S6-CHUYÊN ĐỀ 8. NGUYÊN LÍ DIRICHLET

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Nội dung nguyên lí

Nếu nhốt $n.m+r$ (trong đó m,n,r Ì ¥ *) con thỏ vào n cái chuồng thì phải có ít nhất một chuồng chứa không ít hơn $m+1$ con thỏ.

Chứng minh

Giả sử ngược lại mỗi chuồng chứa không quá m con thỏ thì tổng số thỏ nhốt trong n chuồng sẽ không quá $m.n$ con thỏ :Mâu thuẫn với giả thiết là số thỏ bằng $m.n+r$ .Vậy phải có ít nhất một chuồng chứa không ít hơn $m+1$ con thỏ.

2. Nhận xét

Bản thân nguyên li Dirichlet khá đơn giản và dễ hiểu, tuy nhiên việc ứng dụng nguyên lí này lại không hề đơn giản .Vấn đề ở đây là phát hiện ra "**chất Dirichlet "** trong các bài toán , dạng toán của mình và sau đó xác định trong đó đâu là chuồng và đâu là thỏ.Có những trường hợp chuồng và thỏ gần như đã có sẵn, nhưng có những trường hợp chúng ta phải "**xây chuồng , tạo thỏ".**

PHẦN II.CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Toán chia hết

Khi chia số a cho số m ¹ 0 luôn có m khả năng về số dư là 0,1,….,m - 1 ("m chuồng ").Do vậy, khi chia $m+1$ số khác nhau $a_1,a_2,.....,a_{m+1}$ cho m ta sẽ có $m+1$ số dư ("$m+1$ thỏ") và do đó luôn có hai phép chia có cùng số dư.Giả sử hai số bị chia trong hai phép chia đó là a_i và a_j (với $1£ j<i £ m+1$). Ta có (a_i - a_j)Mm .

Bài 1:

Chứng minh rằng có thể tìm được một số có dạng $19781978.....197800...0$ chia hết cho 2012.

Lời giải

Xét dãy số : $1978,19781978,.....,\underbrace{19781978...1978}_{2013\ so\ 1978}$. Khi chia các số hạng của dãy này cho 2012 sẽ có hai phép chia có cùng số dư. Giả sử hai số hạng của dãy trong hai phép chia đó là $a=\underbrace{19781978...1978}_{m\ so\ 1978}$ và $b=\underbrace{19781978...1978}_{n\ so\ 1978}$ (với $1£ n<m£ 2013$) .

$\Rightarrow$Hiệu của a và b chia hết cho 2012 hay $a-b=\underbrace{19781978...1978}_{m-n\ so\ 1978}\underbrace{00...0}_{4n\ so\ 0}$M2012 (đpcm)

Nhận xét: Phương pháp để giải dạng toán này là tạo ra dãy số (theo cấu tạo số) từ yêu cầu của bài toán ("tạo thỏ") . Sau đó áp dụng nguyên lí Dirichlet cho các số hạng của dãy số mới (mỗi số hạng thay cho một "thỏ", 2012 là số "chuồng").

Bài 2:

Cho dãy m số tự nhiên bất kì $a_1,a_2,....,a_m$. Chứng minh rằng tồn tại một số hạng chia hết cho m hoặc tổng của một số hạng liên tiếp trong dãy chia hết cho $m(m \hat{I} \ ¥^*)$.

Lời giải

Xét dãy số $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, ..., b_m = a_1 + a_2 + ... + a_m$

Khi chia các số hạng của dãy này cho m thì xảy ra một trong hai trường hợp sau :

• Có một phép chia hết , chẳng hạn : $b_k \M m$, thì ta có điều phải chứng minh :

$(a_1 + a_2 + ... + a_k) \M m$

• Không có phép chia hết nào .Khi đó tồn tại hai phép chia có cùng số dư , chẳng hạn là b_i, b_j chia cho m (với $1 £ j < i £ m$)

$\Rightarrow (b_i - b_j) : m \ \ hay \ \ (a_{j+1} + a_{j+2} + ... + a_i) : m$, ta có điều phải chứng minh .

Nhận xét: Phương pháp "tạo thỏ " trong ví dụ này là dựa vào phép toán cộng và yêu cầu về tính liên tiếp của các số hạng trong dãy ban đầu của đề bài .

Bài 3:

Cho bốn số tự nhiên phân biệt $a > b > c > d$. Chứng minh rằng:

$P = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d) \M 12$

Lời giải

Chia bốn số phân biệt a,b,c,d cho 3 luôn có hai phép chia có cùng số dư

$\Rightarrow$hiệu hai số bị chia đó chia hết cho 3 $\Rightarrow$tồn tại hiệu hai số trong bốn số a,b,c,d chia hết cho 3. Do vậy P chia hết cho 3 (1)

Trong bốn số a,b,c,d nếu có hai số có cùng số dư khi chia cho 4 thì P chia hết cho 4;trái lại , khi chia bốn số đó cho 4 có đủ bốn trường hợp về số dư là 0,1,2,3 $\Rightarrow$trong bốn số a,b,c,d có hai số chẵn , hai số lẻ, giả sử a,c chẵn và b,d lẻ$\Rightarrow (a - c) \M 2$ và $(b - d) \M 2$

Do vậy P chia hết cho 4 (2)

Từ (1),(2) và (3,4)=1 suy ra $P \M 3,4 \ \ hay \ \ P \M 12$ (đpcm)

Bài 3:

Chứng minh rằng trong 19 số tự nhiên liên tiếp bất kì ta luôn tìm được một số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

Lời giải

Trong 19 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại 10 số tự nhiên liên tiếp có chữ số hàng chục giống nhau , kí hiệu chữ số hàng chục đó là a (các chữ số hàng trăm, hàng nghìn, ….(nếu có) cũng giống nhau), còn các chữ số hàng đơn vị là dãy 0;1;2;3;…;9.

Do đó tổng các chữ số của mỗi số cũng là một dãy 10 số tự nhiên liên tiếp, vì thế tồn tại số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

Bài 4:

Cho 12 số tự nhiên khác nhau có hai chữ số. Chứng minh rằng không tồn tại hai số có hiệu là một số có hai chữ số như nhau.

Lời giải

Có 12 số tự nhiên khác nhau, mà chỉ có 11 số dư trong phép chia cho 11, do đó tồn tại hai số có cùng số dư trong phép chia cho 11. Hiệu của chúng là một số chia hết cho 11, đó là số có hai chữ số như nhau.

Bài 5:

Chứng minh rằng trong 11 số tự nhiên bất kì bao giờ cũng tồn tại ít nhất 2 số có hiệu chia hết cho 10.

Lời giải

Với 11 số tự nhiên khi chia cho 10 ta được 11 số dư, mà một số tự nhiên bất kì khi chia cho 10 có 10 khả năng dư là 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... ; 9.

Vì có 11 số dư mà chỉ có 10 khả năng dư, theo nguyên lí Đi-rích-lê, tồn tại ít nhất 2 số khi chia cho 10 có cùng số dư do đó hiệu của chúng chia hết cho 10 (đpcm).

Bài 6:

Chứng minh rằng tồn tại số có dạng 19941994...199400...0 chia hết cho 1995.

Lời giải

Ta có 19941994...199400...0 = 19941994...1994 × 100...0

Xét 1995 số có dạng: 1994 ; 19941994 ; ... ; .

+) Nếu một trong các số trên chia hết cho 1995 thì dễ dàng có điều phải chứng minh.

+) Nếu các số trên đều không chia hết cho 1995 thì khi chia từng số cho 1995 sẽ chỉ có 1994 khả năng dư là 1 ; 2 ; 3 ; ... ; 1994.

Vì có 1995 số dư mà chỉ có 1994 khả năng dư, theo nguyên lí Đi-rích-lê tồn tại ít nhất 2 số khi chia cho 1995 có cùng số dư, hiệu của chúng chia hết cho 1995.

Khi đó 1994...199400...0 chia hết cho 1995 (đpcm).

Bài 7:

Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên k sao cho (1999^k - 1) chia hết cho104.

Lời giải

Xét 104 số có dạng: 1999^1 ; 1999^2 ; ... ; 1999^104.

Lấy tất cả các số trên chia cho 104 sẽ chỉ có 103 khả năng dư là 1 ; 2 ; 3 ; ...; 103 (chú ý: sẽ không có số dư 0 vì 1999 và 104 là hai số nguyên tố cùng nhau nên 1999 mũ bao nhiêu cũng không chia hết cho 104)

Mà dãy số trên có 104 số nên sẽ có ít nhất hai số khi chia cho 104 có cùng số dư.

Gọi hai số có cùng số dư khi chia cho 104 là 1999^a và 1999^b (với a > b)

Ta có: 1999^a - 1999^b ⋮ 104 => 1999^b[1999^(a-b) – 1] ⋮ 104

Mà UCLN(1999^b, 104) là 1 (vì là hai số nguyên tố cùng nhau) nên 1999^(a-b) – 1 ⋮ 104

Đặt k = a – b, ta có 1999^k – 1 ⋮ 104 (đpcm)

Bài 8:

Chứng minh rằng tồn tại một số chỉ viết bởi hai chữ số chia hết cho 2003.

Lời giải

Xét 2003 số có dạng 1 ; 11 ; 111 ; ... ;

+) Nếu có một số chia hết cho 2003 thì ta được sô 11...1100..00 ⋮ 2003 (đpcm)

+) Nếu không có một số nào chia hêt cho 2003 thì sẽ có 2002 khả năng dư là 1 ; 2 ; 3 ; ...; 2002.

Mà dãy số trên có 2003 số hạng nên sẽ có ít nhất hai số khi chia cho 2003 có cùng số dư

Gọi hai số có cùng số dư khi chia cho 2003 là $\overline{11...11}_{\text{m chu so 1}}$ và $\overline{111...111}_{\text{n chu so 1}}$ (với n > m)

Khi đó $\overline{111...111}_{\text{n chu so 1}} - \overline{11...11}_{\text{m chu so 1}} = \overline{11...110...00000}_{\text{n-m chu so 0}}$ ⋮ 2003 (đpcm).

Dạng 2: Toán suy luận

Bài 1:

Có 10 đội bóng thi đấu với nhau vòng tròn một lượt , mỗi đội phải đấu đúng một trận với mỗi đội khác .Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có hai đội đã đấu số trận như nhau.

Lời giải

Rõ ràng nếu trong 10 đội bóng có 1 đội chưa đấu một trận nào thì trong các đội còn lại không có đội nào đã thi đấu 9 trận . Như vậy mỗi đội chỉ có số trận đấu hoặc từ 0 đến 8 hoặc từ 1 đến 9 .Vậy theo nguyên lí Dirichlet phải có ít nhất hai đội có số trận đã đấu như nhau.

Bài 2:

Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 và chỉ có 2 học sinh được điểm 10 .Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Lời giải

Số học sinh có điểm kiểm tra từ 2 đến 9 là : 45 – 2 =43

Ta có : 43 = 8.5 + 3

Như vậy , khi phân chia 43 học sinh vào 8 loại điểm kiểm tra (từ 2 đến 9) thì theo nguyên lí Dirichlet luôn tồn tại ít nhất 5 + 1 = 6 học sinh có điểm kiểm tra giống nhau (đpcm)

Bài 3:

Có 17 nhà Toán học viết thư cho nhau trao đổi về 3 vấn đề khoa học , mỗi người đều trao đổi với 16 người còn lại và mỗi cặp 2 người chỉ trao đổi với nhau một vấn đề .Chứng minh rằng có ít nhất 3 nhà Toán học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề.

Lời giải

Gọi A là một nhà Toán học nào đó trong 17 nhà Toán học thì A phải trao đổi với 16 người còn lại về 3 vấn đề khoa học (kí hiệu là vấn đề I,II,III).

Vì 16 = 3.5 + 1 nên A phải trao đổi với ít nhất 5 + 1 = 6 nhà Toán học khác về cùng một vấn đề (theo nguyên lí Dirichlet) .

Gọi 6 nhà Toán học cùng trao đổi với A về một vấn đề (chẳng hạn là vấn đề 1) là $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_6$ .Ta thấy 6 nhà Toán học này lại trao đổi với nhau về 3 vấn đề nên có hai khả năng xảy ra:

1) Nếu có 2 nhà Toán học nào đó cùng trao đổi với nhau về vấn đề I thì cùng với A sẽ có 3 nhà Toán học cùng trao đổi về vấn đề I.

2) Nếu không có 2 nhà Toán học nào cùng trao đổi với nhau về vấn đề I , thì 6 nhà Toán học này chỉ trao đổi với nhau về 2 vấn đề II và III.Theo nguyên lí Dirichlet , có ít nhất 3 nhà Toán học cùng trao đổi với nhau về một vấn đề (II hoặc III).

Vậy luôn có ít nhất 3 nhà Toán học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề .

Nhận xét: Trong ví dụ trên ta đã phải phân chia bài toán thành hai lớp và sử dụng hai lần nguyên lí Dirichlet : Lần thứ nhất với 16 thỏ và 3 chuồng ; lần thứ hai với 6 thỏ và 2 chuồng.

Bài 4:

Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 1 chia hết cho 2013.

Lời giải

Xét 2014 có dạng 1,11,111,…., $\underbrace{11\ldots1}_{2014 \text{ số } 1}$. Theo nguyên lý Dirichlet thì tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 2013. Giả sử hai số đó là $a = \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ số } 1}$, $b = \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ số } 1}$ với n>k.

Khi đó $a - b = \underbrace{11\ldots1}_{n-k \text{ số } 1}.10^k \vdots 2013$.

Vì $(2007, 10^k) = 1$ nên số $c = \underbrace{11\ldots1}_{n-k \text{ số } 1}$ chia hết cho 2013

Bài 5:

Cho 5 số tự nhiên phân biệt $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$. Xét tích

$P = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5)(a_4 - a_5)$ Chứng minh rằng $P \vdots 288$

Lời giải

Ta có $288 = 3^2.2^5$

1. Chứng minh $P \vdots 3^2$

Xét 4 số a_1, a_2, a_3, a_4: Ta thấy tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 3, giả sử a_1 và a_2 => $(a_1 - a_2) \vdots 3$

Lại xét a_2, a_3, a_4, a_5 trong 4 số này lại tồn tại 2 số có cùng số dư khi chia cho 3, giả sử a_4 và a_5 => $(a_4 - a_5) \vdots 3$

Do vậy $P \vdots 9$ (1)

2. Chứng minh $P \vdots 2^5$

Trong 5 số đã cho có 3 số cùng tính chẵn lẻ.

Nếu có 3 số chẵn, 2 số lẻ, chẳng hạn là : $a_1 = 2k_1, a_2 = 2k_2, a_3 = 2k_3, a_4 = 2k_4 + 1, a_5 = 2k_5 + 1$

Khi đó: $P = 16(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)(k_4 - k_5).M$

Trong đó 3 số k_1, k_2, k_3 có 2 số cùng tính chẵn lẻ, chẳng hạn k_1 và k_2, thì $(k_1 - k_2) \vdots 2$. Vậy $P \vdots 32$

Nếu có 3 số lẻ, 2 số chẵn thì chứng minh tương tự ta cũng có $P \vdots 32$

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có $P \vdots 32$ (2)

Từ (1), (2) và (9,32)=1 suy ra $P \vdots 9.32$ hay $P \vdots 288$ (đpcm).

Bài 6:

Chứng minh rằng trong $n+1$ số bất kì thuộc tập hợp $\{1;2;3;....;2n\}$ luôn tìm được hai số mà số này là bội của số kia.

Lời giải

Viết n+1 số lấy ra dưới dạng

$a_1 = 2^{k_1}b_1, a_2 = 2^{k_2}b_2, ..., a_{n+1} = 2^{k_{n+1}}b_{n+1}$ trong đó $b_1, b_2, ..., b_{n+1}$ là các số lẻ,

Ta có: $1 \le b_1, b_2, ..., b_{n+1} \le 2n - 1.$. Mặt khác trong khoảng từ 1 đến 2n-1 có đúng n số lẻ nên tồn tại hai số m, n sao cho $b_n = b_m$. Khi đó, trong hai số a_n và a_m có một số là bội của số kia (đpcm)

Bài 7:

Xét 100 số tự nhiên $0 < a_1, a_2, ..., a_{100} \le 100$ và có tổng bằng 200 .Chứng minh rằng trong 100 số đó luôn tồn tại một vài số có tổng bằng 100.

Lời giải

1. Nếu $a_1 = a_2 = ... = a_{100} = 2$ thì ta chọn 50 số bất kì đều có tổng bằng 100.

2. Nếu $a_1 \ne a_2$ thì ta lập dãy sau

$a_1, a_2, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_1 + a_2 + ... + a_{99}$(các số hạng này có giá trị từ 1 đến 199).

- Nếu tồn tại một số hang nào trong dãy chia hết cho 100 thì số hạng đó bằng 100
- Nếu không có số hạng nào chia hết cho 100 thì trong 100 số này khi chia cho 100 sẽ có hai số hạng có cùng số dư . Hiệu của chúng cho ta tổng cần tìm.

Bài 8:

Cho 69 số tự nhiên khác 0 phân biệt và không vượt quá 100 .Chứng minh rằng có thể chọnđược 4 số trong 69 số đó thỏa mãn tổng của ba số bằng số còn lại

Lời giải

Giả sử 69 số đã cho là $1 \le a_1 + a_3 < a_1 + a_4 < ... < a_1 + a_{69} \le 100$. Khi đó $a_1 \le 32$. Xét hai dãy sau:

$1 < a_1 + a_3 < a_1 + a_3 < ... < a_1 + a_{69} \le 132 (1)$

$1 \le a_3 - a_2 < a_4 - a_2 < ... < a_{69} - a_2 \le 132 (2)$

Từ (1) và (2) ta có 134 số hạng có giá trị từ 1 đến 132, suy ra có 2 số bằng nhau mỗi số thuộc một dãy, chẳng hạn: $a_1 + a_m = a_n - a_2$ (với $3 \le m < n \le 69$) tức là ta tìm được 4 số $a_1; a_2; a_n; a_m$ với $a_1 < a_2 < a_m$ mà $a_1 + a_2 + a_m = a_n$ (đpcm)

Bài 9:

Chứng minh rằng trong 39 số tự nhiên liên tiếp bất kì luôn có ít nhất một số có tổng cácchữ số chia hết cho 11.

Lời giải

Giả sử 39 số tự nhiên liên tiếp đó là $a_1 < a_2 < ... < a_{39}$.

Trong 20 số hạng đầu tiên của dãy này sẽ có hai số tận cùng là 0 và có một số (trong hai số này) có chữ số đứng trước số tận cùng khác 9. Gọi số này là N.

Xét các số $N + 1, N + 2, ..., N + 19$ thuộc 39 số đã cho. Khi đó:

$S(N + i) = S(N) + i$ với $i = 1, 2, ..., 9$ và $S(N + 19) = S(N) + 10$.

(kí hiệu S(a) là tổng các chữ số của a).

Trong 11 số tự nhiên liên tiếp $S(N),S(N)+1,...,S(N)+9,S(N)+10$ luôn có một số chia hết cho 11, chẳng hạn: $S(N+m)\vdots 11$ với $m\in\{1;2;...;9;19\}$

Vậy $N+m$ là số thỏa mãn.

Bài 10:

Cho 15 số tự nhiên phân biệt, khác 0, không lớn hơn 28. Chứng minh rằng trong 15 số đó luôn tìm được ít nhất một bộ 3 số mà số này bằng tổng của hai số còn lại hoặc một cặp 2 số mà số này gấp đôi số kia.

Lời giải

Gọi 15 số tự nhiên sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là : $a_1,a_2,...,a_{15}$.

Xét dãy số: $b_1=a_2-a_1,b_2=a_3-a_1,...,b_{14}=a_{15}-a_1$. Các số hạng của dãy số này có giá trị từ 1 đến 27 và đôi một khác nhau.

$\Rightarrow$ Dãy số $a_1,a_2,...,a_{15};b_1,b_2,...,b_{14}$ có 29 số hạng nhưng chỉ nhận 28 giá trị khác nhau (từ 1 đến 28).

Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại hai số bằng nhau, chẳng hạn: $b_m=a_n(1\le m\le 14,1\le n\le 15)$

Hay $a_{m+1}-a_1=a_n\Leftrightarrow a_{m+1}=a_1+a_n$.

- Nếu n = 1 thì $a_{m+1}=2a_1$

- Nếu $n\ne 1$ thì 3 số a_1,a_n,a_{m+1} phân biệt và $a_{m+1}=a_1+a_n$.

Vậy ta chỉ việc chọn 3 số a_1,a_n,a_{m+1} hoặc 2 số a_1,a_{m+1} sẽ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 11:

Chọn 5 người bất kì. Chứng minh rằng có ít nhất 2 người có cùng số người quen trong 5 người đó.

Lời giải

Mỗi người trong số 5 người có khả năng về số người quen (từ 0 đến 4). Ta xét hai trường hợp sau:

1. Nếu có một người không quen ai trong số 4 người còn lại thì rõ ràng không có ai quen cả 4 người. Như vậy, 5 người mà chỉ có 4 khả năng về số người quen (từ 0 đến 3) nên theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất hai người có cùng số người quen.

2. Nếu mỗi người đều có ít nhất một người quen. Khi đó 5 người mà chỉ có 4 khả năng về số người quen (từ 1 đến 4), theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất hai người có cùng số người quen

Bài 12:

Có 6 đội bóng thi đấu với nhau vòng tròn một lượt, mỗi đội đấu đúng một trận với mỗi đội khác. Chứng minh rằng vào bất cứ thời điểm nào cũng có ba đội trong đó từng cặp đã đấu với nhau hoặc chưa đấu với nhau trận nào.

Lời giải

Giả sử 6 đội bóng đá là A, B, C, D, E, F. Xét đội A, Vì A phải đấu từ 0 đến 5 trận nên theo nguyên lí Dirichlet ta suy ra. Hoặc A đã đấu hoặc A chưa đấu với ít nhất 3 đội khác. Không mất tính tổng quát, giả sử A đã đấu với B, C, D

- Nếu B, C, D từng cặp chưa đấu với nhau thì bài toán được chứng minh.
- Nếu B, C, D có 2 đội đã đấu với nhau, ví dụ là C thì 3 đội A, B, C từng cặp đã đấu với nhau

Như vậy bất cứ lúc nào cũng có 3 đội trong đó từng cặp đã đấu với nhau hoặc chưa đấu với nhau trận nào.

Bài 13:

Một đồi thông có $800\ 000$ cây thông. Trên mỗi cây thông có không quá $500\ 000$ chiếc lá. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 2 cây thông có cùng số lá như nhau ở trên cây.

Lời giải

Ta hãy tưởng tượng mỗi cây thông là một "thỏ", như vậy có 800.000 "thỏ" được nhốt vào không quá 500.000 "chiếc lồng". Lồng 1 ứng với cây thông có 1 chiếc lá trên cây, lồng 2 ứng với cây thông có 2 chiếc lá trên cây v.v... Số thỏ lớn hơn số lồng, theo nguyên tắc Điriclê ít nhất có 1 lồng nhốt không ít hơn 2 thỏ nghĩa là có ít nhất 2 cây thông có cùng số lá.

Bài 14:

Một lớp học có 40 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 4 học sinh có tháng sinh giống nhau

Lời giải

Một năm có 12 tháng. Ta phân chia 40 học sinh vào 12 tháng đó. Nếu mỗi tháng có không quá 3 học sinh được sinh ra thì số học sinh không quá: $3.12 = 36$ mà $36 < 40$: vô lý.

Vậy tồn tại một tháng có ít nhất 4 học sinh trùng tháng sinh (trong bài này 40 thỏ là 40 học sinh, 12 lồng là 12 tên tháng).

Bài 15:

Cho dãy số gồm 5 số tự nhiên bất kì a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 5 hoặc tổng của một số số liên tiếp trong dãy đã cho chia hết cho 5.

Lời giải

Ta sẽ thành lập dãy số mới gồm 5 số sau đây:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

- Nếu một trong cách $S_i (i = 1, \ldots 5)$ chia hết cho 5 thì bài toán đã được chứng minh.

- Nếu không có số nào chia hết cho 5 thì khi đem chia các số S_i cho 5 sẽ được 5 số dư có giá trị từ 1 đến 4. Có 5 số dư mà chỉ có 4 giá trị (5 thỏ, 4 lồng). Theo nguyên tắc Điriclê ít nhất phải có 2 số dư có cùng giá trị. Hiệu của chúng chia hết cho 5. Hiệu này chính là tổng các a_i liên tiếp nhau hoặc là a_i nào đó.

Bài 16:

Với 39 số tự nhiên liên tiếp, hỏi rằng ta có thể tìm được một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 11 hay không?

Lời giải

Từ 20 số đầu tiên của dãy bao giờ ta cũng có thể tìm được 2 số mà chữ số hàng đơn vị là 0, và trong hai số đó ít nhất phải có một số có chữ số hàng chục khác 9. Giả sử N là số đó, và ta gọi S là tổng các chữ số của N.

Ta có dãy số mới $N; N + 1; N + 2; \ldots N + 9; N + 19$ là 11 số vẫn nằm trong 39 số cho trước mà tổng các chữ số của chúng là $S; S + 1; S + 2; \ldots; S + 9; S + 10$. Đó là 11 số tự nhiên liên tiếp, ắt phải có một số chia hết cho 11.

Bài 17:

Chứng minh rằng trong 52 số tự nhiên tùy ý, chí ít cũng có một cặp gồm hai số sao cho hoặc tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100.

Lời giải

Để làm xuất hiện số "thỏ" và số "lồng ta làm như sau:

Trong tập hợp các số dư trong phép chia cho 100 ta lấy ra từng cặp số sao cho tổng các cặp đó bằng 100 và thành lập thành các nhóm sau:

(0 ; 0), (1 ; 99), (2 ; 98), (3 ; 97), (4 ; 96), (5 ; 95), (6 ; 94)... (49 ; 51), (50 ; 50).

Chú ý rằng sẽ có 50 cặp như vậy, ta thêm vào cặp (0, 0) sẽ có 51 cặp (51 lồng).

- Đem chia 52 số tự nhiên cho 100 sẽ có 52 số dư (52 thỏ).

- Có 52 số dư mà chỉ có 51 nhóm, theo nguyên tắc Điriclê ít nhất cũng phải có 2 số dư cùng rơi vào một nhóm.

Rõ ràng là cặp số tự nhiên ứng với cặp số dư này chính là hai số tự nhiên có tổng hoặc hiệu chia hết cho 100. (đpcm)

Bài 18:

Chứng minh rằng trong 19 số tự nhiên bất kì ta luôn luôn tìm được một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 10.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh rằng trong n số tự nhiên liên tiếp bao giờ cũng tồn tại một số chia hết cho n. (Các bạn tự chứng minh điều này).

Với 19 số tự nhiên liên tiếp bất kì luôn luôn tồn tại 10 số liên tiếp có chữ số hàng chục như nhau, còn các chữ số hàng đơn vị có giá trị từ 0 đến 9.

Vì thế tổng các chữ số của mỗi số trong 10 số này cũng làm thành dãy số gồm có 10 số tự nhiên liên tiếp, do đó tồn tại một số chia hết cho 10 (đpcm).

Bài 19:

Một trường học có 1000 học sinh gồm 23 lớp. Chứng minh rằng phải có ít nhất một lớp có từ 44 học sinh trở lên

Lời giải

Giả sử 23 lớp mỗi lớp có không quá 43 học sinh.

Khi đó số học sinh là:

$43.23 = 989$ học sinh (ít hơn $1000 - 989 = 11$ học sinh)

Theo nguyên lí Dirichlet phải có ít nhất một lớp có từ 44 học sinh trở lên

Nhận xét: Các cháu học sinh để ý, với dạng toán này, đề bài thường yêu cầu chứng minh có ít nhất 1 lớp, (hoặc tương tự) có ít nhất bao nhiêu học sinh.

Như vậy, với dạng này điều quan trọng là chúng ta cần chỉ ra, đâu là thỏ, đâu là chuồng. Với bài số 1, đọc đề xong cái là nhìn thấy ngay số học sinh (như là số thỏ) còn số lớp chính là số chuồng.

Nhận xét thêm về cách giải, thực ra nói là áp dụng nguyên lý Dirichle, nhưng các cháu có thể thấy chúng ta đang đi chứng minh nguyên lý này, bằng việc giả sử ngược lại (phương pháp phản chứng).

Để hiểu rõ hơn, chúng ta đi tiếp tục bài 2.

Bài 20:

Một lớp có 50 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 5 học sinh có tháng sinh giống nhau

Phân tích:

Đọc đề chúng ta thấy có học sinh, đề bài yêu cầu chứng minh học sinh có cùng tháng sinh. Việc "cùng tháng sinh" ở đây có thể hiểu như "nhốt cùng chuồng". Như vậy, chuồng ở đây chính là tháng sinh, còn học sinh là"thỏ".**Hướng dẫn giải**

Giả sử có không quá 4 học sinh có tháng sinh giống nhau

Một năm có 12 tháng, khi đó số học sinh của lớp có không quá: 12.4=48 (học sinh)

Theo nguyên lí Dirichlet phải có ít nhất 5 học sinh có tháng sinh giống nhau

Bài 21:

Có sáu loại học bổng khác nhau. Hỏi rằng phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn rằng có ít ra là 6 người cùng nhận học bổng như nhau.

Phân tích:

Bài toán này, đề bài không yêu cầu chúng ta chứng minh có ít nhất bao nhiêu gì đấy trong một gì đấy nữa. Mà ngược lại, đề bài yêu cầu chúng ta tìm ít nhất số học sinh để thỏa mãn điều kiện có ít nhất như các bài trước.

Bây giờ chúng ta phân tích để nhận ra đâu là "thỏ", đâu là "chuồng" nhé. Nào hãy chú ý yêu cầu đề bài "ít nhất 6 người cùng nhận học bổng như nhau", như vậy, người ở đây chính là "thỏ" còn loại học bổng chính là "chuồng". Để giải bài toán ngược này, chúng ta cũng làm tương tự, giả sử không thỏa mãn đề bài, tức mỗi loại học bổng chỉ có tối đa 5 người….

Lời giải

Giả sử mỗi loại học bổng chỉ có 5 người => số người là $5.6 = 30$người.

Nếu ta lấy 31 người, khi đó theo nguyên lý Dirichle, tồn tại 1 loại học bổng mà có ít nhất 6 người nhận.

Nhận xét: Ta thấy 31 = 30 + 1, như vậy, ta chỉ việc tìm số lớn nhất để không thỏa mãn đề bài (chính là 5×6 = 30) cộng thêm 1 sẽ thành số nhỏ nhất thỏa mãn đề bài.

Bài 22:

Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra, không có ai bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên)

Phân tích:

Đề bài cho 45 học sinh, (chính là số "thỏ"). Nhưng số chuồng thì chúng ta chưa biết chính xác. Chúng ta cần cẩn thận hơn với các dữ kiện "không có ai bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh được điểm 10″. Như vậy các điểm chỉ cóthể từ 2 cho đến 10. Nhưng chỉ có 2 người được 10 tức là còn 43 người còn lại chỉ được điểm từ 2 cho đến 9. (có 8 số – tương ứng 8 "chuồng")

Lời giải

Có 43 học sinh phân thành 8 loại điểm (từ 2 đến 9)

Giả sử trong 8 loại điểm đều là điểm của không quá 5 học sinh thì lớp học có:

$5.8 = 40$ học sinh, ít hơn 3 học sinh so với 43.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau.

Bài 23:

Một lớp học có 50 học sinh, có duy nhất một học sinh thiếu nhiều bài tập nhất là thiếu 3 bài tập. Chứng minh rằng tồn tại 17 học sinh thiếu 1 số bài tập như nhau (trường hợp không thiếu bài tập coi như thiếu 0 bài)

Phân tích:

Bài này chúng ta để ý dữ kiện: "có duy nhất một học sinh thiếu nhiều bài tập nhất là thiếu 3 bài tập" ρ các học sinh còn lại chỉ thiếu 0, 1, hoặc 2 bài tập (tức là có 3 loại thiếu bài tập). Loại bỏ học sinh duy nhất thiếu 3 bài đi, còn lại 50 – 1 = 49 bạn.

Lời giải

Ngoài bạn học sinh duy nhất thiếu 3 bài ta còn 49 bạn.

Giả sử mỗi loại bài tập có 16 học sinh.

Số học sinh không quá $16.3 = 48$ (thiếu 1 học sinh).

Theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất 17 học sinh thiếu một số bài tập như nhau

Dạng 3: Sự tương hỗ

Bài 1:

Có 5 đấu thủ thi đấu cờ, mỗi người đấu một trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu, luôn tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.

Lời giải

Gọi 5 lồng 0, 1, 2, 3, 4 thứ tự chứa các đấu thủ đã đấu 0, 1, 2, 3, 4 trận. Cũng chú ý rằng hai lông 0 và 4 không thể cùng chứa người. Như vậy chỉ có 4 lồng, mà có 5 người, tồn tại 2 người trong cùng một lồng tức là tồn tại hai đấu thủ có số trận đấu bằng nhau.

Bài 2:

Cho 5 người tùy ý. CMR trong số đó có ít nhất 2 người có số người quen như nhau (hiểu rằng A quen B thì B quen A).

Phân tích: Chú trọng đến câu hỏi "2 người có số người quen như nhau"

Từ đó hiểu rằng 5 người đóng vai trò là số thỏ. Ta có thể tạo ra các lồng như sau:

Lời giải

Gọi lồng 0 chứa những người có số người quen là 0.

Gọi lồng 1 chứa những người có số người quen là 1.

…

Gọi lồng 4 chứa những người có số người quen là 4.

Như vậy ta có 5 lồng. Nếu lồng 0 có chứa ai đó thì lồng 4 phải trống. Ngược lại nếu lồng 4 có chứa ai đó thì lồng 0 phải trống.

Vậy thực chất chỉ có 4 lồng nhốt 5 thỏ nên có ít nhất 2 người ở cùng một phòng tức là hai người đó có số người quen như nhau.

Bài 3:

Có 10 đội bóng thi đấu với nhau mỗi đội phải đấu một trận với các đội khác. CMR vào bất cứ lúc nào cũng có hai đội đã đấu số trận như nhau (kể cả số trận đấu là 0).

Phân tích: Hiểu tương tự như bài toán trên.

Lời giải

Gọi A_0 là phòng chứa các đội có số trận đấu là 0.

Gọi A_1 là phòng chứa các đội có số trận đấu là 1.

……

Gọi A_9 là phòng chứa các đội có số trận đấu là 9.

Nếu phòng A_0 có ít nhất 1 đội thì phòng A_9 không có đội nào và ngược lại phòng A_9 có ít nhất 1 đội thì phòng A_0 không có đội nào.

Vậy thực chất chỉ có 9 phòng được sử dụng mà lại có 9 đội nên có ít nhất 2 đội vào chung một phòng hay có ít nhất 2 đội có cùng số trận đấu như nhau.

Bài 4:

Có 6 đội bóng thi đấu với nhau (mỗi đội phải đấu 1 trận với 5 đội khác). CMR vào bất cứ lúc nào cũng có 3 đội trong đó từng cặp đã đấu với nhau hoặc chưa đấu với nhau trận nào.

Lời giải

Giả sử 6 đội bóng đó là A, B, C, D, E, F. Xét đội A:

Theo nguyên lý Điriclê ta suy ra: A phải đấu hoặc không đấu với ít nhất 3 đội khác.

Không mất tính tổng quát, giả sử A đã đấu với B, C, D.

+ Nếu B, C, D từng cặp chưa đấu với nhau thì bài toán được chứng minh.

+ Nếu B, C, D có 2 đội đã đấu với nhau, ví dụ B và C thì 3 đội A, B, C từng cặp đã đấu với nhau.

Như vậy bất cứ lúc nào cũng có 3 đội trong đó từng cặp đã đấu với nhau hoặc chưa đấu với nhau trận nào.

Bài 5:

Có 17 nhà toán học trao đổi với nhau về 3 vấn đề. Mỗi người tra đổi với một người về 1 vấn đề. CMR cũng có ít nhất 3 nhà toán học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề (A và B, B và C, C và A).

<u>Phân tích:</u> Tương tự như 17 điểm được nối với nhau bằng 3 màu à luôn tồn tại một tam giác với 3 cạnh cùng màu tức là 3 nhà toán học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề.

Lời giải

Một nhà toán học trao đổi với 16 nhà toán học khác về 3 vấn đề Þ Theo nguyên lý Điricle có ít nhất 6 người sẽ được một người trao đổi về cùng một vấn đề, giả sử đó là vấn đề I.

6 người này lại trao đổi với nhau về 3 vấn đề:

+ TH1: Nếu có 2 người nào đó cùng trao đổi về vấn đề I thì bài toán được chứng minh.

+ TH2: Nếu không có 2 người nào cùng trao đổi về vấn đề 1 thì 6 người này chỉ trao đổi về 2 vấn đề II và III.

Một người trao đổi với 5 người còn lại về 2 vấn đề II và III. Theo nguyên lý Điricle có ít nhất 3 người cùng được một người trao đổi về 1 vấn đề, giả sử đó là vấn đề II. Ba người này lại tiếp tục trao đổi với nhau:

+ TH1: Nếu có 2 người nào đó cùng trao đổi với nhau về vấn đề II thì bài toán được chứng minh.

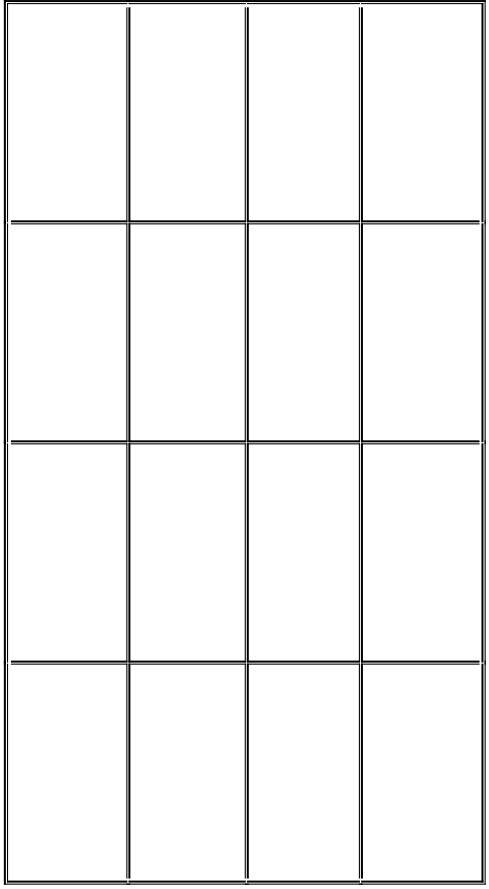
+ TH2: Nếu không có 2 người nào cùng trao đổi với nhau về vấn đề II thì cả 3 người này trao đổi với nhau về vấn đề III Þ Bài toán cũng đã được chứng minh.

Vậy luôn có ít nhất 3 nhà toán học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề

Dạng 4: Sự sắp xếp

Bài 1:

Cho một bảng vuông 4 x 4. Trên 16 ô của bảng, ta đặt 16 số tự nhiên từ 1 đến 16. Chứng minh rằng tồn tại hai ô kề nhau (tức là hai ô có một cạnh chung) sao cho hiệu các số ở hai ô đó lớn hơn hoặc bằng 3.



Lời giải

Chuyển từ một ô bất kì sang ô kề nó gọi là một bước. Xét hai ô ghi số 1 và số 16 chuyển từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 16 chỉ cần không quá 6 bước chuyển (nhiều nhất là 3 bước theo hàng ngang, 3 bước theo hàng dọc). Tồn tại một bước chuyển có hiệu lớn hơn hoặc bằng 3. Thật vậy giả sử tất cả các bước chuyển đều nhỏ hơn hoặc bằng 2 thì từ số 1, qua không quá 6 bước chuyển tăng thêm không quá 12, không đạt được đến số 16.

Vậy tồn tại hai ô kề nhau có hiệu các số của hai ô đó lớn hơn hoặc bằng 3.

Bài 2:

Viết 16 số, mỗi số có giá trị bất kỳ là 1, 2, 3, 4. Ghép thành từng cặp 2 số được 8 cặp số. Chứng minh rằng tồn tại hai cặp số mà tổng các số trong hai cặp đó bằng nhau.

Lời giải

Tổng hai số của mỗi cặp trong 8 cặp số có giá trị nhỏ nhất là: 1 + 1 = 2, có giá trị lớn nhất là: 4 + 4 = 8. Như vậy 8 tổng đó nhận 7 giá tri: (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8). Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai tổng bằng nhau, tức là tồn tại hai cặp có tổng bằng nhau.

Dạng 5: Bài toán hình học

Nguyên lí có thể mở rộng như sau: Nếu có m vật đặt vào n cái ngăn kéo và m > k.n thì có ít nhất một ngăn kéo chứa ít nhất k + 1 vật. Với mở rộng này, ta còn có thể giải quyết thêm nhiều bài toán khác.

Bài 1:

Trong tam giác đều có cạnh bằng 4 (đơn vị độ dài, được hiểu đến cuối bài viết) lấy 17 điểm. Chứng minh rằng trong 17 điểm đó có ít nhất hai điểm mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá 1.

Lời giải

Hình 1

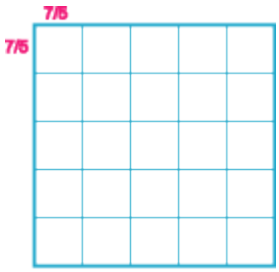
Chia tam giác đều có cạnh bằng 4 thành 16 tam giác đều có cạnh bằng 1 (hình 1).

Vì 17 > 16, theo nguyên lí Đi-rích-lê, tồn tại ít nhất một tam giác đều cạnh bằng 1 có chứa ít nhất 2 điểm trong số 17 điểm đã cho. Khoảng cách giữa hai điểm đó luôn không vượt quá 1 (đpcm).

Bài 2:

Trong một hình vuông cạnh bằng 7, lấy 51 điểm. Chứng minh rằng có 3 điểm trong 51 điểm đã cho nằm trong một hình tròn có bán kính bằng 1.

Lời giải



Hình 2

Chia hình vuông cạnh bằng 7 thành 25 hình vuông bằng nhau, cạnh của mỗi hình vuông nhỏ bằng 5/7 *(hình 2)*.

Vì 51 điểm đã cho thuộc 25 hình vuông nhỏ, mà 51 > 2.25 nên theo nguyên lí Đi-rích-lê, có ít nhất một hình vuông nhỏ chứa ít nhất 3 điểm (3 = 2 + 1) trong số 51 điểm đã cho. Hình vuông cạnh bằng có bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2+\left(\frac{7}{5}\right)^2}}{2}=\sqrt{\frac{98}{100}}<1$$ (đpcm)

Hình tròn này chính là hình tròn bán kính bằng 1, chứa hình vuông ta đã chỉ ra ở trên.

Bài 3:

Trong mặt phẳng cho 2003 điểm sao cho cứ 3 điểm bất kì có ít nhất 2 điểm cách nhau một khoảng không vượt quá 1. Chứng minh rằng: tồn tại một hình tròn bán kính bằng 1 chứa ít nhất 1002 điểm.

Lời giải

Lấy một điểm A bất kì trong 2003 điểm đã cho, vẽ đường tròn C_1 tâm A bán kính bằng 1.

+ Nếu tất cả các điểm đều nằm trong hình tròn C1 thì hiển nhiên có đpcm.

+ Nếu tồn tại một điểm B mà khoảng cách giữa A và B lớn hơn 1 thì ta vẽ đường tròn C_2 tâm B bán kính bằng 1.

Khi đó, xét một điểm C bất kì trong số 2001 điểm còn lại. Xét 3 điểm A, B, C, vì AB > 1 nên theo giả thiết ta có AC ≤ 1 hoặc BC ≤ 1. Nói cách khác, điểm C phải thuộc C_1 hoặc C_2.

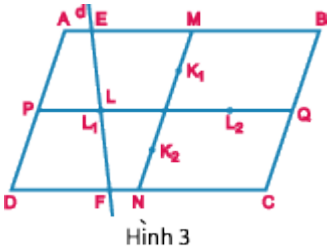
=> 2001 điểm khác B và A phải nằm trong C_1 hoặc C_2.

Theo nguyên lí Đi-rích-lê ta có một hình tròn chứa ít nhất 1001 điểm. Tính thêm tâm của hình tròn này thì hình tròn này chính là hình tròn bán kính bằng 1 chứa ít nhất 1002 điểm trong 2003 điểm đã cho.

Bài 4:

Cho hình bình hành ABCD, kẻ 17 đường thẳng sao cho mỗi đường thẳng chia ABCD thành hai hình thang có tỉ số diện tích bằng 1/3 . Chứng minh rằng, trong 17 đường thẳng đó có 5 đường thẳng đồng quy.

Lời giải



Hình 3

Gọi M, Q, N, P lần lượt là các trung điểm của AB, BC, CD, DA *(hình 3)*.

Vì ABCD là hình bình hành => MN // AD // BC ; PQ // AB // CD.

Gọi d là một trong 17 đường thẳng đã cho. Nếu d cắt AB tại E ; CD tại F ; PQ tại L thì LP, LQ lần lượt là đường trung bình của các hình thang AEFD, EBCF.

Ta có: S(AEFD) / S(EBCF) = 1/3 hoặc S(EBCF) / S(EBFC) = 1/3

=> LP / LQ = 1/3 hoặc là LQ / LP = 1/3.

Trên PQ lấy hai điểm L_1, L_2 thỏa mãn điều kiện $L_1P / L_1Q = L_2Q / L_2P = 1/3$ khi đó L trùng với L_1 hoặc L trùng với L_2. Nghĩa là nếu d cắt AB và CD thì d phải qua L_1 hoặc L_2.

Tương tự, trên MN lấy hai điểm K_1, K_2 thỏa mãn điều kiện $K_1M / K_1N = K_2N / K_2M = 1/3$ khi đó nếu d cắt AD và BC thì d phải qua K_1 hoặc K_2.

Tóm lại, mỗi đường thẳng trong số 17 đường thẳng đã cho phải đi qua một trong 4 điểm L_1 ; L_2 ; K_1 ; K_2.

Vì 17 > 4.4 nên theo nguyên lí Đi-rích-lê, trong 17 đường thẳng đó sẽ có ít nhất 5 đường thẳng (5 = 4 + 1) cùng đi qua một trong 4 điểm L_1 ; L^2 ; K_1 ; K_2 (5 đường thẳng đồng quy, đpcm).

Dạng 6: Sự trùng lặp

- Học sinh thuộc nội dung nguyên lý. Đọc bài toán và phân biệt được yếu tố nào đóng vai trò là "thỏ", yếu tố nào đóng vai trò là "lồng". Học sinh chỉ ra được số thỏ, số lồng.

- *Cách phân biệt đơn giản nhất: Số thỏ luôn lớn hơn số lồng.*

Bài 1:

Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh được điểm 10. CMR ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Phân tích: "thỏ" là 43 học sinh, "lồng" là các loại điểm từ 2 đến 9.

Lời giải

Có 45 – 2 = 43 (học sinh) được 8 loại điểm từ 2 đến 9.

Do 43 : 8 = 5 (dư 3).

Theo Nguyên lý Điricle có ít nhất 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau.

Bài 2:

Một trường học có 24 lớp gồm 900 học sinh. Chứng minh rằng có một lớp với sĩ số 38 học sinh trở lên.

Phân tích: Chia 900 học sinh vào 24 lớp có ý nghĩa tương tự như nhốt 900 con thỏ vào 24 cái lồng. Từ đó có thể áp dụng ngay nội dung nguyên lý để giải bài toán:

Lời giải

Có 900 học sinh được chia vào 24 lớp, mà 900: 24 = 37 (dư 12)

Theo nguyên lý Điricle sẽ tồn tại một lớp có từ 37 + 1 = 38 (học sinh) trở lên.

Bài 3:

Trong lớp học có 30 học sinh. Khi viết chính tả một em phạm 14 lỗi, các em khác phạm số lỗi ít hơn. CMR có ít nhất 3 học sinh mắc số lỗi bằng nhau (kể cả những người mắc 0 lỗi).

Phân tích: Trong bài toán này "thỏ" là 29 học sinh (trừ đi 1 em mắc 14 lỗi), "lồng" là các loại lỗi (gồm 14 loại: 0 lỗi, 1 lỗi, 2 lỗi, ..., 13 lỗi).

Lời giải

Có 30 học sinh trong đó 1 em phạm 14 lỗi, số còn lại là 29 em phạm các lỗi từ 0 đến 13 lỗi (14 loại lỗi).

Do 29: 14 = 2 (dư 1)

Theo Nguyên lý Điricle có ít nhất 3 em mắc cùng số lỗi như nhau.

Bài 4:

Trong một kỳ thi toán học có 6 thí sinh được vào chung khảo. Thể lệ của cuộc thi như sau: Mỗi thí sinh phải giải 5 bài toán. Mỗi bài toán đúng được tính 4 điểm. Mỗi bài toán sai hoặc không làm được đều bị trừ 2 điểm. Hãy chứng tỏ rằng trong 6 thí sinh đó có ít nhất 2 thí sinh bằng điểm nhau. Biết rằng điểm thấp nhất là điểm 0.

Phân tích: số "thỏ" dường như là 6 học sinh, nhưng "lồng" là gì nhỉ? Ta phải đặc biệt chú ý đến nội dung câu hỏi **"ít nhất 2 thí sinh bằng điểm nhau"** *và liên tưởng đến nội dung nguyên lý nó giống như 2 thỏ nhốt chung một lồng. Từ đó tìm ra yếu tố lồng ở đây là số điểm đạt được.*

Giải

Vì mỗi thí sinh phải giải 5 bài toán. Mỗi bài toán đúng được tính 4 điểm. Mỗi bài toán sai hoặc không làm được đều bị trừ 2 điểm nên ta có 5 trường hợp sau:

Nếu đúng 5 bài thì số điểm được là: 5. 4 = 20 (điểm).

Nếu đúng 4 bài thì số điểm được là: 4. 4 - 2 = 14 (điểm).

Nếu đúng 3 bài thì số điểm được là: 3. 4 – 4 = 8 (điểm).

Nếu đúng 2 bài thì số điểm được là: 2. 4 – 6 = 2 (điểm).

Nếu đúng 1 bài hoặc không đúng bài nào thì đều được 0 điểm.

Như vậy có 6 thí sinh dự thi nhưng chỉ có 5 loại điểm nên theo nguyên lý Điricle sẽ có ít nhất 2 thí sinh bằng điểm nhau.

PHẦN III.BÀI TOÁN TRONG ĐỀ THI HSG6

Bài 1:

Trong một phòng họp có n người, bao giờ cũng tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là như nhau.

Phân tích:

Phòng họp có n người, có thể coi là n "thỏ" rồi này. Bây giờ chúng ta xác định đâu là "chuồng". Hãy đọc kỹ đề bài yêu cầu gì, chúng ta sẽ nhìn ra "chuồng" ngay. "tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là như nhau" => số người quen giống nhau, hay chính là nhốt cùng "chuồng". Như vậy, số người quen chính là số "chuồng".

Ta thấy 1 người có thể quen với 0 người, 1 người, ….hoặc nhiều nhất là n-1 người trong cuộc họp….

Lời giải

Số người quen của mỗi người trong phòng họp nhận các giá trị từ 0 đến $n-1$. Rõ ràng trong phòng không thể đồng thời có người có số người quen là 0 (tức là không quen ai) và có người có số người quen là $n-1$(tức là quen tất cả). Vì vậy theo số lượng người quen, ta chỉ có thể phân n người ra thành $n-1$ nhóm.

Vậy theo nguyên lí Dirichlet tồn tai một nhóm có ít nhất 2 người, tức là luôn tìm được ít nhất 2 người có số người quen là như nhau.

Bài 2:

Trong một lưới ô vuông kích thước 5.5, người ta điền ngẫu nhiên vào các ô một trong các giá trị 0,1 hoặc 2, sau đó tính tổng tất cả các ô theo hàng ; theo cột và theo hai đường chéo. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai tổng có giá trị bằng nhau.

Phân tích:

Hãy đọc kỹ đề bài yêu cầu, chúng ta sẽ thấy "thỏ" và "chuồng"

"Tồn tại ít nhất 2 tổng có giá trị bằng nhau" Þ thỏ chính là tổng (hàng ngang, dọc, chéo), còn giá trị chính là "chuồng". Vấn đề của chúng ta là chúng ta cần đi tìm các giá trị có thể của tổng. Ta thấy một tổng 5 ô sẽ có giá trị nhỏ nhất là 0, lớn nhất là 10.

Lời giải

Gọi các tổng lần lượt là S1,S2,..S12.

Có tất cả 12 tổng. Ta nhận thấy rằng các tổng này chỉ có thể nhận các giá trị là {0, 1, 2…., 9, 10}. Có tất cả 11 giá trị khác nhau. Từ đó, theo nguyên lý Dirichlet ta suy ra điều cần chứng minh.

Bài 3:

Giả sử trong một nhóm 6 người mỗi cặp hai hoặc là bạn hoặc là thù. Chứng tỏ rằng trong nhóm có ba người là bạn lẫn nhau hoặc có ba người là kẻ thù lẫn nhau.

Lời giải

Gọi A là một trong 6 người. Trong số 5 người của nhóm hoặc là có ít nhất ba người là bạn của A hoặc có ít nhất ba người là kẻ thù của A, điều này suy ra từ nguyên lí Dirichlet, vì những người khác chỉ có thể là bạn hoặc thù của A.

Trong trường hợp đầu ta gọi B,C,D là bạn của A. nếu trong ba người này có hai người là bạn thì họ cùng với A lập thành một bộ ba người bạn lẫn nhau, ngược lại, tức là nếu trong ba người B,C,D không có ai là bạn ai cả thì chứng tỏ họ là bộ ba người thù lẫn nhau.

Tương tự có thể chứng minh trong trường hợp có ít nhất ba người là kẻ thù của A. (ĐPCM)

Bài 4:

Có 5 đấu thủ thi đấu cờ, mỗi người đấu một trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu, luôn tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.

Lời giải

Ta có số trận đã đấu của mỗi người có thể là 0,1,2,3,4. Nhưng vì không thể có cùng lúc một người đã đấu 4 trận và một người chưa đấu trận nào, nên có tối đa 4 loại số trận đã đấu.

Vận dụng nguyên lý Dirichlet ta có ít nhất có 2 người có cùng số trận đã đấu.

Bài 5:

Có 6 học sinh làm một bài thi gồm 6 câu hỏi. Nếu trả lời đúng được 2 điểm, trả lời sai bị trừ 1 điểm. Nếu số điểm bị trừ nhiều hơn số điểm đạt được thì tính bị 0 điểm. Hỏi có thể luôn có 2 học sinh bằng điểm nhau được hay không???

Phân tích và gợi ý giải:

Bài này đề bài lại hỏi theo kiểu có hay không, nhưng chúng ta hãy bình tình. Nếu một khi chúng ta đã hiểu bản chất của bài toán dạng này thì sẽ không gì làm chúng ta sợ hay mất tự tin được cả.

"Hai học sinh bằng điểm nhau" Þ Học sinh chính là "thỏ", điểm chính là "chuồng".

Vấn đề bài toán trở thành đi tìm số điểm có thể (số chuồng), từ đó sẽ giúp chúng ta trả lời được câu hỏi của đề bài.

Đề thi gồm 6 bài, xảy ra các trường hợp sau:

- Đúng hết 6 câu => 12 điểm
- Đúng 5 câu, sai 1 câu => 5×2 -1 = 9 điểm
- Đúng 4 câu, sai 2 câu => 4×2 -2×1 = 6 điểm
- Đúng 3 câu, sai 3 câu => 3×2 – 3×1 = 3 điểm
- Đúng 2 câu, sai 4 câu => 2×2 – 4x 1 = 0 điểm
- Đúng dưới 2 câu => dễ thấy sẽ bị 0 điểm.

Nhìn lại ta thấy chỉ có 0,3,6,9,12 điểm tức là chỉ có 5 loại điểm, trong khi có 6 học sinh => có 2 học sinh cùng điểm.