

Chủ đề 4. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG**BÀI 7. DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG****PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM****I. NGUYÊN HÀM****1) Định nghĩa**

- Định nghĩa: Cho hàm số f xác định trên K . Hàm số F được gọi là nguyên hàm của f trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .
- Định lí: Giả sử hàm số F là một nguyên hàm của hàm số f trên K .

Khi đó

- a) Với mỗi hằng số C , hàm số $y = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của f trên K .
- b) Ngược lại với mỗi nguyên hàm G của f trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi x thuộc K .

Kí hiệu: $\int f(x) dx = F(x) + C$

2) Tính chất của nguyên hàm

Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên K thì:

- $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$ và $\int f'(x) dx = f(x) + C$;
- $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- Với mọi số thực $k \neq 0$ ta có $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$.

3) Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

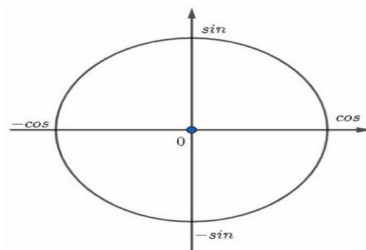
1. $\int 0 dx = C$	6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
2. $\int dx = x + C$	7. $\int (ax + b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	8. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + C, a \neq 0$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	9. $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C, a \neq 0$

5. $\int e^x dx = e^x + C$	10. $\int a^{kx+b} dx = \frac{1}{k} \frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1, k \neq 0$
----------------------------	---

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Lấy đạo hàm sin và cos ta thực hiện theo chiều quay cùng kim đồng hồ.

Lấy nguyên hàm sin và cos ta thực hiện theo chiều quay ngược kim đồng hồ.



1. $\int \cos x dx = \sin x + C$	9. $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
2. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	10. $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
3. $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$	11. $\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + C$
4. $\int \cot x dx = \ln \sin x + C$	12. $\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + C$
5. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	13. $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
6. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	14. $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$
7. $\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$	15. $\int (1 + \tan^2(ax+b)) dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
8. $\int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$	16. $\int (1 + \cot^2(ax+b)) dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$

4) Phương pháp tính nguyên hàm

- Phương pháp đổi biến số

Định lí 1: Nếu $\int f(u) du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f\left[u\left(x\right)\right]u'\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left[u\left(x\right)\right]+C.$$

***Chú ý:**

Trong thực hành, ta thường viết tắt $F[u(x)]$ là $F(u)$; $f[u(x)]$ là $f(u)$ (coi du là vi phân của hàm số $u = u(x)$), nghĩa là $du = d(u(x)) = u'(x)dx$.

Khi đó công thức (1) được viết như sau:

$$\begin{aligned}\int f[u(x)]u'(x)dx &= \int f[u(x)]du(x) = \int f(u)du \\ &= F(u) + C = F[u(x)] + C\end{aligned}$$

Ta nói đã thực hiện được phép đổi biến $u = u(x)$.

- Các dấu hiệu đổi biến thường gặp

Dạng	Đặt t	Dạng	Đặt t
$\int f(ax+b)dx$	$t = ax+b$	$\int f(\tan x) \frac{dx}{\cos^2 x}$	$t = \tan x$
$\int f(x^{n+1}) \cdot x^n dx$	$t = x^{n+1}$	$\int f(\cot x) \frac{dx}{\sin^2 x}$	$t = \cot x$
$\int f(\sqrt{x}) \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}$	$t = \sqrt{x}$	$\int f(e^x) \cdot e^x dx$	$t = e^x$
$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx$	$t = \sin x$	$\int f(\ln x) \frac{dx}{x}$	$t = \ln x$
$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx$	$t = \cos x$		

II. TÍCH PHÂN**1) Định nghĩa tích phân**

- Định nghĩa: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a; b]$) của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

- Công thức tính tích phân

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Nhận xét:

- Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x) dx$ hay $\int_a^b f(t) dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.
- Nếu hàm số $f(x)$ không âm và liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x) dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$.
 Vậy $S = \int_a^b f(x) dx$.

2) Tính chất của tích phân

- Định lí: Giả sử các hàm số f, g liên tục trên K và a, b, c là ba số bất kì thuộc K . Khi đó ta có

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$
 - $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$;
 - $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$;

3) Phương pháp tính tích phân

a) Phương pháp đổi biến

- Định lí:

Cho

- Hàm $t = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$;
- Hàm hợp $f(u(x))$ được xác định trên $[a; b]$;
- $u(a) = \alpha, u(b) = \beta$

$$I = \int_a^b f(u(x)) u'(x) dx = \int_\alpha^\beta f(t) dt$$

Khi đó:

- Phương pháp chung

$$I = \int_a^b f(u(x)) u'(x) dx$$

❖ **Bước 1:** Đặt $t = u(x)$

❖ **Bước 2:** Tính vi phân hai vế: $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$

Đổi cận:

x	a	b
t	$u(a)$	$u(b)$

❖ **Bước 3:** Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t

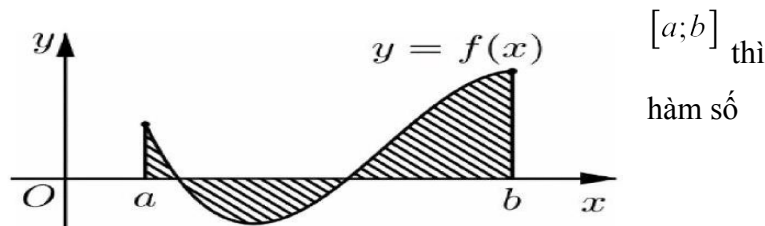
$$I = \int_a^b f(u(x)) u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt = F(u(b)) - F(u(a))$$

Vậy:

III. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

1) Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là



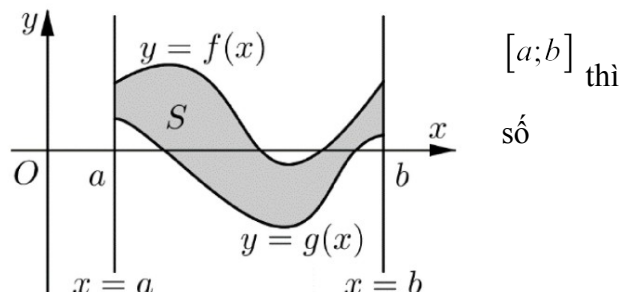
$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

*Chú ý: Nếu trên đoạn $[a; b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

2) Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Nếu hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



Một số bài toán ta phải xây dựng các hệ trục để áp dụng công thức ứng dụng.

- Đường parabol đứng ứng với hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$
- Đường parabol nằm ngang thường gặp có phương trình $x = ay^2 (a \neq 0)$, phương trình này biến đổi thành $y = \pm \sqrt{\frac{x}{a}}$ ứng với hai nhánh phía trên và phía dưới trục hoành.
- Đường tròn tâm $I(a, b)$ và bán kính R có phương trình $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.
- Đường tròn tâm $O(0; 0)$ và bán kính R có phương trình $x^2 + y^2 = R^2$, phương trình này biến đổi thành $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ ứng với hai nhánh phía trên và phía dưới trục hoành.

- Đường elip phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ có độ dài hai trục lần lượt bằng $2a$ và $2b (a > b > 0)$

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

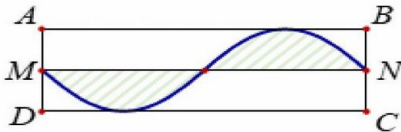
Bài 1: Cổng trường Đại học Bách Khoa Hà Nội có hình dạng parabol, chiều rộng 8 m, chiều cao 12,5 m. Diện tích của bằng bao nhiêu?



cổng
được
đất

Bài 2: Người ta trồng hoa vào phần đất được tô màu đen giới hạn bởi cạnh AB, CD đường trung bình MN của mảnh

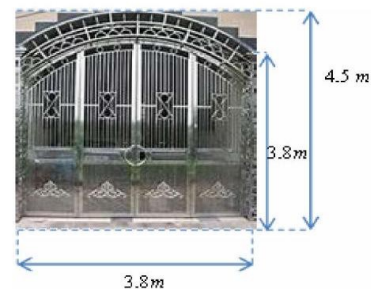
hình chữ nhật $ABCD$ và một đường cong hình sin (như hình vẽ). Biết $AB = 2\pi$ (m), $AD = 2$ (m). Tính diện tích phần còn lại.



Bài 3: Một chiếc cổng có hình dạng là một parabol có khoảng cách giữa hai chân cổng là 8 m. Người ta treo một tấm phong hình chữ nhật có hai đỉnh M, N nằm trên Parabol và hai đỉnh P, Q nằm trên mặt đất như hình vẽ bên. Ở phần phía ngoài phong người ta mua hoa để trang trí với chi phí 200.000 đồng $/m^2$, biết $MN = 4$ m, $MQ = 6$ m. Hỏi số tiền để mua hoa trang trí gần với số tiền nào sau đây ?

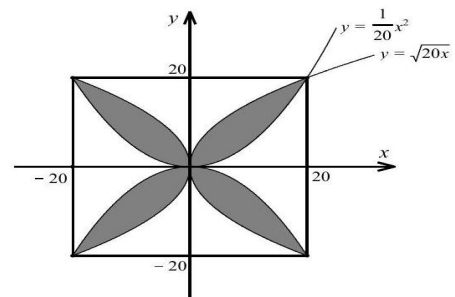
Bài 4: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là bao nhiêu?

Bài 5: Ông X muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một parabol, chất liệu Giá $1 m^2$ vật tư và công làm là 1.300.000 đồng. Hỏi ông X phải nhiều tiền để làm cái cửa sắt như vậy.



thước như
làm là inox.
trả bao

Bài 6: Cho một mảnh vườn hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng là 2 m, chiều dài gấp ba chiều rộng. Người ta chia mảnh vườn bằng cách dùng hai đường parabol, mỗi đường parabol có đỉnh là trung điểm mỗi cạnh dài và đi qua hai mút của cạnh dài đối diện. Tính tỉ số diện tích phần mảnh vườn nằm ở miền trong hai parabol với diện tích phần còn lại.

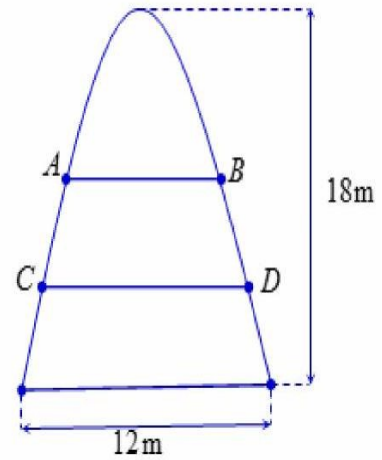


kế như

Bài 7: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm được thiết hình bên dưới.

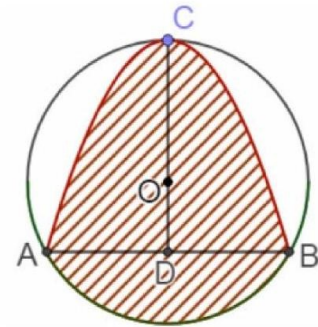
- Diện tích một cánh hoa bằng bao nhiêu?
- Diện tích hoa văn trang trí bằng bao nhiêu?

Bài 8: Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m , rộng chân đế 12 m . Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành có diện tích bằng nhau. Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng bao nhiêu?



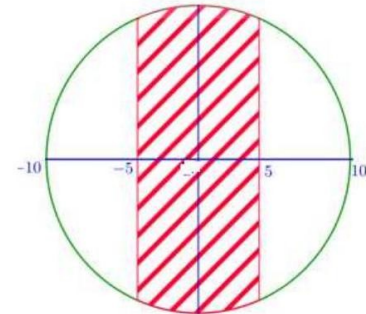
chiều
nằm
ba phần

Bài 9: Một hoa văn hình tròn tâm O , ngoại tiếp tam giác đều ABC có ba điểm A, B, C là một phần của parabol. Diện tích phần gạch chéo nhiều?



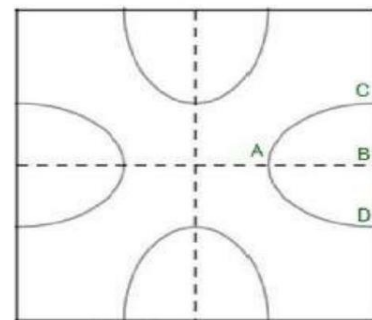
g cong qua
bằng bao

Bài 10: Một khu đất có hình dạng là một hình tròn với đường kính $d = 20$ m . Người ta muốn trồng rau trên dải đất rộng 10 m lấy tâm đường tròn khu đất làm tâm đối xứng. Diện tích phần đất trồng còn nhiều m^2 ?



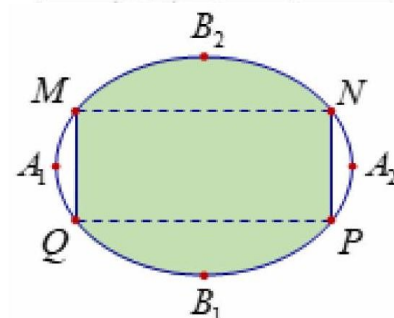
của
lại bao

Bài 11: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa hình cạnh 20 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau đều có hình nửa elip như hình vẽ. Biết một nửa trục lớn là $AB = 6$ cm , trục bé $CD = 8$ cm . Diện tích bề mặt của hoa văn đó bằng bao nhiêu?



vuông
dạng một

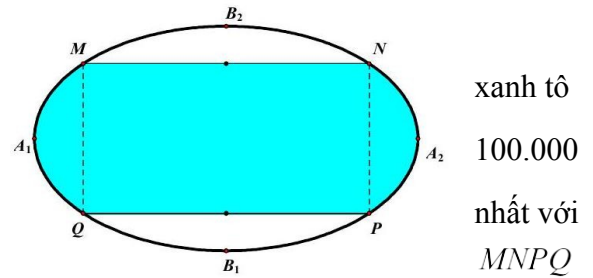
Bài 12: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí sơn phần tô đậm là đồng $/m^2$ và phần còn lại là 100.000 đồng $/m^2$. Hỏi số tiền để



200.000
sơn theo

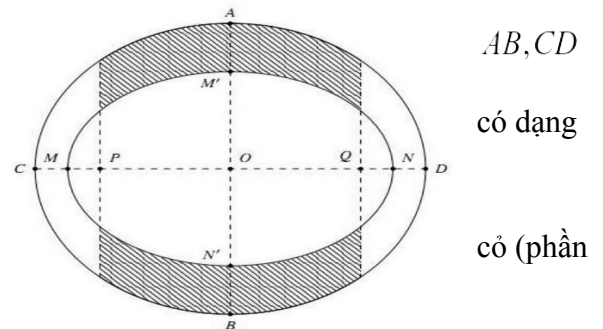
cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8 \text{ m}$, $B_1B_2 = 6 \text{ m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3 \text{ m}$?

Bài 13: Đáy của một bể bơi có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí phần lát gạch đậm là 300.000 đồng / m^2 và phần lát gạch trắng còn lại là đồng / m^2 . Hỏi số tiền để làm đáy bể bơi theo cách trên gần số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 10 \text{ m}$, $B_1B_2 = 6 \text{ m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 4 \text{ m}$?



Bài 14: Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng 100 m , trục nhỏ bằng 80 m được chia thành 2 phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây con và phần lớn hơn trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là 2000 mỗi m^2 trồng cây con và 4000 mỗi m^2 trồng rau. Hỏi thu nhập từ cả mảnh vườn là bao nhiêu?

Bài 15: Một khu vườn dạng hình tròn có hai đường kính vuông góc với nhau, $AB = 12 \text{ m}$. Người ta làm một hồ cá elip với bốn đỉnh M, N, M', N' như hình vẽ. Biết $MN = 10 \text{ m}$, $M'N' = 8 \text{ m}$, $PQ = 8 \text{ m}$. Diện tích phần trồng gạch sọc) bằng bao nhiêu?

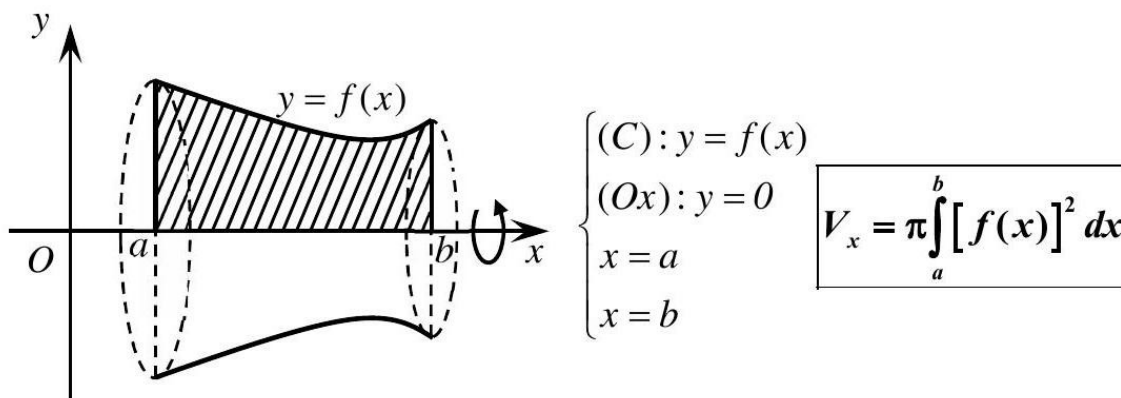


BÀI 8. THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐỒ THỊ HÀM XÁC ĐỊNH

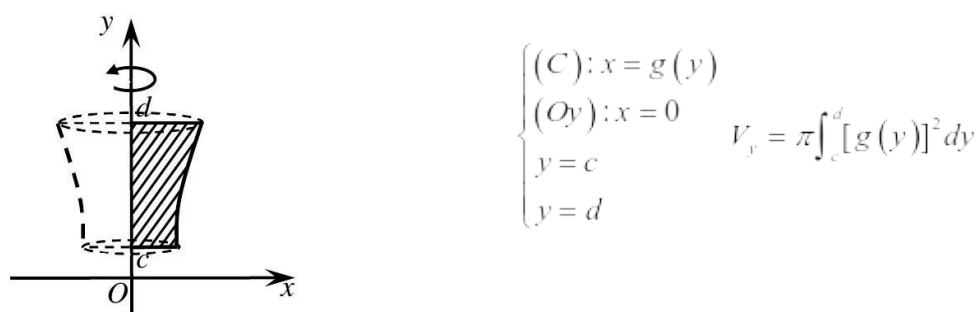
PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NĂM

Thể tích khối tròn xoay

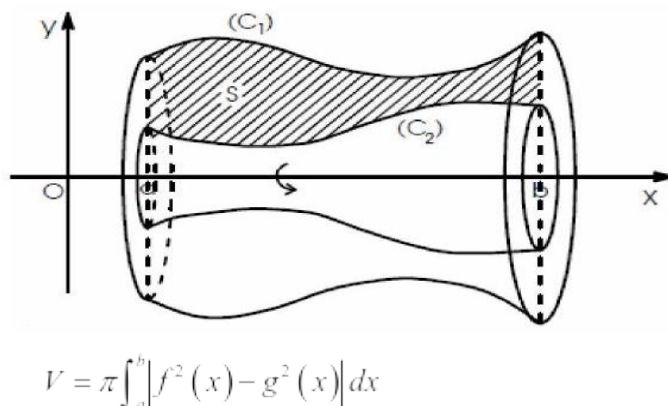
- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quanh trục Ox :



- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c, y = d$ quanh trục Oy :



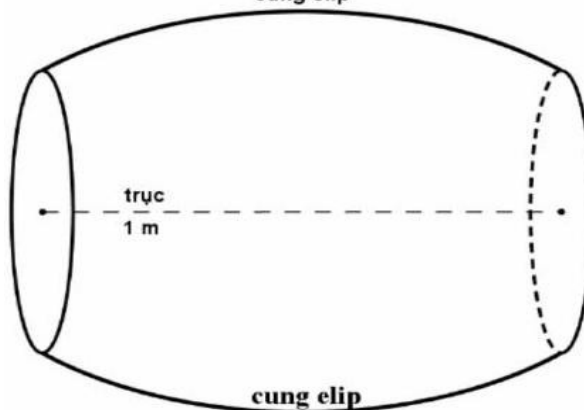
- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quanh trục Ox :



Một số bài toán ta phải xây dựng các hệ trục để áp dụng công thức ứng dụng.

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Một cái trống trường có khoảng cách giữa hai mặt trống là 1 m . Một mặt phẳng qua trục của trống cắt phần xung quanh của trống theo hai cung của elip (E) (tham khảo hình vẽ). Biết rằng elip (E) có trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 2 m và 1 m . Hãy tính thể tích của phần không gian mà cái trống đã nêu chiếm chỗ.



Bài 2: Một cái trống (hình vẽ) có đường kính 1 m , hai mặt trống có đường kính $0,7\text{ m}$ và chiều cao của trống là 1 m . Thể tích khối giới hạn bởi bề mặt của trống gần với số nào?



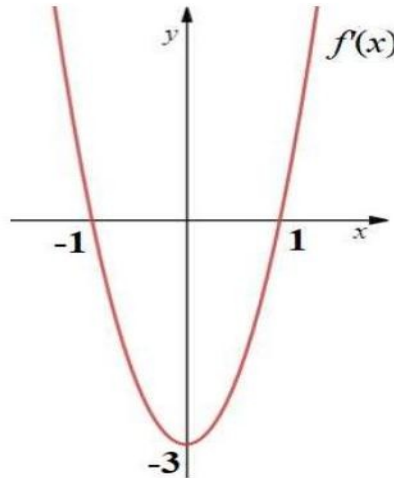
Bài 3: Một thùng chứa rượu bằng gỗ là một hình tròn xoay như hình bên có hai mặt đáy là hai hình tròn bằng nhau, khoảng cách giữa hai đáy là 8 dm . Đường cong mặt bên của thùng là một phần của đường elip có độ dài trục lớn bằng 10 dm , trục bé bằng 6 dm . Hỏi thùng gỗ này đựng được bao nhiêu lít rượu?



Bài 4: Một bình cắm hoa dạng khối tròn xoay với đáy bình và miệng bình có đường kính lần lượt là 2 và 4.

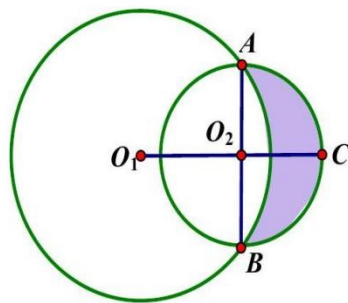
Mặt xung quanh của bình là một phần của mặt tròn xoay khi quay đường cong $y = \sqrt{x-1}$ quay quanh trục Ox . Thể tích của bình cắm hoa đó bằng bao nhiêu?

Bài 5: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị (C) . Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới y. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox .

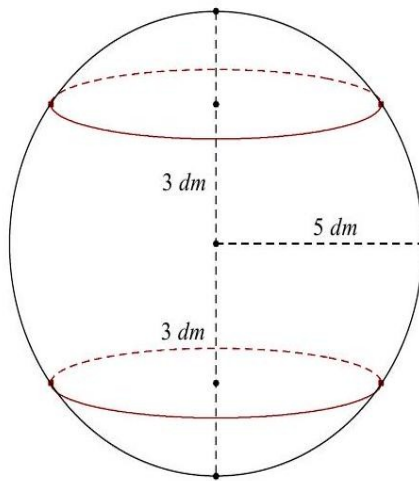


Bài 6: Cho hai đường tròn $(O_1; 10)$ và $(O_2; 8)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2) . Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn.

Quay (H) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.

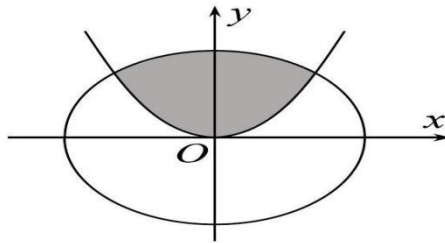


Bài 7: Một khối cầu có bán kính là $5(\text{dm})$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc với đường kính và cách tâm một khoảng $3(\text{dm})$ để làm một chiếc lu đựng nước. Tính thể tích nước tối đa mà chiếc lu có thể chứa được.

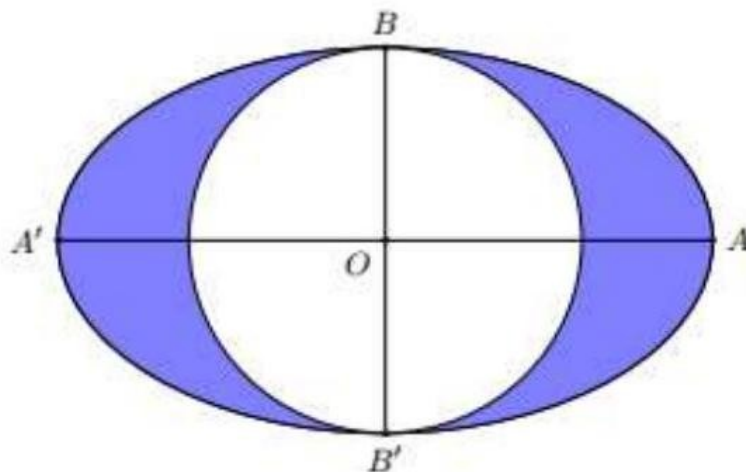


Bài 8: Một thùng rượu vang có dạng hình tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn bằng nhau, khoảng cách giữa hai đáy bằng 80 cm . Đường sinh của mặt xung quanh thùng là một phần đường tròn có bán kính bằng 60 cm . Hỏi thùng đó có thể đựng được bao nhiêu lít rượu?

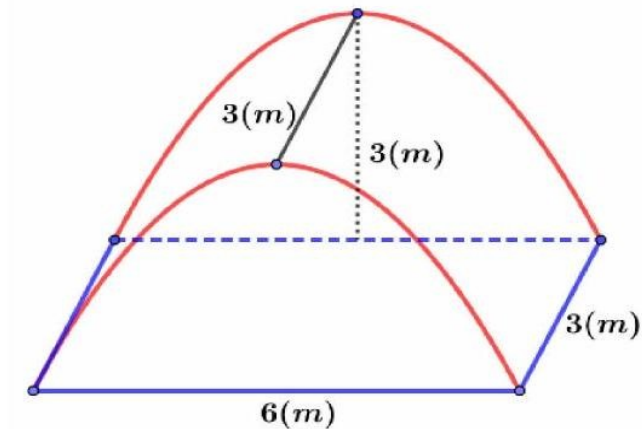
Bài 9: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường tròn $x^2 + y^2 = 2$ (phần tô đậm trong hình bên). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.



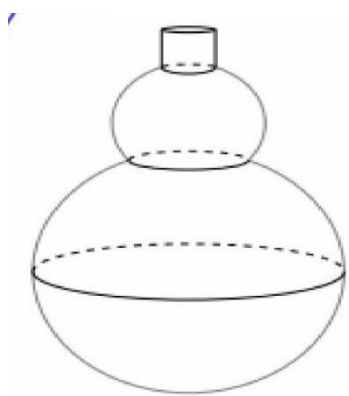
Bài 10: Trong mặt phẳng, cho đường elip (E) có độ dài trục lớn là $AA' = 10$, độ dài trục nhỏ là $BB' = 6$, đường tròn tâm O có đường kính là BB' (như hình vẽ bên dưới). Tính thể tích V của khối tròn xoay có được bằng cách cho miền hình phẳng giới hạn bởi đường elip và đường tròn (được tô đậm trên hình vẽ) quay xung quanh trục AA' .



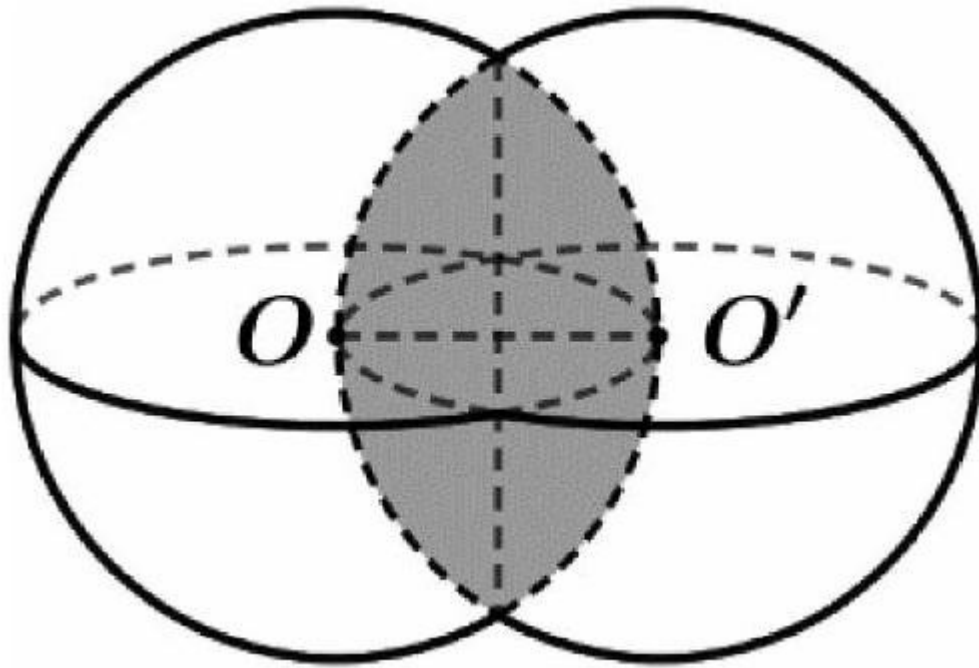
Bài 11: Để chuẩn bị cho hội trại do Đoàn trường tổ chức, lớp 12B dự định dựng một cái lều trại có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 6 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Tính thể tích phần không gian bên trong lều trại.



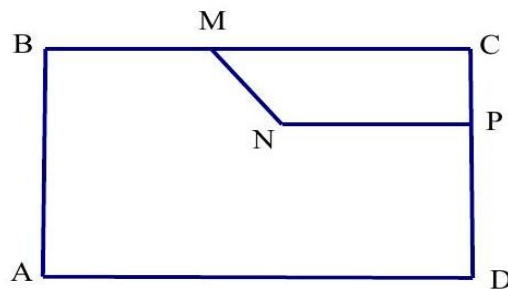
Bài 12: Người ta cắt hai hình cầu có bán kính lần lượt là $R = 13 \text{ cm}$ và $r = \sqrt{41} \text{ cm}$ và một phần của mặt trụ để làm hồ lô đựng rượu như hình vẽ dưới đây. Biết giao của hai hình cầu là đường tròn có bán kính $r_1 = 5 \text{ cm}$ và cổ của hồ lô là một hình trụ có bán kính đáy bằng $\sqrt{5} \text{ cm}$, chiều cao bằng 4 cm. Giả sử độ dày của hồ lô không đáng kể. Hỏi hồ lô đựng được tối đa bao nhiêu lít rượu?



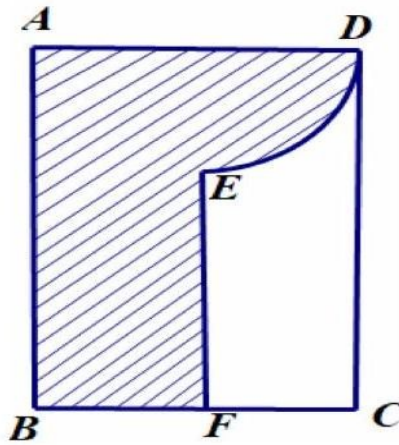
Bài 13: Một đồ chơi được thiết kế gồm hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại (xem hình vẽ). Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2) .



Bài 14: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4, AD = 5$. Cắt hình chữ nhật theo đường gấp khúc MNP với $BM = 2, DP = 3, PN = 2$ và bỏ đi phần hình thang vuông $MNPC$ (tham khảo hình vẽ). Gọi (H) là phần hình phẳng còn lại của hình chữ nhật đã cho sau khi cắt bỏ. Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục AB .

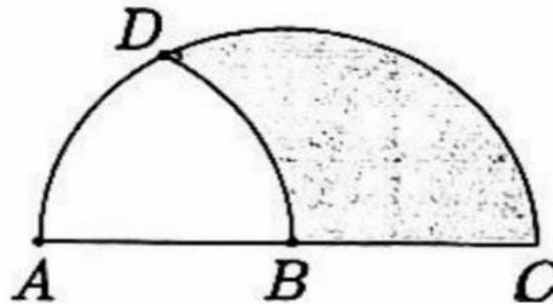


Bài 15: Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ) quay xung quanh trục AB . Biết $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = 3 \text{ cm}, AD = 2 \text{ cm}$; F là trung điểm của BC ; điểm E cách AD một đoạn bằng 1 cm . Thể tích của vật thể trang trí trên là (quy tròn đến hàng phần mười)

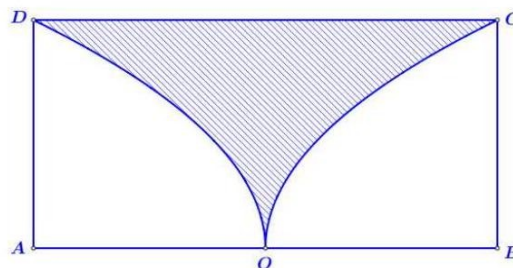


Bài 16: Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (H) (phần màu xám trong hình vẽ bên) quanh trục AC . Biết rằng $AC = 2 \text{ cm}$, B là trung điểm của AC . Miền (H) được giới hạn bởi đoạn thẳng BC và các cung tròn bán kính 1 cm có tâm A và B . Thể tích của vật trang trí đó bằng bao nhiêu?

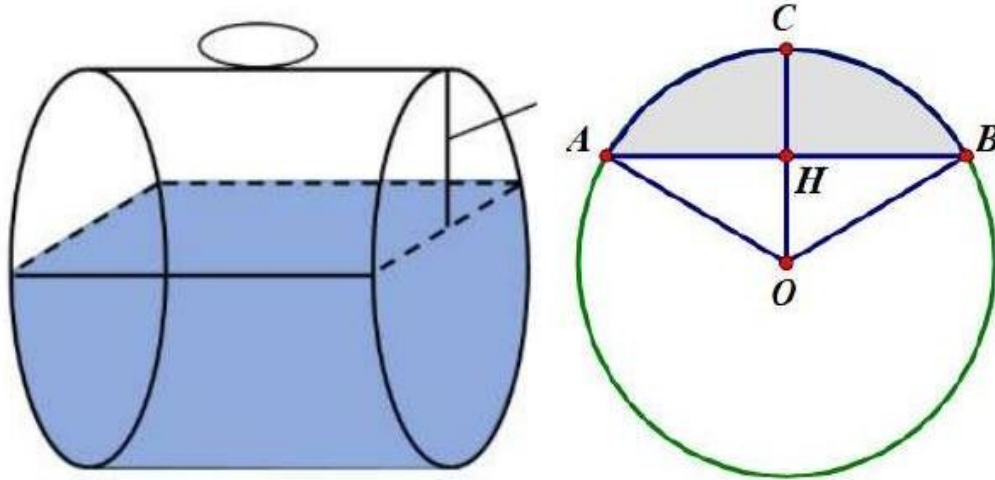
(Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)



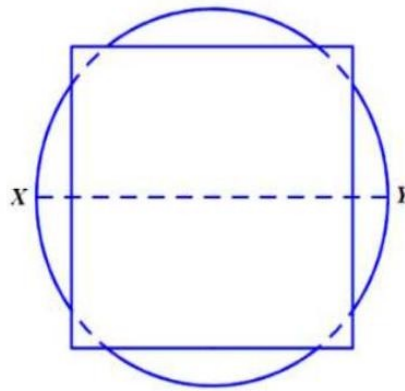
Bài 17: Từ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 10 \text{ cm}$ và chiều rộng $BC = 5 \text{ cm}$; Người ta cắt bỏ miền (R) được giới hạn bởi cạnh CD của hình chữ nhật và hai nửa đường parabol có chung đỉnh là trung điểm của cạnh AB , chúng lần lượt đi qua hai đầu mút C, D của hình chữ nhật đó (phần tô đậm như hình vẽ). Phần còn lại cho quay quanh trục AB để tạo nên một đồ vật làm trang trí, thể tích của vật trang trí đó bằng bao nhiêu?



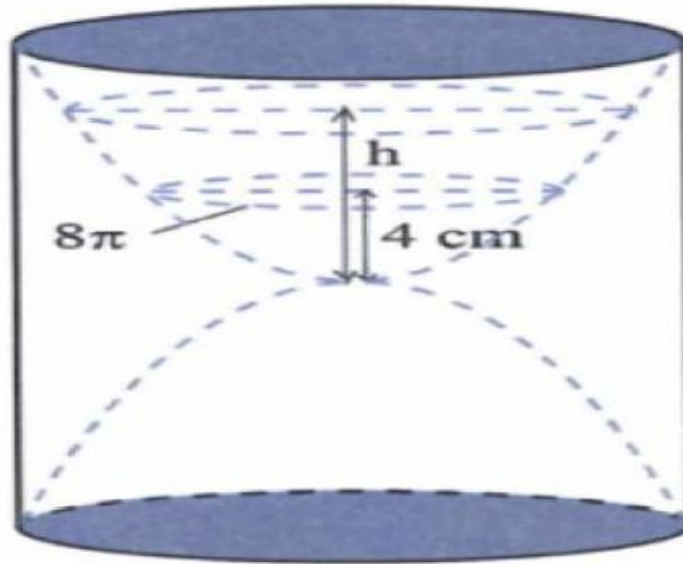
Bài 18: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5 m , có bán kính đáy 1 m , với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với $0,5$ m của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3).



Bài 19: Cho hình vuông có độ dài 8 cm và một hình tròn có bán kính 5 cm được xếp chồng lên nhau sau cho tâm của hình tròn trùng với tâm của hình vuông như hình vẽ bên. Biết thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY bằng $\frac{b}{a}\pi; a, b \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $\frac{a}{10} + 2b$ bằng bao nhiêu?



Bài 20: Một chiếc đồng hồ cát như hình vẽ, gồm hai phần đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang và đặt trong một hình trụ. Thiết diện thẳng đứng qua trục của nó là hai Parabol chung đỉnh và đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang. Ban đầu lượng cát dồn hết ở phần trên của đồng hồ thì chiều cao của mực cát bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bên đó (xem hình vẽ). Cát chảy từ trên xuống dưới với lưu lượng không đổi $14,75 \text{ cm}^3 / \text{phút}$. Khi chiều cao của cát còn 4 (cm) thì bề mặt trên cùng của cát tạo thành một đường tròn có chu vi $8\pi \text{ (cm)}$. Biết sau 20 phút thì cát chảy hết xuống phần bên dưới của đồng hồ. Hỏi chiều cao của khối trụ bên ngoài? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

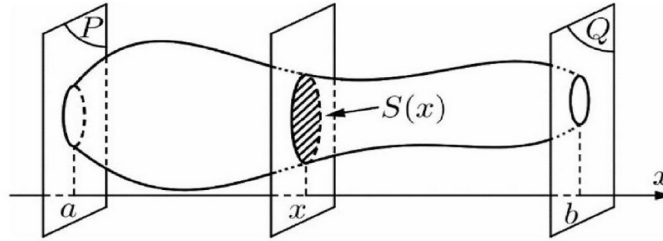


BÀI 9. THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY TÍNH THEO MẶT CẮT

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

■ Thể tích vật thể:

Cắt một vật thể V bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a$, $x = b (a < b)$.
 Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm $x (a \leq x \leq b)$ cắt V theo thiết diện có diện tích là $S(x)$.
 Giả sử $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.



Người ta chứng minh đ c rằng thể tích V của phần vật thể V giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) được tính bởi công thức $V = \int_a^b S(x) dx$.

Một số bài toán ta phải xây dựng các hệ trục để áp dụng công thức ứng dụng.

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại đi m có hoành đ $x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

Bài 2: Cho vật thể (T) được giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = -2$ và $x = 2$. Biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông với trục Ox tại điểm có hoành độ x , $(x \in [-2; 2])$ là một hình vuông có cạnh $\sqrt{4-x^2}$. Thể tích vật (T) bằng bao nhiêu?

Bài 3: Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (0 \leq x \leq \pi)$ là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

Bài 4: Xét vật thể (T) nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$. Biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại đi m có hoành độ $x (-1 \leq x \leq 1)$ là một hình vuông có cạnh bằng $2\sqrt{1-x^2}$.
 Thể tích vật thể (T) bằng bao nhiêu?

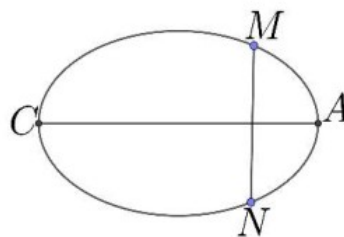
Bài 5: Thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại m có hoành độ $x(0 \leq x \leq 3)$ là một hình chữ nhật có hai kích thước bằng x và $2\sqrt{9-x^2}$ bằng bao nhiêu?

Bài 6: Tính thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai đường thẳng $x=1$ và $x=3$ biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(1 \leq x \leq 3)$ là hình vuông có cạnh $\sqrt{4-x}$.

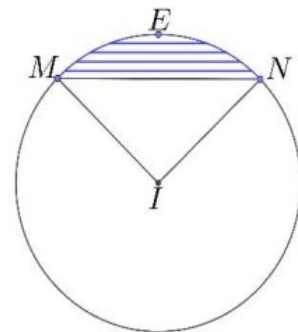
Bài 7: Tính thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=1$ và $x=3$, biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại m có hoành độ $x(1 \leq x \leq 3)$ là hình vuông có cạnh $\sqrt{3-x}$.

Bài 8: Cho phần vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=\frac{\pi}{3}$. Cắt phần vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(0 \leq x \leq \frac{\pi}{3})$ ta được thiết diện là một tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là $2x$ và $\cos x$. Thể tích vật thể B bằng bao nhiêu?

Bài 9: Sân vận động Sports Hub (Singapore) là nơi diễn ra lễ khai mạc hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức Singapore năm 2015. Nền sân là một (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$. Nếu cắt sân vận động theo mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt tại M và N (hình a) thì ta được thiết



Hình a

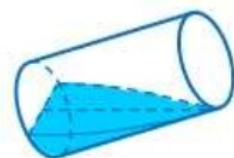


Hình b

đại
ở
Elip
 $90m$
phẳng
(E)
diện

luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình b) với MN là dây cung và $\angle MIN = 90^\circ$. Để lắp máy điều hòa không khí cho sân vận động thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và vật liệu làm mái che không đáng kể. Hỏi thể tích đó xấp xỉ bao nhiêu?

Bài 10: Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng cốc là 6 cm , chiều cao trong lòng cốc là 10 cm đang đựng lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy nước trùng với đường kính đáy.



đáy
một
mức

BÀI 10. BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s = s(t)$

Vận tốc tức thời tại thời điểm t của chất điểm được tính theo công thức: $v(t) = s'(t)$

Gia tốc tức thời tại thời điểm t của chất điểm được tính theo công thức:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

$$s(t) = \int v(t) dt$$

$$v(t) = \int a(t) dt$$

Một chất đi m chuyển động trên trục Ox với vận tốc thay đổi theo thời gian

$v = f(t)$ (m/s). Quãng đường chất điểm chuyển động trên trục Ox từ thời điểm t_1

đến thời điểm t_2 là $S = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$

***Chú ý:**

- Xác định thời điểm ban đầu $t = 0$: Mỗi chuyển động ta nên chọn một thời điểm ban đầu phù hợp cho mục đích tính toán. Thời điểm ban đầu thường chọn khi chuyển động bắt đầu một hành trình mới.

- Xác định C trong $v(t)$: Thường dựa vào vận tốc tại thời điểm $t = 0$ (khởi hành), ta có

$$C = v(0) - f(0)$$

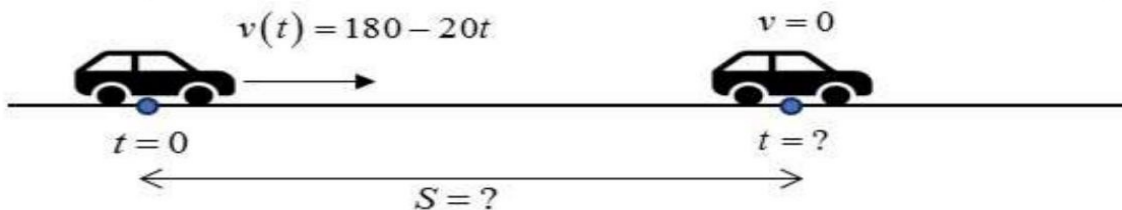
- Các thời điểm đặc biệt: Dừng hẳn $\Leftrightarrow v(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dots; v(t) = \max v(t) \Leftrightarrow t = \dots$

Phương pháp: Ứng dụng tích phân cơ bản để giải quyết yêu cầu bài toán.

Ví dụ 1: Một vật đang chuyển động với vận tốc 30 m/s thì chuyển động chậm dần đều với gia tốc -70 m/s^2 .

Thì ta chọn thời điểm ban đầu là lúc bắt đầu chuyển động chậm dần.

Ví dụ 2: Một ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 180 - 20t$. Tính quãng đường mà ô tô di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm mà vật dừng lại.



Lời giải

Thời điểm vật dừng lại là $v = 0 \Leftrightarrow 180 - 20t = 0 \Leftrightarrow t = 9$ (s)

Quãng đường mà ô tô di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm mà vật dừng lại là:
 $s(t) = \int_0^9 (180 - 20t) dt = 810 \text{ (m)}$

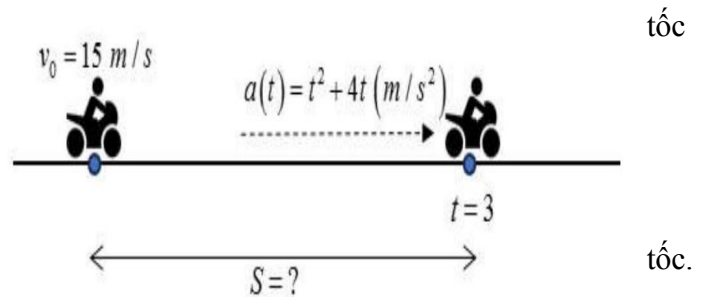
PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 210 - 30t \text{ (m/s)}$. Tính quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm mà vật dừng lại.

Bài 2: Một xe ô tô đang đi với vận tốc 10 m/s thì người lái xe bắt đầu đạp phanh, từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 10 - 5t \text{ (m/s)}$, ở đó t tính bằng giây. Quãng đường ô tô dịch chuyển từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn bằng bao nhiêu?

Bài 3: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15 \text{ m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận



Bài 4: Một vật chuyển động với vận tốc

$v(t) \text{ (m/s)}$ có gia tốc $v'(t) = \frac{3}{t+1} \text{ (m/s}^2\text{)}$. Vận tốc ban đầu của vật là 6 m/s . Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây (làm tròn đến kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất) có giá trị bằng bao nhiêu?

Bài 5: Một vật chuyển động với vận tốc là $v(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi} \text{ (m/s)}$. Gọi S_1 là quãng đường vật đó đi trong 2 giây đầu và S_2 là quãng đường đi từ giây thứ 3 đến giây thứ 5. Chứng minh $S_2 > S_1$?

Bài 6: Giả sử một vật đi từ trạng thái nghỉ $t = 0 \text{ (s)}$ chuyển động thẳng với vận tốc $v(t) = t(5-t) \text{ (m/s)}$. Tìm quãng đường vật đi được cho đến khi nó dừng lại.

Bài 7: Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 160 - 10t \text{ (m/s)}$. Tìm quãng đường S mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0 \text{ (s)}$ đến thời điểm vật dừng lại.

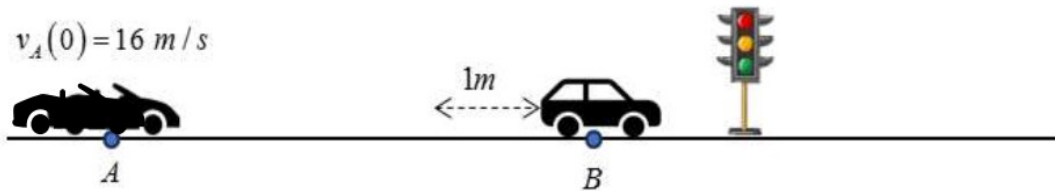
Bài 8: Một ô tô đang chạy với tốc độ 20 (m/s) thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 5t + 20 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m) ?

Bài 9: Một tàu lửa đang chạy với vận tốc 200 (m/s) thì người lái tàu đạp phanh để dừng ở trạm ga; từ thời điểm đó, tàu chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 240 - 20t \text{ (m/s)}$. Trong đó t là khoảng thời gian

tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, tàu di chuyển được quãng đường là bao nhiêu mét?



Bài 10: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16 m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?



BÀI 11. BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG HAI PHƯƠNG TIỆN

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Lý thuyết: Sử dụng lý thuyết chung của dạng toán chuyển động cơ bản.

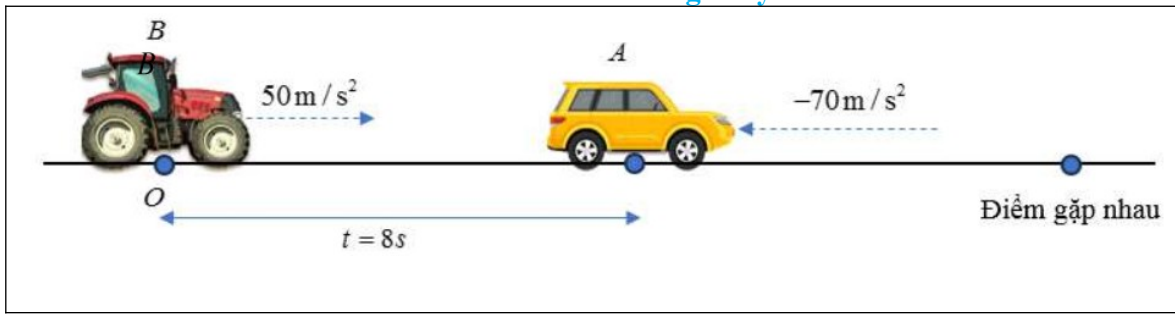
Phương pháp: Xác định quãng đường đi được của hai phương tiện tại điểm gặp nhau, sau đó tìm yêu cầu của bài toán.

Ví dụ: Vật A chuyển động đều từ O với vận tốc 30 m/s được 10s thì chuyển động chậm dần với gia tốc -70 m/s^2 . Sau khi vật A khởi hành được 8s thì vật B bắt đầu xuất phát cùng chiều từ nhanh dần đều với gia tốc 50 m/s^2 . Hỏi sau bao lâu hai vật gặp nhau? Khi gặp nhau thì vật A đã dừng lại chưa?

Thì ta chọn thời điểm ban đầu cho A là lúc bắt đầu chuyển động chậm dần.

Thời điểm ban đầu cho B là lúc B khởi hành.

Hai thời điểm khởi đầu này chênh nhau 2 s.



PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy

luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng bao nhiêu?

Bài 2: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy

luật $v(t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng bao nhiêu?

Bài 3: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy

luật $v(t) = \frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng bao nhiêu?

Bài 4: Hai ô tô xuất phát tại cùng một thời điểm trên cùng đoạn đường thẳng AB , ô tô thứ nhất bắt đầu xuất phát từ A và đi theo hướng từ A đến B với vận tốc $v_a(t) = 2t + 1$ (km/h); ô tô thứ hai xuất phát từ O cách A một khoảng 22 km và đi theo hướng từ A đến B với vận tốc 10 km/h, sau một khoảng thời gian người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô thứ hai chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v_o(t) = -5t + 20$ (km/h). Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu kể từ khi xuất phát hai ô tô đó gặp nhau.

BÀI 12. BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG THEO QUẢNG ĐƯỜNG LÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

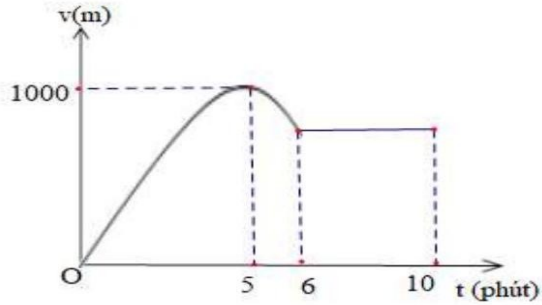
PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Lý thuyết : Xác định hàm số bậc hai ta làm như sau :

Gọi hàm số cần tìm là $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Căn cứ theo giả thiết bài toán để thiết lập và giải hệ phương trình với ẩn a, b, c từ đó suy ra hàm số cần tìm.

Phương pháp: Xác định hàm số của các dạng đồ thị quen thuộc dựa vào các yếu tố đã cho sau đó tính tích phân.

Ví dụ: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều (hình vẽ).



Hỏi quãng đường xe đã đi được trong 10 phút đầu tiên kể từ lúc bắt đầu là bao nhiêu mét?

Lời giải

Giả sử trong 5 phút đầu vận tốc của ô tô đ c biểu diễn bởi phương trình $v(t) = at^2 + bt + c$. Theo giả thiết ta có:

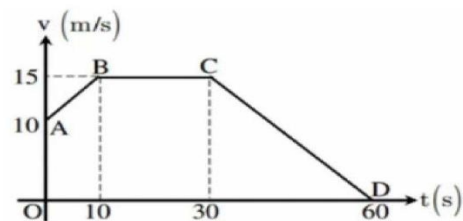
$$\begin{cases} c = 0 \\ \frac{-b}{2a} = 5 \\ 25a + 5b + c = 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a + b = 0 \\ 25a + 5b = 1000 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -40 \\ b = 400 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -40t^2 + 400t$$

Khi $t = 6$ ta có $v(6) = 960 \text{ m/phút}$. Suy ra trong 10 phút đ u xe ô tô chuyển động được quãng đường là $S = \int_0^6 (-40t^2 + 400t) dt + 960 \cdot 4 = 4320 + 3840 = 8160 \text{ (m)}$.

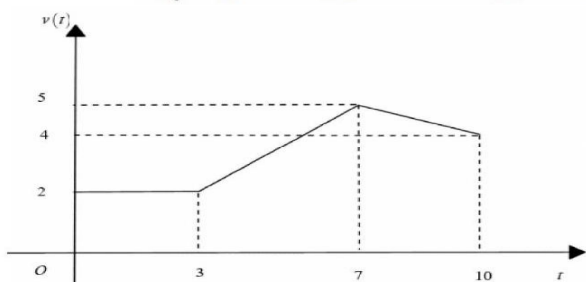
PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Một vật chuyển động thẳng có đồ thị vận tốc - thời gian như

Tính quãng đường vật chuyển động trong 60 s .



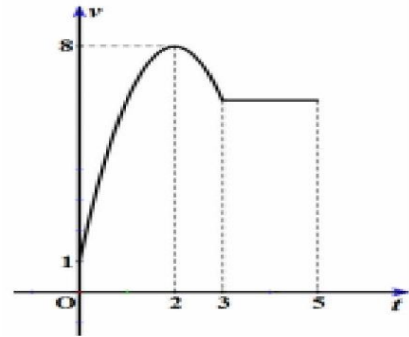
Bài 2: Một vật chuyển động trong 10 giây với $v \text{ (m/s)}$ phụ thuộc vào thời gian $t \text{ (s)}$ có đồ thị vẽ.



vận tốc
như hình

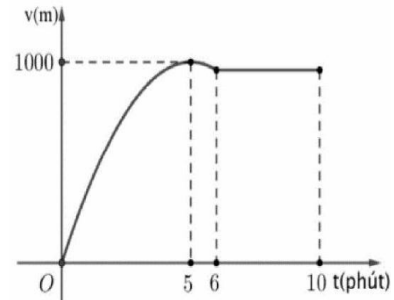
Quãng đường vật chuyển động được trong 10 giây bằng bao nhiêu?

Bài 3: Một vật chuyển động trong 5 giờ với vận tốc v phụ thuộc gian t có đồ thị của vận tốc như hình dưới. Trong khoảng thời gian kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của parabol có đỉnh $I(2;8)$ với trục đối xứng song song với trục khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với hoành. Tính quãng đường S mà vật đi chuyển được trong 5 giờ



thời
gian 3
đường
tung,
trục
đó.

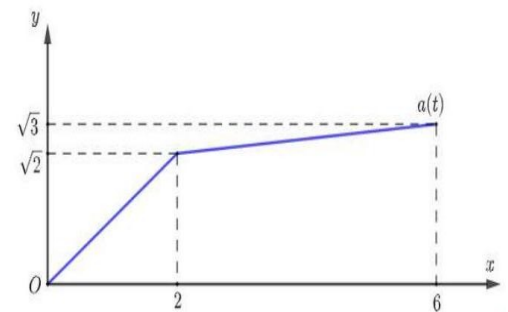
Bài 4: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol. Biết rằng sau thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm tốc, 6 phút thì xe chuyển động được (tham khảo hình vẽ).
Quãng đường xe đi được sau 10 phút đầu tiên kể từ khi hết đèn đỏ nhiều mét?



với vận
5 phút
đi được
là bao

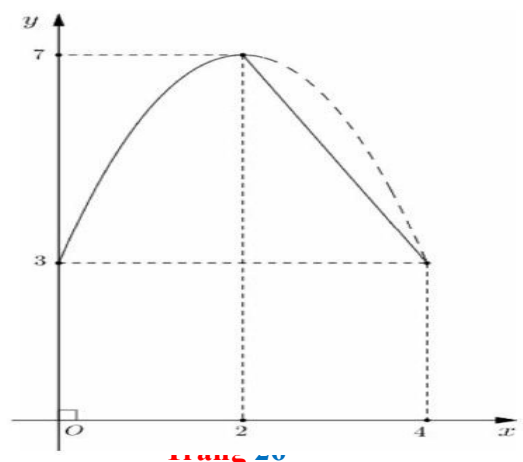
Bài 5: Tại một nơi không có gió, một chiếc khinh khí cầu đang đứng yên ở độ cao 243 mét so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khinh khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng

đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 12t - t^2$ trong đó t tính bằng phút là thời gian tính từ lúc khinh khí cầu bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút. Nếu vận v của khinh khí cầu khi tiếp đất là $v = x$ mét/phút thì giá trị của x bằng bao nhiêu?



tốc

Bài 6: Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$. Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t=0$ là $v(0) = 1 \text{ (m/s)}$.
Tại thời điểm $t=6$ giây, vận tốc của vật là bao nhiêu?



có

Bài 7: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v \text{ (km/h)}$ phụ thuộc thời gian $t \text{ (h)}$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 2 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol đỉnh $I(2;7)$ và trục đối xứng của parabol song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là đoạn thẳng IA .
Tính quãng đường S mà vật đi chuyển được trong 4 giờ đó.

BÀI 13. BÀI TOÁN BƠM NƯỚC

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

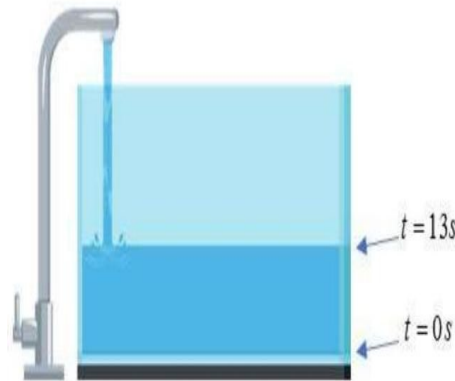
Lý thuyết: Các kiến thức cơ bản về nguyên hàm của hàm số.

Phương pháp: Sử dụng phương pháp nguyên hàm, tích phân cơ bản để tìm yếu tố chưa biết.

Ví dụ: Người ta bơm nước vào một bồn chứa, lúc đầu bồn không chứa nước, mức nước ở bồn chứa sau khi bơm phụ thuộc vào thời gian bơm nước theo một

hàm số $h = h(t)$ trong đó h tính bằng cm , t tính

bằng giây. Biết rằng $h'(t) = \sqrt[3]{2t+1}$. Mức nước ở bồn sau khi bơm được 13 giây là bao nhiêu?



Lời giải

Ta có:

$$h(t) = \int h'(t) dt = \int \sqrt[3]{2t+1} dt = \frac{3}{8} (2t+1) \sqrt[3]{2t+1} + C$$

$$\Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C + \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow C = -\frac{3}{8}$$

Lúc đầu $t=0$, bể không có nước

$$\Rightarrow h(t) = \frac{3}{8} (2t+1) \sqrt[3]{2t+1} - \frac{3}{8} \Rightarrow h(13) = 30$$

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là 280 cm. Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều

$$h'(t) = \frac{1}{500} \sqrt[3]{t+3}$$

cao mực nước tại giây thứ t là và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì bơm

được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi (làm tròn đến giây)?

Bài 2: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là 90 m^3 , sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là 504 m^3 . Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

Bài 3: Người ta bơm nước vào một bồn chứa, lúc đầu bồn không chứa nước, mức nước ở bồn chứa sau khi bơm phụ thuộc vào thời gian bơm nước theo một hàm số $h = h(t)$ trong đó h tính bằng cm , t tính bằng giây. Biết rằng $h'(t) = \sqrt[3]{3t+8}$. Mức nước ở bồn sau khi bơm được 10 giây là bao nhiêu? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Bài 4: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là 150 m^3 , sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là 1100 m^3 . Tính thể tích của nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

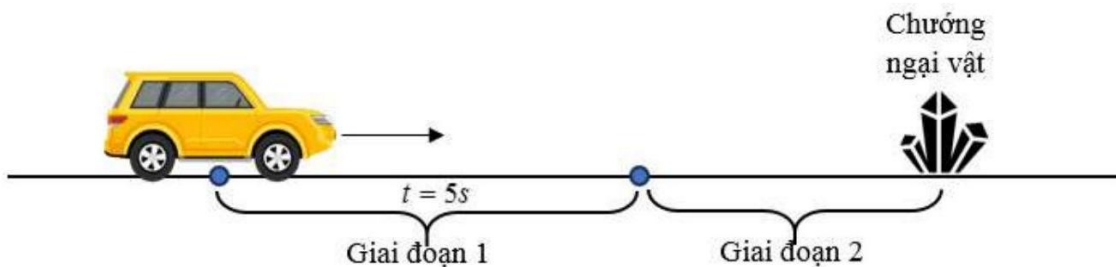
BÀI 14. BÀI TOÁN GẤP CHƯỚNG NGẠI VẬT

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Lý thuyết: Sử dụng lý thuyết chung của dạng toán chuyển động cơ bản.

Phương pháp: Tìm quãng đường của giai đoạn 1 là lúc vật bắt đầu chuyển động, giai đoạn 2 là lúc vật bắt đầu gấp chướng ngại vật và thay đổi chuyển động. Sau đó ta thực hiện yêu cầu bài toán.

Ví dụ: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t \text{ (m/s)}$. Đi được 5(s) người lái xe gấp chướng ngại vật nên phải phanh gấp cho xe chạy chậm dần đều với gia tốc $-55 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường đi được của ô tô từ lúc chuyển bánh đến khi dừng hẳn.



Lời giải

Chiếc ô tô thực hiện hai giai đoạn:

Giai đoạn 1: Chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t \text{ (m/s)}$ trong 5 (s) , do đó quãng đường chặng 1 của ô tô là $S_1 = \int_0^5 7t dt = 87,5 \text{ (m)}$.

Lúc này, ô tô đang đạt vận tốc $v_1(5) = 7 \times 5 = 35 \text{ (m/s)}$.

Giai đoạn 2: Ô tô chuyển động với gia tốc $-55 \text{ (m/s}^2\text{)}$ nên phương trình vận tốc của xe là

$$v_2(t) = \int -55 dt = -55t + C$$

Khi $t = 0$ của chặng 2 thì xe có vận tốc $v_1(5) = 35$ nên $v_2(0) = 35 \Leftrightarrow C = 35$.

Vậy $v_2(t) = -55t + 35$. Ô tô dừng hẳn khi $v_2(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.5$.

Vậy quãng đường ô tô đi chuyển trong chặng 2 là

$$S_2 = \int_0^{0.5} (-55t + 35) dt = \frac{85}{8} = 10,625 \text{ (m)}$$

Vậy tổng quãng đường ô tô đi được từ khi khởi hành đến khi dừng hẳn là

$$S = S_1 + S_2 = 87,5 + 10,625 = 98,125 \text{ (m)}$$

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Một chiếc xe bán tải bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 3t \text{ (m/s)}$. Đi được 8 (s) người lái xe gặp chướng ngại vật nên phải phanh gấp cho xe chạy chậm dần đều với gia tốc $-36 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường đi được của chiếc xe từ lúc chuyển bánh đến khi dừng hẳn.

Bài 2: Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t \text{ (m/s)}$. Đi được 5 (s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?

Bài 3: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t \text{ (m/s)}$. Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường $s \text{ (m)}$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn?

Bài 4: Một chất điểm bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0 , sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\frac{5}{2}t + a \text{ (m/s)}$, ($t \geq 6$) cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì chất điểm đi được quãng đường là 80 m. Tìm v_0 .

Bài 5: Một ô tô đang chạy với vận tốc $v_0 \text{ (m/s)}$ thì gặp chướng ngại vật nên người lái xe đã đạp phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -6t \text{ (m/s}^2\text{)}$ trong đó t là thời gian tính bằng

giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Biết từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được 16 m .

Tính v_0 ?

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Chủ đề 4. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG
BÀI 7. DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

Bài 1:

Cách 1:

Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ mà trục đối xứng của parabol trùng với trục tung, trục hoành trùng với đường tiếp đất của cổng.

Khi đó parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + c$.

Vì (P) đi qua đỉnh $I(0; 12,5)$ nên ta có $c = 12,5$.

(P) cắt trục hoành tại hai điểm $A(-4; 0)$ và $B(4; 0)$ nên ta có

$$0 = 16a + c \Rightarrow a = \frac{-c}{16} = -\frac{25}{32} \quad (P): y = -\frac{25}{32}x^2 + 12,5$$

Do đó

$$S = \int_{-4}^4 \left(-\frac{25}{32}x^2 + 12,5 \right) dx = \frac{200}{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích của cổng là:

Cách 2:

Ta có parabol đã cho có chiều cao là $h = 12,5$ m và bán kính đáy $OD = OE = 4$ m

$$S = \frac{4}{3}rh = \frac{200}{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

Do đó diện tích parabol đã cho là:

Bài 2:

Chọn hệ trục tọa độ Oxy (như hình bên). Khi đó

Diện tích hình chữ nhật là $S_1 = 4\pi$

$$S_2 = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = 4$$

Diện tích phần đất được tô màu đen là

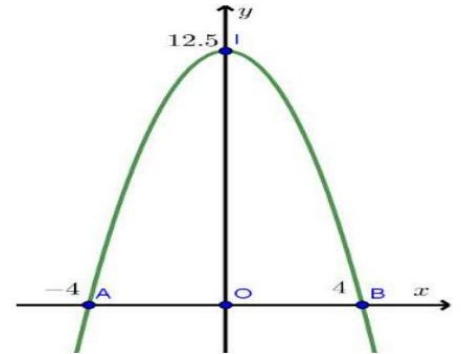
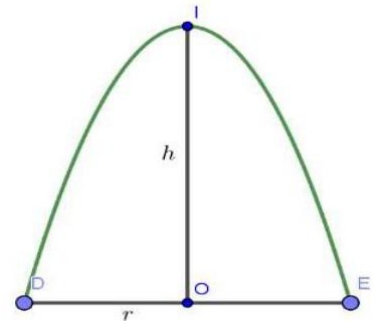
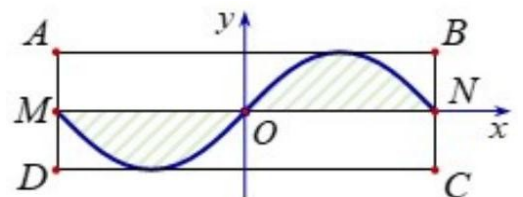
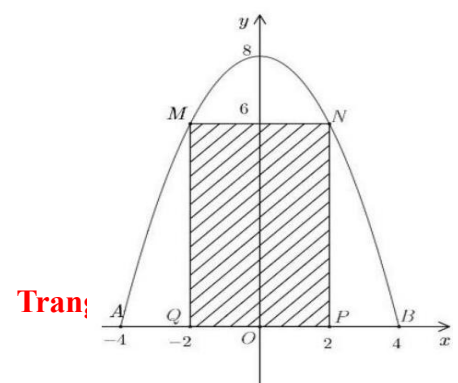
$$S = S_1 - S_2 = 4\pi - 4 = 4(\pi - 1)$$

Tính diện tích phần còn lại:

Bài 3:

Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Phương trình parabol có dạng $(P): y = ax^2 + bx + c$



$$\begin{cases} A(-4;0) \in (P) \\ B(4;0) \in (P) \\ N(2;6) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a - 4b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = 8 \end{cases}$$

Ta có:

$$\Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$$

$$S = \int_{-4}^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 8\right) dx - S_{MNPQ} = \frac{128}{3} - 4.6 = \frac{56}{3}$$

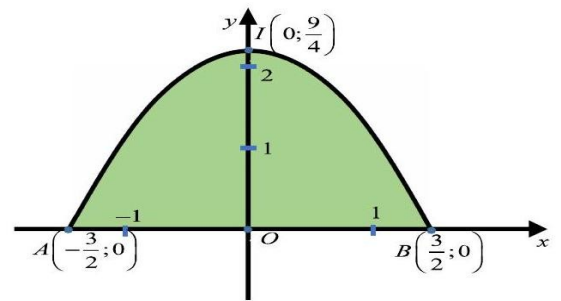
Diện tích để trang trí hoa là:

$$\frac{56}{3} \cdot 200000 \approx 3733300$$

Vậy số tiền để mua hoa trang trí: đồng.

Bài 4:

Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$.



$$\begin{cases} \frac{9}{4} = c, (I \in (P)) \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = 0 (A \in (P)) \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = 0 (B \in (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{9}{4} \\ a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình:

$$(P): y = -x^2 + \frac{9}{4}$$

Vậy

Dựa vào đồ thị, diện tích của parabol là:

$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4}\right) dx = 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4}\right) dx = 2 \left(\frac{-x^3}{3} + \frac{9}{4}x \right) \Big|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \text{ m}^2$$

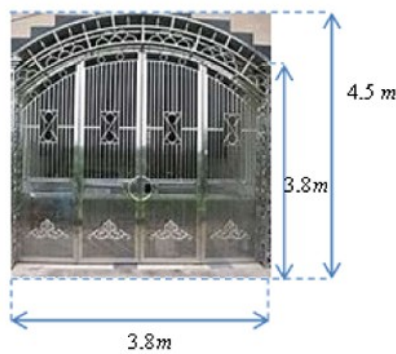
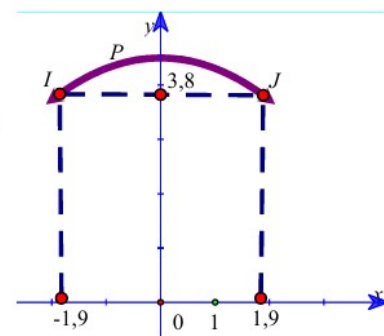
Số tiền phải trả là: $\frac{9}{2} \cdot 1500000 = 6750000$ đồng.

Bài 5:

Ta chọn hệ trục tọa độ như hình

$$I\left(-\frac{19}{10}; \frac{19}{5}\right), J\left(\frac{19}{10}; \frac{19}{5}\right)$$

đó



vẽ. Trong

Đường cong phía trên là một parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + b$, với $a, b \in \mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm I, J và chiều cao cổng là $\frac{9}{2}$ m nên có $y = -\frac{70}{361}x^2 + \frac{9}{2}$.

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\frac{70}{361}x^2 + \frac{9}{2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -\frac{19}{10}; x = \frac{19}{10}$.

$$S = \int_{-\frac{19}{10}}^{\frac{19}{10}} \left(-\frac{70}{361}x^2 + \frac{9}{2} \right) dx = \frac{1216}{75}$$

Ta có

Vậy ông X phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là: $\frac{1216}{75} \times 1300000 \approx 21077330$ (đồng).

Bài 6:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

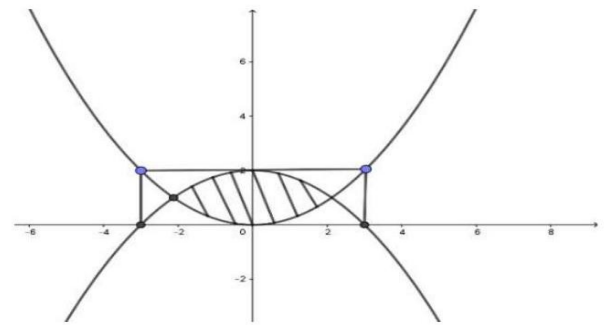
Ta lập được phương trình các parabol là $y = \frac{2}{9}x^2$ và

$$y = -\frac{2}{9}x^2 + 2$$

. Khi đó mảnh vườn nằm ở miền trong hai

parabol là hình phẳng giới hạn bởi 2 đường $y = \frac{2}{9}x^2$ và

$$y = -\frac{2}{9}x^2 + 2$$



$$S = 2 \int_0^3 \left(-\frac{4}{9}x^2 + 2 \right) dx = 4\sqrt{2} \text{ m}^2$$

Khi đó diện tích của mảnh vườn nằm trong hai parabol là:

Diện tích hình chữ nhật là: 12 m^2 .

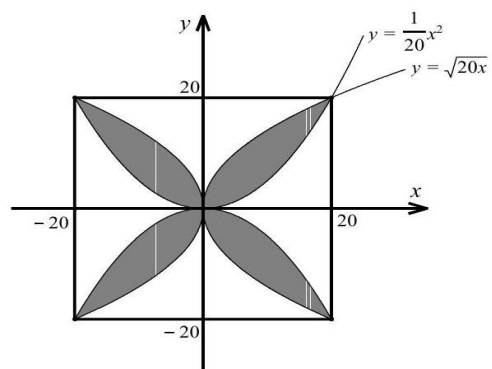
Khi đó tỉ số diện tích phần mảnh vườn nằm ở miền trong hai parabol với diện tích phần còn lại là:

$$\frac{4\sqrt{2}}{12 - 4\sqrt{2}} = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{7}$$

Bài 7:

a) Diện tích một cánh hoa là diện tích hình phẳng được công thức sau:

$$S_1 = \int_0^{20} \left(\sqrt{20x} - \frac{1}{20}x^2 \right) dx$$



tính theo

$$= \left(\frac{2}{3} \sqrt{20} \sqrt{x^3} - \frac{1}{60} x^3 \right) \Big|_0^{20} = \frac{400}{3} (\text{cm}^2)$$

b) Diện tích hoa văn trang trí bằng bốn lần diện tích một cánh hoa được tính theo công thức sau:

$$S = 4S_1 = 4 \int_0^{20} \left(\sqrt{20x} - \frac{1}{20} x^2 \right) dx = 4 \left(\frac{2}{3} \sqrt{20} \sqrt{x^3} - \frac{1}{60} x^3 \right) \Big|_0^{20} = \frac{1600}{3} (\text{cm}^2)$$

Bài 8:

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

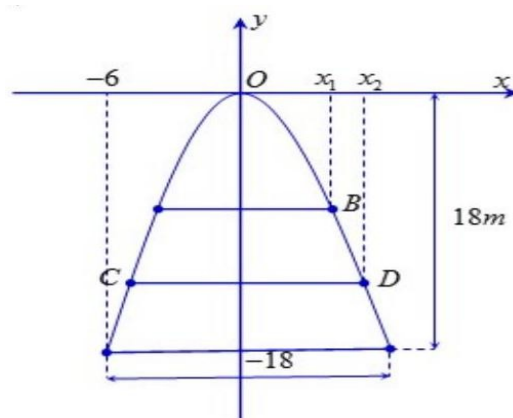
Phương trình parabol có dạng $y = a \cdot x^2 (P)$.

(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6; -18)$ suy ra

$$-18 = a \cdot (-6)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2} x^2$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2}$$

Từ hình vẽ ta có:



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng

$$AB: y = -\frac{1}{2} x_1^2 \quad \text{là}$$

$$S_1 = 2 \int_0^{x_1} \left[-\frac{1}{2} x^2 - \left(-\frac{1}{2} x_1^2 \right) \right] dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} x_1^2 x \right) \Big|_0^{x_1} = \frac{2}{3} x_1^3$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng

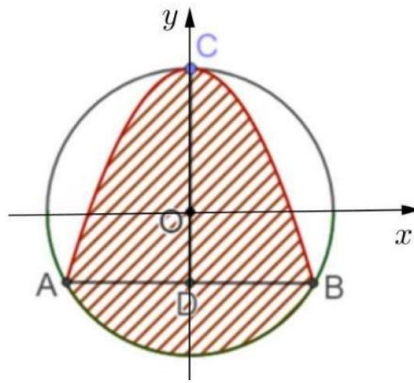
$$CD: y = -\frac{1}{2} x_2^2 \quad \text{là}$$

$$S_2 = 2 \int_0^{x_2} \left[-\frac{1}{2} x^2 - \left(-\frac{1}{2} x_2^2 \right) \right] dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} x_2^2 x \right) \Big|_0^{x_2} = \frac{2}{3} x_2^3$$

$$S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad \text{Vậy} \quad \frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Từ giả thiết suy ra

Bài 9:



Do tam giác ABC là tam giác đều có cạnh $4\sqrt{3}$ cm nên

$$CD = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \text{ (cm)} \Rightarrow OC = \frac{2}{3}CD = 4 \text{ (cm)} \quad \text{và} \quad OD = 2 \text{ (cm)}$$

Gắn trục tọa độ Oxy như hình vẽ, ta có $A(-2\sqrt{3}; -2)$, $B(2\sqrt{3}; -2)$, $C(0; 4)$.

Phương trình đường parabol đi qua 3 điểm A, B, C có đỉnh C có dạng $y = ax^2 + 4 \text{ (P)}$.

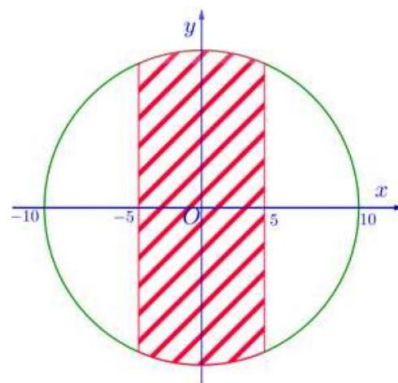
Thay tọa độ điểm $B(2\sqrt{3}; -2)$ vào (P) suy ra $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

Phương trình đường tròn tâm O bán kính $OA = 4$ là $x^2 + y^2 = 16$.

$\Rightarrow$ Phương trình một phần cung nhỏ AB có dạng $y = -\sqrt{16 - x^2}$

Vậy diện tích phần gạch chéo bằng $\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left[\left(-\frac{1}{2}x^2 + 4 \right) - \left(-\sqrt{16 - x^2} \right) \right] dx \approx 37,54 \text{ (cm}^2\text{)}$

Bài 10:



Ta xác định hệ tọa độ đặt vào tâm khu đất như hình vẽ. Khi đó phương trình đường tròn khu đất có tâm O và bán kính 10 m là: $x^2 + y^2 = 100$.

Ta có phần nửa cung tròn phía trên Ox có phương trình: $y = \sqrt{100 - x^2}$.

Khi đó diện tích trồng rau bằng hai lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y = f(x)$ và hai

$$S = 2 \int_{-5}^5 \sqrt{100 - x^2} dx$$

đường thẳng $x = -5; x = 5$. Do đó:

Đặt $x = 10 \sin t \Rightarrow dx = 10 \cos t dt$

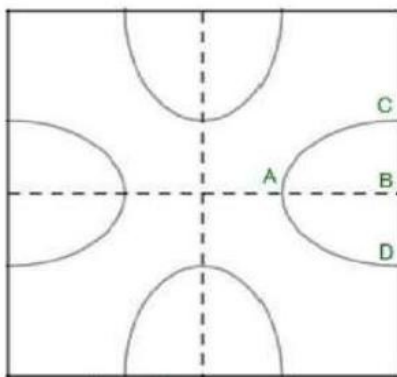
Đổi cận $x = -5 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}; x = 5 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$$S = 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 100 \cos^2 t dt = 100 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = 100 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 50\sqrt{3} + 100 \frac{\pi}{3}$$

Vậy diện tích phần đất còn lại là:

$$\pi 10^2 - S = \frac{200\pi}{3} - 50\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

Bài 11:



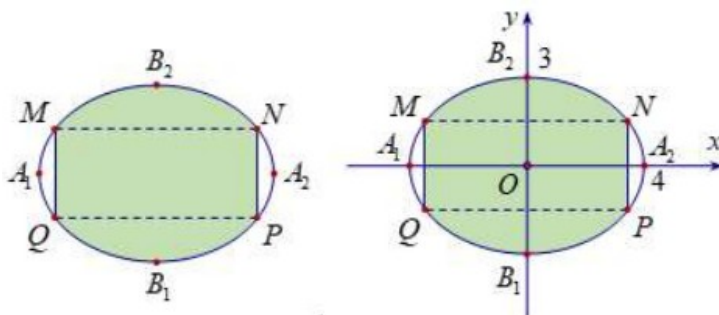
Gọi S_1 là diện tích hình vuông, S_2 là diện tích khoét đi.

Ta có $S_1 = 20^2 = 400 \text{ (cm}^2\text{)}$ và $S_2 = 2\pi ab = 2\pi \cdot 6 \cdot 4 = 48\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

(vì mỗi phần bị khoét đi là nửa elip có $a = 6, b = 4$).

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là $S = S_1 - S_2 = 400 - 48\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Bài 12:



$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Giải sử phương trình elip

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} A_1A_2 = 8 \\ B_1B_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 \\ 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2}$$

Diện tích của elip (E) là $S_{(E)} = \pi ab = 12\pi \text{ (m}^2\text{)}$

Ta có: $MQ = 3 \Rightarrow \begin{cases} M = d \cap (E) \\ N = d \cap (E) \end{cases}$ với d: $y = \frac{3}{2} \Rightarrow M\left(-2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$ và $N\left(2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$

$$S = 4 \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(\frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2} \right) dx = 4\pi - 6\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

Khi đó, diện tích phần không tô màu là

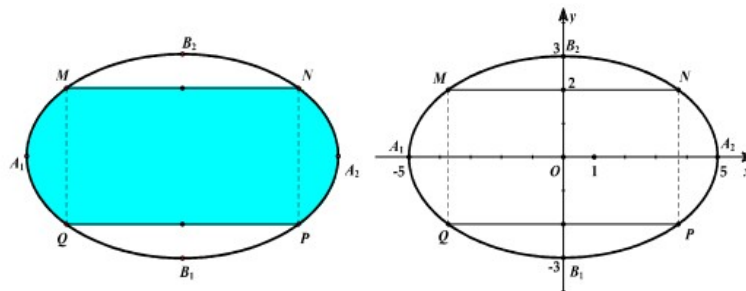
$$S' = S_{(E)} - S = 8\pi + 6\sqrt{3}$$

Diện tích phần tô màu là

Số tiền để sơn theo yêu cầu bài toán là

$$T = 100000 \times (4\pi - 6\sqrt{3}) + 200000 \times (8\pi + 6\sqrt{3}) \approx 7322000 \text{ đồng.}$$

Bài 13:



Vì elip có độ dài trục lớn $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$, độ dài trục bé $2b = 6 \Leftrightarrow b = 3$ nên elip có diện tích là $S_{(E)} = \pi ab = 15\pi$

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho A_1A_2 trùng Ox , B_1B_2 trùng Oy khi đó elip có

phương trình chính tắc $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$\Rightarrow y = \pm \frac{3}{5} \sqrt{25 - x^2}$$

Vì $MQ = 4 \Rightarrow d(O, MN) = 2$ nên MN có phương trình là $y = 2$ và $N(x_0; 2), x_0 > 0$

$$N \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{25} + \frac{2^2}{9} = 1 \Rightarrow x_0^2 = \frac{125}{9} \Rightarrow x_0 = \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

Vì điểm

$$M\left(-\frac{5\sqrt{5}}{3}; 2\right), N\left(\frac{5\sqrt{5}}{3}; 2\right)$$

Suy ra

$$S_1 = 4 \cdot \int_0^{\frac{5\sqrt{5}}{3}} \left(\frac{3}{5} \sqrt{25 - x^2} - 2 \right) dx \rightarrow$$

Nên diện tích phần lát gạch trắng là:

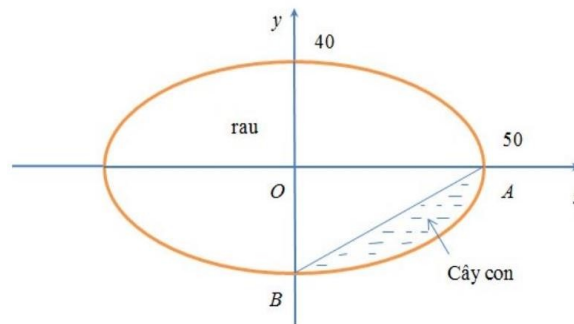
gán biến X .

$$S_2 = S_{(E)} - S_1 = 15\pi - X \rightarrow Y$$

Suy ra diện tích phần lát gạch xanh là

$$\text{Vậy chi phí cần tìm là: } T = Y \cdot 300000 + X \cdot 100000 \approx 12072179 \text{ đồng.}$$

Bài 14:



Chứng minh: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ là πab .

Thật vậy, phần đường elip nằm trên trục hoành có phương trình $y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

Do Ox, Oy là trục đối xứng của elip (E) nên

$$\text{diện tích hình phẳng giới hạn bởi elip } (E) \text{ là } S = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

$$\text{Đặt } x = a \sin t \text{ với } t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ ta được } S = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} d(a \sin t) = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \pi ab$$

Xét mảnh vườn: $a = 50, b = 40$

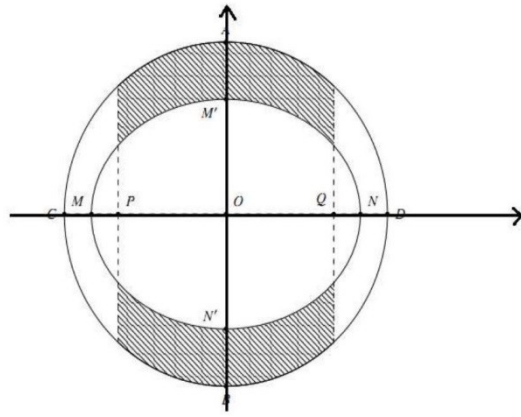
$$S_c = \frac{\pi}{4} \cdot 40 \cdot 50 - S_{OAB} = (\pi - 2) 500 \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích trồng cây con là:

$$S_r = \pi \cdot 40 \cdot 50 - (\pi - 2) 500 = (3\pi + 2) 500 \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích trồng rau là:

$$\text{Thu nhập từ mảnh vườn là: } (\pi - 2) 500 \cdot 2000 + (3\pi + 2) 500 \cdot 4000 \approx 23991000 \text{ (đồng).}$$

Bài 15:

Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Khi đó phương trình đường tròn là:

$$x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow y = \pm \sqrt{36 - x^2}$$

Phương trình elip là:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow y = \pm 4 \sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$$

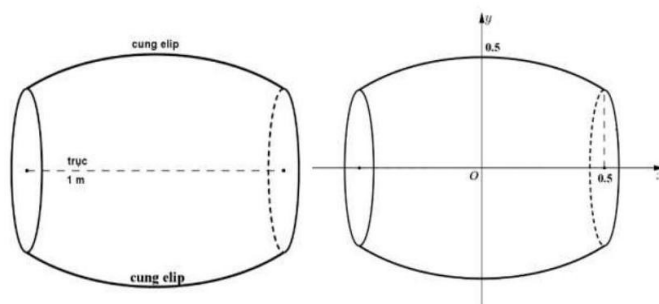
Do tính đối xứng nên diện tích phần tròng cỏ sẽ là:

$$S = 4 \int_0^4 \left(\sqrt{36 - x^2} - 4 \sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \right) dx \approx 30,03 \text{ (m}^2\text{)}$$

BÀI 7. THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐỒ THỊ HÀM XÁC ĐỊNH

Bài 1:

Xét hệ trục tọa độ O_{xy} như hình vẽ (trục hoành trùng với trục của trống, gốc tọa độ O trùng với tâm trống, đơn vị: m).



Theo giả thiết elip (E) có phương trình là

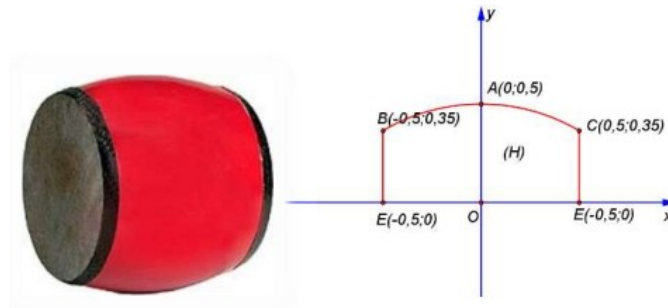
$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2}$$

$$V = 2\pi \int_0^{0.5} \left(\frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \pi \int_0^{0.5} (1 - x^2) dx = \frac{11\pi}{48}$$

Thể tích của cái trống là

Vậy thể tích của cái trống trường là $\frac{11\pi}{48} (\text{m}^3)$.

Bài 2:



Xét hình phẳng (H) (hình vẽ). Thể tích khối được giới hạn bởi bề mặt của trống là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) quanh trục hoành.

Gọi phương trình parabol đi qua 3 điểm A, B, C là

$$(P): y = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

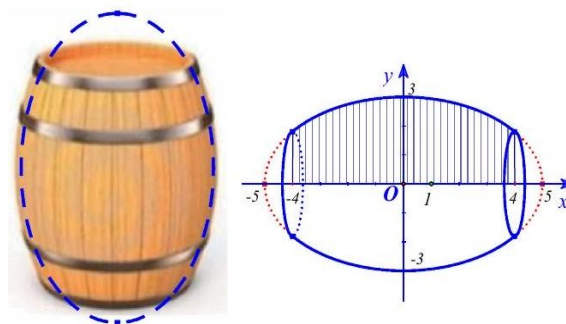
Thay tọa độ các điểm $A(0; 0, 5), B(-0, 5; 0, 35), C(0, 5; 0, 35)$ vào phương trình của (P) ta được:

$$\begin{cases} c = 0,5 \\ 0,25a - 0,5b + c = 0,35 \\ 0,25a + 0,5b + c = 0,35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -0,6 \\ b = 0 \\ c = 0,5 \end{cases} \Rightarrow (P): y = -0,6x^2 + 0,5$$

Thể tích cần tìm

$$V = \pi \int_{-0,5}^{0,5} (-0,6x^2 + 0,5)^2 dx = \frac{409\pi}{2000} (\text{m}^3)$$

Bài 3:

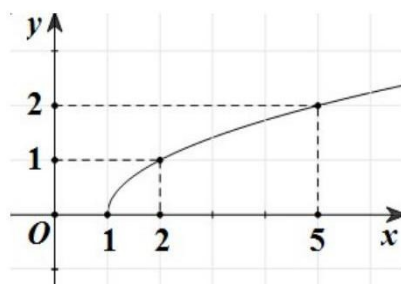


Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Khi đó đường Elip có phương trình: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Thùng rượu là vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi đường elip, trục Ox , các đường thẳng $x = -4; x = 4$ quay xung quanh trục Ox .

Ta có $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{9}{25}(25 - x^2)$ suy ra thể tích thùng rượu là

$$V = \int_{-4}^4 \pi y^2 dx = \frac{9\pi}{25} \int_{-4}^4 (25 - x^2) dx = \frac{9\pi}{25} \left(25x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-4}^4 = \frac{1416\pi}{25} (\text{m}^3) = \frac{1416\pi}{25} (\text{lít}).$$

Bài 4:



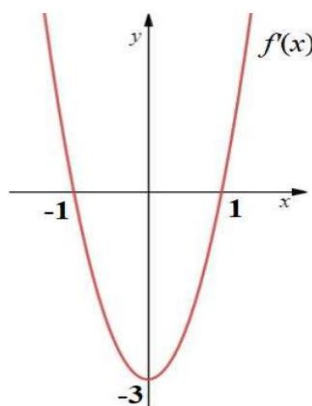
Vì đáy bình và miệng bình có đường kính lần lượt là 2 và 4 nên bán kính của đáy bình và miệng bình lần lượt là 1 và 2.

Ta có $\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$ và $\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 5$.

Vậy thể tích của bình cắm hoa là

$$V = \pi \int_2^5 (\sqrt{x-1})^2 dx = \pi \int_2^5 (x-1) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_2^5 = \frac{15\pi}{2}$$

Bài 5:



Từ hình vẽ ta có được $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + d$

Ta có $y = 4$ là đường thẳng có hệ số góc bằng 0 nên $y = 4$ là tiếp tuyến tại điểm cực trị x_0 có hoành độ âm của hàm số $f(x) \Rightarrow f(x_0) = 4$.

Từ hình vẽ ta thấy được $f(x)$ có một điểm cực trị âm là $x = -1$

$$\Rightarrow f(-1) = 4 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 2$$

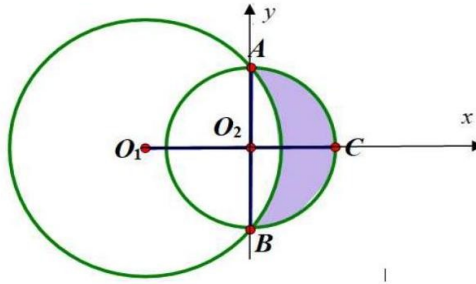
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Xét phương trình

Khi đó thể tích vật thể được tạo ra khi xoay hình phẳng H quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2)^2 dx = \frac{729\pi}{35}$$

Bài 6:



Cách 1: Ta xây dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ

Ta có $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = 6$

Ta có $O_2(0; 8), O_1(-6; 0)$

Đường tròn $(O_2; 8)$ có phương trình là: $x^2 + y^2 = 64$

$$\Rightarrow y = \sqrt{64 - x^2}$$

Đường tròn $(O_1; 10)$ có phương trình là: $(x+6)^2 + y^2 = 100 \Rightarrow y = \sqrt{100 - (x+6)^2}$

$$V = \pi \int_0^8 (64 - x^2) dx - \pi \int_0^4 [100 - (x+6)^2] dx = \frac{608\pi}{3}$$

Thể tích cần tìm:

Cách 2: Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2 \equiv O, O_2C \equiv Ox, O_2A \equiv Oy$

Cạnh $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \Rightarrow (O_1): (x+8)^2 + y^2 = 100$

Phương trình đường tròn $(O_2): x^2 + y^2 = 36$

Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{100 - (x+8)^2}$, trục $Ox, x = 0, x = 2$

Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{36 - x^2}$, trục $Ox, x = 0, x = 6$

Khi đó thể tích V cần tính chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox .

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 6^3 = 144\pi$$

Ta có

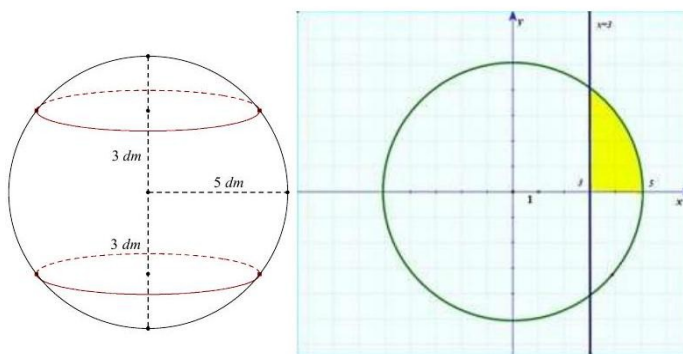
$$V_1 = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 [100 - (x+8)^2] dx = \frac{112\pi}{3}$$

Lại có

$$V = V_2 - V_1 = 144\pi - \frac{112\pi}{3} = \frac{320\pi}{3}$$

Do đó

Bài 7:



Cách 1: Sử dụng ứng dụng của tích phân

Xét đường tròn có tâm $O(0;0)$, bán kính $R=5$. Khi đó phương trình của đường tròn là:
 $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 = 25 - x^2 \quad (C)$

Thể tích lu nước cần tính chính là thể tích của khối tròn xoay khi quay đường tròn (C) quanh trục Ox và bỏ đi phần chỏm cầu giới hạn bởi 2 mặt phẳng song song và vuông góc với trục Ox và cách O một khoảng là 3.

$$V = \pi \int_{-3}^3 (25 - x^2) dx = 132\pi \text{ (dm}^3\text{)}$$

Thể tích của lu nước là:

Cách 2: Sử dụng các công thức thể tích thông thường

$$\Rightarrow V_1 = \frac{4}{3} \pi \cdot 5^3 = \frac{500}{3} \pi \text{ (dm}^3\text{)}$$

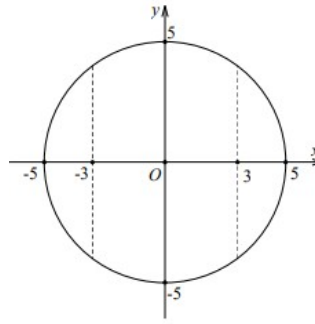
Gọi V_1 là thể tích khối cầu

Gọi V_2 là tổng thể tích 2 chỏm cầu bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với đường kính và cách tâm một khoảng

$$3 \text{ (dm)} \Rightarrow V_2 = 2\pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = 2\pi \cdot 2^2 \cdot \left(5 - \frac{2}{3} \right) = \frac{104}{3} \pi \text{ (dm}^3\text{)}$$

Khi đó thể tích V của lu nước cần tính là: $V = V_1 - 2V_2 = 132\pi \text{ (dm}^3\text{)}$

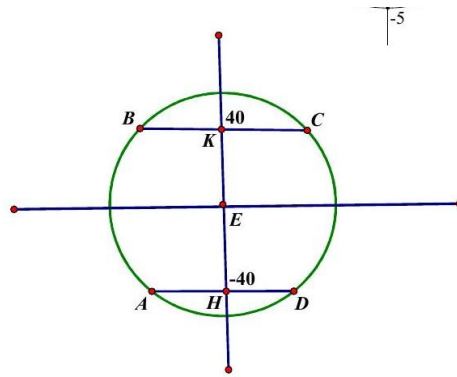
Cách 3:



Đặt hệ trục với tâm O là tâm của mặt cầu, đường thẳng đứng là Ox , đường ngang là Oy . Ta có phương trình của đường tròn lớn là $x^2 + y^2 = 25$. Thể tích cái lu là thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình giới hạn bởi các đường cong $y = \sqrt{25 - x^2}$, trục Ox , đường thẳng $x = -3, x = 3$ quay quanh Ox .

$$V = \pi \int_{-3}^3 (25 - x^2) dx = \pi \left(25x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^3 = 132\pi \text{ (dm}^3\text{)}$$

Bài 8:

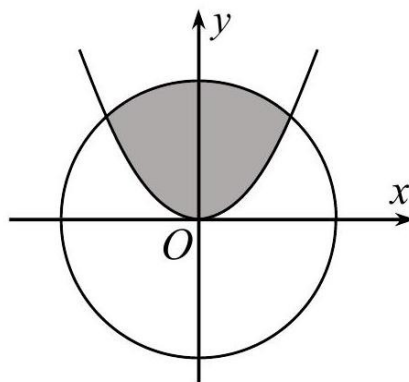


Phương trình đường tròn tâm E bán kính 60 cm là: $x^2 + y^2 = 60^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{60^2 - y^2}$.

Thể tích thùng rượu được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi $x = \sqrt{3600 - y^2}; x = 0; y = \pm 40$ quanh Oy .

$$V = \pi \int_{-40}^{40} (3600 - y^2) dy = 770737,4 \text{ (cm}^3\text{)} \approx 771 \text{ (lit)}.$$

Bài 9:



Với $y = x^2$ thay vào phương trình đường tròn ta được

$$x^2 + x^4 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{2-x^2} \\ y = \sqrt{2-x^2} \end{cases}$$

Hơn nữa

$$(H_1): \begin{cases} y = \sqrt{2-x^2} \\ x = -1 \\ x = 1 \\ Ox \end{cases}$$

Thể tích cần tìm chính là thể tích vật thể tròn xoay

quay quanh Ox bỏ đi phần thể tích

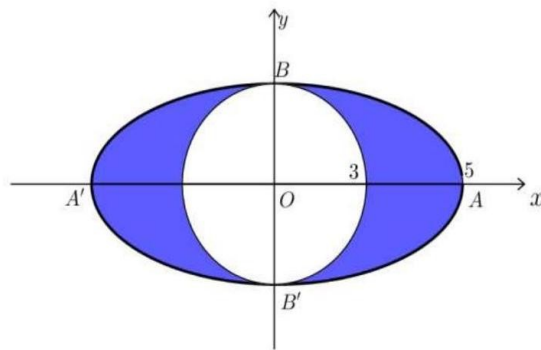
$$(H_2): \begin{cases} y = x^2 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ Ox \end{cases} \text{ quay quanh } Ox$$

$$V = \pi \left[\int_{-1}^1 \left(\sqrt{2-x^2} \right)^2 dx - \int_{-1}^1 \left(x^2 \right)^2 dx \right] = \frac{44\pi}{15}$$

Do đó

Bài 10:

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$$

Giả sử phương trình chính tắc của elip có dạng

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} AA' = 10 \\ BB' = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 10 \\ 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{3}{5} \sqrt{25-x^2}$$

Đường tròn tâm O bán kính OB có phương trình $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm \sqrt{9-x^2}$

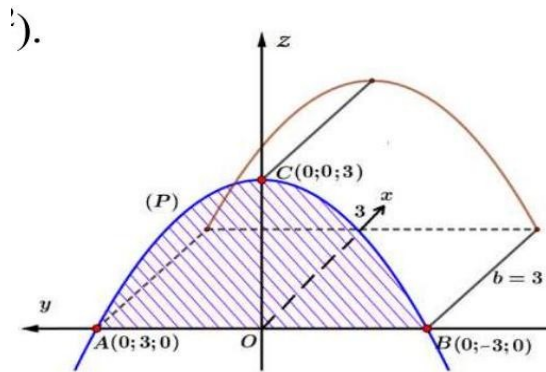
Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$, $y=0$, $x=0$, $x=5$ quay xung quanh trục Ox .

Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{9-x^2}$, $y=0$, $x=0$, $x=3$ quay xung quanh trục Ox .

Thể tích khối tròn xoay cần tìm bằng:

$$V = 2(V_1 - V_2) = 2\left(\pi \int_0^5 \frac{9}{25}(25-x^2)dx - \pi \int_0^3 (9-x^2)dx\right) = 24\pi$$

Bài 11:



Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ có đỉnh $C(0; 3)$, đi qua hai điểm

$$\begin{cases} 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 3 \\ 9a - 3b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

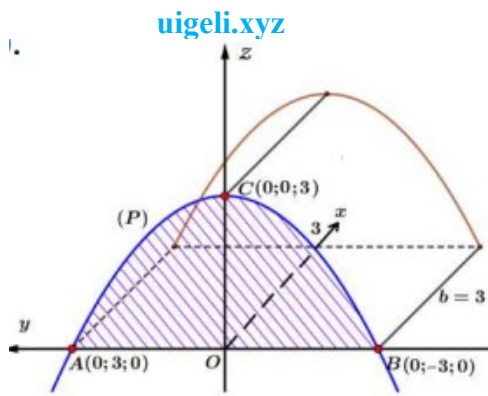
$A(-3; 0)$ và $B(3; 0)$ nên có hệ phương trình

Suy ra $(P): y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$

$$S = \int_{-3}^3 \left(3 - \frac{1}{3}x^2\right) dx = 12 \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích mặt trước của lều trại là:

- Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ



$$V = \int_0^3 12 \, dx = 36 \text{ (m}^3\text{)}$$

Khi đó thể tích phần không gian bên trong lều trại là

*** Ta có thể làm trắc nghiệm như sau: Công thức tính nhanh**

Diện tích phần gạch sọc là: $S = \frac{2}{3}ah$, với a là đáy, h là chiều cao.

$$S = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 3 = 12 \text{ (m}^2\text{)}; h = 3 \text{ (m)}$$

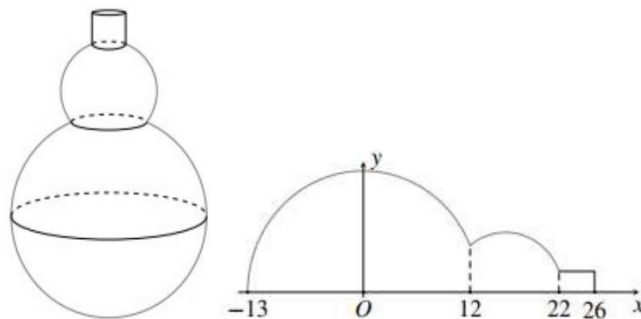
Có

$$V = 12 \cdot 3 = 36 \text{ (m}^3\text{)}$$

Coi khối cần tính như khối trụ thì khối có thể tích là

Bài 12:

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Ta có hồ lô được tạo thành từ hình phẳng trên khi nó quay xung quanh trục Ox .

Phương trình cung cong lớn là

$$x^2 + y^2 = 169 \Rightarrow y = \sqrt{169 - x^2}$$

Phương trình cung cong nhỏ là

$$(x - 16)^2 + y^2 = 41 \Rightarrow y = \sqrt{41 - (x - 16)^2}$$

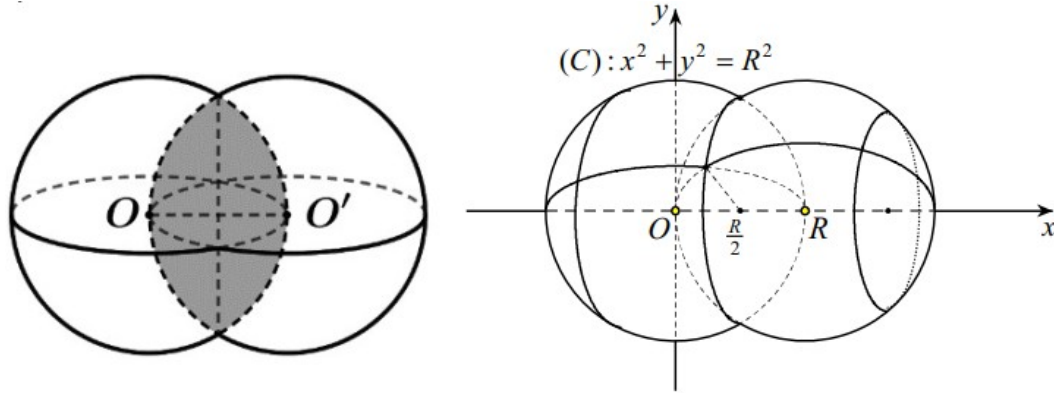
$$V = \pi \int_{-13}^{12} (169 - x^2) \, dx + \pi \int_{12}^{22} [41 - (x - 16)^2] \, dx + \pi \int_{22}^{26} 5 \, dx$$

Thể tích hồ lô là

$$= \pi \left(\frac{8750}{3} + \frac{950}{3} + 20 \right) = \frac{9760}{3} \pi \approx 10220,6 \text{ (cm}^3\text{)} \approx 10,2 \text{ (lít)}.$$

Bài 13:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox và mặt cầu tâm (O, R) là hình tròn.



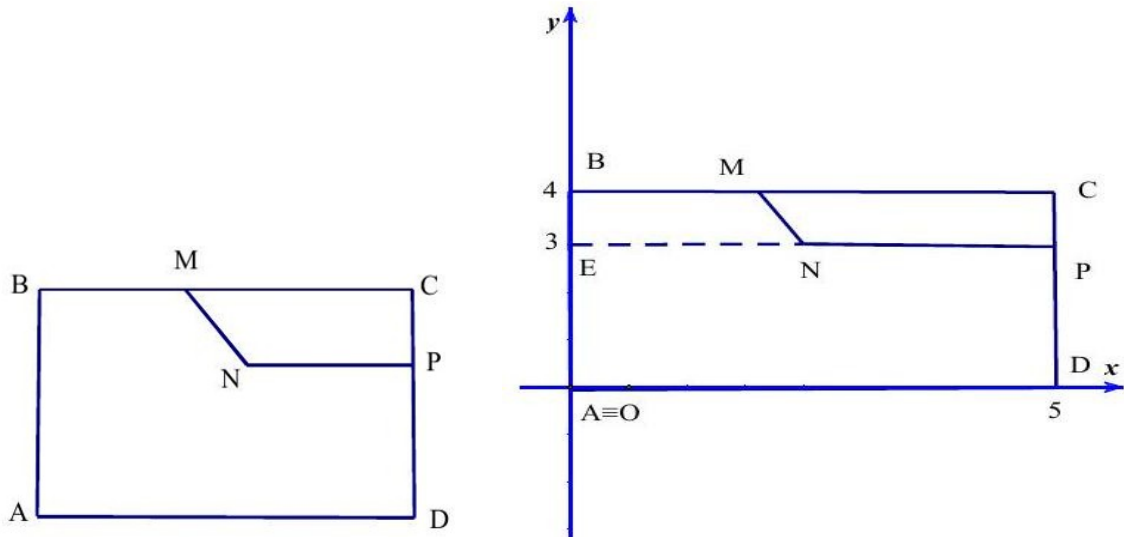
Diện tích thiết diện là $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$ (Trong đó x là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P))

$$V = 2 \int_{\frac{R}{2}}^R S(x) dx = 2 \pi \int_{\frac{R}{2}}^R (R^2 - x^2) dx = 2 \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^R = \frac{5\pi R^3}{12}$$

Thể tích cần tính là:

Bài 14:

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



$$V = V_{ADPE} = \pi \int_0^3 5^2 dy = 75 \pi \text{ (đvtt)}$$

Đường thẳng MN đi qua $M(2; 4), N(3; 3)$ có dạng $x = 6 - y$.

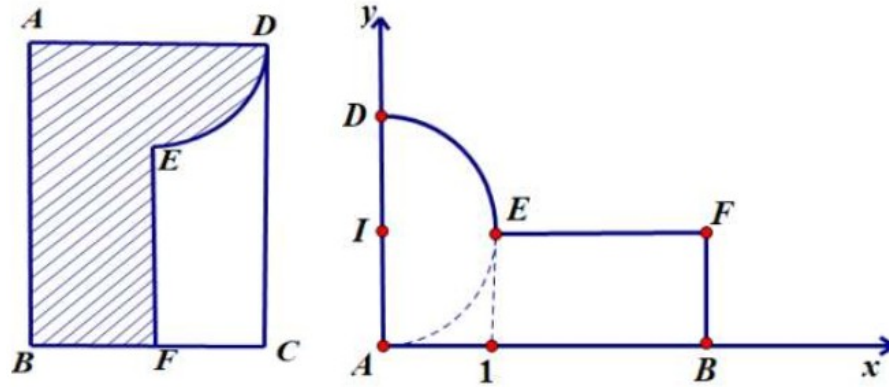
$$V_{ENMB} = \pi \int_3^4 (6-y)^2 dy = \frac{19\pi}{3} (\text{đvtt}).$$

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quay quanh trục Oy :

$$V = V_{ADPE} + V_{ENMB} = 75\pi + \frac{19\pi}{3} = \frac{244\pi}{3} (\text{đvtt}).$$

Bài 15:

Chọn hệ trục Oxy có $O \equiv A; B \in Ox; D \in Oy$.



Ta có: $A(0;0); D(0;2); B(3;0); E(1;1)$

Đường tròn tâm $I(0;1)$ chứa cung ED có phương trình là: $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

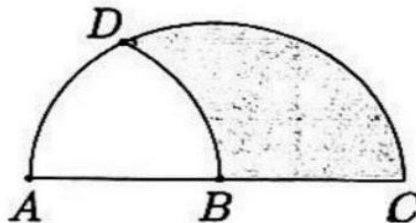
Nên cung trên của đường tròn tâm I có phương trình là: $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$.

$$V = \pi \int_0^1 \left(1 + \sqrt{1-x^2}\right)^2 dx + \pi \int_1^3 1^2 dx \approx 16,5 (\text{cm}^3)$$

Thể tích của vật thể trang trí là:

Bài 16:

Gắn hệ trục tọa độ Oxy với $O \equiv B$, tia $Ox \equiv BC$,



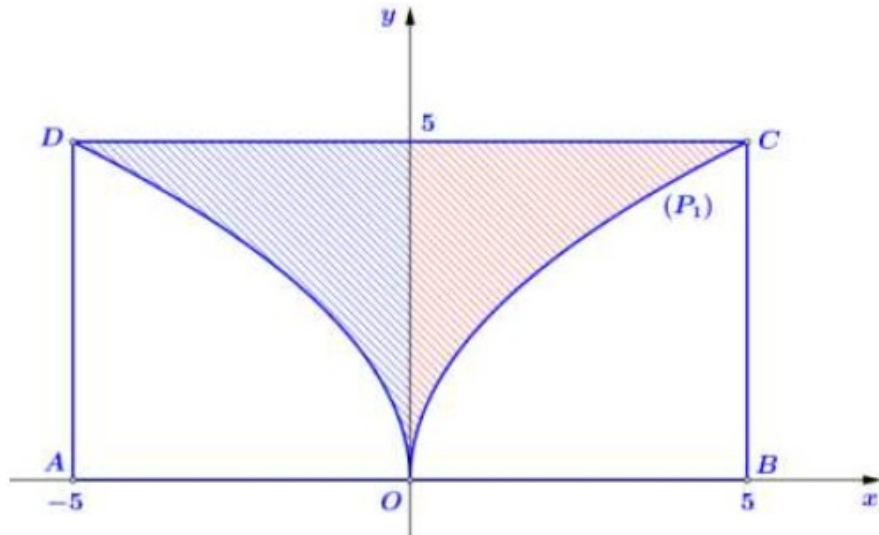
Đường tròn tâm $B(0;0), R=1$ là $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2$

Đường tròn tâm $A(-1;0), R=1$ là $(x+1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - (x+1)^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đường tròn là

$$1 - x^2 = 1 - (x+1)^2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow D\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$$

$$V = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^1 (1 - x^2) dx - \pi \int_{-\frac{1}{2}}^0 (1 - (1+x)^2) dx = \frac{11}{12} \pi \approx 2,9 \text{ cm}^3$$

Bài 17:

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục AB ta được khối trụ có

- Bán kính đáy $r = BC = 5 \text{ cm}$.
- Chiều cao $h = AB = 10 \text{ cm}$.

Do đó thể tích khối trụ này có thể tích

$$V_1 = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 250\pi (\text{cm}^3)$$

Mặt khác, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ thì $C(5;5)$ và parabol bên phải trục Ox có dạng $(P_1): y^2 = 2px$

Ta có $C \in (P_1) \Leftrightarrow p = \frac{5}{2} \Rightarrow (P_1): y^2 = 5x$ hay $y = \sqrt{5x}$.

Khi đó miền (R) khi quay quanh trục Ox có thể tích

$$V_2 = 2\pi \int_0^5 [5^2 - 5x] dx = 2\pi \left(25x - \frac{5}{2}x^2 \right) \Big|_0^5 = 125\pi$$

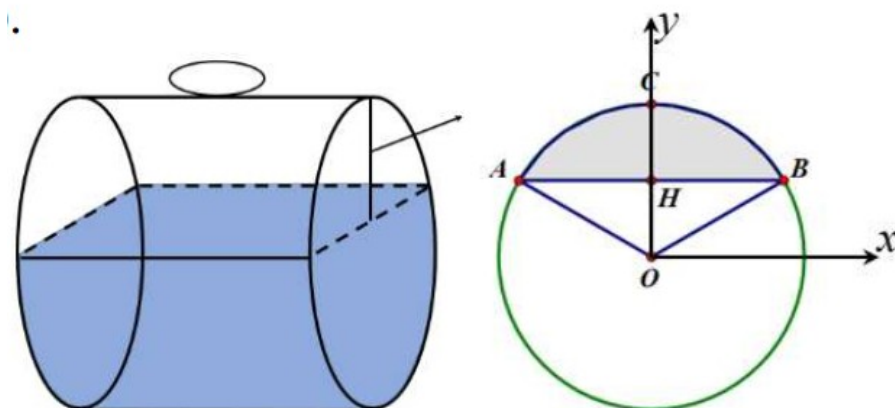
Vậy thể tích phần còn lại là $V = V_1 - V_2 = 125\pi (\text{cm}^3)$.

Bài 18:

Thể tích của bồn chứa dầu là $V = B \cdot h = 5\pi (\text{cm}^3)$.

Gọi V_1 là thể tích phần dầu bị rút ra.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Ta có diện tích phần tô đậm là

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \right) dx = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} \cdot dx - 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} \cdot dx - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \cdot dt - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t \cdot dt - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}. \\
 V_1 &= \int_0^5 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) dx = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot 5
 \end{aligned}$$

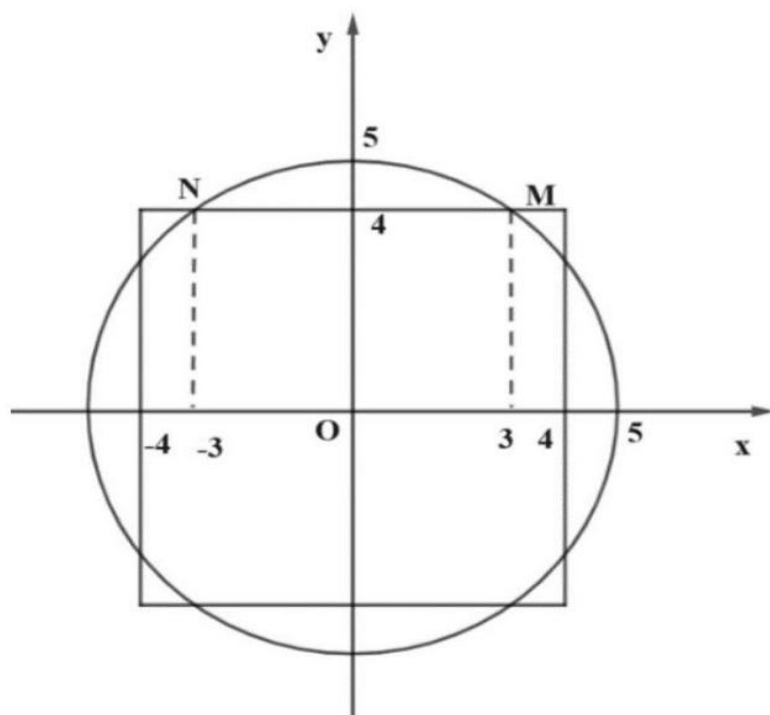
Vậy thể tích phần dầu bị rút ra là

$$V_2 = V - V_1 = 5\pi - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) 5 \approx 12.637 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Vậy thể tích phần dầu còn lại trong bồn là

Bài 19:

Cách 1: Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Khi đó phương trình đường tròn có dạng $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm \sqrt{25 - x^2}$.

Một phần tư đường tròn $\begin{cases} y = \sqrt{25 - x^2} \\ x \geq 0 \end{cases}$ cắt các đường $y = 4$ và $x = 4$ lần lượt tại $(3; 4)$ và $(4; 3)$.

Do đó thể tích của mô hình khi quay quanh trục XY là

$$V = 2\pi \left[\int_0^3 (25 - x^2) dx + \int_3^4 (25 - x^2) dx + \int_3^4 4^2 dx \right] = \frac{520\pi}{3}$$

$$\begin{cases} a = 520 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{10} + 2b = 58$$

Suy ra

Cách 2:

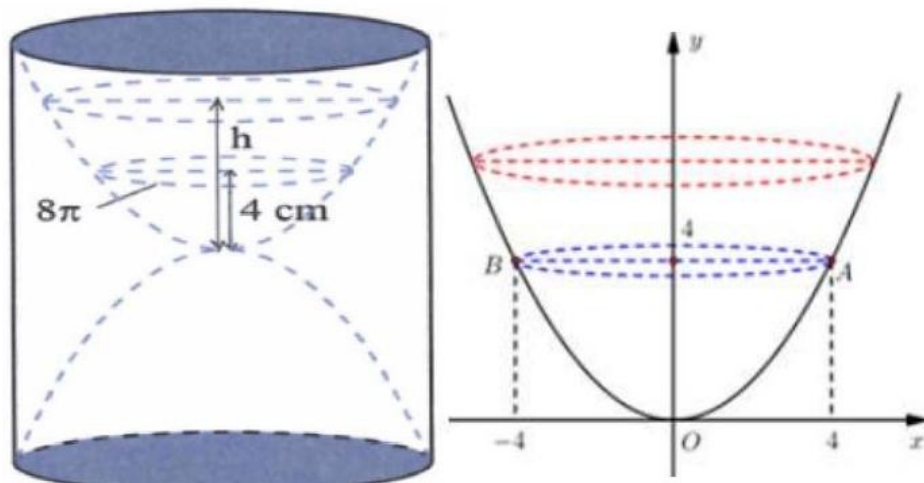
$$V = V_{\text{cylinder}} + 2\pi \cdot \int_3^4 [4^2 - (25 - x^2)] dx = \frac{4}{3} \cdot 5^3 \cdot \pi + \frac{20}{3} \cdot \pi = \frac{520\pi}{3}$$

$$\begin{cases} a = 520 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{10} + 2b = 58$$

Suy ra

Bài 20:

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Gọi phương trình parabol (P) là $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.

Theo giả thiết, đường tròn thiết diện chu vi 8π (cm): $2\pi r = 8\pi \Leftrightarrow r = 4$ (cm).

$$\begin{cases} c = 0 \\ 16a + 4b = 4 \\ 16a - 4b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Vì parabol (P) đi qua ba điểm $O(0; 0)$, $A(4; 4)$ và $B(-4; 4)$, suy ra

$$(P): y = \frac{1}{4}x^2$$

Nên phương trình parabol

Thể tích phần cát ban đầu chính bằng thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay nhánh phải của parabol (P) quanh trục Oy và bằng thể tích cát chảy trong 20 phút.

Ta có:

Thể tích cát chảy trong 20 phút: $20.14,75 = 295 \text{ (cm}^3\text{)}$

$$V = \pi \int_0^h (2\sqrt{y})^2 dy = 295 \text{ (cm}^3\text{)} \Leftrightarrow 2\pi h^2 = 295 \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{295}{2\pi}} \text{ (cm)}.$$

$$2 \cdot \frac{3}{2} h = 3 \sqrt{\frac{295}{2\pi}} \approx 20,6 \text{ (cm)}$$

Vậy chiều cao của khối trụ bên ngoài là:

BÀI 8. THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY TÍNH THEO MẶT CẮT

Bài 1:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2\sqrt{\sin x})^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3} \cdot \sin x dx = -\sqrt{3} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3}$$

Bài 2:

$$V_{(T)} = \int_{-2}^2 S(x) dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \frac{32}{3}$$

Ta có

Bài 3:

$$V = \int_0^{\pi} S(x) dx = \int_0^{\pi} S(x) dx = \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2\sqrt{\sin x})^2 dx = \int_0^{\pi} \sqrt{3} \cdot \sin x dx = -\sqrt{3} \cos x \Big|_0^{\pi} = 2\sqrt{3}$$

Ta có

Bài 4:

$$V = \int_{-1}^1 (2\sqrt{1-x^2})^2 dx = \frac{16}{3}$$

Bài 5:

$$V = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2} dx$$

Ta có:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow t^2 = 9-x^2 \Rightarrow -t dt = x dx$$

Đổi cận:

x	0	3
-----	---	---

t	3	0
-----	---	---

$$V = \int_3^0 2t \cdot (-t \, dt) = \int_0^3 2t^2 \, dt = 2 \frac{t^3}{3} \Big|_0^3 = 18$$

Khi đó:

Bài 6:

Thể tích vật thể tính theo công thức: $V = \int_1^3 S(x) \, dx$, với $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể.

Do thiết diện của vật thể là hình vuông có cạnh là $\sqrt{4-x}$ nên $S(x) = 4-x$
 $\Rightarrow V = \int_1^3 (4-x) \, dx = 4$

Bài 7:

$$V = \int_a^b S(x) \, dx = \int_1^3 (\sqrt{3-x})^2 \, dx = \int_1^3 (3-x) \, dx = \left(3x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^3 = 2$$

Theo giả thiết, ta có

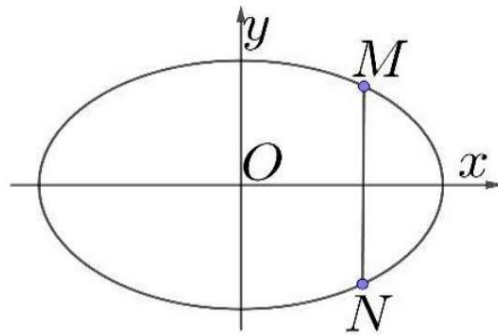
Bài 8:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x \, dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \, dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi - 3}{6}$$

Thể tích vật thể B là:

Bài 9:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Phương trình chính tắc elip (E) là: $\frac{x^2}{45^2} + \frac{y^2}{75^2} = 1$

$$y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{45^2} \right) \cdot 75^2 \Rightarrow MN = 2\sqrt{45^2 - \frac{45^2}{75^2} x^2}$$

Từ đó, suy ra

Diện tích thiết diện là:

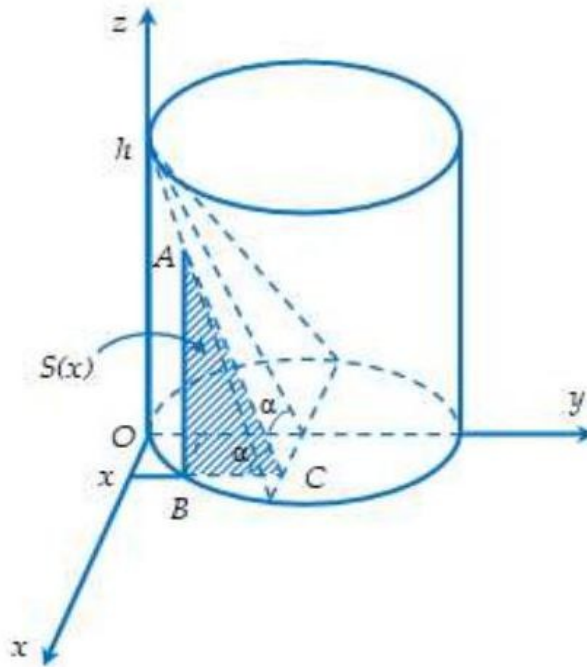
$$S(x) = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{1}{2} R^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) R^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{MN}{\sqrt{2}} \right)^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \left(45^2 - \frac{45^2}{75^2} x^2 \right)$$

$$V = \int_{-75}^{75} S(x) dx = \int_{-75}^{75} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \left(45^2 - \frac{45^2}{75^2} x^2 \right) dx \approx 115586 \text{ (m}^3 \text{)}$$

Thể tích cần tính là:

Bài 10:

Đặt $R = 6 \text{ (cm)}$, $h = 10 \text{ (cm)}$. Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm x ($-6 \leq x \leq 6$) cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$.

Ta thấy thiết diện đó là một tam giác vuông, giả sử là tam giác ABC vuông tại B như trong hình vẽ.

Ta có
$$S(x) = S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} BC^2 \tan \alpha$$

$$= \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \frac{h}{R} = \frac{5(36 - x^2)}{6}$$

$$V = \int_{-6}^6 S(x) dx = \int_{-6}^6 \frac{5(36 - x^2)}{6} dx = 240 \text{ (cm}^3 \text{)}$$

Vậy thể tích lượng nước trong cốc là

BÀI 9. BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN

Bài 1:

Thời điểm vật dừng lại là $v = 0 \Leftrightarrow 210 - 30t = 0 \Leftrightarrow t = 7 \text{ (s)}$

Quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm mà vật dừng lại là:

$$s(t) = \int_0^7 (210 - 30t) dt = 735 \text{ (m)}$$

Bài 2:

Xe ô tô dừng hẳn khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow 10 - 5t = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Quãng đường ô tô dịch chuyển từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn:

$$S(t) = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 (10 - 5t) dt = \left(10t - \frac{5t^2}{2} \right) \Big|_0^2 = 10 \text{ (m)}$$

Bài 3:

$$a(t) = t^2 + 4t \Rightarrow v(t) = \int a(t) dt = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$v(0) = C = 15 \Rightarrow v(t) = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15$$

Mà

$$S = \int_0^3 \left(\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15 \right) dt = 69,75 \text{ (m)}$$

Vậy

$$v(t) = 3\ln(t+1) + 6 \Rightarrow v(10) = 3\ln 11 + 6 \approx 13,2 \text{ (m/s)}$$

Bài 4:**Bài 5:**

$$S_1 = \int_0^2 \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi} \right) dt \approx 0,35318 \text{ (m)}, S_2 = \int_3^5 \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi} \right) dt \approx 0,45675 \text{ (m)}$$

$$\text{Vậy } S_2 > S_1$$

Bài 6:

$$t(5-t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 5 \end{cases}$$

Khi vật dừng lại, vận tốc của vật bằng 0. Ta có

$$s = \int_0^5 t(5-t) dt = \left(\frac{5t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^5 = \frac{125}{6}$$

Quãng đường vật đi được cho đến khi nó dừng lại:

Bài 7:

Ta có, vật dừng lại khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow 160 - 10t = 0 \Leftrightarrow t = 16 \text{ (s)}$

Khi đó, quãng đường S mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0 \text{ (s)}$ đến thời điểm vật

$$S = \int_0^{16} (160 - 10t) dt = 1280 \text{ (m)}$$

dừng lại là

Bài 8:

Lấy mốc thời gian $(t = 0)$ là lúc đạp phanh.

Khi ô tô dừng hẳn thì: $v(t) = 0 \Rightarrow -5t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ (s)}$

$$s = \int_0^4 (-5t + 20) dt = 40 \text{ (m)}$$

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được:

Bài 9:

Lấy mốc thời gian là lúc bắt đầu đạp phanh. Giả sử t_0 là thời điểm tàu dừng hẳn.

Khi đó $v(t_0) = 0 \Leftrightarrow 240 - 20t_0 = 0 \Leftrightarrow t_0 = 12 \text{ (s)}$.

Như vậy từ lúc đạp phanh đến lúc tàu dừng hẳn là 12 (s) .

Quãng đường tàu di chuyển được trong khoảng thời gian 12 (s) là

$$S = \int_0^{12} (240 - 20t) dt = 1440 \text{ (m)}$$

Bài 10:

Ta có: $v_A(0) = 16 \text{ (m/s)}$

Khi xe A dừng hẳn: $v_A(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ s}$

$$s = \int_0^4 (16 - 4t) dt = 32 \text{ m}$$

Quãng đường từ lúc xe A hãm phanh đến lúc dừng hẳn là

Do các xe phải cách nhau tối thiểu 1 m để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là 33 m.

BÀI 10. BÀI TOÁN MAX - MIN TRONG CHUYỂN ĐỘNG

Bài 1:

$$a(t) = 6 - 2t \text{ (m/s}^2\text{)} \Rightarrow v(t) = \int (6 - 2t) dt = 6t - t^2 + C$$

Xe dừng và bắt đầu chuyển động nên khi $t = 0$ thì $v = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v(t) = 6t - t^2$

$v(t) = 6t - t^2$ là hàm số bậc 2 nên đạt GTLN khi $t = -\frac{b}{2a} = 3$

$$S = \int_0^3 (6t - t^2) dt = 18 \text{ (m)}$$

Quảng đường xe đi trong 3 giây đầu là:

Bài 2:

$$v(t) = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 18t \quad \text{và} \quad a(t) = v'(t) = -3t + 18$$

Cho $v'(t) = 0 \Rightarrow t = 6$

Khi đó: $v(0) = 0, v(10) = 30$ và $v(6) = 54$.

Vậy vận tốc lớn nhất của vật là 54 (m/s) tại thời điểm $t = 6$.

Bài 3:

$$v(t) = s'(t) = -3t^2 + 18t + 1$$

Để thấy hàm số $v(t)$ là hàm bậc hai có đồ thị dạng parabol với hệ số $a = -3 < 0$.

Do đó $v_{\max}$ đạt tại đỉnh $I(3; 28)$ của parabol.

Vậy thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất $t = 3 \text{ (s)}$.

Bài 4:

Vận tốc của đoàn tàu là $v(t) = S'(t) = 12t - 3t^2$. Ta dễ thấy hàm số $v(t) = 12t - 3t^2$ là một Parabol có hệ số a âm nên $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất khi $t = 2 \text{ (s)}$.

Lời bình: Chúng ta có thể dùng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất của hàm số $v(t)$. Tuy nhiên, vì $v(t)$ là hàm bậc hai nên chúng vận dụng tính chất của parabol để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất cho nhanh. Và rất hữu ích khi làm toán trắc nghiệm.

BÀI 11. BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG HAI PHƯƠNG TIỆN

Bài 1:

Quãng đường chất điểm A đi từ đầu đến khi B đuổi kịp là $S = \int_0^{15} \left(\frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t \right) dt = 96 \text{ (m)}$.

Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t) = \int a dt = at + C$.

Tại thời điểm $t = 3$ vật B bắt đầu từ trạng thái nghỉ nên $v_B(3) = 0 \Leftrightarrow C = -3a$.

Lại có quãng đường chất điểm B đi được đến khi gặp A là

$$S_2 = \int_3^{15} (at - 3a) dt = \left[\frac{at^2}{2} - 3at \right]_3^{15} = 72a \text{ (m)}$$

Vậy $72a = 96 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3} \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Tại thời điểm đuổi kịp A thì vận tốc của B là $v_B(15) = 16 \text{ (m/s)}$.

Bài 2:

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \int a \, dt = at + C$ mà $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{18} \left(\frac{1}{120} t^2 + \frac{58}{45} \right) dt = \int_0^{15} at \, dt \Leftrightarrow 225 = a \cdot \frac{225}{2} \Leftrightarrow a = 2$$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t) = 2 \cdot 15 = 30 \text{ (m/s)}$.

Bài 3:

Ta có $v_B(t) = \int a \, dt = at + C$, $v_B(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v_B(t) = at$.

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$$S_A = \int_0^{25} \left(\frac{1}{100} t^2 + \frac{13}{30} t \right) dt = \left(\frac{1}{300} t^3 + \frac{13}{60} t^2 \right) \Big|_0^{25} = \frac{375}{2}$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là

$$S_B = \int_0^{15} at \, dt = \frac{at^2}{2} \Big|_0^{15} = \frac{225a}{2}$$

Ta có $\frac{375}{2} = \frac{225a}{2} \Leftrightarrow a = \frac{5}{3}$.

Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B(15) = \frac{5}{3} \cdot 15 = 25 \text{ (m/s)}$.

Bài 4:

Khoảng thời gian xe 2 xuất phát đến lúc đạp phanh là: $t = 2 \text{ h}$.

Quãng đường các xe đi được trong khoảng thời gian trên:

Xe 1: Đi từ A đến C là $AC = \int_0^2 (2t + 1) dt = 6 \text{ (km)}$.

Xe 2: Đi từ O đến D là $OD = 2 \cdot 10 = 20 \text{ (km)}$.

$\Rightarrow CD = 22 + 20 - 6 = 36 \text{ (km)}$.

Chọn mốc thời gian tại vị trí xuất phát, sau thời gian t_1 hai xe gặp nhau. Hai xe đang ở các vị trí tức thời C, D .

Li độ xe 1 là $X_1 = \int_0^{t_1} (2t + 1) dt \text{ (km)}$.

Li độ xe 2 là: $X_2 = \int_0^{t_1} (-5t + 20) dt + CD \text{ (km)}$.

$$X_1 = X_2 \Leftrightarrow \int_2^{t_1} (2t+1) dt = \int_2^{t_1} (-5t+20) dt + 36 \Leftrightarrow t_1 = 6$$

Để 2 xe gặp nhau thì:

(h).

Vậy sau khoảng thời gian là 6 h hai xe gặp nhau.

BÀI 12. BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG THEO QUẢNG ĐƯỜNG LÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1:

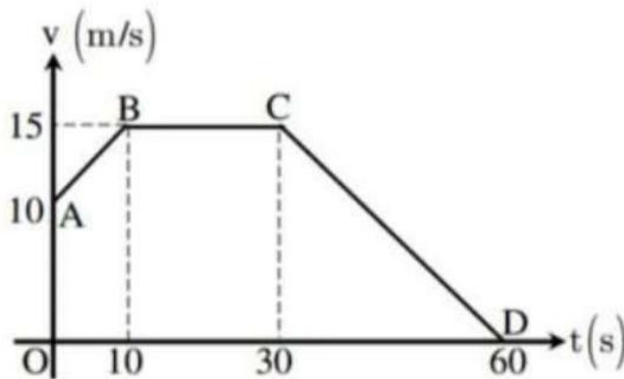
Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên trục Ot . Ta có:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{60} v(t) dt = \int_0^{10} v(t) dt + \int_{10}^{30} v(t) dt + \int_{30}^{60} v(t) dt \\ &= S_{OABH} + S_{HBCK} + S_{KCD} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (10+15) \cdot 10 + 20 \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 15 = 650(m) \end{aligned}$$

Bài 2:

Vận tốc chuyển động của vật trong 3 giây đầu là $v_1(t) = 2$.

Vận tốc chuyển động của vật từ giây thứ 3 đến giây thứ 7 là $v_2(t) = \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}$.



Vận tốc chuyển động của vật từ giây thứ 7 đến giây thứ 10 là $v_3(t) = -\frac{1}{3}t + \frac{22}{3}$.

Ta có $S'(t) = v(t)$, suy ra

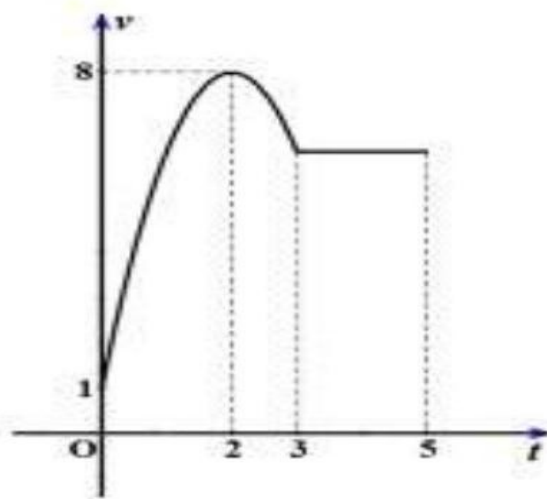
$$S = \int_0^3 v_1(t) dt + \int_3^7 v_2(t) dt + \int_7^{10} v_3(t) dt = \int_0^3 2 dt + \int_3^7 \left(\frac{3}{4}t - \frac{1}{4} \right) dt + \int_7^{10} \left(-\frac{1}{3}t + \frac{22}{3} \right) dt = \frac{67}{2}.$$

Bài 3:

Gọi $(P): v(t) = at^2 + bt + c$.

Vì (P) qua $A(0;1)$ và có đỉnh $I(2;8)$ nên ta có

$$\begin{cases} 1 = c \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ 8 = 4a + 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = c \\ 4a + b = 0 \\ 4a + 2b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = 7 \\ a = \frac{-7}{4} \end{cases}$$



$$v(t) = \frac{-7}{4}t^2 + 7t + 1$$

được phương trình là

$$v = \frac{25}{4}$$

Ngoài ra tại $t = 3$ ta có

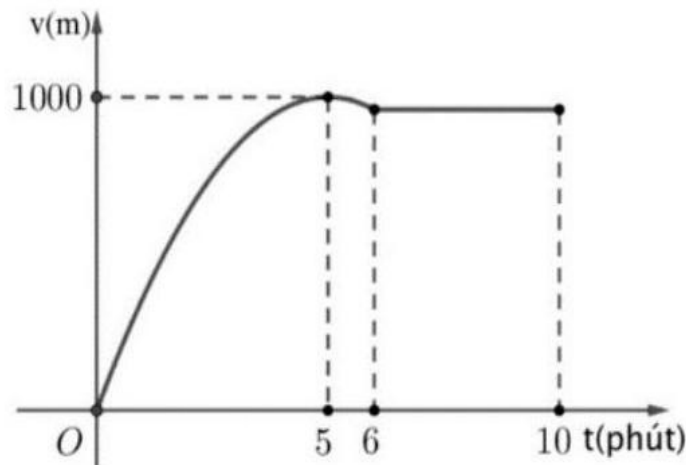
$$s = \int_0^3 \left(\frac{-7}{4}t^2 + 7t + 1 \right) dt + \int_3^5 \frac{25}{4} dt = 31,25 \text{ (km)}$$

Vậy quãng đường cần tìm là:

Bài 4:

Phương trình vận tốc của ô tô là:

Trong khoảng thời gian 6 phút đầu đồ thị của vận tốc là một đường parabol đi qua điểm $(0;0), (5;1000)$ và có hoành độ đỉnh bằng 5, do đó:



$$\begin{cases} c = 0 \\ 25a + 5b + c = 1000 \\ -\frac{b}{2a} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 5a + b = 200 \\ 10a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -40 \\ b = 400 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow v(t) = \begin{cases} -40t^2 + 400t & \text{khi } 0 \leq t \leq 6 \\ 960 & \text{khi } 6 < t \leq 10 \end{cases}$$

Vậy quãng đường ô tô đi được trong 10 phút đầu là:

$$S = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^6 (-40t^2 + 400t) dt + \int_6^{10} 960 dt = 8160 \text{ (m)}$$

Bài 5:

Gọi thời điểm khinh khí cầu bắt đầu chuyển động là $t = 0$, thời điểm khinh khí cầu bắt đầu tiếp đất là t_1 .

Quãng đường khinh khí cầu đã di chuyển được từ lúc chuyển động tới khi tiếp đất là

$$\int_0^{t_1} (12t - t^2) dt = 243 \Leftrightarrow -\frac{t_1^3}{3} + 6t_1^2 - 243 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \approx -5,56 \\ t_1 \approx 14,56 \\ t_1 = 9 \end{cases}$$

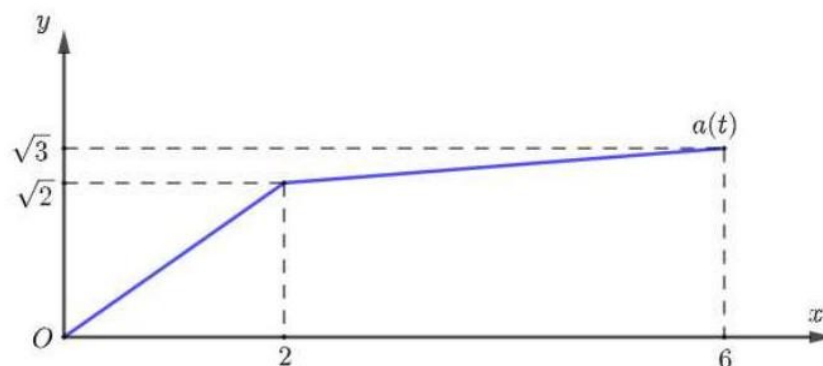
Vì $v(t) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 12$ nên $t_1 = 9$.

Vận tốc của khinh khí cầu lúc tiếp đất là: $v(9) = 27$ (mét/phút).

Bài 6:

Từ đồ thị ta có

$$a(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}t & , 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}t + \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} & , 2 \leq t \leq 6 \end{cases}$$



$$v(t) = \int a(t) dt = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 + 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{8}t^2 + \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}t + C, & 2 \leq t \leq 6 \end{cases}$$

Mà $v(0) = 1 \text{ (m/s)}$ nên

Vì vận tốc là hàm số liên tục nên

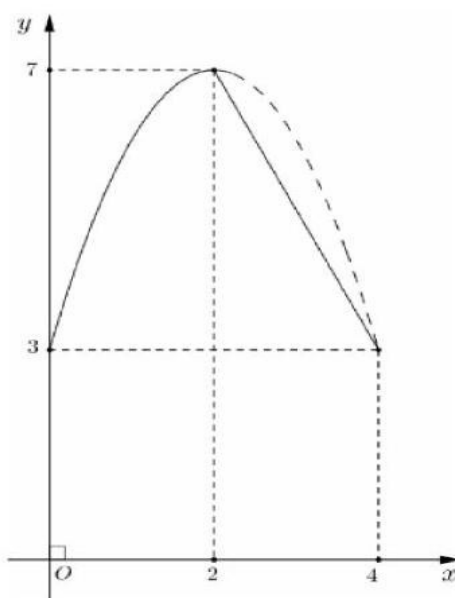
$$\lim_{t \rightarrow 2^-} v(t) = \lim_{x \rightarrow 2^+} v(t) \Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} + C \Leftrightarrow C = \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 2}{2}$$

Do đó $v(6) = 1 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \text{ (m/s)}$

Bài 7:

Parabol $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $(0; 3)$ và có đỉnh $I(2; 7)$ nên có

$$\begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow y = -x^2 + 4x + 3$$



Đường thẳng IA đi qua $A(4; 3)$ nhận vector $\overrightarrow{IA} = (2; -4)$ làm vector chỉ phương, suy ra có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (4; 2)$

Phương trình đường thẳng IA là $4(x - 4) + 2(y - 3) = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 11$

Quãng đường S mà vật di chuyển được trong 4 giờ là:

$$s = \int_0^2 (-t^2 + 4t + 3) dt + \int_2^4 (-2t + 11) dt = \frac{64}{3} \text{ (km)}$$

BÀI 13. BÀI TOÁN BƠM NƯỚC

Bài 1:

Gọi x là thời điểm bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của bể x tính bằng giây.

$$\int_0^x \frac{1}{500} \sqrt[3]{t+3} \, dt = \frac{3}{4} \cdot 280 \Rightarrow \frac{3}{4} (t+3)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^x = 105000$$

Ta có:

$$\Rightarrow (x+3)\sqrt[3]{x+3} - 3\sqrt[3]{3} = 140000$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(x+3)^4} = 3\sqrt[3]{3} + 140000 \Rightarrow x+3 = \sqrt[4]{(3\sqrt[3]{3} + 140000)^3}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[4]{(3\sqrt[3]{3} + 140000)^3} - 3 \Rightarrow x \approx 7234,8256$$

Bài 2:

$$\int_0^3 (6at^2 + 2bt) \, dt = 90 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^3 = 90 \Leftrightarrow 54a + 9b = 90 \quad (1)$$

$$\int_0^6 (6at^2 + 2bt) \, dt = 504 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^6 = 504 \Leftrightarrow 432a + 36b = 504 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 6 \end{cases}$$

Từ (1), (2) . Sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là:

$$V = \int_0^9 (4t^2 + 12t) \, dt = \left(\frac{4}{3} t^3 + 6t^2 \right) \Big|_0^9 = 1458 \text{ (m}^3\text{)}$$

Bài 3:

$$h(t) = \int h'(t) \, dt = \int \sqrt[3]{3t+8} \, dt = \frac{1}{4} (3t+8) \sqrt[3]{3t+8} + C$$

Ta có:

$$\text{Lúc đầu } t=0, \text{ bể không có nước} \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C + 4 = 0 \Rightarrow C = -4$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{4} (3t+8) \cdot \sqrt[3]{3t+8} - 4 \Rightarrow h(10) \approx 27,94$$

Bài 4:

$$h(t) = \int h'(t) \, dt = \int (3at^2 + bt) \, dt = a \cdot t^3 + b \cdot \frac{t^2}{2} + C$$

Ta có:

$$h(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow h(t) = a \cdot t^3 + b \cdot \frac{t^2}{2}$$

Do ban đầu hồ không có nước nên

$$h(5) = a \cdot 5^3 + b \cdot \frac{5^2}{2} = 150$$

Lúc 5 giây

$$h(10) = a \cdot 10^3 + b \cdot \frac{10^2}{2} = 1100$$

Lúc 10 giây

$$a = 1, b = 2 \Rightarrow h(t) = t^3 + t^2 \Rightarrow h(20) = 20^3 + 20^2 = 8400 \text{ (m}^3\text{)}$$

Suy ra

BÀI 14. BÀI TOÁN GẶP CHƯỞNG NGẠI VẬT

Bài 1:

Chiếc xe bán tải thực hiện hai giai đoạn:

Giai đoạn 1: Chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 3t \text{ (m/s)}$ trong 8 (s) , do đó quãng đường

$$S_1 = \int_0^8 3t dt = 96 \text{ (m)}$$

chặng 1 của chiếc xe là

Lúc này, chiếc xe đang đạt vận tốc $v_1(8) = 3 \times 8 = 24 \text{ (m/s)}$.

Giai đoạn 2: Chiếc xe chuyển động với gia tốc $-36 \text{ (m/s}^2\text{)}$ nên phương trình vận tốc của xe là $v_2(t) = \int -36 dt = -36t + C$

Khi $t = 0$ của chặng 2 thì xe có vận tốc $v_1(8) = 24$ nên $v_2(0) = 24 \Leftrightarrow C = 24$.

Vậy $v_2(t) = -36t + 24$. Xe dừng hẳn khi $v_2(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$.

$$S_2 = \int_0^{\frac{2}{3}} (-36t + 24) dt = 8 \text{ (m)}$$

Vậy quãng đường xe di chuyển trong chặng 2 là

Vậy tổng quãng đường xe bán tải đi được từ khi khởi hành đến khi dừng hẳn là $S = S_1 + S_2 = 96 + 8 = 104 \text{ (m)}$

Bài 2:

$$s_1 = \int_0^5 7t dt = 7 \frac{t^2}{2} \Big|_0^5 = 87,5$$

Giai đoạn 1: Quãng đường ô tô đi được trong 5 (s) đầu là (mét).

Giai đoạn 2: Phương trình vận tốc của ô tô khi người lái xe phát hiện chướng ngại vật là

$$v_2(t) = 35 - 35t \text{ (m/s)}$$

Khi xe dừng lại hẳn thì $v_2(t) = 0 \Leftrightarrow 35 - 35t = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Quãng đường ô tô đi được từ khi phanh gấp đến khi dừng lại hẳn là

$$s_2 = \int_0^1 (35 - 35t) dt = \left(35t - 35 \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 17,5 \text{ (mét)}$$

Vậy quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn là

$$s = s_1 + s_2 = 87,5 + 17,5 = 105 \text{ (mét)}.$$

Bài 3:

Giai đoạn 1: Xe bắt đầu chuyển động đến khi gặp chướng ngại vật.

$$S_1 = \int_0^{12} v_1(t) dt = \int_0^{12} 2t dt = t^2 \Big|_0^{12} = 144$$

Quãng đường xe đi được là: (m).

Giai đoạn 2: Xe gặp chướng ngại vật đến khi dừng hẳn.

Ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v_2(t) = \int a \, dt = -12t + c$.

Vận tốc của xe khi gặp chướng ngại vật là: $v_2(0) = v_1(12) = 2 \cdot 12 = 24 \text{ (m/s)}$.

$$\Rightarrow -12 \cdot 0 + c = 24 \Rightarrow c = 24 \Rightarrow v_2(t) = -12t + 24$$

Thời gian khi xe gặp chướng ngại vật đến khi xe dừng hẳn là nghiệm phương trình:

$$-12t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Khi đó, quãng đường xe đi được là:

$$S_2 = \int_0^2 v_2(t) \, dt = \int_0^2 (-12t + 24) \, dt = \left(-6t^2 + 24t \right) \Big|_0^2 = 24 \text{ (m)}$$

Vậy tổng quãng đường xe đi được là: $S = S_1 + S_2 = 168 \text{ (m)}$.

Bài 4:

Giai đoạn 1: Tại thời điểm $t = 6$ vật đang chuyển động với vận tốc v_0 nên có $v(6) = v_0$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2} \cdot 6 + a = v_0 \Leftrightarrow a = v_0 + 15 \quad , \text{ suy ra } v(t) = -\frac{5}{2}t + v_0 + 15$$

Giai đoạn 2:

Gọi k là thời điểm vật dừng hẳn, vậy ta có $v(k) \Leftrightarrow \frac{2}{5} \cdot (v_0 + 15) \Leftrightarrow k = \frac{2v_0}{5} + 6$

$$80 = 6v_0 + \int_6^k \left(-\frac{5}{2}t + v_0 + 15 \right) dt$$

Tổng quãng đường vật đi được là

$$\Leftrightarrow 80 = 6v_0 + \left(-\frac{5}{2}t + v_0 t + 15t \right) \Big|_6^k$$

$$\Leftrightarrow 80 = 6v_0 - \frac{5}{4}(k^2 - 6^2) + v_0(k - 6) + 15(k - 6)$$

$$\Leftrightarrow 80 = 6v_0 - \frac{5}{4} \left(\frac{4(v_0)^2}{25} + \frac{24v_0}{5} \right) + v_0 \cdot \frac{2v_0}{5} + 15 \frac{2v_0}{5}$$

$$\Leftrightarrow (v_0)^2 + 36 \cdot v_0 - 400 = 0 \Leftrightarrow v_0 = 10$$

Bài 5:

Ta có: $v = \int a \, dt = \int -6t \, dt = -3t^2 + C$

Tại thời điểm $t = 0 \Rightarrow v = C = v_0 \Rightarrow v = v_0 - 3t^2$

$$\Rightarrow v = 0 \Leftrightarrow v_0 - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{v_0}{3}}$$

Khi xe dừng hẳn

Quảng đường vật đi được đến lúc dừng hẳn là:

$$16 = \int_0^{\sqrt{\frac{v_0}{3}}} v dt = \int_0^{\sqrt{\frac{v_0}{3}}} (v_0 - 3t^2) dt = (v_0 t - t^3) \Big|_0^{\sqrt{\frac{v_0}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow v_0 \sqrt{\frac{v_0}{3}} - \frac{v_0}{3} \sqrt{\frac{v_0}{3}} = 16 \Leftrightarrow v_0 \sqrt{\frac{v_0}{3}} = 24 \Leftrightarrow v_0 = 12 (m/s)$$