CÁC DẠNG BÀI TẬP BÀI PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Dạng 1: Xác định các yếu tố cơ bản của mặt cầu trong không gian

Loại 1: Cho (S) là: $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=R^2$. Khi đó:

- Tâm $I(a;b;c)$ (đổi dấu số trong dấu ngoặc)
- Bán kính R (rút căn vế phải)

Loại 2: Cho (S) là: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Khi đó:

- Điều kiện để phương trình trên là mặt cầu là $a^2+b^2+c^2-d>0$
- Tâm $I(a;b;c)$ (đổi dấu hệ số của x,y,z và chia đôi)
- Bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho phương trình mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=16$, bán kính R của mặt cầu là

A. $R=4$. **B.** $R=16$. **C.** $R=0$. **D.** $R=2$.

Lời giải

Phương trình tổng quát của mặt cầu trong không gian $Oxyz$ là: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

Khi đó: $R^2=16\Rightarrow R=4$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$. Xác định toạ độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(3;-1;2),R=2.$ **B.** $I(-3;1;-2),R=2.$ **C.** $I(-3;1;-2),R=4.$ **D.** $I(3;-1;2),R=4.$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-1;2)$ và bán kính $R=2.$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-2=0$. Xác định toạ độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(1;2;-1), R=2\sqrt{2}.$ **B.** $I(-1;-2;1), R=2\sqrt{2}.$

C. $I(2;4;-2), R=\sqrt{2}.$ **D.** $I(2;4;2), R=8.$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2-(-2)}=2\sqrt{2}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$. Tọa độ tâm I và bán kính R của (S) lần lượt là

A. $I(-1;2;-3)$; $R=3$. **B.** $I(1;2;-3)$; $R=9$. **C.** $I(1;-2;3)$; $R=9$. **D.** $I(1;2;-3)$; $R=3$.

Lời giải

Mặt cầu đã cho có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính $R=3$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình của một mặt cầu?

A. $(S): x^2+y^2-z^2-4x+2y+2z-3=0$. **B.** $(S): x^2+2y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$.

C. $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+2=0$. **D.** $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+8=0$.

Lời giải

Phương trình: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0\ (a^2+b^2+c^2-d>0)$ là phương trình mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Ở đáp án A và B không đúng dạng phương trình mặt cầu vì hệ số của x^2, y^2, z^2 không bằng nhau nên phương trình ở đáp án A, B không là phương trình mặt cầu.

Trong đáp án D ta có: $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=-1 \\ d=8 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2-d=-2<0$ nên phương trình ở đáp án D không là phương trình mặt cầu.

Trong đáp án C ta có: $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=-1 \\ d=2 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2-d=4>0$ nên phương trình ở đáp án C là phương trình mặt cầu.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2z-6y-2=0$ là phương trình của mặt cầu có tâm I. Xác định tọa độ tâm I

A. $I(2;-1;3)$. **B.** $I(2;3;-1)$. **C.** $I(2;-3;1)$. **D.** $I(2;1;-3)$.

Lời giải

Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính R có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a=-4 \\ -2b=-6 \\ -2c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=-1 \end{cases}.$$

Vậy tâm của mặt cầu là $I(2;3;-1)$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=1$. Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là

A. $I(2;2;-1)$. **B.** $I(-2;-2;1)$. **C.** $I(-2;2;-1)$. **D.** $I(4;4;-2)$.

Lời giải

Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính R có phương trình: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

Từ phương trình mặt cầu đề bài cho $\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases}$. Vậy tâm mặt cầu là $I(2;2;-1)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-\sqrt{2}x+y-z-1=0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. 3. **B.** 2. **C.** $R=\sqrt{2}$. **D.** $R=\sqrt{3}$.

Lời giải

Tạo độ tâm của mặt cầu (S) là: $I\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ và hệ số $d=-1$.

Bán kính $R=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-(-1)}=\sqrt{2}>0$. Vậy bán kính mặt cầu (S) là: $R=\sqrt{2}$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có phương trình: $(x-a)^2+y^2+(z-c)^2=16$ đi qua hai điểm O và $M(1;0;1)$. Tính $a+c$

A. $a+c=4$. **B.** $a+c=16$. **C.** $a+c=1$. **D.** $a+c=0$.

Lời giải

Vì mặt cầu (S) đi qua $O(0;0;0)$ nên: $a^2+c^2=16$. (1)

Vì mặt cầu (S) đi qua $M(1;0;1)$ nên: $(1-a)^2+(1-c)^2=16$. (2)

$(2) \Leftrightarrow a^2 + c^2 - 2(a+c) + 2 = 16$ (3).

Thay (1) vào $(3) \Rightarrow 16 - 2(a+c) + 2 = 16 \Leftrightarrow a + c = 1 \Rightarrow a = 1 - c$.

Thay $a = 1 - c$ vào (1) $\Rightarrow (1-c)^2 + c^2 = 16 \Rightarrow c = \dfrac{1 \pm \sqrt{31}}{2}$ $\Rightarrow$ Có tồn tại mặt cầu (S) thỏa mãn đề bài. Vậy $a + c = 1$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 1 = 0$ **B.** $x^2 + z^2 + 3x - 2y + 4z - 1 = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4y + 4z - 1 = 0$. **D.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 8 = 0$

Lời giải

Đáp án A thỏa mãn vì $a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + 0 + 4 + 1 = 6 > 0$.

Đáp án B vì không có số hạng y^2.

Đáp án C loại vì có số hạng $2xy$.

Đáp án D loại vì $a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + 1 + 4 - 8 = -2 < 0$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ phương trình nào sau đây không phải là phương trình của một mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z - 3 = 0$. **B.** $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x - y - z = 0$.

C. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 6z + 3 = 0$. **D.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 10 = 0$.

Lời giải

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình của một mặt cầu nếu $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Đáp án D không phải là phương trình mặt cầu vì $1^2 + 2^2 + (-2)^2 - 10 < 0$

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, trong các phương trình sau phương trình nào không phải là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 4z - 1 = 0$ **B.** $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 2y + 4z - 1 = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z - 1 = 0$. **D.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 8 = 0$

Lời giải

Phương trình $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 4z - 1 = 0$ có hệ số trước x^2, y^2, z^2 không bằng nhau nên không phải là phương trình mặt cầu

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R = 2$?

A. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 3 = 0$ **B.** $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$

C. $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+2=0$ **D.** $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+5=0$

Lời giải

Ta có mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ có bán kính là $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

Trong đáp án C ta có: $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=-1 \\ d=2 \end{cases} \Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{4}=2$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y=0$ **B.** $x^2+2y^2+z^2-2x+4y-2z-1=0$

C. $x^2+y^2+z^2-2x+2y+3=0$. **D.** $x^2+y^2-z^2-2x+2y-4z+8=0$

Lời giải

Phương trình $2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x+4y=0$

Có $a=-1, b=-4, c=0, d=0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2-d>0$ nên đó là phương trình mặt cầu.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2-x+6z+16=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2+4x-6y+8z-1=0$

C. $x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z+13=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+9=0$

Lời giải

Phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ là phương trình của một mặt cầu nếu $a^2+b^2+c^2-d>0$.

Đáp án B là phương trình mặt cầu vì $2^2+(-3)^2+(4)^2-(-1)>0$

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2-z^2-2x+4y+4z+5=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-2=0$

C. $x^2+y^2+z^2+x-2y+3=0$. **D.** $x^2-y^2+z^2-2x+6y-8z+1=0$

Lời giải

Đáp án A không phải là phương trình mặt cầu vì hệ số trước z^2 bằng -1

Đáp án B là phương trình mặt cầu vì $1^2+1^2+2^2+2>0$.

Đáp án C không phải là phương trình mặt cầu vì $\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2-3<0$.

Đáp án D không phải là phương trình mặt cầu vì hệ số trước y^2 bằng -1

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào không phải là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-2=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z=6$

C. $x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2y+4xz+2=0$

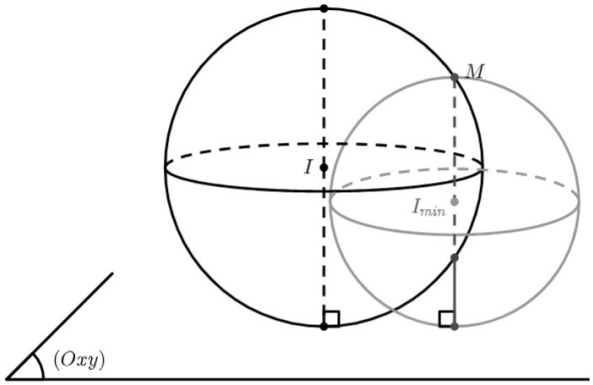
Lời giải

Đáp án D không phải là phương trình mặt cầu vì có số hạng $4xz$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(6;5;4)$ và mặt cầu (S) đi qua M, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy). Gọi R là bán kính của mặt cầu (S), giá trị nhỏ nhất của R là

A. 3. **B.** $\sqrt{61}$. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải



Gọi d là khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow d=4$.

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc (Oxy) và luôn đi qua M nên ta có đánh giá: $2R \geq d \Leftrightarrow 2R \geq 4 \Leftrightarrow R \geq 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của R là: 2.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường kính mặt cầu bằng 8.

b) Mặt cầu (S) đi qua điểm $A(-1;3;0)$.

c) Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (Oyz) bằng 2.

d) Mặt phẳng (P) có phương trình $x+2y-2z-2=0$ tiếp xúc với mặt cầu (S).

Lời giải

a) Sai: Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;0)$ và bán kính $R=2$.

Đường kính mặt cầu bằng $2R=4$.

b) Sai: Ta có: $IA=\sqrt{(-1+2)^2+(3-1)^2+0^2}=\sqrt{5}>R$ nên mặt cầu (S) không đi qua điểm A.

c) Đúng: Mặt phẳng (Oyz) có phương trình: $x=0$. Khi đó $d(I;(Oyz))=|-2|=2$

d) Sai: Ta có: $d(I;(P))=\dfrac{|-2+2.1-2.0-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\dfrac{2}{3}<R$ nên mặt phẳng (P) không tiếp xúc với mặt cầu (S).

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2),B(1;0;3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Ox và đi qua hai điểm A,B. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) có dạng $I(a;0;0)$.

b) Bán kính của mặt cầu (S) là $R=9$.

c) Mặt cầu (S) có phương trình là $:(x-1)^2+y^2+z^2=9$.

d) Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $P=MA^2+MB^2+MI^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức $T=x+y+z=2$.

Lời giải

a) Đúng: Vì tâm $I\in Ox$ nên toạ độ điểm $I(a;0;0))$.

b) Sai: Vì $A\in(S),B\in(S)$ nên ta có:

$$IA=IB\Leftrightarrow(3-a)^2+1+4=(1-a)^2+0+9\Leftrightarrow 9-6a+a^2+5=1-2a+a^2+9\Leftrightarrow a=1$$

.

Ta có bán kính $R=IB=\sqrt{9}=3$.

c) Đúng: Vì $A\in(S),B\in(S)$ nên ta có: $IA=IB\Leftrightarrow(3-a)^2+1+4=(1-a)^2+0+9\Leftrightarrow a=1$.

$\Rightarrow R=IA=IB=3$,tâm $I(1;0;0))$,

Ta có mặt cầu (S) có phương trình là $:(x-1)^2+y^2+z^2=9$

d) Đúng: Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KI}=\vec{0}\Leftrightarrow K\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$

$$P = MA^2 + MB^2 + MI^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MI}^2 = \left(\overline{MK} + \overline{KA}\right)^2 + \left(\overline{MK} + \overline{KB}\right)^2 + \left(\overline{MK} + \overline{KI}\right)^2$$

$$= 3MK^2 + KA^2 + KB^2 + KI^2 + 2\overline{MK}\left(\overline{KA} + \overline{KB} + \overline{KI}\right) = 3MK^2 + KA^2 + KB^2 + KI^2$$

Mà $M \in (Oyz) \Rightarrow MA^2 + MB^2 + MI^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của K lên mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow M\left(0; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$. Vậy $T = 0 + \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(10; 20; 30)$ với bán kính phủ sáng là 3 km. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là

$$(x-10)^2 + (y-20)^2 + (z-30)^2 = 3000^2.$$

b) Người đi biển ở vị trí $A(50;20;0)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

c) Người đi biển ở vị trí $B(4030; 50; 40)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

d) Nếu hai người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng của ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá 6 km.

Lời giải

a) Đúng: Mặt cầu (S) tâm $I(10; 20; 30)$, bán kính $R = 3$ km $= 3000$ m có phương trình

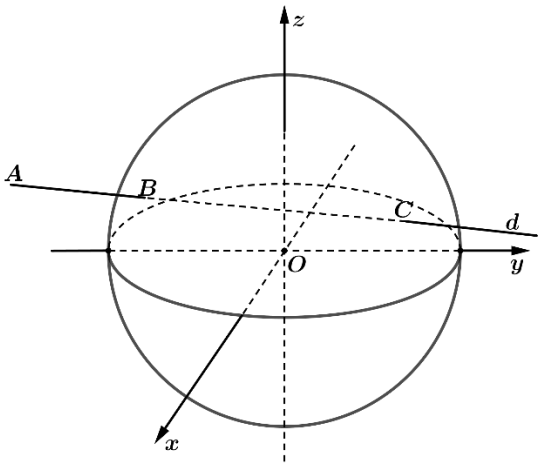
$$(x-10)^2 + (y-20)^2 + (z-30)^2 = 3000^2$$

b) Đúng: Ta có $\overline{IA} = (40;0;-30) \Rightarrow IA = \sqrt{40^2 + 0^2 + 30^2} = 50\,m < R = 3000\,m$ nên điểm A nằm trong mặt cầu (S) nên người đi biển ở vị trí $A(50;20;0)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

c) Sai: Ta có $\overline{IB} = (4020;30;10) \Rightarrow IB = \sqrt{4020^2 + 30^2 + 10^2} \approx 4020{,}12\,m > R = 3000\,m$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu (S) nên người đi biển ở vị trí $B(4030; 50; 40)$ không nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

d) Đúng: Vì bán kính phủ sáng là 3 km nên đường kính phủ sáng là 6 km nên nếu hai người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng của ngọn hải đăng thì hai người đó nằm trong mặt cầu, do đó khoảng cách giữa hai người đó không quá 6 km.

Câu 4: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$. Một máy bay đang chuyển động với vận tốc 900 km/h theo đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=-1000+100t \\ y=-300+80t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=100\sqrt{11} \end{cases}$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Ranh giới vùng phát sóng bên ngoài của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng $300\,km$.

b) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $x^2+y^2+z^2=360000$.

c) Máy bay đang chuyển động theo đường thẳng d đến vị trí điểm $M\left(-500;100;100\sqrt{11}\right)$. Vị trí này nằm ngoài vùng kiểm soát không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.

d) Thời gian kể từ khi đài kiểm soát không lưu phát hiện may bay đến khi máy ra khỏi vùng kiểm soát không lưu là $\frac{4}{3}$ giờ.

Lời giải

a) Sai: Vì đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km nên ranh giới vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng 600 km.

b) Đúng: Ranh giới vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu tâm $O(0;0;0)$ có bán kính bằng $R=600$ có phương trình là: $x^2+y^2+z^2=360000$

c) Đúng: Ta có $OM=\sqrt{(-500)^2+(100)^2+\left(100\sqrt{11}\right)^2}\approx 608>600=R$.

Vậy, tại vị trí điểm $M\left(-500;100;100\sqrt{11}\right)$ máy bay nằm ngoài vùng kiểm soát không không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.

$$d:\begin{cases}x=-1000+100t\\y=-300+80t\\z=100\sqrt{11}\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$$

d) Sai: Thay vào phương trình mặt cầu $x^2+y^2+z^2=360000$

$$(100t-1000)^2+(80t-300)^2+\left(100\sqrt{11}\right)^2=360000$$

$$\Leftrightarrow 164t^2-2480t+8400=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=10\Rightarrow B\left(0;500;100\sqrt{11}\right)\\t=\dfrac{210}{41}\Rightarrow C\left(-\dfrac{20000}{41};\dfrac{4500}{41};100\sqrt{11}\right)\end{array}\right.$$

Quãng đường máy bay di chuyển trong vùng kiểm soát không lưu là:

$$BC=\sqrt{\left(-\frac{20000}{41}\right)^2+\left(\frac{4500}{41}-500\right)^2+\left(100\sqrt{11}-100\sqrt{11}\right)^2}\approx 625$$ km.

Vậy thời gian máy bay di chuyển theo đường thẳng d và trong phạm vi kiểm soát không lưu của sân bay là: $\dfrac{625}{900}=\dfrac{25}{36}$ giờ.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $I(0;2;3)$. Tính bán kính mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Oy.

Lời giải

Gọi H hình chiếu vuông góc của I lên trục $Oy\Rightarrow H(0;2;0)$.

Mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Oy nên mặt cầu có bán kính $R=IH=3$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua hai điểm $A(3;-1;2)$, $B(1;1;-2)$ và có tâm thuộc trục Oz. Bán kính của mặt cầu (S) là R. Giá trị R^2 bằng?

Lời giải

Gọi tâm của mặt cầu là $I(a;b;c)$. Vì $I\in Oz$ nên $I(0;0;c)$.

Mặt cầu đi qua A,B nên có $IA=IB\Leftrightarrow IA^2=IB^2\Leftrightarrow 9+1+(c-2)^2=1+1+(c+2)^2\Leftrightarrow c=1$.

Bán kính mặt cầu $R=IA=\sqrt{11}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-3)$, $B(-3;-2;-5)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $AM^2+BM^2=30$ là một mặt cầu (S). Tìm bán kính R của mặt cầu (S).

Lời giải

Gọi tọa độ điểm $M(x;y;z)$. Khi đó $AM^2+BM^2=30$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z+3)^2+(x+3)^2+(y+2)^2+(z+5)^2=30$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2+4x+4y+16z+18=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x+2y+8z+9=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2+(z+4)^2=9$ là phương trình của mặt cầu (S), có tâm $I(-1;-1;-4)$ và bán kính $R=3$.

Câu 4: Cho hai điểm A,B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA=3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

Lời giải

Ta có: $MA=3MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2=9\overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=9\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$\Leftrightarrow IA^2-9IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}-9\overrightarrow{IB}\right)=8MI^2\ (1)$

Gọi I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}-9\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ nên $IB=\frac{1}{2};IA=\frac{9}{2}$.

Từ (1) suy ra $\Leftrightarrow 8MI^2=18 \Leftrightarrow MI=\frac{3}{2}$ suy ra M thuộc mặt cầu (S) có tâm là I và bán kính $R=\frac{3}{2}=1,5$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$ và I là hình chiếu vuông góc của $M(3;1;2)$ trên trục Ox. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và đi qua điểm M. Độ dài bán kính mặt cầu bằng bao nhiêu?

Lời giải

Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1;0;0) \Rightarrow IM=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm là điểm $A(1;2;-3)$ và đi qua điểm $B(3;-2;1)$. Gọi $M(1;b;-3)$ là điểm thuộc mặt cầu biết $b\in \mathbb{Z}^*$. Tung độ điểm M có giá trị bằng bao nhiêu?

Lời giải

Mặt cầu (S) đi qua $B(3;-2;1)$ nên bán kính $R=AB$

$\Leftrightarrow R=\sqrt{(3-1)^2+(-2-2)^2+(1+3)^2} \Leftrightarrow R=6$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=36$.

Thay tọa độ điểm $M(1;b;-3)$ vào phương trình mặt cầu (S), ta có:

$$(1-1)^2+(b-2)^2+(-3+3)^2=36 \Leftrightarrow (b-2)^2=36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b-2=6 \\ b-2=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=8 \\ b=-4 \end{array}\right.$$

Vì $b>0$ nên nhận $b=8$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;-4;3)$ và tiếp xúc với trục Ox. Bán kính của mặt cầu trên bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi R là bán kính của mặt cầu (S) và H là hình chiếu của I trên trục Ox suy ra $H(2;0;0)$ và $R=IH=\sqrt{(2-2)^2+(0+4)^2+(0-3)^2}=5$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-4;3)$ và bán kính là $R=5$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên tia Ox. Hoành độ của tâm mặt cầu (S) bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi I là tâm mặt cầu (S). Vì tâm I nằm trên tia Ox nên $I(a;0;0),\ (a>0)$.

Vì mặt cầu (S) có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) nên ta có:

$$d(I,(Oyz))=2 \Leftrightarrow \frac{|a|}{1}=2 \Leftrightarrow |a|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-2 \end{array}\right.$$

Do $a>0$ nên ta nhận $a=2$, loại $a=-2$ suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(2,0,0)$.

Câu 9: Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$ và có đúng một điểm chung với mặt phẳng (Oxy). Gọi một giao điểm của mặt cầu (S) với trục Oz là $A(a;b;c)\ (c>1)$. Tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $(Oxy): z=0$.

Mặt cầu (S) có đúng một điểm chung với mặt phẳng $(Oxy) \Leftrightarrow R=\mathrm{d}(I,(Oxy))=3$.

Suy ra $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$. Cho $x=y=0 \Rightarrow 1^2+2^2+(z-3)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=5 \\ z=1 \end{array}\right.$.

Vì $c>1$ nên $A(0;0;5) \Rightarrow a+b+c=5$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+z^2=9.$ Xác định tâm và bán kính của (S).

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{1}{2};-1;0\right)$, bán kính $R=3.$

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-2y+8z-18=0$. Xác định tâm, bán kính của (S).

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(x_I;y_I;z_I)$ với $x_I=\frac{2}{-2}=-1,\ y_I=\frac{-2}{-2}=1,\ z_I=\frac{8}{-2}=-4$ nên $I(-1;1;-4)$.

Mặt cầu (S) có bán kính là $R=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-4)^2-(-18)}=6$.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình mặt cầu? Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

a) $x^2+y^2+z^2-2x-5z+30=0$.

b) $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z=0$.

c) $x^3+y^3+z^3-2x+6y-9z-10=0$.

d) $x^2+y^2+z^2+5=0$.

e) $3x^2+2y^2+z^2-2x-2y+2z+1=0$

f) $x^2+y^2-2x+6y-8z-3=0$

g) $x^2+y^2+z^2-6x+8y-2z+10=0$

h) $2x^2+2y^2+2z^2+12x+4y-8z+20=0$

Lời giải

a) Ta có $a=1,\ b=0,\ c=\frac{5}{2},\ d=30$. Do $a^2+b^2+c^2-d=1+0+\frac{25}{4}-30<0$ nên phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu.

b) Ta có $a=2,\ b=-1,\ c=1,\ d=0$. Do $a^2+b^2+c^2-d=4+1+1-0=6>0$ nên phương trình đã cho là phương trình mặt cầu. Khi đó mặt cầu có tâm $I(2;-1;1)$ và bán kính $R=\sqrt{6}$.

c) Do phương trình $x^3+y^3+z^3-2x+6y-9z-10=0$ có chứa x^3 nên phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu.

d) Ta có $a=0,\ b=0,\ c=0,\ d=5$. Do $a^2+b^2+c^2-d=0+0+0-5<0$ nên phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu.

e) Phương trình $3x^2+2y^2+z^2-2x-2y+2z+1=0$ không phải là phương trình của một mặt cầu vì các hệ số của x^2 và y^2 khác nhau.

f) Phương trình $x^2+y^2-2x+6y-8z-3=0$ không phải là phương trình của một mặt cầu vì không có biểu thức y^2.

g) Ta có: $x^2+y^2+z^2-6x+8y-2z+10=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2.3.x+2.4.y-2.1.z+10=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=16$

Vậy phương trình đã cho là phương trình mặt cầu tâm $I(3;-4;1)$ bán kính $R=\sqrt{16}=4$.

h) Ta có: $2x^2+2y^2+2z^2+12x+4y-8z+20=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+6x+2y-4z+10=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2.3.x+2.1.y-2.2.z+10=0$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$.

Vậy phương trình đã cho là phương trình mặt cầu tâm $I(-3;-1;2)$ bán kính $R=\sqrt{4}=2$.

Bài tập 4: Trong không gian $Oxyz$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $A(2;0;0)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 1. Hỏi vị trí $M(2;1;1)$ có thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên hay không?

Lời giải

Vùng phủ sóng của thiết bị là khối cầu (S) có tâm $A(2;0;0)$ và bán kính $R=1$.

Do $AM=\sqrt{(2-2)^2+(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}>1$ nên vị trí $M(2;1;1)$ không thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên.

Bài tập 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilomet), một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Vinaphone được đặt ở vị trí $I(1;2;1)$ và được thiết kế bán kinh phủ sóng 5000 mét.

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian?

b) Nhà bạn Diệp Chi, và Tuệ Nhi có vị trí tọa độ lần lượt là $A(3;2;-1)$ và $B(4;-3;5)$. Hỏi Diệp Chi và Tuệ Nhi dùng điện thoại tại nhà thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này hay không?

Lời giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là:

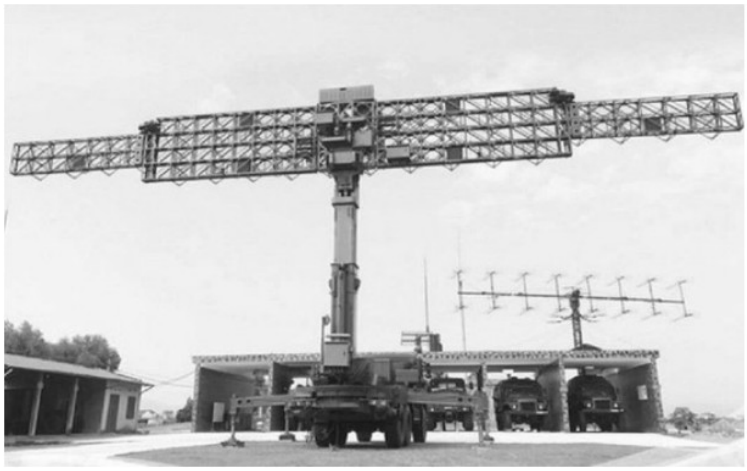
$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$$

b) Do $IA=\sqrt{(3-1)^2+(2-2)^2+((-1)-1)^2}=\sqrt{8}<5$ nên điểm $A(2;3;-1)$ nằm trong mặt cầu đó. Vậy bạn Diệp Chi có thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

Mặt khác $IB=\sqrt{(4-1)^2+((-3)-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{50}>5$ nên điểm $B(4;-3;5)$ nằm ngoài mặt cầu đó.

Vậy bạn Tuệ Nhi không thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

Bài tập 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilomet), một trạm phát sóng rađa của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(-2;1;-1)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa 500 kilomet.



a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của rađa trong không gian?

b) Hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh đang bay ở vị trí có tọa độ $M(-200;100;-250)$ và $N(350;-100;300)$. Hỏi hai chiếc máy bay đó có bị rađa phát hiện hay không?

Lời giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của rađa trong không gian là:

$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=250000$$

b) $IM=\sqrt{(-200+2)^2+(100-1)^2+(-250+1)^2}\approx 333,2<500$ nên điểm $M(-200;100;-250)$ nằm trong mặt cầu đó.

Vậy chiếc máy bay do thám của Mỹ có thể bị phát hiện bởi trạm rađa này.

Do $IN=\sqrt{(350+2)^2+((-100)-1)^2+(300+1)^2}\approx 474<500$ nên điểm $N(350;-100;300)$ nằm trong mặt cầu đó.

Vậy chiếc máy bay do thám của Anh có thể bị phát hiện bởi trạm rađa này.

Dạng 2: Viết phương trình mặt cầu

Phương pháp: Cần xác định được tọa độ tâm $I(a;b;c)$ và độ dài bán kính r.

Các bài toán cơ bản:

Bài toán 1: Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và đi qua điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ thì bán kính

$$r=IA=\sqrt{(x_A-x_I)^2+(y_A-y_I)^2+(z_A-z_I)^2}$$

Bài toán 2: Mặt cầu (S) có đường kính AB thì

- Tâm $I(a;b;c)$ là trung điểm của AB hay $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Bán kính $r=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}{2}$

Bài toán 3: Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với $(\alpha):Ax+By+Cz+D=0$ thì bán kính

$$r=d(I,(\alpha))=\frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Bài toán 4: Mặt cầu qua bốn điểm A,B,C,D không đồng phẳng (hay gọi là ngoại tiếp tứ diện $ABCD$).

Gọi (S) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0\ \ (*)$

- Thay tọa độ 4 điểm A,B,C,D vào $(*)$ thì ta được hệ phương trình với 4 ẩn số a,b,c,d
- Giải tìm a,b,c,d.
- Suy ra tâm $I(a,b,c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(3;1;0)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$.
B. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$.
C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=8$.
D. $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=2$.

Lời giải

Mặt cầu có tâm $I(2;1;1)$. Mặt cầu có bán kính $R=AI=\sqrt{2}$

Vậy mặt cầu có phương trình: $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;0;-1)$ và $A(2;2;-3)$. Mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

A. $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$.
B. $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=3$.
C. $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=9$.
D. $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=3$.

Lời giải

Bán kính mặt cầu $R=IA=\sqrt{(2-1)^2+2^2+(-3+1)^2}=3$.

Vậy mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A có phương trình là $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;0;-1)$ và $A(2;2;-3)$. Mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

A. $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=3$.

C. $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=3$.

Lời giải

Bán kính mặt cầu $R=IA=\sqrt{(2-1)^2+2^2+(-3+1)^2}=3$.

Vậy mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A có phương trình là $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$.

Câu 4: Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$ là

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3$

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9$. **D.** $x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+5=0$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$ là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu đường kính AB với $A(0;-3;2),\ B(2;1;-2)$ có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=3$. **B.** $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=3$.

C. $(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=9$.

Lời giải

Ta có $AB=\sqrt{4+16+16}=6$.

Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(1;-1;0)$, bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=3$.

Khi đó phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=9$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;2)$ và bán kính $R=3$.

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=9$. **B.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=3$.

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3$. **D.** $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;2)$ và bán kính $R=3$ thì phương trình chính tắc của (S) là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(4;-4;2)$ và đi qua gốc tọa độ có phương trình là

A. $(x+4)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=6$. **B.** $(x+4)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=36$.

C. $(x-4)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=36$. **D.** $(x-4)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=6$.

Lời giải

Mặt cầu tâm $I(4;-4;2)$ có bán kính bằng $R=OI=\sqrt{(4-0)^2+(-4-0)^2+(2-0)^2}=6$.

Vậy $(S):(x-4)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=36$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu có tâm $I(2;-1;3)$ và đi qua điểm $A(1;2;-1)$ là

A. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=26$. **B.** $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=26$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=26$. **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=\sqrt{26}$.

Lời giải

Ta có $R=IA=\sqrt{(1-2)^2+(2+1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{26}$. Vậy phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm A có phương trình là $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=26$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x-2y-z+12=0$. Phương trình của (S) là

A. $x^2+y^2+(z+3)^2=25$. **B.** $x^2+y^2+(z+3)^2=5$.

C. $x^2+y^2+(z-3)^2=25$. **D.** $x^2+y^2+(z-3)^2=5$.

Lời giải

Do mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) $\Rightarrow R=d(I,(P))=\dfrac{|2.0-2.0+3+12|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=5.$

Vậy phương trình cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và bán kính $R=5$ là: $x^2+y^2+(z+3)^2=25.$

Câu 10: Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$ là:

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9$. **D.** $x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+5=0$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$ là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$

Phương trình dạng khai triển: $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$

Câu 11: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;2)$ và bán kính $R=4$ có phương trình là

A. $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$. **B.** $(x+1)^2+y^2+(z+2)^2=16$.

C. $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=4$. **D.** $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=16$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;2)$ và bán kính $R=4$ là $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=16$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt cầu có đường kính AB với $A(2;1;0)$ và $B(0;1;2)$ là

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$. **B.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=2$.

C. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=4$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$.

Lời giải

Ta có tọa độ tâm mặt cầu là $(1;1;1)$, bán kính bằng $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{2}$.

Phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$.

Câu 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R=2$ là

A. $x^2+2y^2+3z^2=4$. **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$. **D.** $(x-1)^2-(y+2)^2+(z-3)^2=4$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu tâm $I(1;-2;3)$ bán kính $R=2$ là $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(0;1;-2)$ và đi qua điểm $M(1;0;-1)$ có phương trình là:

A. $x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$.

C. $x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$. **D.** $x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=3$.

Lời giải

Ta có phương trình mặt cầu tâm $I(0;1;-2)$ và bán kính R có dạng:

$$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=R^2.$$

Mặt khác mặt cầu đó đi qua điểm $M(1;0;-1)$ nên: $1^2+(0-1)^2+(-1+2)^2=R^2\Leftrightarrow R^2=3$.

Vậy phương trình mặt cầu tâm $I(0;1;-2)$ và đi qua điểm $M(1;0;-1)$ là:

$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

A. $(x+1)^2+y^2+z^2=13$.

B. $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=13$.

D. $(x-1)^2+y^2+z^2=13$.

Lời giải

Vì I là hình chiếu vuông góc của $M(1;-2;3)$ trên trục Ox nên $I(1;0;0)$.

Bán kính: $R=IM=\sqrt{(1-1)^2+(-2-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+y^2+z^2=13$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và đi qua điểm $A(0;4;-1)$ là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3.$

B. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9.$

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3.$

D. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.

Lời giải

Ta có bán kính $R=IA=3\Rightarrow(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9.$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của (S) là

A. $x^2+y^2+(z+3)^2=5$.

B. $x^2+y^2+(z-3)^2=5$.

C. $x^2+y^2+(z+3)^2=25$.

D. $x^2+y^2+(z-3)^2=25$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và $R=IM=\sqrt{4^2+0+3^2}=5$ nên (S) có phương trình:

$x^2+y^2+(z+3)^2=25$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(3;4;0)$, $B(2;5;4)$, $C(-1;1;1)$, $D(3;5;3)$. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó

A. $(x+1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=9$.

B. $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$.

C. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$.

D. $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=9$.

Lời giải

Gọi mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có dạng $(S):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9+16-6a-8b+d=0 \\ 4+25+16-4a-10b-8c+d=0 \\ 1+1+1+2a-2b-2c+d=0 \\ 9+25+9-6a-10b-6c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=2 \\ d=5 \end{cases}$.

Ta có A, B, C, $D \in (S)$

Suy ra $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{1+3^2+2^2-5}=3$

Vậy phương trình mặt cầu là $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$, $D(2;2;2)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Phương trình (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Vì (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D nên ta có hệ phương trình

$\begin{cases} -4a+d=-4 \\ -4b+d=-4 \\ -4c+d=-4 \\ -4a-4b-4c+d=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \\ d=0 \end{cases}$.

Vậy bán kính mặt cầu (S) là: $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{3}$.

Câu 20: Mặt cầu tâm $I(5;3;-2)$ và đi qua điểm $A(3;-1;2)$ có phương trình

A. $(x-5)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=36$. **B.** $(x-5)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=6$.

C. $(x+5)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=36$. **D.** $(x+5)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=6$.

Lời giải

Bán kính $R=IA=\sqrt{(3-5)^2+(-1-3)^2+(2+2)^2}=6$

Mặt cầu tâm $I(5;3;-2)$ và đi qua điểm $A(3;-1;2)$ có phương trình là

$(x-5)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=36$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha):x-y-z+2=0$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. **B.** $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

C. $(x+2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$. **D.** $(x+2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$.

Lời giải

Bán kính mặt cầu (S) là $R = d(I;(\alpha)) = \dfrac{|2-2+1+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \sqrt{3}$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;2;-1)$, bán kính $R=\sqrt{3}$ có phương trình là:

$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3.$$

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-2)$, $B(3;-1;4)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\sqrt{14}$.

B. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=14$.

C. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=\sqrt{14}$.

D. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=14$.

Lời giải

Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là $I(2;1;1)$. Độ dài đoạn thẳng AB là $AB=2\sqrt{14}$.

Mặt cầu đường kính AB có tâm I và bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=\sqrt{14}$ có phương trình là

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=14$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;-3;4)$ và $B(3;-1;2)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=6$.

B. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=24$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=24$.

D. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=6$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB, ta có: $I(1;-2;3)$.

Mặt cầu đường kính AB có tâm là trung điểm $I(1;-2;3)$ của AB và bán kính

$$R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{(3+1)^2+(-1+3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{6}.$$

Vậy phương trình mặt cầu đường kính AB là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=6$.

Câu 24: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;1)$. Phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) là

A. $(S):(x+2)^2+y^2+z^2=1$.

B. $(S):(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=5$.

C. $(S):(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=4$.

D. $(S):(x+2)^2+y^2+(z-1)^2=1$.

Lời giải

Ta có phương trình mặt phẳng (Oxy): $z=0$ nên khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (Oxy) bằng $1 \Rightarrow$ bán kính mặt cầu là $R=1$.

Mặt cầu (S) tâm $A(2;0;1)$, bán kính $R=1$ có phương trình: $(S):(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=1$.

Câu 25: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với trục Oz là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=5$.

B. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$.

D. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên trục Oz, suy ra $H(0;0;3)$.

Mặt cầu tâm A và tiếp xúc với trục Oz có bán kính $R=d(A,(Oz))=AH=\sqrt{5}$.

Vậy mặt cầu tâm A và tiếp xúc với trục Oz có phương trình: $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$.

Câu 26: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB với tọa độ các điểm $A(2;0;-1)$, $B(0;-2;3)$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=24$.

B. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=24$.

C. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$.

D. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB. Suy ra mặt cầu (S) có tâm là $I(1;-1;1)$ và bán kính

$$R=IA=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6}.$$

Phương trình mặt cầu đường kính AB là: $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, $A(-3;\ 4;\ 2)$, $B(-5;\ 6;\ 2)$, $C(-10;\ 17;-7)$. Viết phương trình mặt cầu tâm C, bán kính AB.

A. $(x+10)^2+(y-17)^2+(z-7)^2=8$.

B. $(x+10)^2+(y-17)^2+(z+7)^2=8$.

C. $(x-10)^2+(y-17)^2+(z+7)^2=8$.

D. $(x+10)^2+(y+17)^2+(z+7)^2=8$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;2;0) \Rightarrow AB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

Phương trình mặt cầu tâm C bán kính AB: $(x+10)^2+(y-17)^2+(z+7)^2=8$.

Câu 28: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$, $B(0;2;3)$. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

A. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$.

B. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$.

C. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$.

D. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=\frac{5}{4}$.

Lời giải

Gọi I là tâm mặt cầu đường kính AB, suy ra I là trung điểm của đoạn $AB \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2};2;2\right)$

Bán kính mặt cầu là $R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Phương trình mặt cầu đường kính AB là $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$.

Câu 29: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;0), B(0;3;-4)$. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu đường kính AB

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3$.

B. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$.

D. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$.

Lời giải

Gọi I trung điểm AB suy ra I là tâm mặt cầu đường kính AB

Tọa độ điểm I là $I(1;1;-2)$ và $R=IA=3$.

Phương trình mặt cầu đường kính AB là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu đường kính AB với $A(0;1;2)$ và $B(4;5;-4)$ có phương trình là

A. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=68$.

B. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=\sqrt{68}$.

C. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=17$.

D. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\sqrt{17}$.

Lời giải

Gọi I là tâm mặt cầu suy ra I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(2;3;-1)$.

Bán kính mặt cầu $r=IA=\sqrt{17}$.

Phương trình mặt cầu là: $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=17$.

Câu 31: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x-y+2z+1=0$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$.

B. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$.

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$. **D.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=16$.

Lời giải

Bán kính mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x-y+2z+1=0$ là:

$$R=d(A,(P))=\frac{|2.2-1+2+1|}{3}=2.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$

Câu 32: Cho mặt cầu (S) đi qua $A(3;1;0)$, $B(5;5;0)$ và có tâm I thuộc trục Ox. Mặt cầu (S) có phương trình là

A. $(x+10)^2+y^2+z^2=5\sqrt{2}$. **B.** $(x-10)^2+y^2+z^2=5\sqrt{2}$.

C. $(x-10)^2+y^2+z^2=50$. **D.** $(x+10)^2+y^2+z^2=50$.

Lời giải

Ta có tâm I thuộc trục Ox nên $I(x;0;0)$.

Ta có (S) đi qua A, B nên $IA=IB\Leftrightarrow IA^2=IB^2\Leftrightarrow(3-x)^2+1^2=(5-x)^2+5^2$

$$\Leftrightarrow 10-6x+x^2=50-10x+x^2\Leftrightarrow 4x=40\Leftrightarrow x=10.$$

Suy ra $I(10;0;0)$ do đó $R=IA=5\sqrt{2}$. Vậy $(S):(x-10)^2+y^2+z^2=50$.

Câu 33: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3)$ và $B(5;4;7)$. Phương trình mặt cầu nhận AB làm đường kính là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=17$. **B.** $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=17$.

C. $(x-5)^2+(y-4)^2+(z-7)^2=17$. **D.** $(x-6)^2+(y-2)^2+(z-10)^2=17$.

Lời giải

Gọi I là tâm của mặt cầu suy ra I là trung điểm của AB suy ra $I(3;1;5)$

Ta có bán kính của mặt cầu $R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(5-1)^2+(4+2)^2+(7-3)^2}}{2}=\sqrt{17}$

Vậy phương trình mặt cầu nhận AB làm đường kính là

$$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=17.$$

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-1=0.$ Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có phương trình

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x-y+2z-1=0$ có bán kính là $R=d(I,(P))=\dfrac{|2.1-1.(-2+2.3-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3$.

Phương trình mặt cầu (S) là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

Câu 35: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-3;4;2)$, $B(-5;6;2)$ và $C(-10;17;-7)$. Phương trình mặt cầu tâm C bán kính AB là

A. $(x+10)^2+(y-17)^2+(z-7)^2=8$. **B.** $(x+10)^2+(y-17)^2+(z+7)^2=8$.

C. $(x-10)^2+(y-17)^2+(z+7)^2=8$. **D.** $(x+10)^2+(y+17)^2+(z+7)^2=8$.

Lời giải

Ta có $R=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-5+3)^2+(6-4)^2+(2-2)^2}=2\sqrt{2}$. Phương trình mặt cầu tâm C bán kính AB là $(x+10)^2+(y-17)^2+(z+7)^2=8$.

Câu 36: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Hãy viết phương trình mặt cầu có tâm $I(2;2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz).

A. $(x+2)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. **B.** $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=13$.

C. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$. **D.** $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2$.

Lời giải

Mặt cầu có tâm $I(2;2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) nên có bán kính

$$R=d(I,(Oxz))=2.$$

Suy ra phương trình mặt cầu: $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3;1;-2)$. Phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Ox là

A. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=5$. **B.** $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=25$.

C. $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=5$. **D.** $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=25$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của I lên trục Ox ta được $H(3;0;0)$.

Do mặt cầu tiếp xúc với trục Ox nên $R=IH=\sqrt{5}$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=5$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(6;2;-5), N(-4;0;7)$. Viết phương trình mặt cầu đường kính MN?

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=62$.
B. $(x-5)^2+(y-1)^2+(z+6)^2=62$.
C. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=62$.
D. $(x+5)^2+(y+1)^2+(z-6)^2=62$.

Lời giải

Mặt cầu đường kính MN nhận trung điểm $I(1;1;1)$ của đoạn thẳng MN là tâm và có bán kính $R=IM=\sqrt{(6-1)^2+(2-1)^2+(-5-1)^2}=\sqrt{62}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=62$.

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):4x-y+2z-5=0$ có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=\frac{16}{21}$.
B. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=\frac{16}{21}$.
C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=\frac{16}{441}$.
D. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=\frac{16}{441}$.

Lời giải

Do mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên bán kính mặt cầu là

$$R=d(I,(P))=\frac{|4.2-1+2.(-3)-5|}{\sqrt{4^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{4\sqrt{21}}{21}.$$

Phương trình mặt cầu cần tìm có tâm $I(2;1;-3)$, bán kính $R=\frac{4\sqrt{21}}{21}$ là

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=\left(\frac{4\sqrt{21}}{21}\right)^2\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=\frac{16}{21}$$

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Xét (S) là mặt cầu tâm I và cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5. Phương trình của (S) là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.
B. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$.
C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$.
D. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

Lời giải

Gọi (S) có tâm $I(-1;2;-1)$ và bán kính là R.

Ta có $d(I,(P))=3$.

Vì (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng $r=5$ nên:

$R^2 = d^2(I,(P)) + r^2 \Rightarrow R^2 = 34$.

Vậy phương trình (S) là $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$.

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho đường tròn (C) tâm O có bán kính bằng 2 và nằm trong mặt phẳng (xOy). Tìm phương trình mặt cầu chứa đường tròn (C) và đi qua điểm $A(0;0;-4)$.

A. $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{25}{4}$.

B. $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

C. $x^2 + y^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

D. $x^2 + y^2 + (z+4)^2 = 1$.

Lời giải

Gọi I, R lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu cần tìm. Do $IO \perp (xOy)$ nên $I \in Oz \Rightarrow I(0;0;c)$

Ta có $R^2 = IA^2 = IO^2 + 2^2 \Leftrightarrow (c+4)^2 = c^2 + 4 \Leftrightarrow 8c = -12 \Leftrightarrow c = -\frac{3}{2}$.

Vậy $I\left(0;0;-\frac{3}{2}\right)$ và $R = \frac{5}{2}$. Phương trình mặt cầu cần tìm là $x^2 + y^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho đường tròn (C) có bán kính bằng 4 nằm trong mặt phẳng (Oxy) có tâm là gốc tọa độ O. Hãy viết phương trình mặt cầu chứa đường tròn (C) đồng thời cắt trục Oz tại điểm $A(0;0;8)$.

A. $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 16$

B. $x^2 + y^2 + z^2 = 64$.

C. $(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 = 32$.

D. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$

Lời giải

Đường tròn (C) nằm trong mặt phẳng (Oxy) có tâm là gốc tọa độ O nên có trục là trục Oz.

Gọi I, R theo thứ tự là tâm và bán kính của mặt cầu (S) thỏa đề bài thì ta có

Mặt cầu (S) chứa đường tròn $(C) \Rightarrow I \in Oz \Rightarrow I(0;0;c) \Rightarrow d(I,(Oxy)) = IO.$

Đường tròn (C) nằm trên mặt phẳng (Oxy) và (C) có bán kính

$$r = 4 \Rightarrow R = \sqrt{IO^2 + r^2} = \sqrt{c^2 + 16} \quad (1)$$

Mặt cầu (S) cắt trục Oz tại điểm $A(0;0;8) \Rightarrow R = IA = \sqrt{(8-c)^2} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $\sqrt{c^2 + 16} = \sqrt{(8-c)^2} \Leftrightarrow c = 3.$

Như vậy mặt cầu (S) tâm $I(0;0;3)$, bán kính $R = 5$ thỏa yêu cầu đề bài.

Phương trình của (S) là $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{2}$; $d_2:\frac{x+8}{2}=\frac{y-6}{1}=\frac{z-10}{-1}$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với $d_1;d_2$ và có bán kính nhỏ nhất. Phương trình của mặt cầu (S) là

A. $x^2+(y-10)^2+(z-6)^2=35$. **B.** $(x-2)^2+y^2+z^2=35$.

C. $(x-2)^2+(y-10)^2+(z-6)^2=35$. **D.** $(x-1)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=35$.

Lời giải

Giả sử mặt cầu (S)có tâm là I và bán kính là R tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1;d_2$ lần lượt tại $M;N$.

Ta có $2R\ge MN\ge d(d_1;d_2)$.

Vậy $MinR=\frac{1}{2}d(d_1;d_2)$ khi MN là đoạn vuông góc chung của $d_1;d_2$

Giải sử $M(m;2-m;-4+2m);N(-8+2n;6+n;10-n)$

Lại có $\overrightarrow{u_1}(1;-1;2);\overrightarrow{u_2}(2;1;-1)$lần lượt là véc tơ chỉ phương của $d_1;d_2$.

Khi đó: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{u_1}\\ \overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{u_2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2n-m-8-n-m-4-2n-4m+28=0\\ 4n-2m-16+n+m+4+n+2m-14=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}n+6m=16\\ 6n+m=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\ n=4\end{cases}\Rightarrow M(2;0;0);N(0;10;6)$

Lúc này (S) có tâm là $I(1;5;3)$và bán kính là $R=IM=\sqrt{35}$ nên (S) có phương trình dạng $(x-1)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=35$.

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;-1;2)$. Gọi M,N,K là hình chiếu vuông góc của A lên ba trục tọa độ. Mặt cầu tâm O tiếp xúc với mặt phẳng (MNK) có phương trình là:

A. $x^2+y^2+z^2=6$. **B.** $x^2+y^2+z^2=\frac{4}{3}$. **C.** $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{9}$. **D.** $x^2+y^2+z^2=\frac{4}{9}$.

Lời giải

Ta có: $M(1;0;0),N(0;-1;0),K(0;0;2)$ nên phương tình mặt phẳng (MNK) là:

$x-y+\frac{z}{2}=1\Leftrightarrow 2x-2y+z-2=0$. Mặt cầu cần tìm có bán kính $R=d(O;(MNK))=\frac{2}{3}$

Phương trình mặt cầu là: $x^2+y^2+z^2=\frac{4}{9}$

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ có các đỉnh $S(1;2;-2)$, $A(-1;0;-2)$, $C(3;-4;0)$. Tam giác ABC vuông tại B có độ dài cạnh $BC=3\sqrt{3}$ đồng thời mặt đáy (ABC) vuông góc với mặt bên (SAC). Gọi I là trung điểm của AC. Mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (SBC) có phương trình là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\frac{18}{17}$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\frac{72}{17}$.

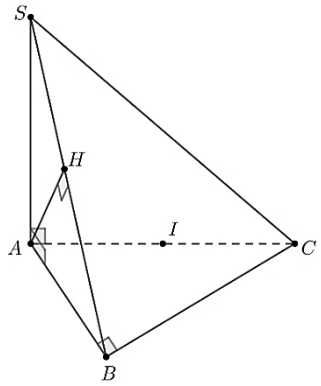
C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\frac{18}{11}$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\frac{72}{11}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{SA}=(-2;-2;0)\Rightarrow SA=2\sqrt{2}$; $\overrightarrow{SC}=(2;-6;2)\Rightarrow SC=2\sqrt{11}$

Khi đó: $\overrightarrow{AC}=(4;-4;2)\Rightarrow AC=6\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại A

Ta có: $\begin{cases}(ABC)\perp(SAC)\\(ABC)\cap(SAC)=AC\\SA\perp AC, SA\subset(SAC)\Rightarrow SA\perp(ABC)\end{cases}$



Gọi (S) là mặt cầu tâm $I(1;-2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(SBC)\Rightarrow R=d(I,(SBC))$

Ta có: $IA\cap(SBC)=C\Rightarrow\frac{d(I,(SBC))}{d(A,(SBC))}=\frac{IC}{AC}=\frac{1}{2}\Rightarrow d(I,(SBC))=\frac{1}{2}d(A,(SBC))$

Ta chứng minh được $BC\perp(SAB)$

Gọi H là hình chiếu của A trên $SB\Rightarrow AH\perp(SBC)\Rightarrow d(A,(SBC))=AH$

Ta có: $AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=3\Rightarrow AH=\frac{AS.AB}{\sqrt{AS^2+AB^2}}=\frac{6\sqrt{34}}{17}\Rightarrow R=\frac{3\sqrt{34}}{17}$

Phương trình mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\frac{18}{17}$.

Câu 46: Một vệ tinh quay quanh Trái Đất với độ cao so với mặt đất là 18900 km. Ta xét trong không gian $Oxyz$ với tâm O là tâm Trái Đất, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6300 km trên thực tế. Biết bán kính Trái Đất khoảng 6300 km. Phương trình biểu diễn quỹ đạo chuyển động của vệ tinh đó là

A. $x^2+y^2+z^2=4$. **B.** $x^2+y^2+z^2=16$. **C.** $x^2+y^2+z^2=2$. **D.** $x^2+y^2+z^2=5$.

Lời giải

Khoảng cách từ tâm Trái Đất đến vệ tinh là $18900+6300=25200$ tương ứng bằng 4 đơn vị.

Ta thấy quỹ đạo chuyển động của vệ tinh quanh Trái Đất là một mặt cầu có tâm là tâm Trái Đất có tọa độ là $O(0;0;0)$ và bán kính $R=4$. Do đó phương trình mặt cầu là: $x^2+y^2+z^2=16$.

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là cm), mặt sàn nhà đa năng thuộc mặt phẳng Oxy. Một quả cầu bằng nhựa nằm trên mặt sàn nhà đa năng và có tâm $I(12;20;50)$. Khi đó, mặt ngoài của quả cầu nhựa (S) có phương trình là:

A. $(x-12)^2+(y-20)^2+(z-50)^2=12^2$.

B. $(x+12)^2+(y+20)^2+(z+50)^2=12^2$.

C. $(x-12)^2+(y-20)^2+(z-50)^2=20^2$.

D. $(x-12)^2+(y-20)^2+(z-50)^2=50^2$.

Lời giải

Do quả cầu nằm trên mặt sàn nhà đa năng nên mặt ngoài của quả cầu tiếp xúc với mặt phẳng Oxy

Ta có: $d(I,(Oxy))=R=50$

Vậy mặt ngoài của quả cầu (S) có phương trình là $(x-12)^2+(y-20)^2+(z-50)^2=50^2$.

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(1;5;5)$ như hình vẽ. Ngọn hải đăng được thiết kế với bán kính phủ sáng là 5 km.

Một người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(1;5;5)$ đến vị trí $A(7;14;11)$. Điểm nào sau đây mà người đi biển đi qua và vẫn thuộc vùng phủ sáng của ngọn hải đăng?

A. $M(3;8;7)$.

B. $N(0;4;8)$.

C. $P(7;3;0)$.

D. $Q(7;11;3)$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trong không gian là:

$$(x-1)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=25$$

Ta có $\overline{IM}=(2;3;2)$; $\overline{IA}=(6;9;6)=3\overline{IM}$ và $IM=\sqrt{(3-1)^2+(8-5)^2+(7-5)^2}=\sqrt{17}<5$ nên điểm M nằm trong mặt cầu. Vậy người đi biển đi qua điểm M mà vẫn thuộc vùng phủ sáng.

Câu 49: Một máy Rađa có tầm hoạt động với bán kính tối đa là 20 km. Ta xét trong không gian $Oxyz$ với tâm O là vị trí máy Rađa, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 10 km trên thực tế. Hỏi trong không gian $Oxyz$ trên, vật thể có tọa độ tương ứng với đáp án nào dưới đây sẽ bị Rađa phát hiện?

A. $M(1;0;2)$. **B.** $N(2;-1;1)$. **C.** $P(1;1;\sqrt{2})$. **D.** $Q(3;0;0)$.

Lời giải

Ta thấy quỹ đạo của Rađa là một khối cầu giới hạn bởi mặt cầu (S) có tâm là vị trí máy Rađa có tọa độ là $O(0;0;0)$ và bán kính $R=2$.

Do đó ta có phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=4$.

Vật thể bắt đầu bị phát hiện khi nó nằm trong hoặc trên mặt cầu (S).

Trong 4 đáp án trên ta thấy có đáp án C thỏa mãn phương trình mặt cầu (S) các đáp án còn lại đều nằm ngoài (S).

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là km), một máy bay đang ở vị trí $A(3;-2;1)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(2;-5;0)$ trên đường băng. Có một đám mây được mô phỏng bởi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=16$ tại $M\left(\frac{10}{9};-\frac{25}{9};\frac{7}{9}\right)$. Tính độ cao của máy bay khi đi xuyên qua đám mây để hạ cánh (Giả sử mặt đất ở vị trí máy bay đang bay được coi là mặt phẳng mặt phẳng (Oxy))

A. $\frac{3}{5}$ km. **B.** $\frac{4}{5}$ km. **C.** $\frac{1}{5}$ km. **D.** $\frac{2}{5}$ km.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;-1)$; $\overrightarrow{IM}=\left(-\frac{8}{9};-\frac{16}{9};\frac{16}{9}\right)=-\frac{8}{9}(1;2;-2)$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) tại M nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $x-\frac{10}{9}+2\left(y+\frac{25}{9}\right)-2\left(z-\frac{7}{9}\right)=0$ hay $(P): x+2y-2z+6=0$

Giả sử điểm $C(a;b;c)$ là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh, suy ra $C\in(P)$ và ba điểm A,B,C thẳng hàng, C nằm giữa A và B.

Do đó $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ với $k>0$. Ta có: $\overrightarrow{AC}=(a-3;b+2;c-1),\ \overrightarrow{AB}=(-1;-3;-1)$.

$$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}a-3=-k\\b+2=-3k\\c-1=-k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3-k\\b=-2-3k\\c=1-k\end{cases}\Rightarrow C(3-k;-2-3k;1-k).$$

$$C\in(P)\Rightarrow 3-k+2(-2-3k)-2(1-k)+6=0\Rightarrow k=\frac{3}{5}$$ suy ra $C\left(\frac{12}{5};-\frac{19}{5};\frac{2}{5}\right)$.

Vậy tại vị trí C độ cao của máy bay là $\frac{2}{5}$ km.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{2}$ và mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;0)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB=8$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(3;2;0)$ và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là $x+2y+2z-7=0$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông của I lên d. Khi đó $H(1;-1;2)$.

c) Mặt cầu (S)có bán kính $R=5$.

d) Phương trình mặt cầu (S): $(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=25$.

Lời giải

a) Đúng: Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $I(3;2;0)$và vuông góc với đường thẳng d nhận $\vec{u}=(1;2;2)$ là vecto pháp tuyến có phương trình:

$$1(x-3)+2(y-2)+2(z-0)=0\Leftrightarrow x+2y+2z-7=0$$

b) Sai: Gọi $H=d\cap(P)$ khi đó $H\in d\Rightarrow H(-1+t;-3+2t;-2+2t)$

Mặt khác $H\in(P)\Rightarrow -1+t+2(-3+2t)+2(-2+2t)-7=0\Rightarrow t=2$ nên $H(1;1;2)$

c) Đúng: Khi đó $IH=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2+(0-2)^2}=3\Rightarrow R=\sqrt{IH^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

d) Đúng: Vậy (S): $(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=25$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;0;2),\ B(1;1;0)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-1)^2=\frac{1}{4}$.
Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$.

b) Điểm A nằm trong mặt cầu (S).

c) Mặt cầu tâm A và đi qua B có bán kính bằng $\sqrt{6}$.

d) Điểm M thay đổi thuộc (S), giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA^2+2MB^2 bằng 5.

Lời giải

a) Đúng: Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=\frac{1}{2}$.

b) Sai: $IA=1$, $R=\frac{1}{2}$, $IA>R$ nên A nằm ngoài mặt cầu (S).

c) Đúng: Mặt cầu tâm A và đi qua B có bán kính $AB=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$.

d) Sai: Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}\Rightarrow K\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Ta có: $MA^2+2MB^2=\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}\right)^2$

$=3MK^2+KA^2+2KB^2+2\overrightarrow{MK}\left(\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}\right)=3MK^2+KA^2+2KB^2.$

Biểu thức MA^2+2MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MK đạt giá trị nhỏ nhất.

Với M thay đổi thuộc (S) ta có $MK_{\min}=|KI-R|=\left|1-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

Vậy $\left(MA^2+2MB^2\right)_{\min}=3MK_{\min}^2+KA^2+2KB^2=\frac{3}{4}+\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=\frac{19}{4}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;1;1),B(1;0;-3),C(-1;-2;-3)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S) có bán kính $R=2$.

b) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $2x-2y+z-1=0$.

c) Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

d) Điểm $D(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất. Khi đó, $a+b+c=\frac{2}{3}$.

Lời giải

a) Đúng: Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $R=2$.

b) Sai: $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-4),\overrightarrow{AC}=(-1;-3;-4)$ nên mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-8;8;-4)$. Suy ra mặt phẳng (ABC) có phương trình $2x-2y+z+1=0$.

c) Đúng: Ta có $d\left(I,(ABC)\right)=\dfrac{|2.1-2.0-1+1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1}}=\dfrac{2}{3}$. Vậy bán kính đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và mặt cầu (S) là $r=\sqrt{R^2-\left[d\left(I,(ABC)\right)\right]^2}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

d) Đúng: Ta có $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}d\left(D,(ABC)\right).S_{ABC}$ nên V_{ABCD} lớn nhất khi và chỉ khi $d\left(D,(ABC)\right)$ lớn nhất.

Gọi Δ là đường thẳng qua điểm I và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Suy ra $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=-2t\\z=-1+t\end{cases}$.

Gọi $D_1;D_2$ là các giao điểm của Δ và mặt cầu (S). Tọa độ điểm $D_1;D_2$ thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2t\\z=-1+t\\x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{2}{3}\\t=\dfrac{-2}{3}\end{array}\right.\Rightarrow D_1\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{-4}{3};\dfrac{-1}{3}\right);D_2\left(\dfrac{-1}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{-5}{3}\right)$

Ta thấy: $d\left(D_1,(ABC)\right)>d\left(D_2,(ABC)\right)$. Vậy điểm $D\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{1}{3}\right)\Rightarrow a+b+c=\dfrac{2}{3}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Biết mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có diện tích là 25π. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Bán kính đường tròn (C) là $r=5$.

b) Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là 3.

c). Tâm đường tròn (C) có tọa độ là $H(1;3;1)$.

d) Phương trình mặt cầu (S) là $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

Lời giải

Gọi M là điểm nằm trên đường tròn giao tuyến của (S) và (P). Ta có $IM=R$. Áp dụng công thức tính bán kính mặt cầu trong trường hợp mặt cầu (S) giao với mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r là

a) Đúng: Ta có đường tròn (C) có diện tích là 25π. Suy ra $r=5=MH$.

b) Đúng: Ta có $d\left(I;(P)\right)=\dfrac{|-1-2.2+2.(-1)-2|}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}}=3=IH$

c) Sai: Phương trình $IH:\begin{cases}x=-1+t\\y=2-2t\\z=-1+2t\end{cases}$

Vậy tọa độ là H là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=-1+t\\y=2-2t\\z=-1+2t\\x-2y+2z-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\\z=1\\t=1\end{cases}\Rightarrow H(0;0;1).$

d) Sai: Suy ra $R^2=MI^2=IH^2+MH^2=3^2+5^2=34$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34.$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R=3$.

b) Điểm $M(1;3;5)$ nằm trong mặt cầu.

c) Mặt phẳng $(P):x+2y-2z+8=0$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=2$.

d) Đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=3-t\end{cases}$ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A,B. Khi đó, diện tích tam giác IAB là: $\frac{\sqrt{182}}{3}$

Lời giải

a) Đúng: Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R=3$.

b) Sai: Ta có $IM=\sqrt{(1-2)^2+(3+1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{33}>R=3$ nên điểm M nằm ngoài mặt cầu.

c) Sai: Ta có $h=d(I,(P))=\frac{|2-2-2+8|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=2<3$.

Suy ra mặt phẳng $(P):x+2y-2z+8=0$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn.

Bán kính đường tròn giao tuyến là $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

d) Đúng: Đường thẳng d có vecto chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-1)$, đi quan điểm $N(1;0;3)$.

$\overrightarrow{IN}=(-1;1;2)$, $\left[\vec{u},\overrightarrow{IN}\right]=(3;-1;2)$. Gọi H là trung điểm của AB

$IH=d(I,d)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{IN}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\sqrt{\dfrac{14}{3}}$; $AH=\sqrt{IA^2-IH^2}=\dfrac{\sqrt{39}}{3}\Rightarrow AB=2AH=\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$

Diện tích tam giác IAB là: $S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}IH.AB=\dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{14}{3}}.\dfrac{2\sqrt{39}}{3}=\dfrac{\sqrt{182}}{3}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ cắt đường thẳng $(d):\dfrac{x-11}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+25}{-2}$ tại hai điểm A,B sao cho $AB=16$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-2)$.

b) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(5;-3;-31)$.

c) Mặt phẳng (P) chứa $I(2;3;-1)$ và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là $2x+y-2z-9=0$.

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=225$.

Lời giải

a) Đúng: Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-2)$.

b) Sai: Thay $A(5;-3;-31)$ vào phương trình đường thẳng (d) ta có $\dfrac{5-11}{2}=\dfrac{-3}{1}\neq\dfrac{-31+25}{-2}$ nên điểm A không thuộc đường thẳng (d).

c) Đúng: Vì mặt phẳng (P) chứa $I(2;3;-1)$ và vuông góc với đường thẳng (d) nên (P) nhận vectơ chỉ phương của (d) là $\vec{u}=(2;1;-2)$ làm vectơ pháp tuyến. Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) là $2(x-2)+1(y-3)-2(z+1)=0$ hay $2x+y-2z-9=0$.

d) Sai: Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng (d) nên IH và (d) vuông góc với nhau.

Gọi mặt phẳng (P) chứa $I(2;3;-1)$ và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là $2x+y-2z-9=0$.

Suy ra, H là giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P)

Vì H thuộc đường thẳng (d) nên $H(2t+11,t,-2t-25)$

Mặt khác, H thuộc mặt phẳng (P) nên tọa độ $H(2t+11,t,-2t-25)$ thỏa mãn $2(2t+11)+t-2(-2t-25)-9=0$ hay $t=-7$

Khi đó, điểm $H(-3,-7,-11)$ và $IH=\sqrt{(-3-2)^2+(-7-3)^2+(-11+1)^2}=15$

Ta được $R=\sqrt{IH^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{15^2+\left(\frac{16}{2}\right)^2}=17.$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ và bán kính $R=17$ là

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=17^2=289.$$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$ và điểm $M(-1;0;2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu tâm I và đi qua điểm M có bán kính là $R=IM=\sqrt{3}$.

b) Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm M có phương trình là

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9.$$

c) Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M là $-2x+2y-z=0$.

d) Phương trình mặt cầu tâm *I*, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho độ dài đoạn $AB=2\sqrt{3}$ là $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$.

Lời giải

a) Sai: $R=IM=\sqrt{9}=3$

b) Đúng: Phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính R có dạng

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Suy ra $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

c) Đúng: Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M đi qua $M(-1;0;2)$ và nhận $\overrightarrow{IM}(-2;2;-1)$ làm vecto pháp tuyến là $-2x+2y-z=0$.

d) Sai: Gọi H là trung điểm AB suy ra H là hình chiếu vuông góc của I lên Ox nên $H(1;0;0)$

Khi đó $IH=\sqrt{13}\Rightarrow R=IA=\sqrt{IH^2+AH^2}=4$.

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S_1) tâm A, bán kính $R=1$ có phương trình là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$.

b) Bán kính của mặt cầu (S_2) có tâm là A và đi qua điểm C là $\sqrt{50}$.

c) Mặt cầu (S_3) nhận AB làm đường kính có phương trình là

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$$

d) Bán kính R của mặt cầu (S_4) đi qua ba điểm A,B,C và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) là $R=\sqrt{26}$.

Lời giải

a) Sai: Mặt cầu (S_1) tâm A, bán kính $R=1$ có phương trình là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=1$

b) Đúng: $\overrightarrow{AC}=(1;0;7)\Rightarrow AC=\sqrt{50}$. Bán kính của mặt cầu (S_2) có tâm là A và đi qua điểm C là $AC=\sqrt{50}$

c) Đúng: $\overrightarrow{AB}=(0;-5;5)\Rightarrow AB=5\sqrt{2}$. Mặt cầu (S_3) nhận AB làm đường kính nên có tâm $I\left(1;-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$, $R=\frac{AB}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ có phương trình là: $(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$.

d) Đúng: Gọi phương trình mặt cầu (S_4) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, với tọa độ tâm $I(a;b;c)$.

Ta có: $I(a;b;c)\in(Oxy)\Rightarrow c=0$ $\begin{cases}A\in(S)\\B\in(S)\\C\in(S)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a-4b+d=-21\\-2a+6b+d=-11\\-4a-4b+d=-17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=1\\d=-21\end{cases}$

Bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{4+1+0+21}=\sqrt{26}$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0),B(1;3;0),C(-1;0;3),D(1;2;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu $(S):(x-2)^2+y^2+z^2=25$ có tâm là điểm A.

b) Mặt cầu (S) tâm O bán kính OA có phương trình $(S):x^2+y^2+z^2=4$.

c) Mặt cầu (S) đường kính AC có phương trình $(S):\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+z^2=\frac{9}{2}$.

d) Mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bánh kính $R=6$.

Lời giải

a) Đúng: Mặt cầu $(S):(x-2)^2+y^2+z^2=25$ có tâm là điểm $A(2;0;0)$.

b) Đúng: Ta có $R=OA=2\Rightarrow$ Mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=4$.

c) Sai: Tâm $I\left(\frac{1}{2};0;\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{AC}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow (S):\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$.

d) Sai: Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm A,B,C,D. Khi đó:

$$\begin{cases} AI^2=BI^2 \\ AI^2=CI^2 \\ AI^2=DI^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (a-2)^2+b^2+c^2=(a-1)^2+(b-3)^2+c^2 \\ (a-2)^2+b^2+c^2=(a+1)^2+b^2+(c-3)^2 \\ (a-2)^2+b^2+c^2=(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a-3b=-3 \\ a-c=-1 \\ a-2b-3c=-5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}\Rightarrow I(0;1;1)$$

. Bán kính: $R=IA=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ tâm I của mặt cầu là $(1;0;-2)$.

b) Diện tích mặt cầu bằng $16\pi(dvdt)$.

c) Điểm $A(1;2;3)$ nằm trong mặt cầu.

d) Số điểm chung của đường thẳng $\Delta:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt cầu (S) bằng 0.

Lời giải

a) Đúng: Tọa độ tâm I của mặt cầu là $\begin{cases} x_I=-2:-2=1 \\ y_I=0:-2=0 \\ z_I=4:-2=-2 \end{cases}\Rightarrow I(1;0;-2)$.

b) Đúng: $R=\sqrt{1^2+0^2+(-2)^2-1}=2\Rightarrow S_{mc}=4\pi R^2=4\pi.2^2=16\pi(dvdt)$.

c) Sai: $\overrightarrow{IA}=(0;2;5)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IA}\right|=\sqrt{0^2+2^2+5^2}=\sqrt{29}>2\Rightarrow$ điểm A nằm ngoài mặt cầu.

d) Đúng: Đường thẳng Δ đi qua $M(0;1;2)$ và nhận $\vec{u}=(2;1;-2)$ làm một vectơ chỉ phương.

$d(I,\Delta)=\frac{\left[\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]\right]}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\sqrt{498}}{6}>R$

$\Rightarrow\Delta$ không cắt $(S)\Rightarrow$ số điểm chung của đường thẳng Δ và mặt cầu (S) bằng 0.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-1)^2=5$ và hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;-1)$.

b) $|R-d|<2$ với d là khoảng cách từ tâm I mặt cầu (S) đến mặt phẳng $(P): x+y+1=0$.

c) Đường thẳng AB không cắt mặt cầu (S).

d) Điểm M thay đổi thuộc (S), biểu thức $2MA^2+3MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 105 (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) Sai: Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

b) Đúng: Ta có khoảng cách từ tâm $I(0;0;1)$ đến mặt phẳng (P) là

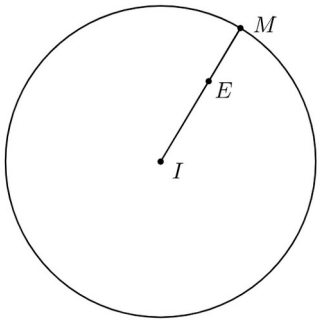
$$d_{(I,(P))}=\frac{|1.0+1.0+0.1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ và } \left|R-d_{(I,(P))}\right|=\left|\sqrt{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\approx 1,53<2$$

c) Sai: Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-5;5;-5), \overrightarrow{AI}=(-2;2;-3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right]=(-5;-5;0)$

$$d_{(I,AB)}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{\sqrt{(-5)^2+(-5)^2+0^2}}{\sqrt{(-5)^2+5^2+(-5)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\approx 0,82<R$$

Vậy nên đường thẳng AB cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

d) Sai: Mặt cầu có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.



Gọi E là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EB}=\vec{0}\Rightarrow E(-1;1;1), \overrightarrow{EB}=(-2;2;-2), \overrightarrow{EA}=(3;-3;3)$

Xét $P=2MA^2+3MB^2=2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2$

$$=2ME^2+4\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{EA}+2EA^2+3ME^2+6\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{EB}+3EB^2$$

$$=5ME^2+2EA^2+3EB^2+2\overrightarrow{ME}.\left(\underbrace{2\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EB}}_{\vec{0}}\right)=5ME^2+2EA^2+3EB^2$$

Biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ME đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $\overrightarrow{IE}=(-1;1;0)\Rightarrow IE=\sqrt{2}<R$ suy ra E nằm trong mặt cầu nên

$ME_{\min}=R-IE=\sqrt{5}-\sqrt{2}$ với $EB=2\sqrt{3}, EA=3\sqrt{3}$

Vậy $P_{\min} = 5ME_{\min}^2 + 2EA^2 + 3EB^2 = 5.\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2 + 2.\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 3.\left(3\sqrt{3}\right)^2 \approx 108$

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-4)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=169$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S) có đường kính bằng 13.

b) Diện tích mặt cầu $S_{mc}=338\pi$.

c) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-39=0$.

d) Mặt cầu (S) cắt trục Oz tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=24$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(4;3;-1)$ và bán kính $R=13$.

a) Sai: Đường kính của mặt cầu (S) là $d=2R=2.13=26$.

b) Sai: Diện tích mặt cầu bằng $S_{mc}=4.\pi.R^2=4.\pi.13^2=676\pi$.

c) Đúng: Ta có $d(I,(P))=\dfrac{|1.4-2.3-2.(-1)-39|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=13=R$ nên mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng.

d) Đúng: Gọi H là hình chiếu của I lên trục Oz nên $H(0;0;-1)$ và H là trung điểm của AB

$\overline{IH}=(-4;-3;0) \Rightarrow IH=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+0^2}=5$.

Ta có $AH=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$.

Do H là trung điểm của AB nên $AB=2IH=2.12=24$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(1;3;7)$. Trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x+1)^2+(y+3)^2+(z+7)^2=9$.

b) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí điểm $A(2;2;7)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

c) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $B(5;6;7)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Tính theo đường chim bay, khoảng cách lớn nhất để một người ở vị trí có toạ độ $B(5;6;7)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét là 8 km.

Lời giải

a) Sai: Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(1;3;7)$ bán kính 3 km mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-7)^2=9$.

b) Đúng: Ta có: $IA=\sqrt{(2-1)^2+(2-3)^2+(7-7)^2}=\sqrt{2}<3$ nên điểm A nằm trong mặt cầu. Vì điểm A nằm trong mặt cầu nên người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $A(2;2;7)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

c) Đúng: Ta có: $IB=\sqrt{(5-1)^2+(6-3)^2+(7-7)^2}=5>3$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu. Vậy người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $B(5;6;7)$ không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{IB}(4;3;0);\ IB=\sqrt{(5-1)^2+(6-3)^2+(7-7)^2}=5>3$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu. Phương trình đường thẳng BI dạng: $\begin{cases}x=1+4t\\y=3+3t\\z=7\end{cases}$.

Gọi mặt cầu $(S)\cap BI\equiv E$ suy ra tọa độ E là nghiệm của hệ

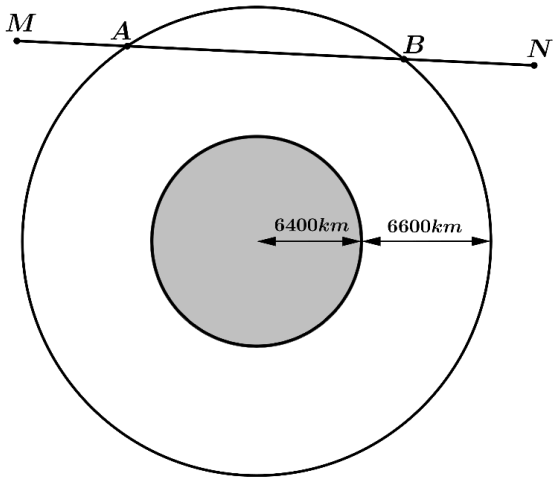
$$\begin{cases}x=1+4t\\y=3+3t\\z=7\\(x-1)^2+(y-3)^2+(z-7)^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{cases}t=\dfrac{3}{5}\\x=\dfrac{17}{5}\\y=\dfrac{24}{5}\\z=7\end{cases}\Rightarrow E\left(\frac{17}{5};\frac{24}{5};7\right)\Rightarrow EB\approx 1,7\right.$$

$$\left.\begin{cases}t=-\dfrac{3}{5}\\x=-\dfrac{7}{5}\\y=\dfrac{6}{5}\\z=7\end{cases}\Rightarrow E\left(-\frac{7}{5};\frac{6}{5};7\right)\Rightarrow EB=8\right.$$

Vậy khoảng cách lớn nhất để một người ở vị trí có toạ độ $B(5;6;7)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị kilômét là 8 km.

Câu 14: Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140 m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7 500 000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất. Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá

6 600 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6 400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường thẳng từ điểm $M(6;20;0)$ đến điểm $N(-6;-12;16)$.



a) Đường thẳng MN có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 20 + 8t \\ z = -4t \end{cases}$ ($t \in \mathbb{R}$).

b) Vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là điểm $A(-3;-4;12)$.

c) Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 18 900 km (kết quả làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị km).

d) Nếu thời gian di chuyển của thiên thạch trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 3 phút thì thời gian nó di chuyển từ M đến N là 6 phút.

Lời giải

a) Đúng: Vecto chỉ phương của đường thẳng MN là $\overrightarrow{MN} = (-12;-32;16) = -4(3;8;-4)$.

Phương trình tham số của đường thẳng MN là: $\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 20 + 8t \\ z = -4t \end{cases}$, $t \in R$.

b) Sai: Để tìm vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi, ta cần tìm điểm giao của đường thẳng MN với mặt cầu có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 6,4 + 6,6 = 13$

Phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 = 13^2$.

Thay $x = 6 + 3t$; $y = 20 + 8t$ và $z = -4t$ vào phương trình mặt cầu ta được:

$$(6 + 3t)^2 + (20 + 8t)^2 + (-4t)^2 = 13^2 \Leftrightarrow 89t^2 + 356t + 267 = 0$$

Giải phương trình ta tìm được $t = -3$ hoặc $t = -1$.

Thay $t=-3$ và $t=-1$ vào phương trình tham số của đường thẳng MN ta được hai giao điểm của MN và mặt cầu là $(-3;-4;12)$ và $(3;12;4)$. Nhận thấy từ M đến N thì hoành độ có xu hương giảm dần nên điểm $A(3;12;4)$.

c) Đúng: Ta có $B(-3;-4;12)$

Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng là AB:

$AB=\sqrt{(-3-3)^2+(-4-12)^2+(12-4)^2}=2\sqrt{89}$ tương đương với ≈ 18900 km.

d) Đúng: Thời gian thiên thạch di chuyển từ M đến N là:

$MN=\sqrt{(6+6)^2+(-12-20)^2+(16-0)^2}=4\sqrt{89}=2\,AB$ nên do đó $t=\dfrac{MN}{AB}.3\approx 6$ (phút).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Bán kính mặt cầu đi qua bốn điểm $M(1;0;1),\ N(1;0;0),\ P(2;1;0)$ và $Q(1;1;1)$ có dạng $\dfrac{\sqrt{a}}{b};\ a,b\in\square$ và nguyên tố cùng nhau. Khi đó giá trị của biểu thức $S=a^b$ bao nhiêu?

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, $(a^2+b^2+c^2-d>0)$.

Do (S) đi qua bốn điểm *M, N, P, Q* nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}-2a-2c+d=-2\\-2a+d=-1\\-4a-2b+d=-5\\-2a-2b-2c+d=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\b=\dfrac{1}{2}\\c=\dfrac{1}{2}\\d=2\end{cases}$$

. Vậy $R=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó giá trị của biểu thức $S=a^b=3^2=9$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ nằm trên đường thẳng $(d):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P):2x-z-4=0$, $(Q):x-2y-2=0$. Tổng $P=a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi tâm mặt cầu là $I(a;a+1;a+2)\in(d)$. Do mặt cầu tiếp xúc với (P) và (Q) nên $d(I;(P))=d(I;(Q))$.

Suy ra $\frac{|2a-a-2-4|}{\sqrt{5}}=\frac{|a-2(a+1)-2|}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow|a-6|=|-a-4|\Leftrightarrow a=1.$

Tâm mặt cầu là $I(1;2;3)\Rightarrow P=6$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{1}$. Trong tất cả mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Diện tích của mặt cầu đó có kết quả bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trục)

Lời giải

Ta dễ dàng kiểm chứng được Δ_1 và Δ_2 chéo nhau

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 và có bán kính nhỏ nhất. Suy ra mặt cầu (S) là mặt cầu đường kính AB (với AB là đoạn vuông góc chung của Δ_1,Δ_2)

Ta có: Δ_1 đi qua $M(4;1;-5)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_{\Delta_1}}=(3;-1;-2)$

Δ_2 đi qua $N(2;-3;0)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_{\Delta_2}}=(1;3;1)$ suy ra $d(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}},\overrightarrow{u_{\Delta 2}}\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}},\overrightarrow{u_{\Delta 2}}\right]\right|}=2\sqrt{6}$

Vậy bán kính $R=\frac{AB}{2}=\frac{d(\Delta_1,\Delta_2)}{2}=\sqrt{6}$. Diện tích mặt cầu (S) là $S=\pi R^2=6\pi\approx 18.8$

Câu 4: Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$ và đường thẳng $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-3}{3}$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt trong đó $M(x_M;y_M;z_M)$ với $x_M>0$ Giá trị biểu thức $T=x_M^2+y_M^2+z_M^2$ bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Thay tọa độ tâm $I(1;-2;3)$ vào phương trình đường thẳng d, ta được: $-\frac{1}{2}\neq\frac{2}{1}\neq 0$.

Nên đường thẳng d không đi qua tâm $I(1;-2;3)$.

Ta có đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+2t\\y=-4+t\\z=3+3t\end{cases},(t\in R)$ với $M\in d\Leftrightarrow M(2+2t;-4+t;3+3t)$

Thay điểm $M(2+2t;-4+t;3+3t)$ vào phương trình mặt cầu (S), ta được:

$\Leftrightarrow (2+2t-1)^2+(-4+t+2)^2+(3+3t-3)^2=25 \Leftrightarrow (2t+1)^2+(t-2)^2+(3t)^2=25$

$\Leftrightarrow 14t^2+5=25$

$$\Leftrightarrow t^2=\frac{10}{7} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\sqrt{70}}{7} \Rightarrow M\left(2+\frac{2\sqrt{70}}{7};-4+\frac{\sqrt{70}}{7};3+\frac{3\sqrt{70}}{7}\right) \\ t=-\frac{\sqrt{70}}{7} \Rightarrow N\left(2-\frac{2\sqrt{70}}{7};-4-\frac{\sqrt{70}}{7};3-\frac{3\sqrt{70}}{7}\right) \end{array}\right.$$

Vậy $x_M^2+y_M^2+z_M^2=\left(2+\frac{2\sqrt{70}}{7}\right)^2+\left(-4+\frac{\sqrt{70}}{7}\right)^2+\left(3+\frac{3\sqrt{70}}{7}\right)^2 \approx 70,51$

Câu 5: Cho 3 điểm $M(2;3;3), N(2;-1;-1), P(-2;-1;3)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-z+2=0$. Phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm M,N,P và có tâm thuộc mặt phẳng (α) có bán kính bằng bao nhiêu?

Lời giải

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0.$

Mặt cầu qua $M,N,P \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4a+6b+6c-d=22 \\ 4a-2b-2c-d=6 \\ 4a+2b-6c+d=-14 \end{array}\right.$

Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow 2a+3b-c+2=0.$

Giải hệ ta được: $\left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=-1 \Rightarrow I(2;-1;3) \\ c=3 \end{array}\right.$.

Bán kính của mặt cầu là: $R=IM=4$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-8=0$ có phương trình $(C): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c+2d$.

Lời giải

Bán kính mặt cầu là: $r=d(I;(P))=\frac{|2-4+1-8|}{\sqrt{4+4+1}}=3$.

Phương trình mặt cầu $(C): (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3=0$ suy ra $a=1; b=2; c=-1; d=-3.$

Hay $a+b+c+2d=1+2+(-1)+2.(-3)=-4$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;2)$ và có một tiếp tuyến là đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$ có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Tính $T=a+b+c-d$.

Lời giải

Ta có đường thẳng $\Delta:\begin{cases}M_0(1;1;0)\in\Delta\\ \vec{u}=(1;1;-1)\end{cases}$. Suy ra $\overrightarrow{MM_0}=(0;-2;-2)$.

Vì Δ là một tiếp tuyến của mặt cầu (S) nên $R=d(M,\Delta)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MM_0}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}$.

Khi đó phương trình mặt cầu (S) có dạng: $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=8$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-6y-4z+6=0 \Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=3\\ c=2\\ d=6\end{cases}\Rightarrow T=a+b+c-d=0.$$

Câu 8: Trong không gian với tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(C):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=11$. Đường thẳng d là tiếp tuyến của mặt cầu (C) tại điểm $A(2;1;0)$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u_d}=(-1;b;c)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$. Tính giá trị $b+c$ (kết quả làm tròn đến hang phần trăm).

Lời giải

Mặt cầu (C) có tâm $I=(1;2;-3)$, khi đó $\overrightarrow{IA}=(1;-1;3)$

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u_\Delta}=(1;2;1)$

Do d là tiếp tuyến của mặt cầu tại điểm $A(2;1;0)$ nên $\overrightarrow{IA}.\vec{u_d}=0\Leftrightarrow -b+3c-1=0$

Lại có d vuông góc với đường thẳng Δ nên $\vec{u_\Delta}.\vec{u_d}=0\Leftrightarrow 2b+c-1=0$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}-b+3c-1=0\\ 2b+c-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{2}{7}\\ c=\frac{3}{7}\end{cases}$. Vậy $b+c=\frac{5}{7}\approx 0,71$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(-2;0;0)$; $B(0;-2;0)$; $C(0;0;-2)$. D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc. $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tứ diện $ABCD$. Tính $S=a+b+c$.

Lời giải

Gọi $D(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{AD}=(x+2;y;z);\ \overrightarrow{BD}=(x;y+2;z);\ \overrightarrow{CD}=(x;y;z+2)$.

Vì DA,DB,DC đôi một vuông góc nên:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD}=0\\ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}=0\\ \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CD}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+2)+y(y+2)+z^2=0\\ x(x+2)+y^2+z(z+2)=0\\ x^2+y(y+2)+z(z+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=-\frac{4}{3}.$$

$I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên:

$$\begin{cases}IA=IB\\ IA=IC\\ IA=ID\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+2)^2+b^2+c^2=a^2+(b+2)^2+c^2\\ (a+2)^2+b^2+c^2=a^2+b^2+(c+2)^2\\ (a+2)^2+b^2+c^2=\left(a+\frac{4}{3}\right)^2+\left(b+\frac{4}{3}\right)^2+\left(c+\frac{4}{3}\right)^2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ a=c\\ 4a+4=8a+\frac{16}{3}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{-1}{3}$$

. Vậy $a+b+c=-1$.

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(-2;3;0)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-3}{2}$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=8$. Tính bán kính của mặt cầu (S).

Lời giải

Giả sử mặt cầu (S) có phương trình $(S):x^2+y^2+z^2+4x-6y+2m=0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;3;0)$ và bán kính $R=\sqrt{13-2m}$ với $m<\frac{13}{2}$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(4;3;3)$ và có một vtcp là $\vec{u}=(2;1;2)$.

Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng Δ bằng: $d=d(I;\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=3$.

Vì đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=8$ nên ta có $d^2+\frac{AB^2}{4}=R^2\Leftrightarrow 3^2+16=13-2m\Leftrightarrow m=-6$. (thỏa điều kiện).

Suy ra bán kính mặt cầu là $R=\sqrt{13-2.(-6)}=5$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, một vòm được thiết kế có bề mặt là mặt cầu tâm $I(1;2;20)$, bán kính bằng 50 m và có đáy nằm trên mặt phẳng (Oxy). Chiều cao của vòm là bao nhiêu? (biết đơn vị của hệ trục tọa độ là mét)

Lời giải

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (Oxy) là 20 m.

Vậy chiều cao của vòm là $20+50=70$ m.

Câu 12: Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật trong không gian. Cách thức hoạt động của GPS như sau: Trong cùng một thời điểm, vị trí M của một vật sẽ được xác định bằng 4 vệ tinh cho trước, các vệ tinh này có gắn máy thu tín hiệu, bằng cách so sánh thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận tín hiệu phản hồi thì sẽ xác định được khoảng cách từ các vệ tinh đến vị trí M. Như vậy, vị trí M là giao điểm của 4 mặt cầu có tâm là 4 vệ tinh đã cho. Giả sử trong không gian $Oxyz$, 4 vệ tinh có tọa độ là $A(-1;6;3)$, $B(4;8;1)$, $C(9;6;7)$, $D(-15;18;7)$. Biết khoảng cách từ M đến các vệ tinh lần lượt là $MA=6$, $MB=7$, $MC=12$, $MD=24$. Khi đó tọa độ điểm $M(x_M;y_M;z_M)$. Tính giá trị biểu thức $T=x_M+y_M+z_M$.

Lời giải

Gọi $M(a;b;c)$. Khi đó ta có:

$$(a+1)^2+(b-6)^2+(c-3)^2=36\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2a-12b-6c+10=0 \quad (1)$$

$$(a-4)^2+(b-8)^2+(c-1)^2=49\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-8a-16b-2c+32=0 \quad (2)$$

$$(a-9)^2+(b-6)^2+(c-7)^2=144\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-18a-12b-14c+22=0 \quad (3)$$

$$(a+15)^2+(b-18)^2+(c-7)^2=576\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+30a-36b-14c+22=0 \quad (4)$$

Giải hệ gồm 4 phương trình trên ta được $a=1;b=2;c=-1$ nên $M(1;2;-1)$.

Vậy $T=1+2+(-1)=2$.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Viết phương trình mặt cầu (S):

a) có tâm $I(7;-3;0)$, bán kính $R=8$

b) có tâm $M(3;1;-4)$ và đi qua điểm $N(1;0;1)$

c) có đường kính AB với $A(4;6;8)$ và $B(2;4;4)$

Lời giải

a) Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(7;-3;0)$, bán kính $R=8$ là:

$(x-7)^2+(y+3)^2+z^2=8^2$ hay $(x-7)^2+(y+3)^2+z^2=64.$

b) Mặt cầu (S) có tâm $M(3;1;-4)$ và đi qua điểm $N(1;0;1)$ nên có bán kính $R=MN=\sqrt{30}.$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình là: $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=\left(\sqrt{30}\right)^2$

Hay $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=30.$

c) Mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(4;6;8)$ và $B(2;4;4)$ nên có tâm $J(3;5;6)$ là trung điểm của AB và bán kính $R=AJ=\sqrt{6}.$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình là: $(x-3)^2+(y-5)^2+(z-6)^2=6$.

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm của AB thì IH vuông góc với AB và $IH=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$.

Suy ra bán kính mặt cầu là: $R=IA=\sqrt{3+13}=4$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $A(1;2;-3)$ và tiếp xúc với trục Ox.

Lời giải

Ta có: $R=d(A,Ox)=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$.

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $A(1;2;-3)$, bán kính $R=\sqrt{13}$ có phương trình là:

$$(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=13$$.

Bài tập 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(6;0;0), B(0;4;0)$ và $C(0;0;2)$. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có dạng:

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0\ (a^2+b^2+c^2-d>0)$

Do $O,A,B,C\in(S)\Rightarrow\begin{cases}d=0\\36-12a+d=0\\16-8b+d=0\\4-4c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=0\\a=3\\b=2\\c=1\end{cases}\Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{14}$

Mặt cầu tâm $I(3;2;1), R=\sqrt{14}$ có phương trình $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=14$.

Bài tập 5: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm nằm trên mặt phẳng (Oyz) và đi qua các điểm $A(0;8;0), B(4;6;2), C(0;12;4)$.

Lời giải

Gọi tâm mặt cầu là $I(0;b;c)\in(Oyz)$. Do $A(0;8;0), B(4;6;2), C(0;12;4)$ thuộc mặt cầu nên

Khi đó $IA=IB=IC\Leftrightarrow(b-8)^2+c^2=16+(b-6)^2+(c-2)^2=(b-12)^2+(c-4)^2$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}b-c=2\\b+c=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=7\\c=5\end{cases}$. Vậy $I(0;7;5); R=IA=\sqrt{26}$

Phương trình mặt cầu là $x^2+(y-7)^2+(z-5)^2=26$.

Bài tập 6: Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $A(1;4;-3)$ và chứa trục Ox. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{OA}=(1;4;-3)$ nên $\left[\overrightarrow{OA},\vec{i}\right]=(0;-3;-4)$ khi đó mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;4;-3)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;3;4)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là: $3y+4z=0$.

Lại có: $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|3.2+4.1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$.

Mặt cầu tâm $I(1;2;1)$ bán kính $R=\mathrm{d}(I,(P))=2$ có phương trình là

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$$.

Bài tập 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hãy viết phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm $A(-2;3;3), B(-1;1;2), C(4;2;2)$ và có tâm nằm thuộc mặt phẳng (Oyz).

Lời giải

Vì mặt cầu có tâm I thuộc mặt phẳng (Oyz) nên tâm có dạng $I(0;b;c)$.

Vì mặt cầu đi qua ba điểm $A(-2;3;3), B(-1;1;2), C(4;2;2)$ nên ta có:

$$IA = IB = IC = R \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 = IC^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+(3-b)^2+(3-c)^2 = 1+(1-b)^2+(2-c)^2 \\ 1+(1-b)^2+(2-c)^2 = 16+(2-b)^2+(2-c)^2 \end{cases}$$

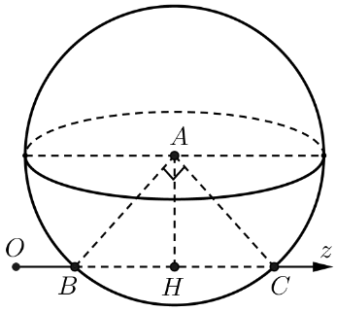
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 40+9-6c+c^2 = 65+4-4c+c^2 \\ b=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2c=20 \\ b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-10 \\ b=9 \end{cases} \Rightarrow I(0;9;-10), R = IA = \sqrt{4+36+169} = \sqrt{209}$$

Phương trình mặt cầu là $x^2+(y-9)^2+(z+10)^2 = 209$.

Bài tập 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2;-4;5)$. Viết phương trình của mặt cầu tâm là A và cắt trục Oz tại hai điểm B, C sao cho ΔABC vuông.

Lời giải



Do $AB = AC$ nên ΔABC vuông tại A. Gọi H trung điểm BC suy ra $AH = BH = HC$.

Do đó H là hình chiếu của điểm A lên trục Oz.

Ta có: $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 2AH^2$

$$\Rightarrow R = AH\sqrt{2} = d(A,Oz).\sqrt{2} = \sqrt{x_A^2+y_A^2}.\sqrt{2} = 2\sqrt{10}$$

Vậy mặt cầu có phương trình: $(x+2)^2+(y+4)^2+(z-5)^2 = 40$

Bài tập 9: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=t \\ y=-1-2t, (t \in \mathbb{R}) \\ z=2-2t \end{cases}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ sao cho tiếp xúc với (P).

Lời giải

Đường thẳng d đi qua $M(0;-1;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-2;-2)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AM};\vec{u}\right] = (2;-1;2) \Rightarrow (P): 2x-y+2z-5=0$.

Bán kính mặt cầu $R = d_{(I;(P))} = 2$ nên phương trình mặt cầu là: $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2 = 4$.

Bài tập 10: Phần mềm mô phỏng thiết bị thám hiểm đại dương có dạng hình cầu trong không gian $Oxyz$. Cho biết tọa độ tâm mặt cầu là $I(360;200;400)$ và bán kính $r=2m$. Viết phương trình mặt cầu.

Lời giải

Phương trình mặt cầu tâm $I(360;200;400)$ và bán kính $r=2m$ là:

$$(x-360)^2+(y-200)^2+(z-400)^2=4.$$

Dạng 3: Vị trí tương đối liên quan đến mặt cầu và ứng dụng thực tế

Phương pháp: Có ba trường hợp như sau:

	Mặt cầu	
Mặt phẳng	Tính $d(I;(P))=\dfrac{\lvert ax_I+by_I+cz_I+d\rvert}{\lvert\vec{n}_{(P)}\rvert}$ và so sánh với bán kính R	
	$d(I;(P))>R$	Mặt phẳng không cắt mặt cầu
	$d(I;(P))=R$	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại M
	$d(I;(P))<R$	Mặt phẳng cắt mặt cầu
Đường thẳng	Tính $d(I;d)=\dfrac{\lvert[\vec{u};\overrightarrow{MI}]\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert}$ và so sánh $d(I;(P))>R$ với bán kính R	
	$d(I;d)>R$	Đường thẳng không cắt mặt cầu
	$d(I;d)=R$	Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu
	$d(I;d)<R$	Đường thẳng cắt mặt cầu
Điểm	Tính IM và so sánh với bán kính R	
	$IM>R$	Điểm M nằm ngoài mặt cầu
	$IM=R$	Điểm M nằm trên mặt cầu
	$IM<R$	Điểm M nằm trong mặt cầu

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$. Trong ba điểm có tọa độ lần lượt là $(0;0;0)$, $(1;2;3)$, $(2;0;6)$ thì có bao nhiêu điểm nằm trên mặt cầu (S)?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Thay tọa độ ba điểm vào phương trình mặt cầu, ta có:

$0^2+0^2+0^2-2.0-4.0-6.0=0$ (Đúng) $\Rightarrow O(0;0;0)\in(S)$.

$1^2+2^2+3^2-2.1-4.2-6.3=0$ (Sai) $\Rightarrow A(1;2;3)\notin(S)$.

$2^2+0^2+6^2-2.2-4.0-6.6=0$ (đúng) $\Rightarrow B(2;0;6)\in(S)$.

Vậy trong ba điểm đề cho, có hai điểm nằm trên mặt cầu (S).

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$. Trong ba điểm có tọa độ lần lượt là $(0;0;0)$, $(1;2;3)$ và $(2;0;6)$ thì có bao nhiêu điểm nằm trên mặt cầu.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Điểm nằm trên mặt cầu thỏa mãn phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$.

Xét hai điểm $(0;0;0)$ và $(2;0;6)$ thỏa mãn.

Xét điểm $(1;2;3)$ ta có $1^2+2^2+3^2-2.1-4.2-6.3=-14\neq 0$ (không thỏa mãn).

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$ trong các điểm có tọa độ lần lượt là $(0;0;0)$, $(1;2;3)$, $(2;0;6)$ thì có bao nhiêu điểm trên mặt cầu.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$ (1)

Xét điểm $(0;0;0)$ ta có $0^2+0^2+0^2-2.0-4.0-6.0=0$ suy ra điểm $(0;0;0)$ nằm trên mặt cầu (S).

Xét điểm $(1;2;3)$ ta có $1^2+2^2+3^2-2.1-4.2-6.3=-14\neq 0$ suy ra điểm $(1;2;3)$ không nằm trên mặt cầu (S).

Xét điểm $(2;0;6)$ ta có $2^2+0^2+6^2-2.2-4.0-6.6=0$ suy ra điểm $(2;0;6)$ nằm trên mặt cầu (S).

Vậy có 2 điểm nằm trên mặt cầu.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S):(x-3)^2+y^2+z^2=9$ và $(S'):(x+2)^2+y^2+z^2=4$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hai mặt cầu tiếp xúc ngoài. **B.** Hai mặt cầu tiếp xúc trong.

C. Hai mặt cầu không có điểm chung. **D.** Hai mặt cầu có nhiều hơn một điểm chung.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;0;0), R=3$ còn mặt cầu (S') có tâm $I'(-2;0;0), R'=2$

Do $II'=5=R+R'$ nên hai mặt cầu tiếp xúc ngoài.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thuộc mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$ và ba điểm $A(1;0;0), B(2;1;3), C(0;2;-3)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn biểu thức $MA^2+2.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=8$ là đường tròn cố định, bán kính r của đường tròn này là.

A. $r=\sqrt{6}$. **B.** $r=3$. **C.** $r=6$. **D.** $r=\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$ khi đó $MA^2+2.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=8$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+z^2+2.\left[(2-x).(-x)+(1-y).(2-y)+(3-z).(-3-z)\right]=8$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-7=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=9 \Rightarrow M\in(S_1)$.

Mặt cầu $(S):I(3;3;2), R=3$. Mặt cầu $(S_1):I_1(1;1;0), R_1=3$.

Ta có $II_1=2\sqrt{3}<R+R_1 \Rightarrow (S)$ cắt cầu (S_1) theo giao tuyến là một đường tròn.

Đường tròn này nằm trên mặt phẳng

$(P):(x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2-\left[(x-1)^2+(y-1)^2+z^2\right]=0 \Leftrightarrow x+y+z-5=0$.

$d(I;(P))=\sqrt{3} \Rightarrow r=\sqrt{R^2-d^2(I;(P))}=\sqrt{6}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=16$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. Điểm $Q(-2;-1;-1)$. **B.** Điểm $N(-2;-1;3)$. **C.** Điểm $M(2;1;-3)$. **D.** Điểm $P(2;1;1)$.

Lời giải

Thay tọa độ điểm $P(2;1;1)$ vào phương trình mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=16$ (thỏa mãn). Ta có mặt cầu (S) đi qua điểm P.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$. Điểm nào dưới đây thuộc mặt cầu (S)?

A. $B(3;1;1)$. **B.** $A(3;-2;2)$. **C.** $C(3;-2;3)$. **D.** $D(1;0;4)$.

Lời giải

Ta thấy $(3-2)^2+(-2+1)^2+(3-1)^2=6 \Rightarrow C(3;-2;3)\in(S)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$. Điểm nào trong các điểm bên dưới thuộc mặt cầu (S)?

A. $K(5;-3;1)$. **B.** $J(-2;3;-1)$. **C.** $H(-7;-3;1)$. **D.** $I(2;-3;1)$.

Lời giải

Thay tọa độ các điểm vào phương trình mặt cầu (S) ta có:

Điểm $K(5;-3;1)\in(S)$ vì $(5-2)^2+(-3+3)^2+(1-1)^2=9\Leftrightarrow 9=9$ (luôn đúng).

Điểm $J(-2;3;-1)\notin(S)$ vì $(-2-2)^2+(3+3)^2+(-1-1)^2=9\Leftrightarrow 56=9$ (vô lý).

Điểm $H(-7;-3;1)\notin(S)$ vì $(-7-1)^2+(-3-2)^2+(1-3)^2=9\Leftrightarrow 93=9$ (vô lý).

Điểm $I(2;-3;1)\notin(S)$ vì $(2-1)^2+(-3-2)^2+(1-3)^2=9\Leftrightarrow 30=9$ (vô lý).

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, gọi I là tâm của mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4z-1=0$. Độ dài đoạn OI (với O là gốc tọa độ) bằng

A. 5. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 6.

Lời giải

Ta có $I(-1;0;2)$. Suy ra $OI=\sqrt{(-1)^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=4$. Có bao nhiêu điểm P thuộc (S) mà tiếp diện của (S) tại P cắt các trục Ox, Oz tương ứng tại các điểm $E(a;0;0), F(0;0;b)$ sao cho a, b là các số nguyên dương và $\widehat{EPF}=90^\circ$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;4)$ và bán kính $R=2$.

Ta có $d(I,(Oxz))=\dfrac{|-2|}{1}=2=R$ nên (S) tiếp xúc với (Oxz) tại $H(1;0;4)$.

Dễ thấy $EH=EP, FH=FP$ (do tính chất các tiếp tuyến kẻ từ 1 điểm đến mặt cầu).

Suy ra $\Delta EPF=\Delta EHF$ (c – c – c) nên $\widehat{EHF}=\widehat{EPF}=90^\circ$ (2 góc tương ứng) hay $\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{HF}=0$.

Khi đó $(a-1;0;-4).(-1;0;b-4)=0\Leftrightarrow -a+1-4b+16=0\Leftrightarrow a+4b-17=0$.

Vì a nguyên dương nên $a=17-4b\ge 0\Rightarrow b\le\dfrac{17}{4}\Rightarrow b\in\{1;2;3;4\}$.

Các cặp $(a;b)$ thỏa mãn là $(13;1),(9;2),(5;3),(1;4)$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$: (S_1) có tâm $I\left(0,0,\dfrac{21}{2}\right)$,

bán kính $r_1 = 6$ và (S_2) có tâm $J(0,0,1)$, bán kính $r_2 = \frac{9}{2}$. Hỏi có bao nhiêu điểm $M(x,y,z)$ với x,y,z nguyên thuộc phần giao của hai khối cầu?

A. 11. **B.** 13. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Ta có phương trình mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + \left(z - \frac{21}{2}\right)^2 = 36$.

Và phương trình mặt cầu $(S_2): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{81}{4}$.

Điểm $M(x,y,z)$ thuộc giao của hai khối cầu $(S_1),(S_2)$ nên toạ độ điểm $M(x,y,z)$ là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \left(z - \frac{21}{2}\right)^2 \le 36 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le \frac{81}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le \frac{81}{4} \\ z = 5 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra $x^2 + y^2 + (5-1)^2 \le \frac{81}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le \frac{17}{4}$.

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ và $x^2 + y^2 \le \frac{17}{4}$ suy ra $\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}; \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2 \end{cases}; \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy có 13 điểm $M(x,y,z)$ với x,y,z nguyên thuộc phần giao của hai khối cầu.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;5;2)$ và $B(5;13;10)$. Có bao nhiêu điểm $I(a;b;c)$ với a,b,c là các số nguyên sao cho có mặt cầu tâm I đi qua A,B và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy)?

A. 10. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4;8;8) \Rightarrow AB: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow M(3;9;6) \Rightarrow$ Mặt phẳng trung trực của AB là

$(\alpha): x - 3 + 2(y-9) + 2(z-6) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 33 = 0$.

$I \in (\alpha) \Rightarrow a + 2b + 2c - 33 = 0 \Leftrightarrow a = 33 - 2b - 2c \Rightarrow a$ là số nguyên lẻ.

Gọi $J = AB \cap (Oxy) \Rightarrow J(0;3;0) \Rightarrow JA = 3, JB = 15$.

Gọi C là tiếp điểm của mặt cầu và $(Oxy) \Rightarrow C(a;b;0)$.

Ta có: $JA.JB = JC^2 \Rightarrow JC^2 = 45 \Rightarrow C$ thuộc đường tròn tâm $\left(J,3\sqrt{5}\right)$.

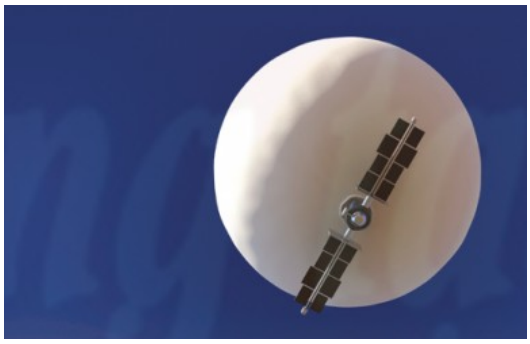
Xét trong mặt phẳng (Oxy), phương trình của $\left(J,3\sqrt{5}\right)$: $a^2 + (b-3)^2 = 45 \Rightarrow a^2 \le 45$.

Do $a,b,c \in \mathbb{Z}$ và a lẻ nên ta có: $a^2 = 1 \Rightarrow (b-3)^2 = 44$ (loại);

$a^2 = 9 \Rightarrow (b-3)^2 = 36$ (thỏa mãn); $a^2 = 25 \Rightarrow (b-3)^2 = 20$ (loại).

Vậy có 4 bộ $(a;b;c)$ thỏa mãn.

Câu 13: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, bề mặt của một quả bóng thám không dạng hình cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 200x - 600y - 4000z + 4099900 = 0$. Tìm tâm và bán kính mặt cầu.



A. Tâm $I(100;300;2000)$, bán kính $r = 100$.

B. Tâm $I(-100;-300;-2000)$, bán kính $r = 10$.

C. Tâm $I(100;300;2000)$, bán kính $r = 10$.

D. Tâm $I(-100;-300;-2000)$, bán kính $r = 100$.

Lời giải

Tâm của mặt cầu là $I(100;300;2000)$ và bán kính $r = \sqrt{100^2 + 300^2 + 2000^2 - 4099900} = 10$ m.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-4;0;2)$ **B.** $B(-5;-2;5)$. **C.** $C(-6;2;2)$ **D.** $D(0;-1;4)$

Lời giải

Ta có $IA = 3 > 2; IB = \sqrt{3} < 2, IC = \sqrt{13} > 2, ID = 6 > 2$.

Vậy người đứng tại điểm B nằm trong mặt cầu nên sẽ sử dụng được dịch vụ của trạm thu phát sóng điện thoại di động.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì **không** sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-5;0;3)$ **B.** $B(-5;-2;5)$. **C.** $C(-6;2;2)$ **D.** $D(-7;-2;3)$

Lời giải

Ta có $IA=\sqrt{3}<2; IB=\sqrt{3}<2, IC=\sqrt{13}>2, ID=\sqrt{3}<2$.

Vậy người đứng tại điểm C nằm ngoài mặt cầu nên sẽ không sử dụng được dịch vụ của trạm thu phát sóng điện thoại di động.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(C):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=16$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm $A(1;2;-1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C).

b) Điểm $B(0;0;1)$ nằm bên trong mặt cầu (C).

c) Điểm $C(0;2;1)$ nằm trên mặt cầu (C).

d) Với điểm $D(2;1;-1)$, ta có $ID<4$.

Lời giải

a) Đúng: Tâm $I(1;-2;0)$.

Ta có $(1-1)^2+(2+2)^2+(-1)^2=17>16 \Rightarrow$ điểm $A(1;2;-1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C).

b) Đúng: Ta có $(0-1)^2+(0+2)^2+1^2=6<16 \Rightarrow$ điểm $B(0;0;1)$ nằm bên trong mặt cầu (C).

c) Sai: Ta có $(0-1)^2+(2+2)^2+1^2=18>16 \Rightarrow$ điểm $C(0;2;1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C).

d) Đúng: Ta có $ID=\sqrt{(2-1)^2+(1+2)^2+(-1)^2}=\sqrt{11}<4$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ có tâm I và bán kính R. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$, bán kính $R=3$.

b) Điểm $A(0;2;-3)$ nằm trong mặt cầu.

c) Điểm $J(1;2;3)$ nằm ngoài mặt cầu và khoảng cách từ tâm I đến điểm J bằng $\sqrt{10}$.

d) Khoảng cách từ tâm I đến tâm mặt cầu $(S'):x^2+y^2+(z-1)^2=3$ bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải

a) Sai: Phương trình mặt cầu tâm $I(1;-1;2)$, bán kính $R=3$ là $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$.

b) Sai: Ta có: $(0+1)^2+(2-1)^2+(-3+2)^2=3=R=3$, do đó điểm A nằm trên mặt cầu.

c) Đúng: Ta có: $(1+1)^2+(2-1)^2+(3+2)^2=30>R=3$, do đó điểm J nằm ngoài mặt cầu.

Và $\overrightarrow{IJ}=(0;3;1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IJ}\right|=\sqrt{0^2+3^2+1^2}=\sqrt{10}$

d) Sai: Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$,

Mặt cầu (S') có tâm $K(0;0;1)$,

Khi đó $\overrightarrow{IK}=(-1;1;-1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IK}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}\neq\sqrt{2}$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$ có tâm I và bán kính R. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=2$.

b) Bán kính của mặt cầu (S) là đoạn IM với điểm $M(1;1;2)$.

c) Mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(0;1;-2)$ và $B(2;-1;-4)$.

d) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x+y-z-2=0$.

Lời giải

a) Đúng: Mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$ có $a=1$, $b=-2$, $c=0$, $d=1$

$\Rightarrow$ tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=2$.

b) Sai: Xét $M(1;1;2)$: $1^2+1^2+2^2-2.1+4.1+1=9$ do đó M không nằm trên (S)

Vậy bán kính mặt cầu (S) không là đoạn IM.

c) Sai: Mặt cầu (S) nhận AB làm đường kính thì $\frac{AB}{2}=R$ và tâm I là trung điểm của AB.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;-2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{3}\Rightarrow\frac{AB}{2}=\sqrt{3}\neq R=2$

d) Sai: Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x+y-z-2=0\Leftrightarrow R=d(I,(P))$.

Ta có $d(I,(P))=\frac{|1+(-2)-0-2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}\neq R=2$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:x=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):3x+y-z-5=0$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn lớn nhất có bán kính $r=5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng $(P):3x+y-z-5=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;1;-1)$.

b) Tọa độ tổng quát của tâm I là $(t;-1+2t;-2-t)$.

c) $d(I,(P))=3$.

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$.

Lời giải

a) Đúng: $(P): 3x+y-z-5=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;1;-1)$.

b) Sai: Ta có: $d: x=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1} \Rightarrow d: \begin{cases} x=t \\ y=1+2t \\ z=2-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ $I\in d \Rightarrow I(t;1+2t;2-t)$

c) Sai: Do giao tuyến của (S) và (P) là đường tròn lớn nên $I\in(P) \Rightarrow d(I,(P))=0$.

d) Đúng : Ta có $I\in d \Rightarrow I(t;1+2t;2-t)$

Theo giả thiết $I=d\cap(P)$ nên tọa độ điểm I thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P)

Thay tọa độ điểm I vào (P) ta có :

$3t+(1+2t)-(2-t)-5=0 \Leftrightarrow 6t-6=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow I(1;3;1)$

Vì $(S)\cap(P)$ theo giao tuyến là đường tròn lớn có bán kính $r=5$ nên ta có bán kính mặt cầu (S) là $R=r=5$.

Vậy mặt cầu có phương trình là: $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x-y+2z-14=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Lấy $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Giá trị của biểu thức $K=a+b+c$ là

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$, bán kính $R=3$.

Ta có: $d(I,(P))=\dfrac{|2.1-(-2)+2.(-1)-14|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=4>R$. Suy ra mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung. Từ đó, điểm thuộc mặt cầu có khoảng cách nhỏ nhất hoặc lớn nhất tới mặt phẳng (P) là giao điểm của mặt cầu với đường thẳng qua I và vuông góc với (P).

Trước hết ta lập phương trình đường thẳng d đi qua I và vuông góc với (P).

Mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1;2)$.

Vì $d\perp(P)$ nên nhận $\vec{n}=(2;-1;2)$ làm véctơ chỉ phương.

Từ đó d có phương trình $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=-1+2t \end{cases}$ với $(t\in\mathbb{R})$.

Ta tìm giao điểm của d và (S). Xét hệ: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=-1+2t \\ x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=-1+2t \\ (1+2t)^2+(-2-t)^2+(-1+2t)^2-2(1+2t)+4(-2-t)+2(-1+2t)-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=-1+2t \\ 9t^2-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} t=1 \\ x=3 \\ y=-3 \\ z=1 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} t=-1 \\ x=-1 \\ y=-1 \\ z=-3 \end{cases} \right.$$

. Suy ra có hai giao điểm là $A(3;-3;1)$ và $B(-1;-1;-3)$.

Ta có: $d(A,(P))=\dfrac{|2.3-(-3)+2.1-14|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=1$; $d(B,(P))=\dfrac{|2.(-1)-(-1)+2(-3)-14|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=7$.

Suy ra $M\equiv B(-1;-1;-3)$. Từ đó $a=-1$; $b=-1$; $c=-3$.

Vậy $K=-5$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-2;1;-4)$. Biết bán kính phủ sóng của trạm là 3 km. Có 5 người sử dụng điện thoại tại các điểm $A(2;-1;3), B(0;1;-4), C(-2;1;-3), D(0;1;-3), E(-4;-2;1)$. Hỏi trong số 5 người đó, có bao nhiêu người có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

Lời giải

Ta tính: $IA=\sqrt{4^2+(-2)^2+7^2}=\sqrt{69}>3$; $IB=\sqrt{2^2+0^2+0^2}=2<3$.

$IC=\sqrt{0^2+0^2+1^2}=1<3$; $ID=\sqrt{2^2+0^2+1^2}=\sqrt{5}<3$; $IE=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{38}>3$.

Vậy có 3 người có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ và hai điểm $A(3;-2;6), B(0;1;0)$. Mặt phẳng $(P):ax+by+cz-2=0$ chứa đường thẳng AB và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức $M=2a+b-c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $(P)\perp \vec{n}=(a;b;c)$ trong đó $a;b;c$ không đồng thời bằng 0. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$.

Do mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AB nên ta có: $\begin{cases}3a-2b+6c-2=0\\ b-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2\\ a=2-2c\end{cases}(1)$

Bán kính đường tròn giao tuyến là: $r=\sqrt{R^2-d^2}$ trong đó

$d=d\left(I;(P)\right)=\dfrac{|c+4|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{\dfrac{c^2+8c+16}{5c^2-8c+8}}$.

Để bán kính đường tròn nhỏ nhất điều kiện là d lớn nhất $\Leftrightarrow \dfrac{c^2+8c+16}{5c^2-8c+8}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{24}{5}.\dfrac{2c+3}{5c^2-8c+8}$

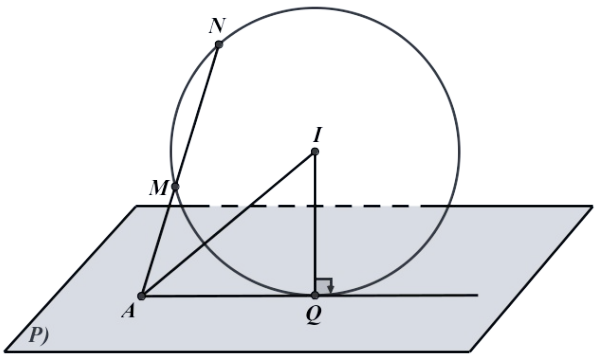
lớn nhất $\Leftrightarrow m=\dfrac{2c+3}{5c^2-8c+8}$ lớn nhất. Coi hàm số $m=\dfrac{2c+3}{5c^2-8c+8}$ là một phương trình ẩn c ta được : $5mc^2-2(4m+1)c+(8m-3)=0$, phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta'=-24m^2+23m+1\ge 0\Leftrightarrow -\dfrac{1}{24}\le m\le 1\Rightarrow m$ lớn nhất $\Leftrightarrow c=1$

$\Rightarrow a=0\Rightarrow M=2a+b-c=1$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P):x+y-z-3=0$ và hai điểm $M(1;1;1)$, $N(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm Q. Biết rằng Q luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

Lời giải



Đường thẳng MN đi qua điểm $M(1;1;1)$ và nhận $\overrightarrow{MN}=(-4;-4;-4)$ là véctơ chỉ phương.

Chọn $\vec{u}=(1;1;1)$ là véctơ chỉ phương của đường thẳng MN, suy ra phương trình đường thẳng MN là: $\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=1+t\end{cases}$.

Gọi $A=MN\cap(P)$, suy ra tọa độ A là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=1+t\\ x+y-z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2\\ x=3\\ y=3\\ z=3\end{cases}$.

Suy ra $A(3;3;3)$.

Các điểm M, N, Q cùng thuộc một đường tròn và AQ là tiếp tuyến đường tròn đó nên ta có $AQ^2 = AM.AN$.

Thay tọa độ các điểm vào ta được $AM = 2\sqrt{3}$, $AN = 6\sqrt{3}$, suy ra $AQ^2 = 36 \Leftrightarrow AQ = 6$.

Vậy điểm Q luôn thuộc một đường tròn cố định có tâm $A(3;3;3)$ và bán kính $R = 6$.

Câu 5: Trong hệ trục $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), cho một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200;450;60)$. Tìm giá trị lớn nhất của m (làm tròn đến hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m+100;m+370;0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Lời giải

Để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m+100;m+370;0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200;450;60)$ thì $IA \le 600 \Leftrightarrow (m-100)^2 + (m-80)^2 + (-60)^2 \le 600^2$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 360m - 340000 \le 0 \Leftrightarrow \frac{180 - \sqrt{712400}}{2} \le m \le \frac{180 + \sqrt{712400}}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của m là $\frac{180 + \sqrt{712400}}{2} \approx 512$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$, $(P): x + 2y - 2z - 2 = 0$, $(Q): x + 2y - 2z + 4 = 0$. Gọi mặt cầu $S(I,R)$ có tâm I thuộc Δ và tiếp xúc với $(P),(Q)$. Khi đó đường kính của mặt cầu có giá trị bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. Vì $I \in \Delta \Rightarrow I(2-3t;1+2t;1+2t)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2-3t;1+2t;1+2t)$ thuộc Δ và tiếp xúc với $(P),(Q)$ nên ta có:

$d(I,(P)) = d(I,(Q))$

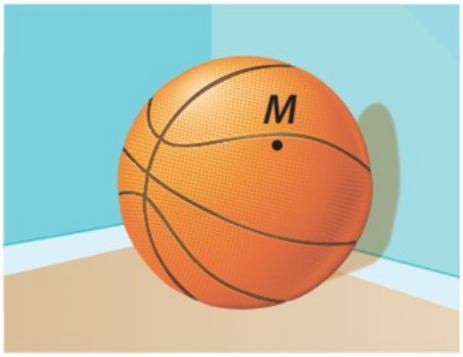
$$\Leftrightarrow \frac{|(2-3t) + 2(1+2t) - 2(1+2t) - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|(2-3t) + 2(1+2t) - 2(1+2t) + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}}$$

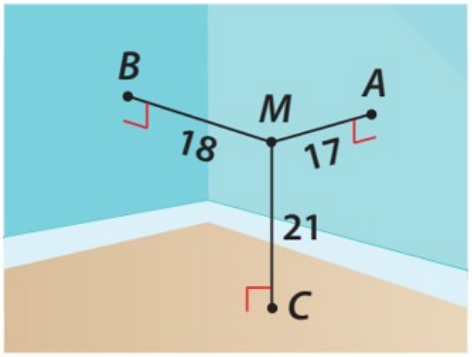
$$\Leftrightarrow |-3t| = |-3t + 6| \Rightarrow t = 1.$$

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;3)$ và bán kính $R = 1$.

Vậy đường kính của mặt cầu (S) bằng 2.

Câu 7: Một quả bóng rổ được đặt ở một góc của căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm và tiếp xúc với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó thì có một điểm trên quả bóng có khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm, 21 cm (tham khảo hình minh họa). Hỏi độ dài đương kính của quả bóng bằng bao nhiêu cm biết rằng quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm? *Kết quả là tròn đến một chữ số thập phân.*





Lời giải

Ta đặt hệ trục vào căn phòng sao cho có hai bức tường là mặt $(Oxz),(Oyz)$, và nền là (Oxy).

Vậy bài toán dẫn đến việc tìm đường kính của mặt cầu tiếp xúc với 3 mặt phẳng toạ độ và chứa điểm $M(17;18;21)$.

Ta có thể gọi phương trình mặt cầu là $(S):(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$, với $a>0$ (do mặt cầu tiếp xúc với các mặt phẳng toạ độ nên $a=b=c=R$).

Do $M(17;18;21)\in(S)$ nên $(17-a)^2+(18-a)^2+(21-a)^2=a^2$

$$\Rightarrow 2a^2-112a+1054=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=28-\sqrt{257}\\a=28+\sqrt{257}\end{array}\right.$$

Vì quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm nên $a=28-\sqrt{257}$ thỏa.

Vậy đường kính quả bóng bằng $2a=56-2\sqrt{257}\approx 23,9\,(\text{cm})$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+3y+z+17=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-8=0$. Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;1)$, bán kính $R=\sqrt{14}$ và $d(I,(P))=\dfrac{|2-6+1+17|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\sqrt{14}$.

Vậy mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

Bài tập 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$ và mặt phẳng $(P):x+y-z+4=0$. Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$, bán kính $R=\sqrt{4}=2$ và

$$d(I,(P))=\frac{|1+2+3+4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{3}}>R$$

Vậy mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9$ và đường thẳng có phương trình $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$. Tìm vị trí tương đối của đường thẳng Δ và mặt cầu (S)

Lời giải

Mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9$ có tâm $I(-1;2;0)$ bán kính $R=3$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên Δ thì ta có $H(1+2t;2-2t;3+t)$, $t\in\mathbb{R}$.

Khi đó: $\overrightarrow{IH}=(2+2t;-2t;3+t)$. Một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(2;-2;1)$.

Ta có: $\overrightarrow{IH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 4+4t+4t+3+t=0\Leftrightarrow t=-\frac{7}{9}$.

$$\overrightarrow{IH}=\left(\frac{4}{9};\frac{14}{9};\frac{20}{9}\right)\Rightarrow IH=\sqrt{\frac{16}{81}+\frac{196}{81}+\frac{400}{81}}=\frac{2\sqrt{17}}{3}\Rightarrow d(I;\Delta)=\frac{2\sqrt{17}}{3}<R$$

Vậy đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.

Bài tập 4: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=4+2t\\y=3+t\\z=3+2t\end{cases},t\in\mathbb{R}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-2;3;0)$ và đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho độ dài đoạn thẳng $AB=8$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm của $AB\Rightarrow IH\perp AB$, $AH=4$.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(4;3;3)$ và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;2)$.

Ta có: $\overrightarrow{IM}=(6;0;3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]=(-3;-6;6)$

$$\Rightarrow IH=d(I;d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+6^2}}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=3$$

Khi đó: $R^2=IA^2=IH^2+AH^2=25\Rightarrow R=5$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;3;0)$ và bán kính $R=5$ nên có phương trình là:

$$(x+2)^2+(y-3)^2+z^2=25$$

Bài tập 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+4}{-5}$ và $d':\frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-4}{-1}$. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng $(d),(d')$.

Lời giải

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}=(2;3;-5)$.

Đường thẳng d' có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_{d'}}=(3;-2;-1)$.

Gọi $M\in d\Rightarrow M(2+2m;3+3m;-4-5m)$ và $N\in d'\Rightarrow N(-1+3n;4-2n;4-n)$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{MN}=(-3+3n-2m;1-2n-3m;8-n+5m)$.

MN là đường vuông góc chung của d và d' khi và chỉ khi $\begin{cases}MN\perp d\\MN\perp d'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_d}=0\\\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_{d'}}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2(-3+3n-2m)+3.(1-2n-3m)-5(8-n+5m)=0\\3(-3+3n-2m)-2.(1-2n-3m)-1(8-n+5m)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-38m+5n=43\\-5m+14n=19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\n=1\end{cases}$.

Suy ra $M(0;0;1)$, $N(2;2;3)$.

Gọi I là trung điểm của suy ra $I(1;1;2)$ và $IM=IN=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$.

Khi đó mặt cầu tâm I, bán kính $R=\sqrt{3}$ tiếp xúc với hai đường thẳng d,d' lần lượt tại M và N

Do MN là khoảng cách giữa hai đường thẳng d,d' nên mặt cầu đường kính MN là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với hai đường thẳng d,d'.

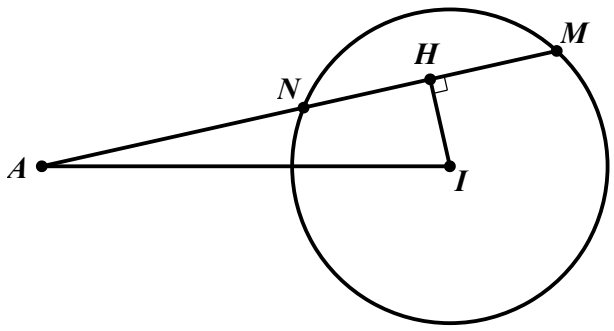
Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3$.

Bài tập 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M,N. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=AM+4AN$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R=3$.

$AI=\sqrt{34}>R\Rightarrow$ A nằm ngoài mặt cầu (S).



Do hai điểm M,N nằm ở vị trí hai đầu một dây cung nên để $S_{\min}$ thì N nằm giữa A và M.

Gọi H là trung điểm MN $\Rightarrow IH\perp MN, NH=\dfrac{1}{2}MN$.

$S=4(AH-NH)+AH+NH=5AH-3NH$

$S=5\sqrt{AI^2-IH^2}-3\sqrt{R^2-IH^2}=5\sqrt{34-x^2}-3\sqrt{9-x^2}, x=IH$.

Xét hàm số $f(x)=5\sqrt{34-x^2}-3\sqrt{9-x^2},(0\le x<3)$.

Đạo hàm: $f'(x)=\dfrac{-5x}{\sqrt{34-x^2}}+\dfrac{3x}{\sqrt{3^2-x^2}}=x\left(\dfrac{-5}{\sqrt{34-x^2}}+\dfrac{3}{\sqrt{3^2-x^2}}\right)$.

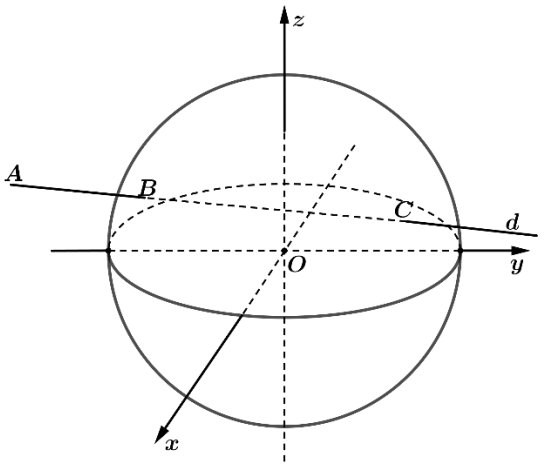
Xét $\left(\dfrac{-5}{\sqrt{34-x^2}}+\dfrac{3}{\sqrt{9-x^2}}\right)>0 \Leftrightarrow 5\sqrt{9-x^2}<3\sqrt{34-x^2}$

$\Leftrightarrow 225-25x^2<9.34-9x^2 \Leftrightarrow 16x^2+81>0$ (luôn đúng).

Suy ra $f'(x)\ge 0,\forall x\in[0;3),f'(x)=0\Leftrightarrow x=0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;3)$.

Suy ra $\min\limits_{[0;3)} f(x)=f(0)=5\sqrt{34}-9.$

Bài tập 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0;0;0)$, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1 km. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 417 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí $A(-688;-185;8)$, chuyển động theo theo đường thẳng d có véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(91;75;0)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu. Hãy xác định tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa.



Lời giải

Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $A(-688;-185;8)$ và nhận $\vec{u}=(91;75;0)$ làm véctơ chỉ phương là $\begin{cases}x=-688+91t\\y=-185+75t\\z=8\end{cases}$.

Gọi B là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa.

Vì $B\in d\Rightarrow B(-688+91t;-185+75t;8)$.

Vì B là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa nên

$OB=417\Leftrightarrow\sqrt{(-688+91t)^2+(-185+75t)^2+8^2}=417$

$\Leftrightarrow 13906t^2-152966t+333744=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=8\end{array}\right.$

Với $t=3\Rightarrow B(-415;40;8)\Rightarrow AB\approx 353,77$ km

Với $t=8\Rightarrow B(-88;415;8)\Rightarrow AB\approx 848,53$ km

Do $353,77<848,53$ vị trí máy bay xuất hiện sớm nhất là $B(-415;40;8)$.

Bài tập 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(21;35;50)$ và ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng là 4 km. Nếu người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(21;35;50)$ đến vị trí $D(5121;658;0)$. Hãy tìm vị trí cuối cùng trên đoạn ID sao cho người đi biển có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng (kết quả làm tròn tới chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của ngọn hải đăng là: $(x-21)^2+(y-35)^2+(z-50)^2=4000^2$.

Ta có $\left|\overrightarrow{ID}\right|=\sqrt{26400629}>4000$ nên điểm D nằm ngoài mặt cầu.

Đường thẳng ID đi qua điểm $I(21;35;50)$ và nhận $\overrightarrow{ID}=(5100;623;-50)$ làm véctơ chỉ phương nên phương trình tham số của ID là $\begin{cases}x=21+5100t\\y=35+623t\\z=50-50t\end{cases}$

Giả sử H là điểm cuối cùng trên ID sao cho người đi đường có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng. Khi đó $IH=R$.

Do $H\in ID\Rightarrow H(21+5100t;35+623t;50-50t)\Rightarrow \overrightarrow{IH}=(5100t;623t;-50t)$.

Do $IH=R\Rightarrow\sqrt{(5100t)^2+(623t)^2+(-50t)^2}=4000\Leftrightarrow\sqrt{26400629t^2}=4000\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\approx 0,78\\t\approx -0,78\end{array}\right.$

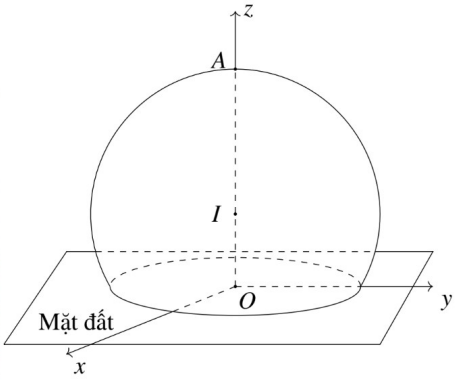
Với $t\approx 0,78\Rightarrow H(3999;520,94;11)$. Nhận thấy $\overrightarrow{IH}$ cùng hướng với $\overrightarrow{ID}$ nên H thuộc đoạn thẳng ID.

Với $t\approx -0,78\Rightarrow H(-3957;-450,94;89)$. Nhận thấy $\overrightarrow{IH}$ không cùng hướng với $\overrightarrow{ID}$ nên H không thuộc đoạn thẳng ID.

Vậy vị trí cần tìm là $H(3999;520,94;11)$

Bài tập 9: Ericsson Globe (Thuỵ Điển) là toà nhà bán cầu lớn nhất trên thế giới (năm 2020),với hình dạng một quả cầu màu trắng có đường kính 110 m và chiều cao bên trong 85 m, nó có đủ chỗ ngồi cho 16

000 khán giả của các buổi biểu diễn hoà nhạc hoặc 13 850 khán giả của các trận đấu khúc côn cầu trên băng. Giả sử ta biểu diễn mô phỏng của toà nhà Ericsson Globe trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ bởi một mặt cầu có tâm I, đường kính 110 m và $OA = 85$ m như hình vẽ (đơn vị trên trục là mét). Hãy viết phương trình của mặt cầu này.



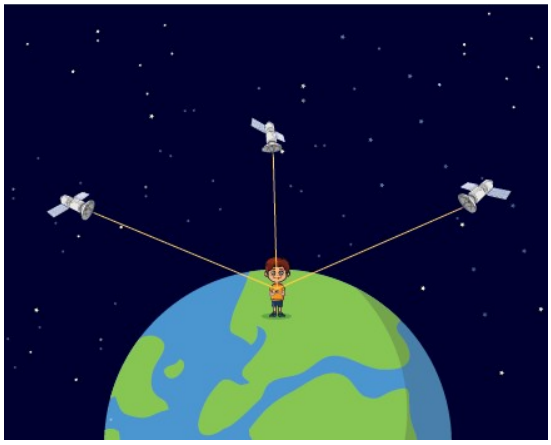
Lời giải

Theo giả thiết đường kính 110 m nên bán kính $R = 55$ m.

Ta có $OI = OA - IA = 85 - 55 = 30$ suy ra $I(0;0;30)$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $x^2 + y^2 + (z-30)^2 = 55^2$

Bài tập 10: Giả sử Trái Đất có dạng hình cầu bán kính bằng $6,4.10^6$ m. Bạn An đang đứng trên mặt đất. Có 3 vệ tinh báo về máy chủ tiếp nhận thông tin rằng vệ tinh thứ nhất đang cách An 3.10^6 m, vệ tinh thứ hai đang cách An 4.10^6 m và vệ tinh thứ ba đang cách An 5.10^6 m. Biết rằng trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước với O là tâm Trái Đất (1 đơn vị $=10^6$ m), tại thời điểm vệ tinh thông báo về máy chủ thì toạ độ của các vệ tinh lần lượt là $I_1(4;4;6)$, $I_2(8;4;3)$ và $I_3(4;9;3)$. Hãy tìm tọa độ vị trí của bạn An (làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Gọi vị trí bạn An là A (x; y; z) thì An chính là giao điểm của bốn mặt cầu: Trái Đất và ba mặt cầu tâm lần lượt I_1, I_2, I_3 có bán kính lần lượt là khoảng cách từ các vệ tinh đến An

Ta có phương trình mặt cầu của trái đất là $x^2 + y^2 + z^2 = 6,4^2 \approx 41$.

Ta có phương trình mặt cầu của vệ tinh thứ nhất là $(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 3^2 = 9$.

Ta có phương trình mặt cầu của vệ tinh thứ hai là $(x-8)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 4^2 = 16$.

Ta có phương trình mặt cầu của vệ tinh thứ ba là $(x-4)^2+(y-9)^2+(z-3)^2=5^2=25$.

Ta có hệ $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6,4^2\approx 41 \\ (x-4)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=9 \\ (x-8)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=16 \\ (x-4)^2+(y-9)^2+(z-3)^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=6,4^2\approx 41 \\ 8x+8y+12z=100 \\ 16x+8y+6z=114 \\ 8x+18y+6z=122 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases}$

Vậy toạ độ bạn An là $A(4;4;3)$ với (1 đơn vị $=10^6$ m).