai điểm thuộc (C) sao cho MN đối xứng nhau qua điểm $I(1;-3)$. Tính giá trị của biểu thức $T = \left|x_1^2 - x_2^2\right|$.

Lời giải

Vì $M\left(x_1; y_1\right),\ N\left(x_2; y_2\right)$ đối xứng nhau qua điểm $I(1;-3)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ y_1 + y_2 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 - x_1 \\ y_2 = -6 - y_1 \end{cases} \Rightarrow N\left(2 - x_1; -6 - y_1\right).$$

Ta có $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x+1} = x - 3 + \frac{6}{x+1}$. Do M, N thuộc (C) nên ta có

$$\begin{cases} y = x - 3 + \frac{6}{x+1} \\ -6 - y = (2-x) - 3 + \frac{6}{(2-x)+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 + \frac{6}{x+1} \\ -6 - y = -x - 1 + \frac{6}{3-x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -6 = -4 + \frac{6}{x+1} + \frac{6}{3-x} \Leftrightarrow \frac{3}{x+1} + \frac{3}{3-x} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 15 = 0 \\ x \neq -1,\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow y = -9 \\ x = 5 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

Vậy $M(-3,-9), N(5;3) \Rightarrow T = \left|x_1^2 - x_2^2\right| = \left|(-3)^2 - 5^2\right| = 16$.

Câu 3: Giả sử hàm nhu cầu đối với một loại hàng hóa được cho bởi công thức $p = \frac{60}{1 + 0,2x}, 12 > x \geq 0$, trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán. Để bán được 10 đơn vị sản phẩm thì giá bán là bao nhiêu nghìn đồng?

Lời giải

Với $x = 10 \Rightarrow p = \frac{60}{1 + 0,2 \cdot 10} = 20$ (nghìn đồng).

Câu 4: Trong hệ trục toạ độ (Oxy), cho đồ thị hàm số (C): $y = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$ với $x > -1$ mô tả chuyển động của một chiếc thuyền trên biển. Một trạm phát sóng đặt tại điểm $I(-1;-1)$, biết hoành độ điểm M thuộc đồ thị (C) mà tại đó thuyền thu được sóng tốt nhất là $x_0 = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} - b$ (loại trừ các điều kiện ảnh hưởng đến việc thu phát sóng). Tính giá trị biểu thức $P = a.n + b$?

Lời giải

Ta có: $M \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; x_0 + \dfrac{1}{x_0+1}\right)$ với $x_0 > -1$.

$IM^2 = (x_0+1)^2 + \left(x_0+1+\dfrac{1}{x_0+1}\right)^2 = 2(x_0+1)^2 + \dfrac{1}{(x_0+1)^2} + 2$. Đặt $t = (x_0+1)^2, t > 0$ thì khi đó ta có: $IM^2 = 2t + 2 + \dfrac{1}{t}$. Xét hàm số $y = 2t + 2 + \dfrac{1}{t}$ có $y' = 2 - \dfrac{1}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

t	0		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		↘		↗	

Để thuyền thu được sóng tốt nhất $\Leftrightarrow$ IM ngắn nhất $\Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} - 1$

Vậy $n = 4; a = 2; b = 1 \Rightarrow an + b = 9$.

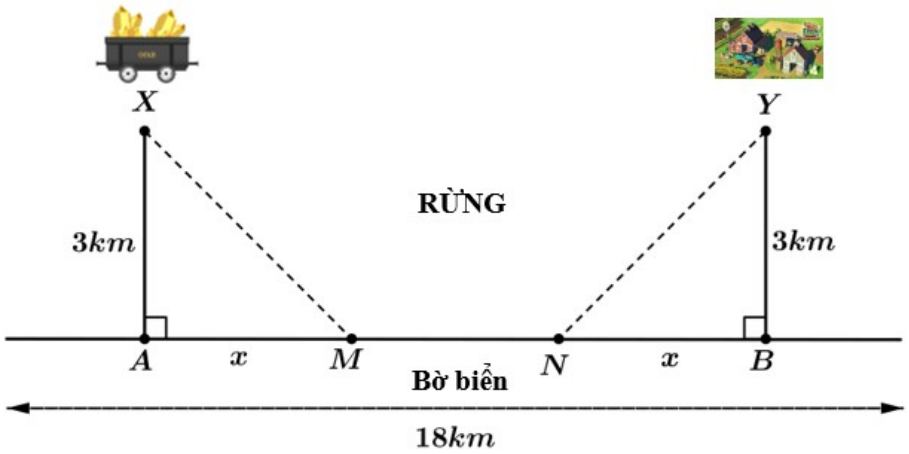
Câu 5: Trong Vật lí, ta biết rằng khi mắc song song hai điện trở R_1 và R_2 thì điện trở tương đương R của mạch điện được tính theo công thức $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016). Giả sử một điện trở 10Ω được mắc song song với một biến trở x thì điện trở tương đương R là hàm số $y = \dfrac{10x}{x+10}, x > 0$. Điện trở tương đương của mạch **không thể** vượt quá bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: một điện trở 10Ω được mắc song song với một biến trở x nên điện trở tương đương là hàm số $y = \dfrac{10x}{x+10}$ với $x > 0$.

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{10x}{x+10} = 10$ nên điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá 10Ω.

Câu 6: Ông Vinh đang ở trong rừng để đào vàng và ông ta tìm thấy vàng ở điểm X cách điểm A một khoảng 3 km. Điểm A nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Trại của Ông Vinh nằm ở vị trí Y cách điểm B một khoảng 3 km. Điểm B cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng $AB = 3$ km, $AM = NB = x$ km và $AX = BY = 3$ km (minh hoạ như hình vẽ sau)



Khi đang đào vàng, Ông Vinh không may bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo phương trình $y = 50\log(t+2)$. Trong đó, y là nồng độ, t là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Ông Vinh cần quay trở lại trại để lấy thuốc giải độc. Ông ấy chạy trong rừng và trên bãi biển với vận tốc lần lượt là 5 km/h và 13 km/h. Để về đến trại Ông Vinh cần chạy từ trong rừng qua điểm M, N trên bãi biển. Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi ông Vinh về đến trại (làm tròn đáp án đến hàng phần chục).

Lời giải

Để nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi thời gian di chuyển về đến tại thấp nhất.

Vậy nên Quãng đường ông Vinh di chuyển về đến trại phải thấp nhất.

Quãng đường của Ông Vinh

Theo bài ra ta có: ông Vinh sẽ đi qua các quãng đường $XM + MN + NY.$

Ta có: $XM = NY = \sqrt{9+x^2}$; $MN = 18 - 2x$

Thời gian Ông Vinh chạy đến Trại nghỉ là: $T(x) = 2\left(\dfrac{\sqrt{9+x^2}}{5} + \dfrac{9-x}{13}\right)$ với $x \in (0;9)$

Xét $T'(x) = 2\left(\dfrac{\sqrt{9+x^2}}{5} + \dfrac{9-x}{13}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{4}$ (thỏa mãn)

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{5}{4}$		9
$T'(x)$		$-$	0	$+$	
$T(x)$	$\frac{168}{65}$	↘	$\frac{162}{65}$	↗	$\frac{6\sqrt{10}}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của $T(x)$ nhỏ nhất khi $x = \dfrac{5}{4}$.

$\Rightarrow \min\limits_{x\in(0;9)} T(x) = T\left(\dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{162}{65}$

Vậy, nồng độ chất độc trong máu thấp nhất là: $\min\limits_{(0,+\infty)} y = 50\log\left(\frac{162}{65}+2\right) \approx 32,6$