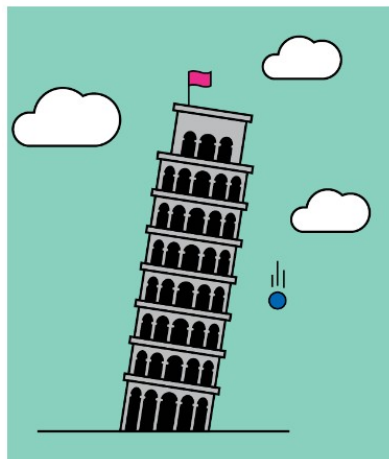


BÀI TOÁN THỰC TẾ NGUYÊN HÀM

- Câu 1.** Một gia đình sản xuất chiếu cói ở Nga Sơn mỗi ngày sản xuất được x chiếc chiếu ($0 \leq x \leq 20$). Chi phí biên để sản xuất x chiếc chiếu (tính bằng nghìn đồng) cho bởi hàm số sau: $C'(x) = 3x^2 - 4x + 10$. Biết rằng chi phí cố định ban đầu để sản xuất là 500 nghìn đồng. Giả sử gia đình này bán hết chiếu mỗi ngày với giá 270 nghìn đồng / chiếc chiếu. Tính lợi nhuận tối đa theo đơn vị nghìn đồng mà gia đình đó thu được?



- Câu 2.** Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc tại thời điểm t cho bởi công thức $v(t) = 100 - 9,8t$ (m/s), ($t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên). Tìm độ cao (tính theo km) của viên đạn so với mặt đất ở thời điểm 1 giây sau khi viên đạn đạt độ cao lớn nhất (làm tròn đến hàng phần trăm).
- Câu 3.** Hai công ty, công ty A và công ty B, cùng ra mắt sản phẩm cạnh tranh thị trường mới vào cùng thời điểm. Thị phần được đo bằng số lượng khách hàng lũy kế.
 Công ty A: Bắt đầu với 0 khách hàng. Trong giai đoạn đầu, chiến dịch marketing hiệu quả giúp tốc độ thu hút khách hàng mới của họ tăng dần theo thời gian, được mô tả bởi hàm $f(t) = 2t + 7$ (nghìn khách hàng/tháng), với t là số tháng kể từ khi ra mắt.
 Công ty B: Nhờ có uy tín từ trước, họ bắt đầu với 10 nghìn khách hàng đặt trước sản phẩm. Sau đó, họ duy trì một tốc độ thu hút khách hàng mới ổn định là 10 nghìn khách hàng/tháng.
 Hỏi sau khoảng bao nhiêu tháng kể từ khi ra mắt, tổng số lượng khách hàng lũy kế của công ty A bằng tổng số lượng khách hàng lũy kế của công ty B (tính cả 10 nghìn khách hàng ban đầu)?
- Câu 4.** Người ta thả một vật từ một vị trí trên cao cho rơi xuống mặt đất theo phương thẳng đứng. Biết gia tốc trọng trường tại nơi thả vật bằng $9,8 \text{ m/s}^2$. Giả sử lực tác động của không khí đối với vật trong quá trình rơi là không đáng kể. Biết rằng sau 4 giây thì vật bắt đầu chạm mặt đất. Hỏi vị trí của vật trước khi thả rơi cao bao nhiêu mét so với mặt đất? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



- Câu 5.** Người ta quan sát một quần thể vi khuẩn đang tăng trưởng, ban đầu gồm 500 vi khuẩn. Sau một ngày và sau bốn ngày kể từ khi bắt đầu quan sát, số lượng vi khuẩn của quần thể đó tương ứng

là 600 vi khuẩn, 1300 vi khuẩn. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t ngày kể từ khi bắt đầu quan sát, $0 \leq t \leq 10$. Người ta ước tính tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó được mô tả bởi $P'(t) = at + b\sqrt{t}$ (vi khuẩn/ngày), trong đó a, b là hằng số. Hỏi số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày kể từ khi bắt đầu quan sát là bao nhiêu?



Câu 6. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm

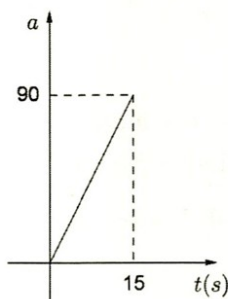
đầu tiên cây cao 3 m. Trong các năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}$ (tính theo mét/năm). Chiều cao của cây đó sau 5 năm (làm tròn đến hàng phần mười) bằng bao nhiêu mét?

Câu 7. Cá hồi Thái Bình Dương đến mùa sinh sản thường bơi từ biển ngược dòng vào sông và đến thượng nguồn các dòng sông để đẻ trứng. Giả sử cá bơi ngược dòng sông với vận tốc là $v(t) = -\frac{2t}{5} + 4(km/h)$. Nếu coi thời điểm ban đầu $t = 0$ là lúc cá bắt đầu bơi vào dòng sông thì khoảng cách xa nhất mà con cá có thể bơi được là bao nhiêu km?



Câu 8. Một vật được ném lên từ độ cao $300m$ với vận tốc được cho bởi công thức $v(t) = -9,81t + 29,43(m/s)$. Gọi $h(t)(m)$ là độ cao của vật tại thời điểm $t(s)$. Sau bao nhiêu giây kể từ khi bắt đầu được ném lên thì vật đó chạm đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét)?

Câu 9. Một máy bay đang chuyển động thẳng đều trên mặt đất với vận tốc $v = 3(m/s)$ thì bắt đầu tăng tốc với độ biến thiên vận tốc là hàm số $a(t)$ có đồ thị hàm số là đường thẳng như hình vẽ.



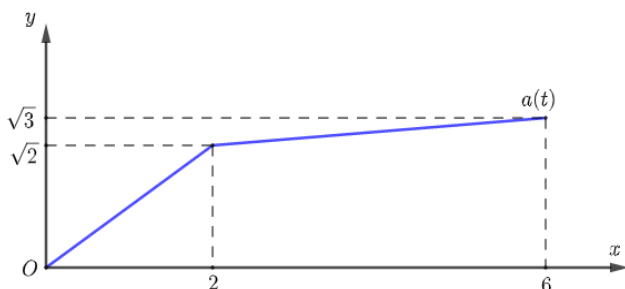
Sau 15s tăng tốc thì máy bay đạt đến vận tốc đủ lớn để phóng khỏi mặt đất. Hãy tính vận tốc (m/s) khi máy bay bắt đầu rời khỏi mặt đất.

- Câu 10.** Một nghiên cứu chỉ ra rằng sau x tháng kể từ bây giờ, dân số của thành phố A sẽ tăng với tốc độ $v(x) = 10 + 2\sqrt{2x+1}$ (người/tháng). Dân số của thành phố sẽ tăng thêm bao nhiêu trong 4 tháng tới. Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị. Cho biết

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1} + C$$

- Câu 11.** Sản phẩm A có hàm lợi nhuận biên theo sản lượng là $M\pi = -100Q + 1000$. Biết rằng, nếu chỉ bán được 100 sản phẩm thì công ti lỗ 50000 đơn vị tiền tệ (1 đơn vị tiền tệ là 1000 đồng). Ta tìm được hàm lợi nhuận theo Q là một hàm số bậc hai có dạng $\pi(Q) = aQ^2 + bQ + c$, tính $7000a + \frac{b}{1000} + c$?

- Câu 12.** Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$. Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t = 0$ là $v(0) = 1 (m/s)$.

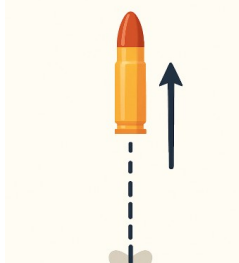


Tại thời điểm $t = 6$ giây, vận tốc của vật là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

- Câu 13.** Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn tăng giá cho thuê của mỗi gian hàng thêm x (triệu đồng) ($x \geq 0$). Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số $T'(x) = -20x + 300$, trong đó $T'(x)$ tính bằng triệu đồng. Biết rằng nếu người đó tăng giá thuê cho mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là 12000 triệu đồng. Tìm giá trị của x (triệu đồng) để người đó có doanh thu là cao nhất?

- Câu 14.** Một vật chuyển động với gia tốc được cho bởi hàm số $a(t) = 5 \cos t (m/s^2)$. Lúc bắt đầu chuyển động vật có vận tốc $2,5 m/s$. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất trong $\pi(s)$ đầu tiên.

- Câu 15.** Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc tại thời điểm t ($t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên) cho bởi $v(t) = 180 - 9,8t (m/s)$. Tìm độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất) khi nó đạt độ cao cực đại (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



- Câu 16.** Một hồ nước bị ô nhiễm được xử lý bằng một chất diệt khuẩn. Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn sống sót được mô hình bởi $B(t) = -\frac{3000}{(1 + 0,2t)^2}, t \geq 0$ với $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước và t là số ngày tính từ khi hồ nước được xử lý. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu là 10000 con/ml nước. Sử dụng mô hình này xác định lượng vi khuẩn sau 5 ngày.

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1} + C$$

Cho biết

- Câu 17.** Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là $h_1 = 280 \text{ cm}$. Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500} \sqrt[3]{t+3}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao nhiêu giây thì nước bơm được $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1} + C$$

Cho biết

- Câu 18.** Đối với các dự án xây dựng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng công nhân được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi $M(t)$ là số ngày công được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t) = m(t)$. Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số $m(t) = 800 - 2t$, trong đó t tính theo ngày ($0 \leq t \leq 400$), $m(t)$ tính theo người. Đơn giá cho một ngày công lao động là 400000 đồng. Tính chi phí (tỷ đồng) nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành).

- Câu 19.** Một quần thể vi sinh vật có tốc độ tăng số lượng cá thể được ước lượng bởi $P'(t) = 150\sqrt{t}$ (cá thể/ngày) với $0 \leq t \leq 10$ trong đó $P(t)$ là số lượng cá thể vi sinh vật tại thời điểm t ngày kể từ thời điểm ban đầu. Biết rằng ban đầu quần thể có 1000 cá thể. Ước lượng số cá thể của quần thể sau 5 ngày kể từ thời điểm ban đầu (kết quả làm tròn đến hàng trăm).

- Câu 20.** Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng (có gắn trục tọa độ Ox với độ dài đơn vị bằng 1m). Biết rằng vật chuyển động với vận tốc (tính theo m/s) là $v(t) = 2t - t^2$ ($0 \leq t \leq 10$, tính theo giây) và lúc đầu vật ở vị trí có tọa độ $x_0 = 2$. Tại thời điểm $t = 6$ giây, vật cách vị trí ban đầu bao xa?

- Câu 21.** Giả sử tốc độ tăng trưởng của một quần thể muỗi thỏa mãn công thức $N'(t) = 0,2N(t)$, $0 \leq t \leq 5$, trong đó t là thời gian tính theo ngày, $N(t)$ là số cá thể muỗi tại thời điểm t . Biết rằng ban đầu quần thể muỗi có 2000 cá thể. Đặt $y(t) = \ln N(t)$, $0 \leq t \leq 5$. Chứng tỏ rằng $y'(t) = 0,2$. Từ đó, tìm được $N(t)$ với $0 \leq t \leq 5$.
Khí đó, hãy tìm số lượng cá thể của quần thể muỗi sau 3 ngày (kết quả làm tròn đến hàng trăm).

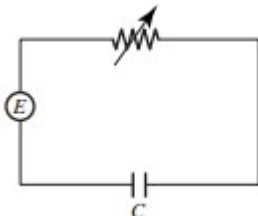
- Câu 22.** Trong một dịch cúm, tốc độ tăng số trường hợp mắc bệnh của một thành phố được ước lượng bởi $N'(t) = 10 \cdot e^{0,2t}$ (trường hợp/ngày) trong đó $N(t)$ là số trường hợp mắc bệnh sau thời gian t ngày kể từ khi bắt đầu dịch. Biết rằng thời điểm bắt đầu dịch có 5 trường hợp mắc bệnh. Ước lượng số trường hợp mắc bệnh của thành phố sau 10 ngày dịch bắt đầu.

- Câu 23.** Khi nghiên cứu dịch sốt xuất huyết ở một địa phương, các chuyên gia y tế ước tính rằng tại ngày thứ m có $F(m)$ người mắc bệnh (sau khi đã làm tròn đến chữ số hàng đơn vị). Biết rằng $F'(m) = \frac{150}{2m+1}$ và ngày đầu tiên ($m=0$) người ta phát hiện ra 50 bệnh nhân. Hãy xác định số người mắc bệnh ở ngày thứ 10.

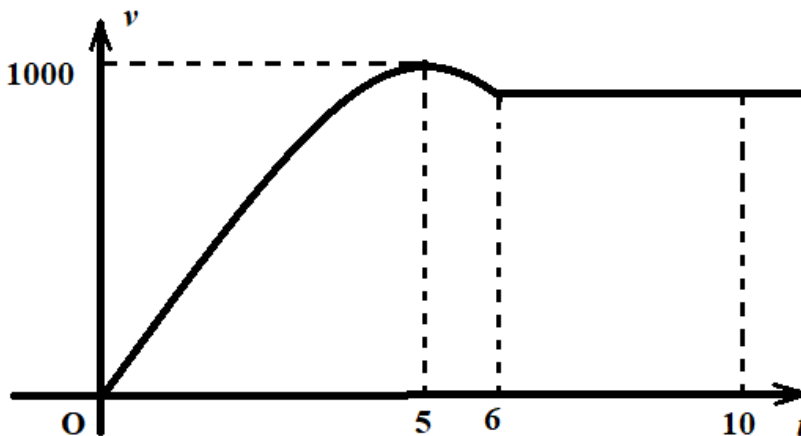
- Câu 24.** Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t) = -0,1t^3 + t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét/tuần. Gọi $h(t)$ là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t . Vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì cây cà chua cao bao nhiêu centimét? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



- Câu 25.** Cường độ dòng điện trong một dây dẫn tại thời điểm t giây là: $I(t) = Q'(t) = 3t^2 - 6t + 5$, với $Q(t)$ là điện lượng truyền trong dây dẫn tại thời điểm t . Biết khi $t = 1$ giây, điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q(1) = 4$. Tính điện lượng truyền trong dây dẫn khi $t = 3$.

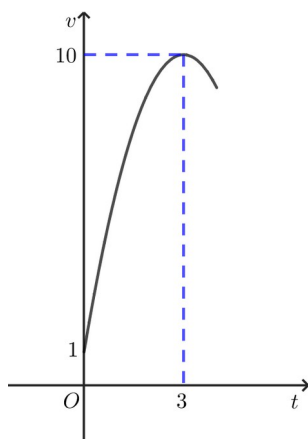


- Câu 26.** Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình bên dưới. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm vận tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều.



Hỏi quãng đường xe đã đi được trong khoảng 10 phút đầu tiên là bao nhiêu mét?

- Câu 27.** Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị vận tốc là một đường parabol có đỉnh $I(3;10)$ và trục đối xứng vuông góc với trục hoành như hình vẽ. Tính quãng đường vật di chuyển được trong nửa thời gian sau của chuyển động đó (kết quả làm tròn đến hàng phần chục và tính theo đơn vị km)

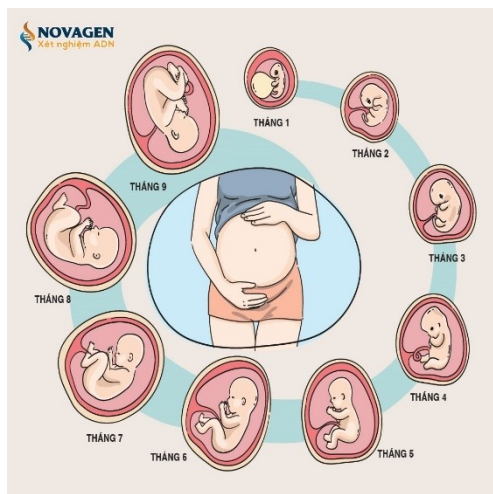


Câu 28. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ (m^3/s) và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể là bao nhiêu m^3 sau khi bơm được 20 giây.

Câu 29. Doanh thu bán hàng của một doanh nghiệp khi bán một loại sản phẩm là số tiền $R(x)$ (triệu đồng) thu được khi x đơn vị sản phẩm được bán ra. Tốc độ biến động (thay đổi) của doanh thu khi x đơn vị sản phẩm đã được bán là hàm số $M_R(x) = R'(x)$. Đại diện của doanh nghiệp cho biết tốc độ biến đổi của doanh thu khi bán một loại sản phẩm được cho bởi $M_R(x) = 500 - 0,1x$, ở đó x là số lượng sản phẩm đã bán. Tìm doanh thu của doanh nghiệp khi đã bán 2000 sản phẩm là bao nhiêu trăm triệu đồng?

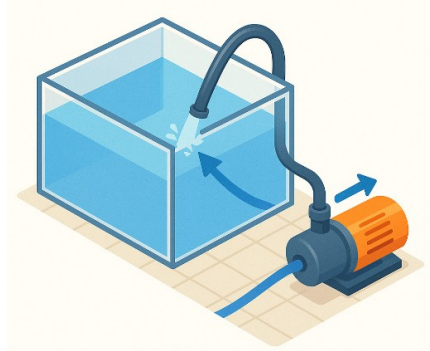
Câu 30. Trọng lượng của một bào thai người nặng khoảng 0,04 ounce (1 ounce = 28,3485 gram) sau 8 tuần tuổi. Trong suốt 35 tuần tiếp theo, trọng lượng của bào thai này được dự đoán tăng với tốc

độ $B'(t) = \frac{2436e^{-0,193t}}{(1 + 784e^{-0,193t})^2}$, $8 \leq t \leq 43$ với $B(t)$ là cân nặng tính bằng ounce và t là thời gian tính bằng tuần. Hãy tính trọng lượng của bào thai sau 25 tuần tuổi (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần trăm).



Câu 31. Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số $B'(t) = \frac{1000}{(1 + 0,3t)^2}$, $t \geq 0$, trong đó $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ t . Số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì người ta phải xử lý và thay nước mới cho hồ bơi.

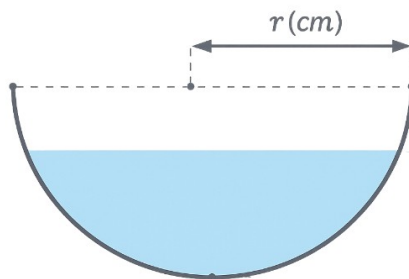
- Câu 32.** Một hồ bơi có dạng hình hộp chữ nhật có chiều cao $3,0(\text{m})$ đang không chứa nước. Người ta cần thay nước mới cho hồ bơi nên dùng máy bơm để bơm nước vào hồ, giả sử $h(t)(\text{m})$ là chiều cao của mực nước đã được bơm vào tại thời điểm t giờ. Biết rằng tốc độ tăng chiều cao của mực nước tại giờ thứ t kể từ lúc bắt đầu bơm nước vào hồ là $h'(t) = \frac{\sqrt[3]{t+3}}{5}$. Hỏi sau bao nhiêu giờ kể từ lúc bắt đầu bơm thì hồ đạt được độ sâu $2,1(\text{m})$ (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



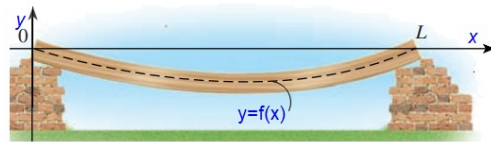
- Câu 33.** Một xe ô tô đang chuyển động đều thì người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường. Sau 1 giây thì người lái xe bắt đầu đạp phanh. Ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -5\text{m/s}^2$. Biết rằng kể từ lúc nhìn thấy chướng ngại vật cho đến khi dừng hẳn thì xe đi thêm được quãng đường 41,6 mét. Vận tốc của xe khi người lái xe bắt đầu phanh là bao nhiêu m/s ?



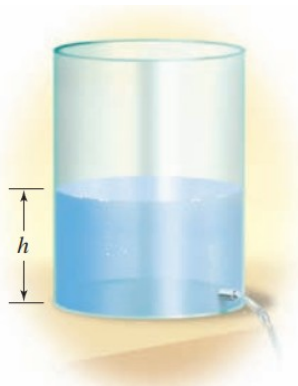
- Câu 34.** Nước bốc hơi từ một bát hình bán cầu có bán kính $r(\text{cm})$ với tốc độ $V'(t) = -r^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giờ. Giả sử bán kính của bát là $r = 10\text{cm}$ và ban đầu (lúc $t = 0$) bát chứa đầy nước. Hỏi sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục) thì bát cạn nước?



- Câu 35.** Một tấm ván gỗ chỉ được hỗ trợ ở hai đầu O và L , cách nhau 4 m. Tấm ván võng xuống dưới do trọng lượng của nó tạo thành một đường cong. Xét trên hệ trục Oxy như hình vẽ dưới, đơn vị mỗi trục là mét, đường cong trong hình vẽ có phương trình $y = f(x)$.
 Khi đó $f''(x) = \frac{1}{350}(12x - 3x^2)$ với $0 \leq x \leq 4$. Hỏi tấm ván bị võng xuống so với phương ngang một khoảng lớn nhất bao nhiêu cm (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

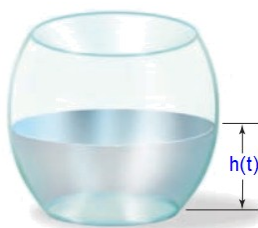


- Câu 36.** Tốc độ giải ngân 2 tỷ tiền trợ cấp $M'(t)$ dành cho một vùng A bị thiệt hại về lũ lụt tỉ lệ thuận với bình phương của $(100 - t)$, trong đó t là thời gian tính bằng ngày $(0 \leq t \leq 100)$ và $M(t)$ là số tiền còn lại chưa giải ngân. Hỏi số tiền còn lại chưa giải ngân sau 40 ngày là bao nhiêu triệu đồng, biết rằng toàn bộ số tiền sẽ được giải ngân trong 100 ngày.
- Câu 37.** Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $V(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Biết rằng $V'(t) = at^2 + bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây, thể tích nước trong bể là $15m^3$, sau 10 giây, thì thể tích trong bể là $110m^3$. Thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây bằng
- Câu 38.** Một bể ban đầu chứa đầy nước, bể có dạng hình trụ với chiều cao bằng 9 m và bán kính đáy bằng 2 m. Nước bắt đầu chảy ra từ một vòi nước ở đáy bể. Gọi $V(t)$ là thể tích chất lỏng đã thoát ra tại thời điểm t (phút) sau khi mở vòi thì $V'(t) = k(45 - t), (0 \leq t \leq 45)$. Biết sau 15 phút độ cao của mực nước trong bể bằng 4 m.

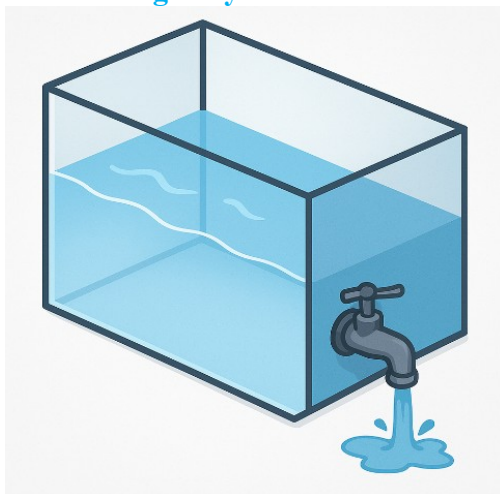


Sau 42 phút, thể tích chất lỏng còn lại trong bể là bao nhiêu lít (làm tròn kết quả đến đơn vị).

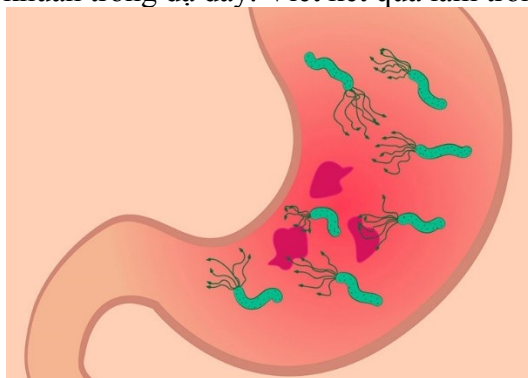
- Câu 39.** Gọi $h(t)(cm)$ là mức nước ở một bồn chứa sau khi bơm nước vào bồn được t giây. Biết rằng $h'(t) = k \cdot \sqrt[3]{t}$ và lúc đầu bồn không có nước. Sau 162 giây, mực nước của bồn là 27 cm. Biết bồn chứa nước cao $12,96m$, hỏi sau bao nhiêu giây bồn chứa nước sẽ đầy.



- Câu 40.** Một bể nước hình hộp chữ nhật cao 1 m và có đáy là hình vuông cạnh 2 m. Ban đầu bể đầy nước. Người ta mở một cái vòi ở đáy, nước chảy ra với tốc độ tỷ lệ thuận với căn bậc hai của độ cao của nước tại bất kì thời điểm nào. Giả sử độ cao của nước trong bể tại thời điểm t là $h(t)$ và $V(t)$ là thể tích của nước hiện tại sau t phút mở vòi thì ta có $V'(t) = k \cdot \sqrt{h(t)} (k \in \mathbb{R})$. Biết rằng, mực nước giảm 19 cm sau 2 phút, hỏi sau bao nhiêu phút thì bể cạn nước.

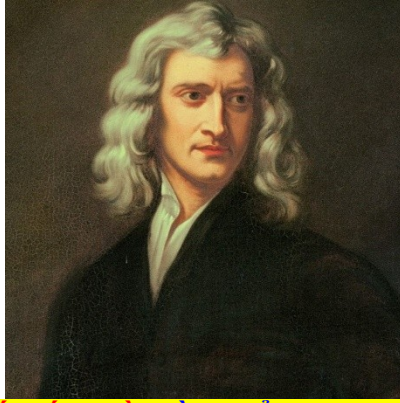


- Câu 41.** Một miếng thịt nướng được lấy ra khỏi ngăn đá của tủ lạnh và để trên bàn để rã đông. Nhiệt độ của miếng thịt nướng khi nó được lấy ra khỏi ngăn đá là -4°C và t giờ sau đó, nhiệt độ của miếng thịt nướng tăng với tốc độ $T'(t) = 7e^{-0,35t}^\circ\text{C}/\text{giờ}$. Nhiệt độ của miếng thịt sau 2 giờ là bao nhiêu $^\circ\text{C}$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).
- Câu 42.** Một cái cây được gieo trồng từ hạt trong một chiếc chậu. Chiều cao của nó sau t (năm) được cho bởi hàm số $h(t)$ (đơn vị mét). Tốc độ thay đổi chiều cao của nó sau t (năm) là $h'(t) = 0,2t + 0,15$ (mét/năm) với $(0 \leq t \leq 4)$. Sau khi trồng được 4 năm, cây được lấy ra khỏi chậu và trồng xuống đất, chiều cao của nó theo thời gian khi này thay đổi với tốc độ $h'(t) = \frac{11}{t}$ ($t \geq 4$). Hỏi sau 4 năm trồng xuống đất cây cao bao nhiêu mét? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).
- Câu 43.** Vi khuẩn HP (*Helicobacter pylori*) gây đau dạ dày sau ngày thứ t ($t \geq 1$) với số lượng là $F(t)$ nếu phát hiện sớm thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết rằng $F'(t) = \frac{1100}{3t} + 1$ và sau 1 ngày bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn trong dạ dày. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày. Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị...



- Câu 44.** Vì nước và dầu không hoà tan vào nhau nên nếu dầu đổ vào nước sẽ tạo thành một màng hình trụ trên bề mặt nước. Bán kính $r(t)$ của màng này lan ra với tốc độ tỉ lệ thuận với chiều cao $h(t)$ của màng dầu. Giả sử một lít dầu bị đổ trên mặt hồ tĩnh lặng. Bán kính ban đầu của vết tràn là 20 cm và sau 2 giây nó tăng lên 50 cm. Hỏi sau bao nhiêu phút (làm tròn đến hàng phần mười) thì bán kính vết tràn đạt 5 mét?
- Câu 45.** Theo định luật làm mát của Newton thì tốc độ làm mát của một vật tỉ lệ thuận với chênh lệch nhiệt độ giữa vật đó và môi trường xung quanh, với điều kiện là chênh lệch này không quá lớn. Giả sử $T(t)$ là nhiệt độ của vật thể (đơn vị: độ C) tại thời điểm t (đơn vị: phút) và T_s là nhiệt độ của môi trường xung quanh, chênh lệch giữa nhiệt độ của vật thể và môi trường xung quanh là $y(t) = T(t) - T_s$ thì $y'(t) = k \cdot y(t)$ với k là hằng số. Một cốc nước đang ở nhiệt độ phòng là 22°C được đưa vào ngăn mát tủ lạnh có nhiệt độ là 5°C . Sau 30 phút, nhiệt độ của cốc nước

được đo lại là $16^{\circ}C$. Hỏi sau một tiếng trong tủ lạnh, nhiệt độ cốc nước là bao nhiêu độ C (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

- Câu 1.** Một gia đình sản xuất chiếu cói ở Nga Sơn mỗi ngày sản xuất được x chiếc chiếu ($0 \leq x \leq 20$). Chi phí biên để sản xuất x chiếc chiếu (tính bằng nghìn đồng) cho bởi hàm số sau: $C'(x) = 3x^2 - 4x + 10$. Biết rằng chi phí cố định ban đầu để sản xuất là 500 nghìn đồng. Giả sử gia đình này bán hết chiếu mỗi ngày với giá 270 nghìn đồng / chiếc chiếu. Tính lợi nhuận tối đa theo đơn vị nghìn đồng mà gia đình đó thu được?



Lời giải

Đáp án: 1300

Chi phí để sản xuất x chiếc chiếu (tính bằng nghìn đồng) là hàm số:

$$C(x) = \int C'(x) dx = \int (3x^2 - 4x + 10) dx = x^3 - 2x^2 + 10x + c$$

Do chi phí cố định ban đầu để sản xuất là 500 nghìn đồng nên $c = 500$

Từ đó ta có lợi nhuận theo đơn vị nghìn đồng mà mỗi ngày gia đình đó thu được là:

$$L(x) = 270x - (x^3 - 2x^2 + 10x + 500) = -x^3 + 2x^2 + 260x - 500$$

$$L'(x) = -3x^2 + 4x + 260 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -\frac{26}{3} \end{cases}$$

Mà $0 \leq x \leq 20$ nên $x = 10$.

Lợi nhuận tối đa mà gia đình đó thu được là: $L(10) = 1300$ (nghìn đồng)

- Câu 2.** Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc tại thời điểm t cho bởi công thức $v(t) = 100 - 9,8t$ (m/s), ($t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên). Tìm độ cao (tính theo km) của viên đạn so với mặt đất ở thời điểm 1 giây sau khi viên đạn đạt độ cao lớn nhất (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: 0,51.

Gọi $h(t)$ là độ cao (tính bằng mét) của viên đạn tại thời điểm t (tính bằng giây).

Ta có: $h(t) = \int v(t) dt = \int (100 - 9,8t) dt = -4,9t^2 + 100t + C$

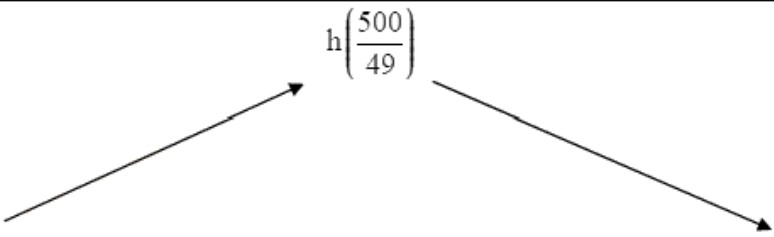
Tại thời điểm $t = 0$, ta có $h(t) = 2 \Rightarrow C = 2$

Vậy $h(t) = -4,9t^2 + 100t + 2$

$h'(t) = -9,8t + 100$;

$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{500}{49}$

BBT:

t	0	$\frac{500}{49}$	$+\infty$
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$			

Từ bảng biến thiên suy ra viên đạn đạt độ cao lớn nhất tại thời điểm $t = \frac{500}{49}$.

Do đó độ cao của viên đạn so với mặt đất ở thời điểm 1 giây sau khi viên đạn đạt độ cao lớn

nhất là $h\left(\frac{500}{49} + 1\right) \approx 507,3 \text{ m} \approx 0,51 \text{ km}$

Câu 3.

Hai công ty, công ty A và công ty B, cùng ra mắt sản phẩm cạnh tranh thị trường mới vào cùng thời điểm. Thị phần được đo bằng số lượng khách hàng lũy kế.

Công ty A: Bắt đầu với 0 khách hàng. Trong giai đoạn đầu, chiến dịch marketing hiệu quả giúp tốc độ thu hút khách hàng mới của họ tăng dần theo thời gian, được mô tả bởi hàm

$f(t) = 2t + 7$ (nghìn khách hàng/tháng), với t là số tháng kể từ khi ra mắt.

Công ty B: Nhờ có uy tín từ trước, họ bắt đầu với 10 nghìn khách hàng đặt trước sản phẩm. Sau đó, họ duy trì một tốc độ thu hút khách hàng mới ổn định là 10 nghìn khách hàng/tháng.

Hỏi sau khoảng bao nhiêu tháng kể từ khi ra mắt, tổng số lượng khách hàng lũy kế của công ty A bằng tổng số lượng khách hàng lũy kế của công ty B (tính cả 10 nghìn khách hàng ban đầu) ?

Lời giải

Đáp án: 5

Gọi $P_A(t)$ là số lượng khách hàng lũy kế của công ty A với t là số tháng kể từ khi ra mắt sản phẩm ($t > 0$)

Ta có $P_A(t) = \int f(t) dt = \int (2t + 7) dt = t^2 + 7t + C$

Công ty A bắt đầu với 0 khách hàng nên $P_A(0) = 0 \Leftrightarrow 0^2 + 7 \cdot 0 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$

Vậy $P_A(t) = t^2 + 7t$

Vì công ty B bắt đầu với 10 nghìn khách hàng đặt trước sản phẩm. Sau đó, họ duy trì một tốc

độ thu hút khách hàng mới ổn định là 10 nghìn khách hàng/tháng, nên số lượng khách hàng lũy kế của công ty B sau t tháng ra mắt sản phẩm là $P_B(t) = 10 + 10t$ ($t > 0$).

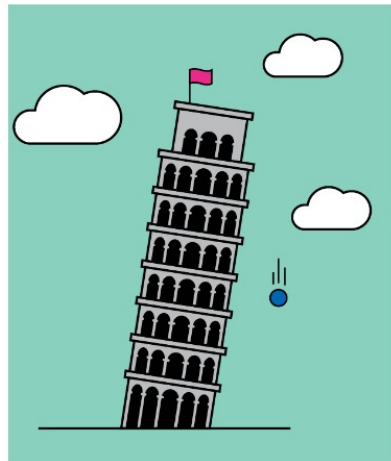
$$P_A(t) = P_B(t) \Leftrightarrow t^2 + 7t = 10 + 10t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -10 \\ t = 5 \end{cases}$$

Ta có

Vì $t > 0$ nên $t = 5$.

Vậy sau 5 tháng ra mắt, tổng số lượng khách hàng lũy kế của công ty A bằng tổng số lượng khách hàng lũy kế của công ty B (tính cả 10 nghìn khách hàng ban đầu).

Câu 4. Người ta thả một vật từ một vị trí trên cao cho rơi xuống mặt đất theo phương thẳng đứng. Biết gia tốc trọng trường tại nơi thả vật bằng $9,8 \text{ m/s}^2$. Giả sử lực tác động của không khí đối với vật trong quá trình rơi là không đáng kể. Biết rằng sau 4 giây thì vật bắt đầu chạm mặt đất. Hỏi vị trí của vật trước khi thả rơi cao bao nhiêu mét so với mặt đất? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Đáp án: 78,4.

Ta có vận tốc của vật $v(t) = \int a dt = \int 9,8 dt = 9,8t + C$ (m/s) với t (giây) là thời gian tính từ lúc bắt đầu thả

Với $t = 0$ thì $v = 0$ nên $C = 0$ suy ra $v(t) = 9,8t$ (m/s).

Độ cao (mét) của vật $h(t) = \int v dt = \int 9,8t dt = 4,9t^2 + C_1$

Với $t = 0$ thì $h = 0$ nên $C_1 = 0$ suy ra $h(t) = 4,9t^2$ (m).

Sau 4 giây thì chạm mặt đất nên độ cao của vật trước khi thả rơi bằng $h(4) = 4,9 \cdot 4^2 = 78,4$ (m)

Câu 5. Người ta quan sát một quần thể vi khuẩn đang tăng trưởng, ban đầu gồm 500 vi khuẩn. Sau một ngày và sau bốn ngày kể từ khi bắt đầu quan sát, số lượng vi khuẩn của quần thể đó tương ứng là 600 vi khuẩn, 1300 vi khuẩn. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t ngày kể từ khi bắt đầu quan sát, $0 \leq t \leq 10$. Người ta ước tính tốc độ tăng trưởng của quần thể

vi khuẩn đó được mô tả bởi $P'(t) = at + b\sqrt{t}$ (vi khuẩn/ngày), trong đó a, b là hằng số. Hỏi số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày kể từ khi bắt đầu quan sát là bao nhiêu?



Lời giải

Đáp án: 3200.

Ta có $P'(t) = at + b\sqrt{t} \Rightarrow P(t) = \int (at + b\sqrt{t}) dt = \frac{1}{2}at^2 + \frac{2}{3}bt\sqrt{t} + C$

Ban đầu gồm 500 vi khuẩn nên $P(0) = 500 \Rightarrow C = 500 \Rightarrow P(t) = \frac{1}{2}at^2 + \frac{2}{3}bt\sqrt{t} + 500$

Sau 1 ngày có 600 vi khuẩn nên $P(1) = 600 \Rightarrow \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b + 500 = 600 \Rightarrow \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b = 100$ (1)

Sau 4 ngày có 1300 vi khuẩn nên $P(4) = 1300 \Rightarrow 8a + \frac{16}{3}b + 500 = 1300 \Rightarrow 8a + \frac{16}{3}b = 800$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $a = 0$ và $b = 150 \Rightarrow P(t) = 100t\sqrt{t} + 500$

Vậy số vi khuẩn sau 9 ngày là $P(9) = 3200$

Câu 6. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao 3 m. Trong các năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}$ (tính theo mét/năm). Chiều cao của cây đó sau 5 năm (làm tròn đến hàng phần mười) bằng bao nhiêu mét?

Lời giải

Trả lời: 5,3

$\int h'(x) dx = \int \frac{\sqrt{2}}{x} dx = \sqrt{2} \ln|x| + C$, suy ra $h(x) = \sqrt{2} \ln|x| + C$

Ta có $h(1) = \sqrt{2} \ln 1 + C = 3$, suy ra $C = 3$. Do đó $h(5) = \sqrt{2} \ln 5 + 3 \approx 5,3(m)$

Câu 7. Cá hồi Thái Bình Dương đến mùa sinh sản thường bơi từ biển ngược dòng vào sông và đến thượng nguồn các dòng sông để đẻ trứng. Giả sử cá bơi ngược dòng sông với vận tốc là $v(t) = -\frac{2t}{5} + 4(km/h)$. Nếu coi thời điểm ban đầu $t = 0$ là lúc cá bắt đầu bơi vào dòng sông thì khoảng cách xa nhất mà con cá có thể bơi được là bao nhiêu km?



Lời giải

Trả lời: 20

Quãng đường con cá bơi được khi bơi ngược dòng là:

$$S(t) = \int v(t)dt = \int \left(-\frac{2t}{5} + 4 \right) dt = -\frac{1}{5}t^2 + 4t + C$$

Vì $S(0) = 0$ nên suy ra $C = 0$.

$$\text{Do đó: } S(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 4t = -\frac{1}{5}(t^2 - 20t + 100) + 20 = -\frac{1}{5}(t-10)^2 + 20 \leq 20$$

Vậy khoảng cách xa nhất mà con cá có thể bơi được là $20km$.

Câu 8.

Một vật được ném lên từ độ cao $300m$ với vận tốc được cho bởi công thức $v(t) = -9,81t + 29,43(m/s)$. Gọi $h(t)(m)$ là độ cao của vật tại thời điểm $t(s)$. Sau bao nhiêu giây kể từ khi bắt đầu được ném lên thì vật đó chạm đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét)?

Lời giải

Trả lời: 11

$$\text{Ta có } h(t) = \int v(t)dt = \int (-9,81t + 29,43)dt = -\frac{9,81}{2}t^2 + 29,43t + C$$

Vì vật được ném lên từ độ cao $300m$ nên $h(0) = 300$. Suy ra $C = 300$.

$$\text{Vậy } h(t) = -\frac{9,81}{2}t^2 + 29,43t + 300$$

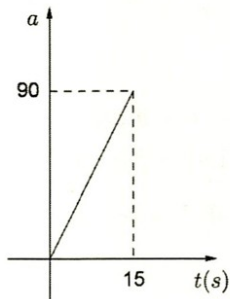
$$\text{Khi vật bắt đầu chạm đất ứng với } h(t) = 0$$

$$-\frac{9,81}{2}t^2 + 29,43t + 300 = 0 \Leftrightarrow t \approx 11 \text{ hoặc } t \approx -5$$

Nên ta có $t \approx 11$ (s).

Câu 9.

Một máy bay đang chuyển động thẳng đều trên mặt đất với vận tốc $v = 3(m/s)$ thì bắt đầu tăng tốc với độ biến thiên vận tốc là hàm số $a(t)$ có đồ thị hàm số là đường thẳng như hình vẽ.



Sau 15s tăng tốc thì máy bay đạt đến vận tốc đủ lớn để phóng khỏi mặt đất. Hãy tính vận tốc (m/s) khi máy bay bắt đầu rời khỏi mặt đất.

Lời giải

Trả lời: 678

Đường thẳng $a(t) = mt + n$ đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và điểm $A(16;90)$ nên suy ra

$$\begin{cases} m \cdot 0 + n = 0 \\ m \cdot 15 + n = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ m = 6 \end{cases} \Rightarrow a(t) = 6t$$

Ta hiểu rằng, nguyên hàm của gia tốc $a(t)$ chính là vận tốc của vật chuyển động. Do đó ta có $v(t) = \int a(t)dt = \int 6t dt = 3t^2 + C$.

Tại thời điểm bắt đầu tăng tốc thì xem như $t = 0$ và vận tốc lúc đó là $v = 3(m/s)$

$$\text{Suy ra } v(0) = 3 \Leftrightarrow 3 \cdot 0^2 + C = 3 \Leftrightarrow C = 3 \Rightarrow v(t) = 3t^2 + 3$$

Vậy vận tốc máy bay đạt được khi bắt đầu phóng khỏi mặt đất là

$$v(15) = 3 \cdot 15^2 + 3 = 678(m/s)$$

Câu 10. Một nghiên cứu chỉ ra rằng sau x tháng kể từ bây giờ, dân số của thành phố A sẽ tăng với tốc độ $v(x) = 10 + 2\sqrt{2x+1}$ (người/tháng). Dân số của thành phố sẽ tăng thêm bao nhiêu trong 4 tháng tới. Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị. Cho biết

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

Lời giải

Trả lời: 57

Gọi $f(x)$ là dân số của thành phố sau x tháng kể từ bây giờ.

Tốc độ thay đổi của dân số là $v(x) = 10 + 2\sqrt{2x+1}$.

Suy ra $f(x) = \int (10 + 2\sqrt{2x+1}) dx = 10x + 2 \int \sqrt{2x+1} dx$.

Do $\int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} d(2x+1) = \frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$, nên ta có

$$f(x) = 10x + \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Số dân trong 4 tháng tới là

$$f(4) - f(0) = 10 \cdot 4 + \frac{2}{3} (2 \cdot 4 + 1)^{\frac{3}{2}} + C - \left(0 + \frac{2}{3} + C \right) \approx 57 \quad (\text{người}).$$

Câu 11. Sản phẩm A có hàm lợi nhuận biên theo sản lượng là $M\pi = -100Q + 1000$. Biết rằng, nếu chỉ bán được 100 sản phẩm thì công ti lỗ 50000 đơn vị tiền tệ (1 đơn vị tiền tệ là 1000 đồng). Ta tìm được hàm lợi nhuận theo Q là một hàm số bậc hai có dạng

$$\pi(Q) = aQ^2 + bQ + c, \text{ tính } 7000a + \frac{b}{1000} + c ?$$

Lời giải

Trả lời: 1

Ta có

$$\pi = \int (-100Q + 1000) dQ = -50Q^2 + 1000Q + C, \quad C \text{ là hằng số.}$$

Vì $\pi(100) = -50000$ đơn vị tiền do bị lỗ, nên ta có

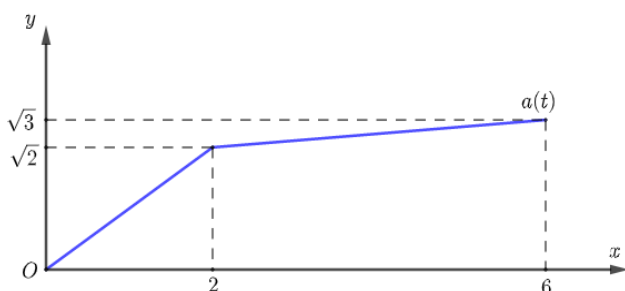
$$\pi(100) = -50(100)^2 + 1000(100) + C = -50000.$$

$$\text{Vậy } C = 350000.$$

Hàm lợi nhuận là $\pi(Q) = -50Q^2 + 1000Q + 350000$

$$\text{Khi đó } 7000a + \frac{b}{1000} + c = 1$$

Câu 12. Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$. Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t = 0$ là $v(0) = 1 \text{ (m/s)}$.



Tại thời điểm $t = 6$ giây, vận tốc của vật là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Trả lời: 8,7

$$a(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}t & , 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}t + \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} & , 2 \leq t \leq 6 \end{cases}$$

Từ đồ thị ta có

$$v(t) = \int a(t) dt = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 + 1 & , 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{8}t^2 + \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}t + C & , 2 \leq t \leq 6 \end{cases}$$

Mà $v(0) = 1 (m/s)$ nên

Vì vận tốc là hàm số liên tục nên

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} v(t) \Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} + C \Leftrightarrow C = \frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2}{2}$$

Do đó $v(6) = 1 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \approx 8,7 (m/s)$

- Câu 13.** Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn tăng giá cho thuê của mỗi gian hàng thêm x (triệu đồng) ($x \geq 0$). Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số $T'(x) = -20x + 300$, trong đó $T'(x)$ tính bằng triệu đồng. Biết rằng nếu người đó tăng giá thuê cho mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là 12000 triệu đồng. Tìm giá trị của x (triệu đồng) để người đó có doanh thu là cao nhất?

Lời giải

Trả lời: 15

Ta có: $T(x) = \int T'(x) dx = \int (-20x + 300) dx = -10x^2 + 300x + C, C \in \mathbb{R}$

Khi người đó tăng giá cho thuê mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là 12000 triệu đồng. Nên ứng với $x=10$ ta có $T(10) = 12000$ suy ra

$$12000 = -10 \cdot 10^2 + 300 \cdot 10 + C \Rightarrow C = 10000.$$

Vậy $T(x) = -10x^2 + 300x + 10000$. Ta có $T(x)$ là một hàm số bậc hai với hệ số $a < 0$ và đồ thị hàm số có đỉnh là $I(15; 12250)$.

Vậy doanh thu cao nhất mà người đó có thể thu về là 12250 triệu đồng và khi đó mỗi gian hàng đã tăng giá cho thuê thêm 15 triệu đồng.

- Câu 14.** Một vật chuyển động với gia tốc được cho bởi hàm số $a(t) = 5 \cos t (m/s^2)$. Lúc bắt đầu chuyển động vật có vận tốc $2,5 m/s$. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất trong $\pi(s)$ đầu tiên.

Lời giải

Trả lời: 0

Vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t) = \int a(t) dt = \int 5 \cos t dt = 5 \sin t + C$

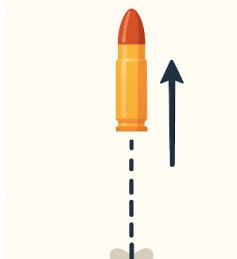
Khi bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc $2,5 m/s$ nên ta có:

$$v(0) = 2,5 \Leftrightarrow 5 \sin 0 + C = 2,5 \Leftrightarrow C = 2,5.$$

Suy ra $v(t) = 5 \sin t + 2,5$. Mà $5 \sin t + 2,5 \leq 7,5$. Vậy vận tốc đạt giá trị lớn nhất tại $t = \frac{\pi}{2}$. Khi

đó, gia tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ là $a\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \left(m/s^2\right)$.

Câu 15. Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc tại thời điểm t ($t=0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên) cho bởi $v(t) = 180 - 9,8t (m/s)$. Tìm độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất) khi nó đạt độ cao cực đại (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải

Trả lời: 1653

Độ cao $h(t)$ của viên đạn tại thời điểm t là

$$h(t) = \int (180 - 9,8t) dt = 180t - 9,8 \frac{t^2}{2} + C = 180t - 4,9t^2 + C.$$

Thay $t=0$ ta được $h(0) = C = 0$. Vậy $h(t) = 180t - 4,9t^2 (m)$.

Viên đạn đạt độ cao cực đại tại thời điểm $t_{\max} = \frac{180}{9,8}$. Khi đó,

$$h_{\max} = 180t_{\max} - 4,9t_{\max}^2 \approx 1653(m).$$

Câu 16. Một hồ nước bị ô nhiễm được xử lý bằng một chất diệt khuẩn. Tốc độ phát triển của số lượng vi

khuẩn sống sót được mô hình bởi $B'(t) = -\frac{3000}{(1+0,2t)^2}, t \geq 0$ với $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước và t là số ngày tính từ khi hồ nước được xử lý. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu là 10000 con/ml nước. Sử dụng mô hình này xác định lượng vi khuẩn sau 5 ngày.

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

Cho biết

Lời giải

Trả lời: 2500

Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn sống sót được mô hình cho bởi công thức đạo hàm

$$B'(t) = -\frac{3000}{(1+0,2t)^2}, t \geq 0$$

Nguyên hàm của $B'(t)$ là hàm $B(t)$ biểu diễn số lượng vi khuẩn sống sót trong ngày thứ t . Ta có

$$\begin{aligned} B(t) &= \int \frac{-3000}{(1+0,2t)^2} dt = -3000 \int (1+0,2t)^{-2} dt \\ &= 15000(1+0,2t)^{-1} + C = \frac{15000}{1+0,2t} + C. \end{aligned}$$

Vì số lượng vi khuẩn ban đầu là 10000 con/ml nước nên ta có

$$B(0) = 10000 \Rightarrow 15000 + C = 10000 \Rightarrow C = -5000.$$

Vậy hàm số biểu thị số lượng vi khuẩn sống sót tại ngày thứ t là

$$B(t) = \frac{15000}{1+0,2t} - 5000.$$

Số vi khuẩn sau 5 ngày sẽ là $B(5) = 2500(\text{con} / \text{ml})$.

- Câu 17.** Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là $h_1 = 280\text{cm}$. Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao nhiêu giây thì nước bơm được $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Cho biết
$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1} + C$$

Lời giải

Trả lời: 7234

Ta biết rằng, chiều cao $h(t)$ của mực nước bơm được chính là nguyên hàm của tốc độ tăng $h'(t)$ của chiều cao mực nước.

$$h(t) = \int h'(t) dt = \int \frac{1}{500} \sqrt[3]{t+3} dt = \frac{3}{2000} (t+3)^{\frac{4}{3}} + C.$$

Lúc ban đầu (tại $t=0$) hồ bơi không chứa nước, nghĩa là

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2000} (0+3)^{\frac{4}{3}} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{3^{\frac{7}{3}}}{2000}.$$

Suy ra mực nước bơm được tại thời điểm t giây là

$$h(t) = \frac{3}{2000} (t+3)^{\frac{4}{3}} - \frac{3^{\frac{7}{3}}}{2000}.$$

Theo giả thiết, lượng nước bơm được bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi nên ta có

$$\begin{aligned} h(t) = \frac{3}{4} h_1 &\Leftrightarrow \frac{3}{2000} (t+3)^{\frac{4}{3}} - \frac{3^{\frac{7}{3}}}{2000} = \frac{3}{4} \cdot 280 \\ &\Leftrightarrow (t+3)^{\frac{4}{3}} = 140004,33 \\ &\Leftrightarrow t \approx 7234 \text{ (s)}. \end{aligned}$$

- Câu 18.** Đối với các dự án xây dựng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng công nhân được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi $M(t)$ là số ngày công được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t) = m(t)$. Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số $m(t) = 800 - 2t$, trong đó t tính theo ngày ($0 \leq t \leq 400$), $m(t)$ tính theo người. Đơn giá cho một ngày công lao động là 400000 đồng. Tính chi phí (tỷ đồng) nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành).

Lời giải

Trả lời: 64

$$\int m(t) dt = \int (800 - 2t) dt = 800t - t^2 + C$$

Tại $t=0$ thì $M(t) = 0 \Leftrightarrow C = 0$

$$\text{Vậy } M(t) = 800t - t^2$$

Số ngày công tính đến khi hoàn thành dự án là: $M(400) = 800.400 - 400^2 = 160000$ (ngày)

Chi phí nhân công lao động của công trình đó là: $160000.400000 = 64$ tỷ VND

Câu 19. Một quần thể vi sinh vật có tốc độ tăng số lượng cá thể được ước lượng bởi

$P'(t) = 150\sqrt{t}$ (cá thể/ngày) với $0 \leq t \leq 10$ trong đó $P(t)$ là số lượng cá thể vi sinh vật tại thời điểm t ngày kể từ thời điểm ban đầu. Biết rằng ban đầu quần thể có 1000 cá thể.

Ước lượng số cá thể của quần thể sau 5 ngày kể từ thời điểm ban đầu (kết quả làm tròn đến hàng trăm).

Lời giải

Trả lời: 2100

$$P(t) = \int P'(t) dt = \int 150\sqrt{t} dt = 150 \int t^{\frac{1}{2}} dt = 150 \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = 100t\sqrt{t} + C$$

Theo giả thiết, ta có $P(0) = 1000$, suy ra $C = 1000$.

Do đó $P(t) = 100t\sqrt{t} + 1000$

$$P(5) = 100 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} + 1000 = 500\sqrt{5} + 1000 \approx 2100 \text{ (cá thể)}.$$

Câu 20. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng (có gắn trục tọa độ Ox với độ dài đơn vị bằng 1m). Biết rằng vật chuyển động với vận tốc (tính theo m/s) là $v(t) = 2t - t^2$ ($0 \leq t \leq 10$, tính theo giây) và lúc đầu vật ở vị trí có tọa độ $x_0 = 2$. Tại thời điểm $t = 6$ giây, vật cách vị trí ban đầu bao xa?

Lời giải

Trả lời: 36

$$\text{Ta có } x(t) = \int v(t) dt = \int (2t - t^2) dt = 2 \int t dt - \int t^2 dt = t^2 - \frac{t^3}{3} + C$$

Theo giả thiết, $x(0) = x_0 = 2$, suy ra $C = 2$.

$$\text{Vậy } x(t) = t^2 - \frac{t^3}{3} + 2, 0 \leq t \leq 10$$

$$\text{Ta có } |x(6) - x(0)| = \left| 6^2 - \frac{6^3}{3} + 2 - 2 \right| = |-36| = 36$$

Vậy tại thời điểm $t = 6$, vật cách vị trí ban đầu 36 m.

Câu 21. Giả sử tốc độ tăng trưởng của một quần thể muỗi thỏa mãn công thức

$N'(t) = 0,2N(t), 0 \leq t \leq 5$, trong đó t là thời gian tính theo ngày, $N(t)$ là số cá thể muỗi tại thời điểm t . Biết rằng ban đầu quần thể muỗi có 2000 cá thể. Đặt $y(t) = \ln N(t), 0 \leq t \leq 5$. Chứng tỏ rằng $y'(t) = 0,2$. Từ đó, tìm được $N(t)$ với $0 \leq t \leq 5$.

Khí đó, hãy tìm số lượng cá thể của quần thể muỗi sau 3 ngày (kết quả làm tròn đến hàng trăm).

Lời giải

Trả lời: 3600

$$y'(t) = [\ln N(t)]' = \frac{N'(t)}{N(t)} = \frac{0,2N(t)}{N(t)} = 0,2$$

$$\text{Suy ra } y(t) = \int y'(t) dt = \int 0,2 dt = 0,2t + C$$

Do đó, $\ln N(t) = 0,2t + C$, suy ra $N(t) = e^{0,2t+C} = C_0 \cdot e^{0,2t}$ (với $C_0 = e^C$).

Ta có $N(0) = 2000$, suy ra $C_0 = 2000$, suy ra $N(t) = 2000 \cdot e^{0,2t}, 0 \leq t \leq 5$.

$N(3) = 2000 \cdot e^{0,2 \cdot 3} \approx 3600$ (cá thể).

- Câu 22.** Trong một dịch cúm, tốc độ tăng số trường hợp mắc bệnh của một thành phố được ước lượng bởi $N'(t) = 10 \cdot e^{0,2t}$ (trường hợp/ngày) trong đó $N(t)$ là số trường hợp mắc bệnh sau thời gian t ngày kể từ khi bắt đầu dịch. Biết rằng thời điểm bắt đầu dịch có 5 trường hợp mắc bệnh. Ước lượng số trường hợp mắc bệnh của thành phố sau 10 ngày dịch bắt đầu.

Lời giải

Trả lời: 324

Ta có
$$N(t) = \int N'(t) dt = \int 10 \cdot e^{0,2t} dt = 10 \int (e^{0,2})^t dt = 10 \cdot \frac{e^{0,2t}}{\ln e^{0,2}} + C = 50 \cdot e^{0,2t} + C.$$

Theo giả thiết, $N(0) = 5$ suy ra $50 + C = 5$, suy ra $C = -45$.

Vậy $N(t) = 50 \cdot e^{0,2t} - 45$.

$N(10) = 50 \cdot e^{0,2 \cdot 10} - 45 \approx 324$ (trường hợp).

Vậy sau 10 ngày kể từ khi dịch bắt đầu, thành phố có khoảng 324 trường hợp mắc bệnh.

- Câu 23.** Khi nghiên cứu dịch sốt xuất huyết ở một địa phương, các chuyên gia y tế ước tính rằng tại ngày thứ m có $F(m)$ người mắc bệnh (sau khi đã làm tròn đến chữ số hàng đơn vị). Biết rằng

tốc độ lan truyền bệnh là $F'(m) = \frac{150}{2m+1}$ và ngày đầu tiên ($m=0$) người ta phát hiện ra 50 bệnh nhân. Hãy xác định số người mắc bệnh ở ngày thứ 10.

Lời giải

Trả lời: 278

Từ giả thiết ta có

$$F(m) = \int F'(m) dm = \int \frac{150}{2m+1} dm = 75 \ln |2m+1| + C$$

$$F(0) = C = 50$$

$$\text{Vậy } F(m) = 75 \ln |2m+1| + 50.$$

Số người mắc bệnh ở ngày thứ 10 là: $F(10) \approx 278$.

- Câu 24.** Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t) = -0,1t^3 + t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét/tuần. Gọi $h(t)$ là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t . Vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì cây cà chua cao bao nhiêu centimét? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

Đáp số: 88,3.

Ta có: $h(t) \int (-0,1t^3 + t^2) dt = \int -0,1t^3 dt + \int t^2 dt = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + C$.

Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm nên $h(0) = 5$, suy ra $C = 5$.

Do đó $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + 5$.

Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + 5$ với $t \in [0; 10]$.

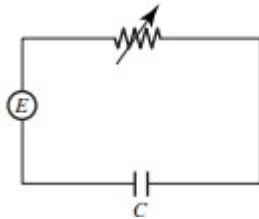
Ta có: $h'(t) = \frac{-t^3}{10} + t^2 = \frac{t^2}{10}(-t + 10)$, suy ra $h'(t) = 0$ khi t bằng 0 hoặc 10.

Ta thấy $h(0) = 5, h(10) = \frac{265}{3}$. Khi đó, $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{265}{3}$ trên đoạn $[0; 10]$.

Vậy chiều cao tối đa của cây cà chua đó là $\frac{265}{3} \approx 88,3$ (cm).

Câu 25. Cường độ dòng điện trong một dây dẫn tại thời điểm t giây là:

$I(t) = Q'(t) = 3t^2 - 6t + 5$, với $Q(t)$ là điện lượng truyền trong dây dẫn tại thời điểm t . Biết khi $t = 1$ giây, điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q(1) = 4$. Tính điện lượng truyền trong dây dẫn khi $t = 3$.



Lời giải

Đáp số: 16.

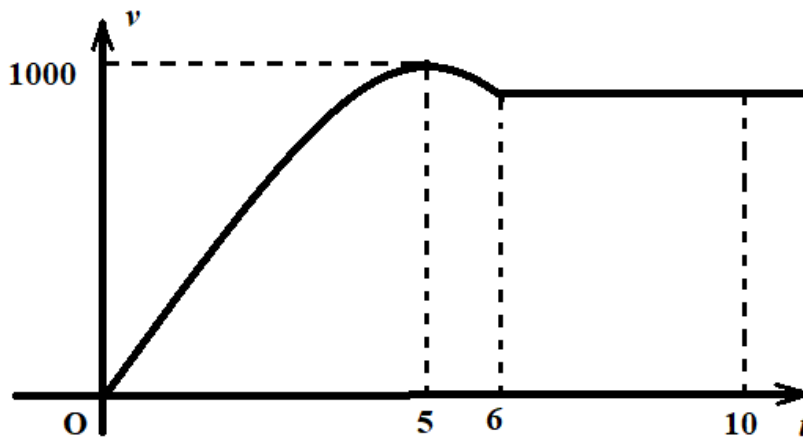
Ta có: $Q(t) = \int Q'(t) dt = \int (3t^2 - 6t + 5) dt = t^3 - 3t^2 + 5t + C$.

Do $Q(1) = 4$ nên $1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + C = 4 \Rightarrow C = 1$

Như vậy $Q(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 1$.

Vậy $Q(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 1 = 16$.

Câu 26. Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình bên dưới. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm vận tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều.



Hỏi quãng đường xe đã đi được trong khoảng 10 phút đầu tiên là bao nhiêu mét?

Lời giải

Trả lời: 8160

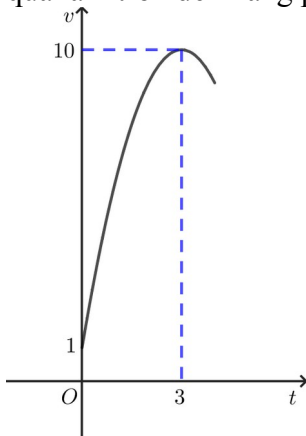
Dựa vào đồ thị ta có phương trình vận tốc của ô tô là $v(t) = -40t^2 + 400t$ với $t \in [0; 6]$ và $v = 960$ với $t > 6$. Trong khoảng 6 phút đầu phương trình quãng đường là $S(t) = \int (-40t^2 + 400t) dt = -\frac{40}{3}t^3 + 200t^2 + C$.

Tại thời điểm xe ô tô xuất phát ta có $t_0 = 0$ và $S(t_0) = 0$ suy ra $C = 0$ nên phương trình quãng đường là $S(t) = -\frac{40}{3}t^3 + 200t^2$.

Trong khoảng 6 phút đầu ô tô đi được quãng đường là $S(6) = 4320m$ và 4 phút tiếp theo ô tô đi được quãng đường là $960 \times 4 = 3840m$.

Vậy quãng đường ô tô đi được trong 10 phút đầu là $4320 + 3840 = 8160m$.

Câu 27. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc là một đường parabol có đỉnh $I(3; 10)$ và trục đối xứng vuông góc với trục hoành như hình vẽ. Tính quãng đường vật di chuyển được trong nửa thời gian sau của chuyển động đó (kết quả làm tròn đến hàng phần chục và tính theo đơn vị km)



Lời giải

Đáp số: 19,3

Dựa vào đồ thị ta tìm được vận tốc $v(t) = -t^2 + 6t + 1, t \in [0; 4]$.

Quãng đường $s(t)$ vật di chuyển được trong thời gian 4h là một nguyên hàm của $v(t), t \in [0; 4]$

Ta có $s(t) = \int (-t^2 + 6t + 1) dt = -\frac{t^3}{3} + 3t^2 + t + C$.

Quãng đường vật di chuyển được trong 2h đầu là $s(2) = \frac{34}{3} + C(\text{km})$.

Quãng đường vật di chuyển được trong 4h là $s(4) = \frac{92}{3} + C(\text{km})$.

Quãng đường vật di chuyển được trong nửa thời gian sau của chuyển động là:
 $s(4) - s(2) = \frac{58}{3}(\text{km}) \approx 19,3(\text{km})$.

Câu 28. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ (m^3/s) và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể là bao nhiêu m^3 sau khi bơm được 20 giây.

Lời giải

Trả lời: 8400

Ta có: $h'(t) = 3at^2 + bt$

$$\Rightarrow h(t) = \int (3at^2 + bt) dt = at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + C \Rightarrow h(t) = at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + C$$

$$t = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow h(t) = at^3 + \frac{1}{2}bt^2$$

Chọn

$$\text{Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là } 150m^3: h(5) = 150 \Leftrightarrow 125a + \frac{25}{2}b = 150$$

$$\text{Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là } 1100m^3: h(10) = 1100 \Leftrightarrow 1000a + 50b = 1100$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} 125a + \frac{25}{2}b = 150 \\ 1000a + 50b = 1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(t) = t^3 + t^2$$

$$\text{Nên thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là } h(20) = 20^3 + 20^2 = 8400m^3$$

Câu 29. Doanh thu bán hàng của một doanh nghiệp khi bán một loại sản phẩm là số tiền $R(x)$ (triệu đồng) thu được khi x đơn vị sản phẩm được bán ra. Tốc độ biến động (thay đổi) của doanh thu khi x đơn vị sản phẩm đã được bán là hàm số $M_R(x) = R'(x)$. Đại diện của doanh nghiệp cho biết tốc độ biến đổi của doanh thu khi bán một loại sản phẩm được cho bởi $M_R(x) = 500 - 0,1x$, ở đó x là số lượng sản phẩm đã bán. Tìm doanh thu của doanh nghiệp khi đã bán 2000 sản phẩm là bao nhiêu trăm triệu đồng?

Lời giải

Trả lời: 800

$$R(x) = \int M_R(x) dx = \int (500 - 0,1x) dx = 500x - \frac{1}{20}x^2 + C$$

Doanh thu của doanh nghiệp là

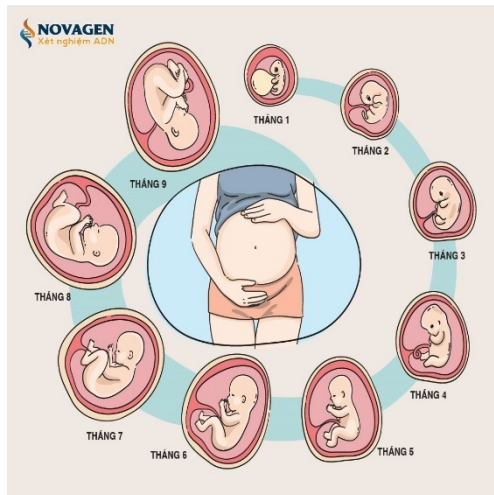
$$\text{Vì } R(0) = 0 \text{ nên } C = 0. \text{ Vậy } R(x) = 500x - \frac{1}{20}x^2$$

Doanh thu của doanh nghiệp khi bán 2000 sản phẩm là:

$$R(2000) = 500.2000 - \frac{1}{20}.2000^2 = 800\,000 \text{ triệu đồng.}$$

Câu 30. Trọng lượng của một bào thai người nặng khoảng 0,04 ounce (1 ounce = 28,3485 gram) sau 8 tuần tuổi. Trong suốt 35 tuần tiếp theo, trọng lượng của bào thai này được dự đoán tăng với tốc

độ $B'(t) = \frac{2436e^{-0,193t}}{(1 + 784e^{-0,193t})^2}$, $8 \leq t \leq 43$ với $B(t)$ là cân nặng tính bằng ounce và t là thời gian tính bằng tuần. Hãy tính trọng lượng của bào thai sau 25 tuần tuổi (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần trăm).



Lời giải

Trả lời: 2,15

Theo giả thiết, trọng lượng của bào thai này được dự đoán tăng với tốc độ là hàm số $B'(t)$, nên $B(t)$ chính là nguyên hàm của $B'(t)$:

$$B(t) = \int B'(t) dt = \int \frac{2436e^{-0,193t}}{(1 + 784e^{-0,193t})^2} dt$$

$$\text{Đặt } u = 1 + 784e^{-0,193t}$$

$$\Rightarrow du = 784 \cdot (-0,193) \cdot e^{-0,193t} dt = -151,312e^{-0,193t} dt$$

$$B(t) = -\frac{2436}{151,312} \int \frac{du}{u^2} = \frac{2436}{151,312u} + C = \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-0,193t})} + C.$$

Sau 8 tuần tuổi thì bào thai cân nặng khoảng 0,04 ounce nên:

$$B(8) = 0,04 \Leftrightarrow \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-0,193 \cdot 8})} + C = 0,04 \Leftrightarrow C = 0,04 - \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-1,544})}$$

Do đó ta có hàm số cân nặng của bào thai là:

$$B(t) = \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-0,193t})} + 0,04 - \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-1,544})}, \quad 8 \leq t \leq 43.$$

Cân nặng của bào thai sau 25 tuần tuổi là:

$$B(25) = \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-0,193 \cdot 25})} + 0,04 - \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-1,544})} \approx 2,15$$

Câu 31. Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số

$$B'(t) = \frac{1000}{(1 + 0,3t)^2}, \quad t \geq 0, \text{ trong đó } B(t) \text{ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ } t.$$

Số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì người ta phải xử lý và thay nước mới cho hồ bơi.

Trả lời: 10

Theo giả thiết, số lượng vi khuẩn tăng với tốc độ là hàm số $B'(t)$, nên $B(t)$ chính là nguyên hàm của $B'(t)$:

$$B(t) = \int B'(t) dt = \int \frac{1000}{(1+0,3t)^2} dt = 1000 \int (1+0,3t)^{-2} dt = -\frac{1000}{0,3(1+0,3t)} + C$$

Số lượng vi khuẩn lúc ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước nên:

$$B(0) = 500 \Leftrightarrow -\frac{1000}{0,3(1+0,3 \cdot 0)} + C = 500 \Leftrightarrow C = \frac{11500}{3}.$$

Suy ra hàm số biểu thị cho số lượng vi khuẩn tại ngày thứ t là:

$$B(t) = -\frac{1000}{0,3(1+0,3t)} + \frac{11500}{3}.$$

Số lượng vi khuẩn dưới 3000 con trên mỗi ml nước thì người bơi vẫn an toàn, ta có:

$$B(t) < 3000 \Leftrightarrow -\frac{1000}{0,3(1+0,3t)} + \frac{11500}{3} < 3000$$

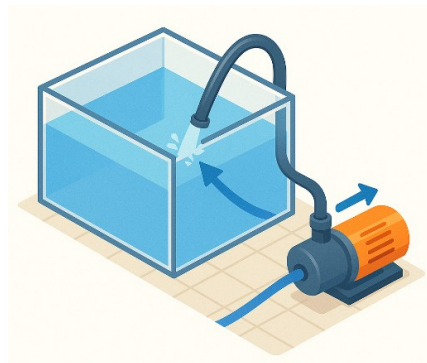
$$\Leftrightarrow -\frac{1000}{0,3(1+0,3t)} < -\frac{2500}{3} \Leftrightarrow 1+0,3t < 4 \Leftrightarrow t < 10.$$

Vậy vào ngày thứ 10 hồ bơi không còn an toàn, cần phải thay nước mới.

Câu 32. Một hồ bơi có dạng hình hộp chữ nhật có chiều cao $3,0(\text{m})$ đang không chứa nước. Người ta cần thay nước mới cho hồ bơi nên dùng máy bơm để bơm nước vào hồ, giả sử $h(t)(\text{m})$ là chiều cao của mực nước đã được bơm vào tại thời điểm t giờ. Biết rằng tốc độ tăng chiều cao

$$h'(t) = \frac{\sqrt[3]{t+3}}{5}$$

của mực nước tại giờ thứ t kể từ lúc bắt đầu bơm nước vào hồ là $h'(t)$. Hỏi sau bao nhiêu giờ kể từ lúc bắt đầu bơm thì hồ đạt được độ sâu $2,1(\text{m})$ (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Trả lời : 6

$$* \quad h(t) = \int h'(t) dt = \frac{1}{5} \int (t+3)^{\frac{1}{3}} dt = \frac{3}{20} (t+3)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$* \quad h(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{9\sqrt[3]{3}}{20} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{9\sqrt[3]{3}}{20} \rightarrow h(t) = \frac{3}{20} (t+3)^{\frac{4}{3}} - \frac{9\sqrt[3]{3}}{20}$$

$$* \quad h(t) = 2,1 \Leftrightarrow \frac{3}{20} (t+3)^{\frac{4}{3}} - \frac{9\sqrt[3]{3}}{20} = 2,1 \Leftrightarrow (t+3)^{\frac{4}{3}} \approx 18,33 \rightarrow t \approx 6$$

Vậy sau khi bơm khoảng 6 giờ thì độ sâu của mực nước trong hồ là 2,1 (m).

- Câu 33.** Một xe ô tô đang chuyển động đều thì người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường. Sau 1 giây thì người lái xe bắt đầu đạp phanh. Ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -5 \text{ m/s}^2$. Biết rằng kể từ lúc nhìn thấy chướng ngại vật cho đến khi dừng hẳn thì xe đi thêm được quãng đường 41,6 mét. Vận tốc của xe khi người lái xe bắt đầu phanh là bao nhiêu m/s ?



Lời giải

Kết quả: 16

Gọi vận tốc của xe khi bắt đầu phanh là $v_0 \text{ (m/s)}$

Vận tốc tại thời điểm t kể từ lúc bắt đầu phanh là: $v(t) = \int (-5) dt = -5t + C$

Vận tốc của vật tại thời điểm bắt đầu phanh xe là $v_0 \text{ (m/s)}$ nên ta có $v(0) = v_0 \Rightarrow C = v_0 \Rightarrow v(t) = -5t + v_0$

Quãng đường vật đi được tại thời điểm t kể từ khi bắt đầu đạp phanh là $S(t) = \int v(t) dt$
 $= \int (-5t + v_0) dt = -\frac{5}{2}t^2 + v_0t + C$

Ta có $S(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow S(t) = -\frac{5}{2}t^2 + v_0t$

Khi xe dừng hẳn ta có $v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + v_0 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{5}$

Quãng đường xe đi được từ khi bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là

$$S = S\left(\frac{v_0}{5}\right) = -\frac{5}{2}\left(\frac{v_0}{5}\right)^2 + \frac{v_0^2}{5} = \frac{v_0^2}{10} \text{ (m)}$$

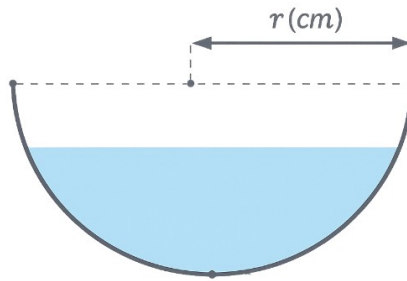
Quãng đường người lái xe đi từ khi nhìn thấy chướng ngại vật đến khi đạp phanh là $v_0 \text{ (m)}$

Theo bài ra ta có phương trình $\frac{v_0^2}{10} + v_0 = 41,6$

Giải phương trình ta được $\begin{cases} v_0 = 16 \\ v_0 = -26 \end{cases}$

Vậy vận tốc khi người lái xe bắt đầu phanh là 16 (m/s)

- Câu 34.** Nước bốc hơi từ một bát hình bán cầu có bán kính $r \text{ (cm)}$ với tốc độ $V'(t) = -r^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giờ. Giả sử bán kính của bát là $r = 10 \text{ cm}$ và ban đầu (lúc $t = 0$) bát chứa đầy nước. Hỏi sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục) thì bát cạn nước?



Lời giải

Trả lời: 20,9

Vì bát có dạng là 1 nửa hình cầu với bán kính $r = 10 \text{ cm}$ nên ta có thể tích của bát khi chứa đầy

nước là
$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 10^3 = \frac{2000\pi}{3} (\text{cm}^3)$$

Theo định nghĩa nguyên hàm, ta có lượng nước trong bát là

$$V(t) = \int V'(t) dt = \int (-r^2) dt = -r^2 t + C$$

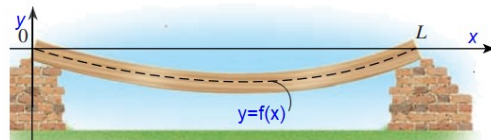
Biết tại thời điểm ban đầu ($t = 0$) thì bát đầy nước nên ta có $V(0) = \frac{2000\pi}{3} \Leftrightarrow C = \frac{2000\pi}{3}$.

Suy ra
$$V(t) = -10^2 t + \frac{2000\pi}{3}, \quad (r = 10)$$

Bát cạn nước khi $V(t) = 0 \Leftrightarrow -10^2 t + \frac{2000\pi}{3} = 0 \Rightarrow t \approx 20,9$ giờ.

Câu 35. Một tấm ván gỗ chỉ được hỗ trợ ở hai đầu O và L , cách nhau 4 m. Tấm ván võng xuống dưới do trọng lượng của nó tạo thành một đường cong. Xét trên hệ trục Oxy như hình vẽ dưới, đơn vị mỗi trục là mét, đường cong trong hình vẽ có phương trình $y = f(x)$.

Khi đó $f''(x) = \frac{1}{350}(12x - 3x^2)$ với $0 \leq x \leq 4$. Hỏi tấm ván bị võng xuống so với phương ngang một khoảng lớn nhất bao nhiêu cm (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải

Trả lời: 5,7

Khoảng võng xuống lớn nhất so với phương ngang của tấm ván là bằng với $f(x)$ min. Do đó,

ta cần đi tìm hàm $f(x)$. Và ta sẽ sử dụng các công thức
$$\begin{cases} f'(x) = \int f''(x) dx \\ f(x) = \int f'(x) dx \end{cases}$$
 để tìm được hàm $f(x)$. Thực hiện như sau:

Ta có
$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int \left(\frac{1}{350}(12x - 3x^2) \right) dx = \frac{1}{350} \left(\frac{12}{2} x^2 - x^3 \right) + C = \frac{1}{350} (6x^2 - x^3) + C$$

Tiếp đến, ta có
$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(\frac{1}{350} (6x^2 - x^3) + C \right) dx = \frac{1}{350} \left(\frac{6}{3} x^3 - \frac{x^4}{4} \right) + Cx + D$$

$$= \frac{x^3}{175} - \frac{x^4}{1400} + Cx + D$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ \frac{4^3}{175} - \frac{4^4}{1400} + 4C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ C = -\frac{8}{175} \end{cases}$$

Dựa vào hình vẽ, ta có

Suy ra
$$f(x) = \frac{x^3}{175} - \frac{x^4}{1400} - \frac{8}{175}x$$

Xét hàm số
$$f(x) = \frac{x^3}{175} - \frac{x^4}{1400} - \frac{8}{175}x$$
 trên đoạn $[0; 4]$

Ta

có

$$f'(x) = \frac{1}{350}(6x^2 - x^3) - \frac{8}{175} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{350}(6x^2 - x^3) = \frac{8}{175} \Leftrightarrow 6x^2 - x^3 = 16 \Leftrightarrow -x^3 + 6x^2 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2\sqrt{3}(L) \\ x = 2 + 2\sqrt{3}(L) \\ x = 2(tm) \end{cases}$$

$$f(0) = f(4) = 0; f(2) = -\frac{2}{35} \approx -0,057.$$

Vậy tấm ván bị võng xuống so với phương ngang một khoảng lớn nhất là $0,057m$ hay $5,7cm$.

Câu 36. Tốc độ giải ngân 2 tỷ tiền trợ cấp $M'(t)$ dành cho một vùng A bị thiệt hại về lũ lụt tỉ lệ thuận với bình phương của $(100 - t)$, trong đó t là thời gian tính bằng ngày ($0 \leq t \leq 100$) và $M(t)$ là số tiền còn lại chưa giải ngân. Hỏi số tiền còn lại chưa giải ngân sau 40 ngày là bao nhiêu triệu đồng, biết rằng toàn bộ số tiền sẽ được giải ngân trong 100 ngày.

Lời giải

Trả lời: 432

Vì $M'(t)$ tỉ lệ thuận với bình phương của $(100 - t)$, nên ta có

$$\frac{M'(t)}{(100 - t)^2} = k \Rightarrow M'(t) = k(100 - t)^2$$

Theo công thức nguyên hàm, ta có

$$M(t) = \int M'(t) dt = \int k(100 - t)^2 dt = \int k(10000 - 200t + t^2) dt = k \left(10000t - 100t^2 + \frac{t^3}{3} \right) + C$$

Từ giả thiết, ta có số tiền còn lại chưa giải ngân tại thời điểm $t = 0$ là bằng 2000 triệu đồng $\Rightarrow M(0) = 2000 \Leftrightarrow C = 2000$.

$$M(t) = k \left(10000t - 100t^2 + \frac{t^3}{3} \right) + 2000$$

Khi đó

Vì toàn bộ số tiền sẽ được giải ngân trong 100 ngày nên ta có

$$M(100) = 0 \Leftrightarrow k \left(10000 \cdot 100 - 100 \cdot 100^2 + \frac{100^3}{3} \right) + 2000 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-2000}{10000 \cdot 100 - 100 \cdot 100^2 + \frac{100^3}{3}}$$

$$\Leftrightarrow k = -0,006$$

$$M(t) = -0,006 \left(10000t - 100t^2 + \frac{t^3}{3} \right) + 2000 = -0,002t^3 + 0,6t^2 - 60t + 2000$$

Suy ra

Vậy số tiền còn lại chưa giải ngân sau 40 ngày là $M(40) = 432$ (triệu đồng)

- Câu 37.** Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $V(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Biết rằng $V'(t) = at^2 + bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây, thể tích nước trong bể là $15m^3$, sau 10 giây, thì thể tích trong bể là $110m^3$. Thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây bằng

Lời giải

Trả lời: 220

Ta có
$$V(t) = \int (at^2 + bt) dt = \frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2} + C$$

Lúc đầu, bể không có nước, nên $V(0) = 0$, suy ra $C = 0$, và
$$V(t) = \frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2}$$

Sau 5 giây, thể tích nước trong bể là $15m^3$, nên ta có
$$\frac{a \cdot 5^3}{3} + \frac{b \cdot 5^2}{2} = 15$$

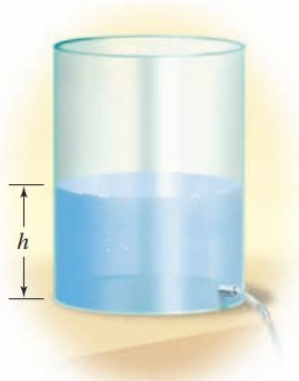
Sau 10 giây, thể tích nước trong bể là $110m^3$, nên ta có
$$\frac{a \cdot 10^3}{3} + \frac{b \cdot 10^2}{2} = 110$$

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{a \cdot 5^3}{3} + \frac{b \cdot 5^2}{2} = 15 \\ \frac{a \cdot 10^3}{3} + \frac{b \cdot 10^2}{2} = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{10} \\ b = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$V(20) = \frac{20^3}{10} + \frac{20^2}{10} = 840m^3$$

Thể tích của bể sau 20 giây là

- Câu 38.** Một bể ban đầu chứa đầy nước, bể có dạng hình trụ với chiều cao bằng 9 m và bán kính đáy bằng 2 m. Nước bắt đầu chảy ra từ một vòi nước ở đáy bể. Gọi $V(t)$ là thể tích chất lỏng đã thoát ra tại thời điểm t (phút) sau khi mở vòi thì $V'(t) = k(45 - t)$, $(0 \leq t \leq 45)$. Biết sau 15 phút độ cao của mực nước trong bể bằng 4 m.



Sau 42 phút, thể tích chất lỏng còn lại trong bể là bao nhiêu lít (làm tròn kết quả đến đơn vị).

Lời giải

Theo đề bài, ta có:

Chiều cao bể $H = 9m$

Bán kính đáy bể $R = 2m$

Thể tích ban đầu của bể: $V_{bc} = \pi R^2 H = \pi(2^2)(9) = 36\pi(m^3)$

Tốc độ thoát nước: $V'(t) = k(45 - t)(m^3 / phút)$

Sau 15 phút, độ cao mực nước trong bể là 4 m.

$V(t)$ là thể tích chất lỏng đã thoát ra tại thời điểm t (phút) sau khi mở vòi.

Lấy nguyên hàm: $V(t) = \int V'(t)dt = \int k(45-t)dt$

$$V(t) = k \int (45-t)dt = k \left(\int 45dt - \int tdt \right) \Rightarrow V(t) = k \left(45t - \frac{t^2}{2} \right) + C$$

Biết tại thời điểm ban đầu ($t=0$) bể đầy nước nên $V(0)=0$

$$\Rightarrow V(0) = k \left(45 \cdot 0 - \frac{0^2}{2} \right) + C = 0 \Rightarrow C = 0 \quad V(t) = k \left(45t - \frac{t^2}{2} \right)$$

Vậy

Sau 15 phút, độ cao mực nước trong bể là 4 m, vậy nước thoát ra là 5 m.

$$\text{Thể tích nước còn lại sau 15 phút là: } V(15) = \pi R^2 h(15) = \pi (2^2)(4) = 16\pi (m^3)$$

$$\text{Thể tích nước đã thoát ra sau 15 phút là: } V(15) = V_{\text{bể}} - V_{\text{còn lại}} = 36\pi - 16\pi = 20\pi$$

Thay $t=15$ và $V(15)=20\pi$ vào công thức $V(t)$:

$$\Rightarrow 20\pi = k \left(45 \cdot 15 - \frac{15^2}{2} \right) \Rightarrow k(562,5) = 20\pi \Rightarrow k = \frac{8\pi}{225} \Rightarrow V(t) = \frac{8\pi}{225} \left(45t - \frac{t^2}{2} \right)$$

$$\text{Tính } V(42): \quad V(42) = \frac{8\pi}{225} \left(45 \cdot 42 - \frac{42^2}{2} \right) = \frac{8064\pi}{225} (m^3).$$

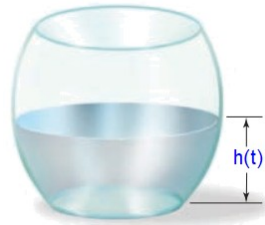
$$\text{Vậy thể tích chất lỏng còn lại trong bể là: } V = 36\pi - \frac{8064\pi}{225} = \frac{36\pi}{225} = \frac{4\pi}{25} (m^3)$$

$$\Rightarrow V = \frac{4\pi}{25} \cdot 1000 = 160\pi \approx 503(l)$$

Đổi:

Kết quả: Sau 42 phút, thể tích chất lỏng còn lại trong bể là khoảng 503 lít.

Câu 39. Gọi $h(t)(cm)$ là mức nước ở một bồn chứa sau khi bơm nước vào bồn được t giây. Biết rằng $h'(t) = k \cdot \sqrt[3]{t}$ và lúc đầu bồn không có nước. Sau 162 giây, mực nước của bồn là 27 cm. Biết bồn chứa nước cao $12,96m$, hỏi sau bao nhiêu giây bồn chứa nước sẽ đầy.



Lời giải

Trả lời: 2954

$$\text{Theo bài ta có: } h'(t) = k \cdot \sqrt[3]{t} \Rightarrow h(t) = \frac{3}{4} k \cdot t^{\frac{4}{3}} + c$$

$$\text{Tại: } t=0 \rightarrow h=0 \Rightarrow c=0$$

$$\text{Tại: } t=162 \rightarrow h=27cm$$

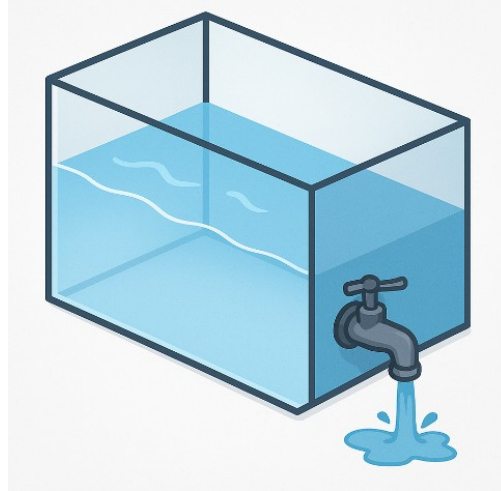
$$\text{Ta đổi: } 12,96m = 1296cm$$

$$\Rightarrow h(162) = \frac{3}{4} k \cdot 162^{\frac{4}{3}} = 27 \Rightarrow \frac{h(t)}{h(162)} = \frac{1296}{27} \Leftrightarrow \frac{\frac{3}{4} k \cdot t^{\frac{4}{3}}}{\frac{3}{4} k \cdot 162^{\frac{4}{3}}} = \left(\frac{t}{162} \right)^{\frac{4}{3}} = \frac{1296}{27} \Leftrightarrow t \approx 2954$$

$$\text{Đáp án: } \Leftrightarrow t \approx 2954$$

Câu 40. Một bể nước hình hộp chữ nhật cao 1 m và có đáy là hình vuông cạnh 2 m. Ban đầu bể đầy nước. Người ta mở một cái vòi ở đáy, nước chảy ra với tốc độ tỷ lệ thuận với căn bậc hai của độ cao của nước tại bất kì thời điểm nào. Giả sử độ cao của nước trong bể tại thời điểm t là

$h(t)$ và $V(t)$ là thể tích của nước hiện tại sau t phút mở vòi thì ta có $V'(t) = k \cdot \sqrt{h(t)} (k \in \mathbb{R})$.
Biết rằng, mực nước giảm 19 cm sau 2 phút, hỏi sau bao nhiêu phút thì bể cạn nước.



Lời giải

Trả lời: 20

Vì bể nước có dạng hình hộp chữ nhật có chiều cao $h(t)$ và có đáy luôn là hình vuông cạnh 2 m nên thể tích của hình hộp tại thời điểm t là $V(t) = 2^2 \cdot h(t) = 4h(t)$

Suy ra $V'(t) = 4h'(t)$

$$V'(t) = k \cdot \sqrt{h(t)} \Leftrightarrow 4h'(t) = k \cdot \sqrt{h(t)} \Leftrightarrow \frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}} = \frac{k}{4} \Leftrightarrow (2\sqrt{h(t)})' = \frac{k}{4} \Leftrightarrow (\sqrt{h(t)})' = \frac{k}{8}$$

Ta có

$$\sqrt{h(t)} = \int \frac{k}{8} dt = \frac{k}{8}t + C$$

Nguyên hàm 2 vế, ta được

Ta có độ cao của nước tại thời điểm ban đầu bằng 1 m tức $h(0) = 1$ nên ta có $\sqrt{h(0)} = \sqrt{1} = \frac{k}{8} \cdot 0 + C \Rightarrow C = 1$

$$\text{Suy ra } \sqrt{h(t)} = \frac{k}{8}t + 1$$

Lại có, sau 2 phút, mực nước giảm 19 cm (hay $0,19\text{ m}$) thì độ cao của nước trong bể bằng $h = 1 - 0,19 = 0,81$ nên ta có $h(2) = 0,81$

$$\Leftrightarrow \sqrt{h(2)} = \sqrt{0,81} = \frac{k}{8} \cdot 2 + 1 \Leftrightarrow k = -0,4$$

$$\text{Vậy } \sqrt{h(t)} = \frac{-0,4}{8}t + 1 = -0,05t + 1$$

Bể cạn nước khi chiều cao của nước trong bể bằng 0 hay $h(t) = 0 \Rightarrow -0,05t + 1 = 0 \Rightarrow t = 20$.

Vậy sau 20 phút thì bể cạn nước.

Câu 41. Một miếng thịt nướng được lấy ra khỏi ngăn đá của tủ lạnh và để trên bàn để rã đông. Nhiệt độ của miếng thịt nướng khi nó được lấy ra khỏi ngăn đá là -4°C và t giờ sau đó, nhiệt độ của miếng thịt nướng tăng với tốc độ $T'(t) = 7e^{-0,35t}^\circ\text{C/giờ}$. Nhiệt độ của miếng thịt sau 2 giờ là bao nhiêu $^\circ\text{C}$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 6,1

B1: Tìm hàm nhiệt độ

Nhiệt độ $T(t)$ là nguyên hàm của tốc độ thay đổi nhiệt độ $T'(t)$

$$T(t) = \int T'(t) dt = \int 7e^{-0,35t} dt$$

Sử dụng công thức nguyên hàm của $e^{ax} : \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$.

$$T(t) = 7 \cdot \frac{1}{-0.35} e^{-0.35t} + C = -20e^{-0.35t} + C$$

B2: Tìm C :

Nhiệt độ của miếng thịt khi nó được lấy ra khỏi ngăn đá là $-4^{\circ}C$. Điều này có nghĩa là tại thời điểm $t = 0, T(0) = -4$.

$$T(0) = -20e^{-0.35 \cdot 0} + C = -4 \Rightarrow -20e^0 + C = -4 \Rightarrow C = 16$$

$$T(t) = -20e^{-0.35t} + 16$$

B3: Tính nhiệt độ của miếng thịt sau 2 giờ ($t = 2$): $T(2) = -20e^{-0.35 \cdot 2} + 16 \approx 6,1^{\circ}C$

Kết luận: Vậy nhiệt độ của miếng thịt sau 2 giờ là khoảng $6,1^{\circ}C$.

Câu 42. Một cái cây được gieo trồng từ hạt trong một chiếc chậu. Chiều cao của nó sau t (năm) được cho bởi hàm số $h(t)$ (đơn vị mét). Tốc độ thay đổi chiều cao của nó sau t (năm) là $h'(t) = 0,2t + 0,15$ (mét/năm) với $(0 \leq t \leq 4)$. Sau khi trồng được 4 năm, cây được lấy ra khỏi chậu và trồng xuống đất, chiều cao của nó theo thời gian khi này thay đổi với tốc độ $h'(t) = \frac{11}{t}$ ($t \geq 4$). Hỏi sau 4 năm trồng xuống đất cây cao bao nhiêu mét? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

Trả lời: 9,8

B1. Tính chiều cao của cây sau 4 năm đầu (trong chậu):

Để tìm $h(t)$, ta lấy nguyên hàm của $h'(t)$:

$$h(t) = \int (0,2t + 0,15) dt = 0,2 \frac{t^2}{2} + 0,15t + C = 0,1t^2 + 0,15t + C$$

Vì cây gieo từ hạt, chiều cao ban đầu tại $t = 0$ là $h(0) = 0$

$$h(0) = 0,1(0)^2 + 0,15(0) + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\text{Vậy, } h(t) = 0,1t^2 + 0,15t$$

Chiều cao của cây sau 4 năm (khi lấy ra khỏi chậu) là $h(4)$:

$$h(4) = 0,1(4)^2 + 0,15(4) = 0,1(16) + 0,6 = 1,6 + 0,6 = 2,2 \text{ (mét)}$$

B2. Tính chiều cao tăng thêm của cây sau 4 năm trồng xuống đất:

Tốc độ thay đổi chiều cao trong giai đoạn này là $h'(t) = \frac{11}{t}$ cho $t \geq 4$

Chiều cao tăng thêm trong giai đoạn này là tích phân của $h'(t)$ từ $t = 4$ đến $t = 8$:

$$\Delta h = \int_4^8 \frac{11}{t} dt = 11 \cdot [\ln |t|]_4^8 \Rightarrow \Delta h = 11(\ln(8) - \ln(4)) = 11 \ln(2) \approx 7,62$$

B3. Tính tổng chiều cao của cây sau 4 năm trồng xuống đất (tức là tổng cộng 8 năm):

Tổng chiều cao = Chiều cao sau 4 năm đầu + Chiều cao tăng thêm sau 4 năm trồng xuống đất

$$\text{Tổng chiều cao} = h(4) + \Delta h$$

$$\text{Tổng chiều cao} = 2,2 + 7,62 = 9,82 \approx 9,8 \text{ mét.}$$

Câu 43. Vi khuẩn HP (*Helicobacter pylori*) gây đau dạ dày sau ngày thứ t ($t \geq 1$) với số lượng là $F(t)$ nếu phát hiện sớm thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết rằng $F'(t) = \frac{1100}{3t} + 1$ và sau 1 ngày

bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn trong dạ dày. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày. Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị...



Lời giải

Trả lời: 3007

$$F(t) = \int F'(t)dt = \int \left(\frac{1100}{3t} + 1 \right) dt = \frac{1100}{3} \ln t + t + C$$

Ta có

$$\text{Có } F(1) = 2000 \Rightarrow 1 + C = 2000 \Rightarrow C = 1999 \Rightarrow F(t) = \frac{1100}{3} \ln t + t + 1999$$

$$F(15) = \frac{1100}{3} \ln 15 + 15 + 1999 \approx 3007$$

Vậy sau 15 ngày thì số con vi khuẩn trong dạ dày là (con)

Câu 44. Vì nước và dầu không hoà tan vào nhau nên nếu dầu đổ vào nước sẽ tạo thành một mảng hình trụ trên bề mặt nước. Bán kính $r(t)$ của mảng này lan ra với tốc độ tỉ lệ thuận với chiều cao $h(t)$ của mảng dầu. Giả sử một lít dầu bị đổ trên mặt hồ tĩnh lặng. Bán kính ban đầu của vết tràn là 20 cm và sau 2 giây nó tăng lên 50 cm. Hỏi sau bao nhiêu phút (làm tròn đến hàng phần mười) thì bán kính vết tràn đạt 5 mét?

Lời giải

Trả lời: 35,6

Vì mảng dầu này lan có dạng hình trụ, nên ta có thể tích khối dầu $V = \pi \cdot r^2(t) \cdot h(t)$ (thể tích

$$\Rightarrow h(t) = \frac{V}{\pi r^2(t)}$$

này là không đổi)

Bán kính $r(t)$ của mảng dầu lan ra với tốc độ $r'(t)$, mà tốc độ lan ra $r'(t)$ tỉ lệ thuận với chiều cao $h(t)$ của mảng dầu nên theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận, ta có $r'(t) = k \cdot h(t)$ (*)

$$\text{Thay } h(t) = \frac{V}{\pi r^2(t)} \text{ vào biểu thức (*) ta được } r'(t) = k \frac{V}{\pi r^2(t)}$$

$$\text{Vì } k \frac{V}{\pi} \text{ là 1 đại lượng không đổi nên đặt } k \frac{V}{\pi} = a$$

$$\text{Khi đó } r'(t) = k \frac{V}{\pi r^2(t)} \Leftrightarrow r'(t) = \frac{a}{r^2(t)} \Leftrightarrow 3r'(t) \cdot r^2(t) = 3a \Leftrightarrow [r^3(t)]' = 3a$$

$$\text{Nguyên hàm 2 vế, ta được } r^3(t) = \int 3a dt \Leftrightarrow r^3(t) = 3at + C$$

Từ giả thiết: bán kính ban đầu của vết tràn là 20 cm và sau 2 giây nó tăng lên 50 cm, ta có hệ

$$\text{phương trình } \begin{cases} r(0) = 20 \\ r(2) = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 20^3 = 8000 \\ 3 \cdot 2a + C = 50^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C = 8000 \\ a = 19500 \end{cases} \Rightarrow r^3(t) = 58500t + 8000 \quad (cm)$$

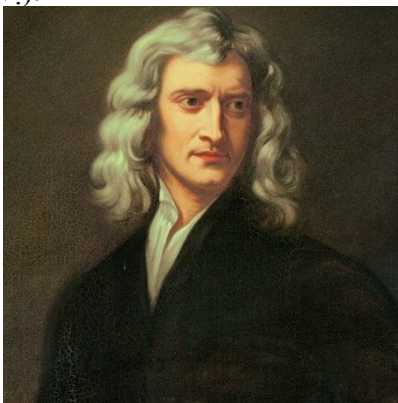
Đổi $5m = 500cm$

Bán kính vết tràn đạt 4 m tương đương với $r(t) = 500 \Rightarrow 500^3 = 58500t + 8000$

$$\Rightarrow t = \frac{500^3 - 8000}{58500} \approx 2136,61(s) \approx 35,6 \text{ phút}$$

Câu 45. Theo định luật làm mát của Newton thì tốc độ làm mát của một vật tỉ lệ thuận với chênh lệch nhiệt độ giữa vật đó và môi trường xung quanh, với điều kiện là chênh lệch này không quá lớn.

Giả sử $T(t)$ là nhiệt độ của vật thể (đơn vị: độ C) tại thời điểm t (đơn vị: phút) và T_s là nhiệt độ của môi trường xung quanh, chênh lệch giữa nhiệt độ của vật thể và môi trường xung quanh là $y(t) = T(t) - T_s$ thì $y'(t) = k \cdot y(t)$ với k là hằng số. Một cốc nước đang ở nhiệt độ phòng là $22^\circ C$ được đưa vào ngăn mát tủ lạnh có nhiệt độ là $5^\circ C$. Sau 30 phút, nhiệt độ của cốc nước được đo lại là $16^\circ C$. Hỏi sau một tiếng trong tủ lạnh, nhiệt độ cốc nước là bao nhiêu độ C (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Trả lời: 12

Đổi 1 giờ = 60 phút;

YCBT là xác định nhiệt độ của cốc nước sau 1 giờ hay $T(60)$.

$$y'(t) = k \cdot y(t) \Rightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = k \Leftrightarrow [\ln y(t)]' = k$$

Ta có

Nguyên hàm 2 vế, ta được $\ln y(t) = \int k dt = kt + C \Rightarrow y(t) = e^{kt+C}$

(Khi đặt cốc nước vào tủ lạnh thì khi đó nhiệt độ môi trường xung quanh $T_s = 5$)

Khi đó $y(t) = T(t) - T_s$ tương đương với $e^{kt+C} = T(t) - 5 \Rightarrow e^{kt+C} + 5 = T(t)$

Ta có $e^{k \cdot 0 + C} + 5 = T(0) \Leftrightarrow e^C + 5 = 22 \Leftrightarrow e^C = 17 \Leftrightarrow C = \ln 17$

Suy ra $T(t) = e^{kt + \ln 17} + 5$

Biết: sau 30 phút, nhiệt độ của cốc nước là $16^\circ C$ nên ta có

$$T(30) = 16 \Leftrightarrow e^{30k + \ln 17} + 5 = 16 \Leftrightarrow e^{30k + \ln 17} = 11 \Leftrightarrow 30k + \ln 17 = \ln 11$$

$$\Leftrightarrow 30k = \ln 11 - \ln 17 = \ln \frac{11}{17} \Leftrightarrow k = \frac{1}{30} \ln \frac{11}{17}$$

Suy ra $T(t) = e^{\frac{1}{30} \ln \frac{11}{17} t + \ln 17} + 5$

Vậy nhiệt độ của cốc nước sau 1 giờ trong tủ lạnh là $T(60) = e^{\frac{60}{30} \ln \frac{11}{17}} + 5 \approx 12^\circ C$.