CÁC DẠNG TOÁN BÀI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

Dạng 1: Giải các phương trình mũ và logarit cơ bản

Phương trình mũ cơ bản $a^x = b,\ (a > 0,\ a \neq 1).$

- Nếu $b > 0$ thì phương trình $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b.$
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình $a^x = b$ vô nghiệm.

Phương trình logarit có dạng $\log_a x = b\ (a > 0,\ a \neq 1).$

- Nếu $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b.$

Ví dụ 1: Giải các phương trình mũ sau:

a) $3^{x+1} = 2$

b) $3^{2x^2+5x+4} = 9$

c) $2^x = \frac{1}{8}$

d) $3^{2x^2-x} = 3$

e) $2^{x^2+3x-6} = \frac{1}{4}$

f) $2^{x-1}.3^x = 18$

Lời giải

a) Ta có: $3^{x+1} = 2 \Leftrightarrow x + 1 = \log_3 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2 - 1$

b) Phương trình $3^{2x^2+5x+4} = 9 \Leftrightarrow 3^{2x^2+5x+4} = 3^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 4 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0$ có $\Delta = 9 > 0$ nên theo định lý viet, tích các nghiệm của phương trình là 1.

c) Ta có $2^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-3} \Leftrightarrow x = -3$.

d) Ta có $3^{2x^2-x} = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - x = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

e) Ta có : $2^{x^2+3x-6} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{x^2+3x-6} = 2^{-2} \Leftrightarrow x^2 + 3x - 6 = -2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -4 \end{array}\right.$.

f) Ta có $2^{x-1}.3^x = 18 \Leftrightarrow \frac{2^x}{2}.3^x = 18 \Leftrightarrow 6^x = 36 \Leftrightarrow x = 2$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình logarit sau:

a) $\log_3(x-2)=2$

b) $\log_3 x=\dfrac{1}{3}$

c) $\log_3\left(x^2-3x+3\right)=1$

d) $\log_2\left(x^2-x+2\right)=1$

e) $\log_3(x-1)^2=2$

f) $\log_{x-4}\left(x^2-7x+12\right)=\log_{x-4}(x-3)$

g) $\log x+\log(x-9)=1$

h) $\log_3(\log_2 a)=0$

i) $\left(x^2-2x-3\right)\log_2 x=0$

k) $\left(x^2+2x-3\right)(\log_2 x-3)=0$.

Lời giải

a) Điều kiện : $x-2>0\Leftrightarrow x>2$

Ta có: $\log_3(x-2)=2\Leftrightarrow x-2=3^2\Leftrightarrow x=11$ (Thỏa mãn điều kiện $x>2$).

Vậy phương trình $\log_3(x-2)=2$ có nghiệm là $x=11$.

b) Điều kiện của phương trình $x>0$. Ta có $\log_3 x=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=3^{\frac{1}{3}}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{3}$.

c) Ta có: $\log_3\left(x^2-3x+3\right)=1\Leftrightarrow x^2-3x+3=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=0\end{array}\right.$.

d) Điều kiện $x^2-x+2>0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\log_2\left(x^2-x+2\right)=1\Leftrightarrow x^2-x+2=2\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\{0;1\}$.

e) Ta có $\log_3(x-1)^2=2\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\neq 1\\(x-1)^2=3^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\neq 1\\\left[\begin{array}{l}x-1=3\\x-1=-3\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-2\end{array}\right.$.

f) Điều kiện xác định: $\left\{\begin{array}{l}x-4>0\\x-4\neq 1\\x^2-7x+12>0\\x>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>4\\x\neq 5\end{array}\right.$ $(*)$

Với điều kiện $(*)$ thì phương trình $\log_{x-4}\left(x^2-7x+12\right)=\log_{x-4}(x-3)$

$\Leftrightarrow x^2-7x+12=x-3\Leftrightarrow x^2-8x+15=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=5 \end{array}\right.$ (Loại).

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\varnothing$.

g) Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l} x>0 \\ x-9>0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>0 \\ x>9 \end{array}\right.\Leftrightarrow x>9$.

$\log x+\log(x-9)=1\Leftrightarrow \log\left[x(x-9)\right]=1\Leftrightarrow x^2-9x=10\Leftrightarrow x^2-9x-10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\ (loai) \\ x=10 \end{array}\right.$

h) Điều kiện $\left\{\begin{array}{l} a>0 \\ \log_2 a>0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a>0 \\ a>1 \end{array}\right.\Leftrightarrow a>1$

Ta có $\log_3(\log_2 a)=0\Leftrightarrow \log_2 a=1\Leftrightarrow a=2$

i) Điều kiện: $x>0$.

$(x^2-2x-3)\log_2 x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-3=0 \\ \log_2 x=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\ \ (loai) \\ x=3\ \ (tm) \\ x=1\ \ (tm) \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

k) Điều kiện xác định của phương trình là: $x>0$.

Ta có: $(x^2+2x-3)(\log_2 x-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x-3=0 \\ \log_2 x=3 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; x=-3 \\ x=8 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $x>0$ phương trình có 2 nghiệm $x=1; x=8$.

Dạng 2: Phương pháp đưa về cùng cơ số giải phương trình mũ và logarit

Sử dụng tính chất $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)\ (0<a\neq 1)$.

Cho $0<a\neq 1$. Khi đó: $\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x)>0\ (g(x)>0) \\ f(x)=g(x) \end{array}\right.$.

Ví dụ 3: Giải các phương trình mũ sau đây:

a) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=7^{x+1}$

b) $4^{5x-2}=64$

c) $2^{x-6}=\left(\frac{1}{4}\right)^{3x+1}$

d) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1}=125^{2x}$

e) $\left(\frac{2020}{2021}\right)^{4x}=\left(\frac{2021}{2020}\right)^{2x-6}$

f) $2^{\sqrt{x+3}}=2^{3-x}$

g) $3^{x^2-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$

Lời giải

a) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=7^{x+1}\Leftrightarrow\left(7^{-1}\right)^{x^2-2x-3}=7^{x+1}\Leftrightarrow -x^2+2x+3=x+1\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

b) Ta có $4^{5x-2}=64\Leftrightarrow 4^{5x-2}=4^3\Leftrightarrow 5x-2=3\Leftrightarrow x=1$.

c) Ta có:

$$2^{x-6}=\left(\frac{1}{4}\right)^{3x+1}\Leftrightarrow 2^{x-6}=2^{-2(3x+1)}\Leftrightarrow x-6=-6x-2\Leftrightarrow 7x=4\Leftrightarrow x=\frac{4}{7}$$

d) Phương trình đã cho

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1}=125^{2x}\Leftrightarrow 5^{-2(x+1)}=5^{6x}\Leftrightarrow -2(x+1)=6x\Leftrightarrow 8x=-2\Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$$

.

e) Ta có

$$\left(\frac{2020}{2021}\right)^{4x}=\left(\frac{2021}{2020}\right)^{2x-6}\Leftrightarrow\left(\frac{2020}{2021}\right)^{4x}=\left(\frac{2020}{2021}\right)^{-2x+6}\Leftrightarrow 4x=-2x+6\Leftrightarrow x=1$$

.

f) Điều kiện $x+3\ge 0\Leftrightarrow x\ge -3$

$$2^{\sqrt{x+3}}=2^{3-x}\Leftrightarrow\sqrt{x+3}=3-x\Leftrightarrow\begin{cases}3-x\ge 0\\x+3=9-6x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\x^2-7x+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=6\end{array}\right.\end{cases}$$

Ta có:

Kết hợp điều kiện suy ra nghiệm của phương trình là $x=1$.

g) $3^{x^2-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}\Leftrightarrow 3^{x^2-4}=3^{-2(3x-1)}\Leftrightarrow x^2-4=-2(3x-1)\Leftrightarrow x^2+6x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-3-\sqrt{15}\\x_2=-3+\sqrt{15}\end{array}\right.$

Ví dụ 4: Giải các phương trình logarit sau:

a) $\log_5(2x-1)=\log_5(2-x)$

b) $\log_3\left(x^2+4x-3\right)=\log_3(x+1)$

c) $2\log_2(2x+3)=\log_2 x^2$

d) $\log_2 x+\log_2(x-3)=2$

e) $\log_2 x+\log_2(x+2)=3$

f) $\log_5 x=\log_5(x+6)-\log_5(x+2)$

g) $\log_2(x+1)-2\log_{\frac{1}{4}}(x-1)=3$

h) $\log_3(6+x)+\log_3(9x)-5=0$

i) $\log_2 x+\log_3 x=1+\log_2 x\log_3 x$

k) $\log_3\left(9^x-5.3^x+7\right)=x+1$

l) $\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x=\frac{2}{3}$

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $\begin{cases}2x-1>0\\2-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<x<2$.

Phương trình khi đó tương đương với $2x-1=2-x\Leftrightarrow 3x=3\Leftrightarrow x=1$. Vậy phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm.

b) Ta có $\log_3\left(x^2+4x-3\right)=\log_3(x+1)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x-3=x+1\\x>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+3x-4=0\\x>-1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

c) Ta có: $2\log_2(2x+3)=\log_2 x^2\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3>0\\x^2>0\\\log_2(2x+3)^2=\log_2 x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3>0\\(2x+3)^2=x^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\frac{3}{2}\\\left[\begin{array}{l}2x+3=x\\2x+3=-x\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\frac{3}{2}\\\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1\end{array}\right.$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-3;-1\}$.

d) Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\x-3>0\end{cases}\Rightarrow x>3.$

Ta có: $\log_2 x+\log_2(x-3)=2\Leftrightarrow\log_2\left(x(x-3)\right)=2\Leftrightarrow x^2-3x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=-1 & (loai)\\x=4 & (tm)\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=4.$

e) Điều kiện: $x>0$.

Ta có: $\log_2\left[x(x+2)\right]=3\Leftrightarrow x^2+2x=2^3\Leftrightarrow x^2+2x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4(l)\\x=2(n)\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x=2$.

f) Điều kiện $\begin{cases}x>0\\x+6>0\\x+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x>-6\\x>-2\end{cases}\Leftrightarrow x>0$.

$$\log_5 x = \log_5 (x+6) - \log_5 (x+2) \Leftrightarrow \log_5 x + \log_5 (x+2) = \log_5 (x+6)$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \log_5 \left[x(x+2) \right] = \log_5 (x+6) \Leftrightarrow x(x+2) = x+6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \end{array} \right.$$

So với điều kiện, suy ra $x = 2$. Vậy $S = \{2\}$.

g) Điều kiên: $x > 1$

$$\log_2 (x+1) - 2\log_{\frac{1}{4}} (x-1) = 3 \Leftrightarrow \log_2 (x+1) + \log_2 (x-1) = 3 \Leftrightarrow \log_2 \left(x^2 - 1\right) = 3$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array} \right.$$

.Vì $x > 1$ nên pt có 1 nghiệm $x = 3$.

$$\log_3 (6+x) + \log_3 (9x) - 5 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ \log_3 \left[9x(6+x) \right] = 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ 9x(6+x) = 3^5 \end{array} \right.$$

h) Ta có:

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ 9x^2 + 54x - 243 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -9 \Leftrightarrow x = 3 \\ x = 3 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

. Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

i) Phương trình đã cho xác định khi: $x > 0$

$$\log_2 x + \log_3 x = 1 + \log_2 x \log_3 x \Leftrightarrow \log_2 x - \log_2 x \log_3 x + \log_3 x - 1 = 0$$

Khi đó:

$$\Leftrightarrow \log_2 x (1 - \log_3 x) - (1 - \log_3 x) = 0 \Leftrightarrow (1 - \log_3 x)(\log_2 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - \log_3 x = 0 \\ \log_2 x - 1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_3 x = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array} \right.$$

(thỏa mãn điều kiện xác định)

$$\log_3 \left(9^x - 5.3^x + 7\right) = x + 1 \Leftrightarrow 9^x - 5.3^x + 7 = 3^{x+1} \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - 8.3^x + 7 = 0$$

k) Ta có:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 7 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_3 7 \end{array} \right.$$

l) Điều kiện: $x > 0$. Ta có $\log_3 x . \log_9 x . \log_{27} x . \log_{81} x = \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \log_3 x.\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right).\left(\frac{1}{3}\log_3 x\right).\left(\frac{1}{4}\log_3 x\right)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow (\log_3 x)^4=16\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x=2\\ \log_3 x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=9\\ x=\frac{1}{9}\end{array}\right.$$

.

Dạng 3: Phương pháp đặt ẩn phụ giải phương trình mũ và logarit

Đặt ẩn phụ giải phương trình mũ: $\alpha.a^x+\beta.a^x+\gamma=0$. Đặt $t=a^x\ \ (t>0)$

Đặt ẩn phụ giải phương trình logarit: $\alpha.\log_a^2 x+\beta.\log_a x+\gamma=0$. Đặt $t=\log_a x\ \ (x>0)$

Ví dụ 5: Giải các phương trình mũ sau:

a) $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$

b) $9^x-12.3^x+27=0$

c) $9^{x+1}-3^{x+1}-30=0$

d) $4^x-2^{x+2}+3=0$

e) $4^{x^2-x}+2^{x^2-x+1}=3$

f) $-25^x+5^{x+1}+6=0$

g) $9^x-12.3^x+27=0$

h) $4^x-2^{x+2}+3=0$

i) $9^{x+1}-12.3^{x+2}+243=0$

k) $7^x+2.7^{1-x}-9=0$

Lời giải

a) Ta có: $5^{2x-1}+5^{x+1}=250\Leftrightarrow \frac{1}{5}\left(5^x\right)^2+5.5^x-250=0\Leftrightarrow \left(5^x\right)^2+25.5^x-1250=0$.

Đặt $t=5^x$ với điều kiện $t>0$ ta có phương trình $t^2+25t-1250=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-50\ (l)\\ t=25\end{array}\right.$.

Với $t=25\Rightarrow x=\log_5 25=2$.

b) Đặt $t=3^x\ \ t>0$, . Ta có $9^x-12.3^x+27=0\Leftrightarrow t^2-12.t+27=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=3\\ t=9\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right.$

c) Ta có $9^{x+1}-3^{x+1}-30=0\Leftrightarrow 9\left(3^x\right)^2-3.3^x-30=0\Leftrightarrow 3\left(3^x\right)^2-3^x-10=0$.

Khi đặt $3^x=t$ thì phương trình $3\left(3^x\right)^2-3^x-10=0$ trở thành phương trình $3t^2-t-10=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2\\ t=-\frac{5}{3}(l)\end{array}\right.\Rightarrow 3^x=2\Leftrightarrow x=\log_3 2$$

.

d) Phương trình tương đương $4^x-4.2^x+3=0$.

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_2 3 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

e) Ta có: $4^{x^2-x} + 2^{x^2-x+1} = 3 \Leftrightarrow 4^{x^2-x} + 2.2^{x^2-x} = 3$

Đặt $t = 2^{x^2-x} (t > 0)$. Phương trình trở thành $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 (l) \end{array}\right.$

Với $t = 1 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

f) Phương trình đã cho trở thành $-\left(5^2\right)^x + 5.5^x + 6 = 0 \Leftrightarrow -\left(5^x\right)^2 + 5.5^x + 6 = 0$.

Đặt $5^x = t \ (t > 0) \Rightarrow -t^2 + 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \ (l) \\ t = 6 \end{array}\right.$.

Với $t = 6 \Rightarrow 5^x = 6 \Leftrightarrow x = \log_5 6$. Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

g) Ta có: $9^x - 12.3^x + 27 = 0 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - 12.3^x + 27 = 0 \ (*)$.

Đặt $t = 3^x \ (t > 0)$, phương trình $(*)$ có dạng: $t^2 - 12.t + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = 9 \end{array}\right.$.

Với $t = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$ và với $t = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$.

h) Phương trình tương đương $4^x - 4.2^x + 3 = 0$.

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_2 3 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

i) $9^{x+1} - 12.3^{x+2} + 243 = 0 \Leftrightarrow 9.9^x - 12.3^2.3^x + 243 = 0 \Leftrightarrow 9.9^x - 108.3^x + 243 = 0$

Đặt $t = 3^x, t > 0$, phương trình tương đương: $9t^2 - 108t + 243 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 9 \\ 3^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$

k) Đặt $t = 7^x > 0$, phương trình trở thành: $t + \frac{14}{t} - 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 9t + 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 7 \\ t = 2 \end{array}\right.$.

Với $t = 7$, ta có: $7^x = 7 \Leftrightarrow x = 1$.

Với $t = 2$, ta có: $7^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_7 2$.

Ví dụ 6: Giải các phương trình logarit sau:

a) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0$

b) $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$

c) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 6\log_8 (4x) + 1 = 0$

d) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 6 = 0$

e) $\log^2 x - \log(2020x) - 1 = 0$

f) $\log_2 (5^x - 1).\log_4 (2.5^x - 2) = 1$

Lời giải

a) Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0 \quad (*)$$

Ta có $t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 4 \end{array}\right.$.

Đặt $t = \log_3 x$ thì phương trình $(*)$ trở thành

Với $t = 1 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3^1 \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn)

Với $t = 4 \Leftrightarrow \log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 \Leftrightarrow x = 81$ (thỏa mãn)

b) Điều kiện: $x > 0$

Đặt $t = \log_3 x$, phương trình đã cho về dạng: $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -1 \end{array}\right.$

Với $t = 2 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn)

Với $t = -1 \Leftrightarrow \log_3 x = -1 \Leftrightarrow x = 3^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (thỏa mãn)

c) Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_2{}^2 x - 2(\log_2 4 + \log_2 x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2{}^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0 \quad (*)$$

Khi đó:

Đặt $t = \log_2 x$ thì phương trình $(*)$ trở thành $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 3 \end{array}\right.$

Với $t = -1 \Leftrightarrow \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = 2^{-1} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn)

Với $t = 3 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 \Leftrightarrow x = 8$ (thỏa mãn)

d) Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 6 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 = 0 \quad (*)$.

Đặt $t = \log_3 x$ thì phương trình $(*)$ trở thành $t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3 \end{array}\right.$

Với $t = 2 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn)

Với $t = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = 3 \Leftrightarrow x = 3^3 \Leftrightarrow x = 27$ (thỏa mãn)

e) Điều kiện xác định : $x > 0$.

Ta có $\log^2 x - \log(2020x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \log^2 x - \log x - \log 2020 - 1 = 0$

Do $ac < 0$ nên phương trình trên có hai nghiệm phân biệt $\log x_1, \log x_2$.

Ta có $\log x_1 + \log x_2 = -\dfrac{b}{a} = 1 \Rightarrow \log(x_1 x_2) = 1 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 10$.

f) Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l} 5^x - 1 > 0 \\ 2.5^x - 2 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow 5^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Ta có: $\log_2(5^x - 1).\log_4(2.5^x - 2) = 1 \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1).\log_{2^2}\left[2.(5^x - 1)\right] = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_2(5^x - 1).\log_2\left[2.(5^x - 1)\right] = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_2(5^x - 1).\left[1 + \log_2(5^x - 1)\right] = 1 \ (*)$

Đặt $t = \log_2(5^x - 1)$ thì phương trình $(*)$ trở thành $\dfrac{1}{2}t(1+t) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{2}t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 1 \end{array}\right.$

Với $t = -2 \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) = -2 \Leftrightarrow 5^x - 1 = 2^{-2} \Leftrightarrow 5^x = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 5^x = \dfrac{5}{4} \Rightarrow x = \log_5 \dfrac{5}{4}$ (thỏa mãn)

$t=1\Leftrightarrow \log_2\left(5^x-1\right)=1\Leftrightarrow 5^x-1=2^1\Leftrightarrow 5^x=3\Rightarrow x=\log_5 3$

Với (thỏa mãn)

Ví dụ 7: Tìm tham số m để phương trình phương trình $\log_2^2\left(x^2+1\right)-m\log_2\left(x^2+1\right)+8-m=0$ có đúng ba nghiệm phân biệt ?

Lời giải

Đặt $t=\log_2\left(x^2+1\right), t\geq 0$. Phương trình trở thành $t^2-mt+8-m=0(*)$.

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương. Khi đó

$$\begin{cases} m^2-4(8-m)>0 \\ 8-m=0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=8$$

.

Ví dụ 8: Tìm tham số m để phương trình $\log_2^2 x-m\log_2 x+15-m=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $2\leq x_1<4<x_2$.

Lời giải

Đặt $t=\log_2 x$ phương trình đã cho trở thành: $t^2-mt+15-m=0\ (1)$

Ta có $2\leq x_1<4<x_2\Leftrightarrow 1\leq \log_2 x_1<2<\log_2 x_2\Leftrightarrow 1\leq t_1<2<t_2$ với t_1,t_2 là nghiệm của (1).

Đặt $f(t)=t^2-mt+15-m$.

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm t_1,t_2 thỏa $1\leq t_1<2<t_2\Leftrightarrow \begin{cases} af(1)\geq 0 \\ af(2)<0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16-2m\geq 0 \\ 19-3m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{19}{3}<m\leq 8$$

.

Ví dụ 9: Tìm giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x-(m+2)\log_3 x+3m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1x_2=27$.

Lời giải

$$\log_3^2 x-(m+2)\log_3 x+3m-1=0\ (1)$$

Xét phương trình

Đặt $t=\log_3 x$, phương trình (1) trở thành $t^2-(m+2)t+3m-1=0\ (2)$

Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1x_2=27$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm $t_1,\ t_2$ thỏa mãn $t_1+t_2=\log_3 x_1+\log_3 x_2=\log_3(x_1x_2)=\log_3 27=3$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+2)^2 - 4(3m-1) \geq 0 \\ S = t_1 + t_2 = m + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$. Khi đó (2) trở thành $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array} \right.$.

Với $t_1 = 1 \Rightarrow \log_3 x_1 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 3$ và với $t_2 = 2 \Rightarrow \log_3 x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = 9$.

Ví dụ 10: Tìm tham số m để phương trình $\log^2 x - 2(m+1)\log x + 4 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt thoả mãn $0 < x_1 < 10 < x_2$.

Lời giải

Xét phương trình $\log^2 x - 2(m+1)\log x + 4 = 0 \quad (1)$

Đặt $t = \log x$, phương trình (1) trở thành $t^2 - 2(m+1)t + 4 = 0 \quad (2)$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $0 < x_1 < 10 < x_2$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thoả mãn $t_1 < 1 < t_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 4 > 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m+3) > 0 \\ -2m + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.

Dạng 4: Phương pháp mũ hóa và logarit hóa

1. Phương pháp logarit hóa:

- **Dạng 1:** $a^{g(x)} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) = \log_a f(x) \end{cases}$ với $0 < a \neq 1$.
- **Dạng 2:** $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$.

2. Phương pháp mũ hóa: $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$

Ví dụ 11: Giải các phương trình sau:

a) $\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{2x+1} = 2 - \sqrt{3}$ b) $3^x.5^{\frac{2x-1}{x}} = 15$ c) $2^{x-2} = 3^{x^2+2x-8}$

Lời giải

a) Ta có : $7 + 4\sqrt{3} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^2$; $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$.

$\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2x+1}=2-\sqrt{3}\Leftrightarrow 2x+1=\log_{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}\left(2-\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow 2x+1=\log_{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow 2x+1=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{4}.$ Vậy phương trình có nghiệm $x=-\dfrac{3}{4}$.

b) Điều kiện: $x\neq 0$

$$3^x.5^{\frac{2x-1}{x}}=15\Leftrightarrow \log_3 3^x.5^{\frac{2x-1}{x}}=\log_3 15\Leftrightarrow x+\frac{2x-1}{x}\log_3 5=1+\log_3 5$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow x+\frac{x-1}{x}\log_3 5-1=0\Leftrightarrow x^2+(x-1)\log_3 5-x=0\Leftrightarrow x^2+x(\log_3 5-1)-\log_3 5=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\log_3 5\end{array}\right.$$

c) Ta có: $2^{x-2}=3^{x^2+2x-8}\Leftrightarrow \log_2 2^{x-2}=\log_2 3^{x^2+2x-8}\Leftrightarrow x-2=\left(x^2+2x-8\right)\log_2 3$

$\Leftrightarrow x-2=(x-2)(x+4)\log_2 3\Leftrightarrow (x-2)\left[(x+4)\log_2 3-1\right]=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\(x+4)\log_2 3-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x+4=\dfrac{1}{\log_2 3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\log_3 2-4\end{array}\right.$$

.

Ví dụ 12: Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{\frac{4}{3}}x=\log_3 y=\log_2(2x-3y)$. Tính tỷ số $\dfrac{x}{y}$.

Lời giải

$$t=\log_{\frac{4}{3}}x=\log_3 y=\log_2(2x-3y)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=3^t\\x=\left(\dfrac{4}{3}\right)^t\\2x-3y=2^t\end{array}\right.\Rightarrow 2.\left(\frac{4}{3}\right)^t-3.3^t=2^t$$

Đặt

$$\Leftrightarrow 2.\left(\frac{4}{9}\right)^t-3=\left(\frac{2}{3}\right)^t\Leftrightarrow 2.\left(\frac{2}{3}\right)^{2t}-\left(\frac{2}{3}\right)^t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{2}{3}\right)^t=-1(l)\\\left(\dfrac{2}{3}\right)^t=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^t=\frac{3}{2}\Leftrightarrow t=-1$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=\dfrac{1}{3}\\x=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{9}{4}$$

.

Ví dụ 13: Cho phương trình $x^{\log_{2020}(x^3)-a}=2021$ với a là số thực dương. Biết tích các nghiệm của phương trình là 32. Tìm giá trị của a.

Lời giải

Ta có: $x^{\log_{2020}(x^3)-a}=2021 \Leftrightarrow \log_{2020}\left[x^{\log_{2020}(x^3)-a}\right]=\log_{2020}2021$

$$\Leftrightarrow (3\log_{2020}x-a)\log_{2020}x-\log_{2020}2021=0 \Leftrightarrow 3(\log_{2020}x)^2-a\log_{2020}x-\log_{2020}2021=0 \quad (*)$$

$$x_1.x_2=32 \Rightarrow \log_{2020}(x_1.x_2)=\log_{2020}x_1+\log_{2020}x_2=\log_{2020}32$$

Mặt khác: $$\log_{2020}x_1+\log_{2020}x_2=\frac{a}{3} \Rightarrow a=3.\log_{2020}32$$.

Dạng 5: Giải các bất phương trình mũ và logarit cơ bản

Phương trình mũ cơ bản $a^x=b,\ (a>0,\ a\neq 1).$

- Nếu $b>0$ thì phương trình $a^x=b \Leftrightarrow x=\log_a b.$
- Nếu $b\leq 0$ thì phương trình $a^x=b$ vô nghiệm.

Phương trình logarit có dạng $\log_a x=b\ (a>0,\ a\neq 1).$

- Nếu $\log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b.$

Ví dụ 14: Giải các bất phương trình mũ sau :

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x>8$

b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4}>\frac{1}{49}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\geq 128$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x}>8$

e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4}>\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2-3x+2}$

f) $2^{2x^2-11x+5}\leq 1$

g) $7^{4-2x-x^2}\leq\frac{1}{49^x}$

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5}>\frac{1}{16}$

i) $3^{x^2-4x+5}\leq 9$

k) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}<\left(\frac{1}{2}\right)^4$

Lời giải

a) Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^x>8 \Leftrightarrow x<\log_{\frac{1}{2}}8 \Leftrightarrow x<-3$

b) Bất phương trình đã cho tương đương với $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4} > \left(\frac{1}{7}\right)^{2}$.

Vì $0 < \frac{1}{7} < 1$, suy ra $3x+4 < 2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.

c) Ta có : $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq 128 \Leftrightarrow 2^{1-x} \geq 2^{7} \Leftrightarrow 1-x \geq 7 \Leftrightarrow x \leq -6$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (-\infty; -6]$.

d) Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} > 8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow x^2-4x < -3 \Leftrightarrow 1 < x < 3$.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1;3)$.

e) Ta có $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2-3x+2} \Leftrightarrow 2x-4 < -x^2-3x+2 \Leftrightarrow x^2+5x-6 < 0 \Leftrightarrow -6 < x < 1$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm $S = (-6;1)$.

f) Ta có: $2^{2x^2-11x+5} \leq 1 \Leftrightarrow 2^{2x^2-11x+5} \leq 2^{0} \Leftrightarrow 2x^2-11x+5 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 5$

$7^{4-2x-x^2} \leq \frac{1}{49^{x}} \Leftrightarrow 7^{4-2x-x^2} \leq 7^{-2x} \Leftrightarrow 4-2x-x^2 \leq -2x \Leftrightarrow 4-x^2 \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -2 \\ x \geq 2 \end{array}\right.$.

g) Ta có.

h) Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} > \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} > \left(\frac{1}{2}\right)^{4} \Leftrightarrow x^2-5 < 4 \Leftrightarrow -3 < x < 3.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-3;3)$.

i) Ta có: $3^{x^2-4x+5} \leq 9 \Leftrightarrow 3^{x^2-4x+5} \leq 3^{2} \Leftrightarrow x^2-4x+3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$.

Vậy: Tập nghiệm của bất phương trình là $[1;3]$

k) Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{4} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} > 4 \Leftrightarrow \frac{5-4x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow 1 < x < \frac{5}{4}.$ Vậy $S = \left(1; \frac{5}{4}\right)$.

Ví dụ 15: Giải các bất phương trình logarit sau:

a) $\log_2(2x+4)<3$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)>-1$

c) $\log_2 x<3$

d) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+4x)\ge -1$

e) $\log_2(3.2^x-2)<2x$

f) $\log_{\frac{1}{3}}(4x-9)>\log_{\frac{1}{3}}(x+10)$

g) $\log_3(x^2-2x)\le 1$

h) $\log_5(4x-9)\le\log_5(3x+7)$

i) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x)\ge -1$

k) $\log_3(5x-2x^2+7)<2$

Lời giải

a) Điều kiện: $2x+4>0\Leftrightarrow x>-2$.

Ta có: $\log_2(2x+4)<3\Leftrightarrow 0<2x+4<2^3\Leftrightarrow 0<2x+4<8\Leftrightarrow -2<x<2$

b) Điều kiện: $x<3$. Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)>-1\Leftrightarrow 3-x<\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\Leftrightarrow 3-x<2\Leftrightarrow x>1$.

Kết hợp điều kiện ta được: $1<x<3$.

c) Ta có: $\log_2 x<3\Leftrightarrow 0<x<2^3\Leftrightarrow 0<x<8$.Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(0;8)$.

d) Ta có:

$$\log_{\frac{1}{5}}(x^2+4x)\ge -1\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x>0\\x^2+4x\le 5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x>0\\x^2+4x-5\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-4\\x>0\end{array}\right.\\-5\le x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-5\le x<-4\\0<x\le 1\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là:

$$S=[-5;-4)\cup(0;1]$$

e) Điều kiện: $3.2^x-2>0\Leftrightarrow 2^x>\frac{2}{3}\Leftrightarrow x>\log_2\frac{2}{3}\quad(*)$

Ta có $\log_2(3.2^x-2)<2x\Leftrightarrow\log_2(3.2^x-2)<\log_2 2^{2x}\Leftrightarrow 3.2^x-2<2^{2x}\Leftrightarrow 4^x>3.2^x-2$

$$\Leftrightarrow 4^x-3.2^x+2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x<1\\2^x>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\x>1\end{array}\right.$$

Kết hợp với $(*)$ ta được $x\in\left(\log_2\frac{2}{3};0\right)\cup(1;+\infty)$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\in\left(\log_2\frac{2}{3};0\right)\cup(1;+\infty)$.

f) Điều kiện: $x>\frac{9}{4}$. Ta có: $\log_{\frac{1}{3}}(4x-9)>\log_{\frac{1}{3}}(x+10)\Leftrightarrow 4x-9<x+10\Leftrightarrow x<\frac{19}{3}$.

$$\log_3(x^2-2x)\le 1\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x>0\\x^2-2x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<0\\x>2\end{array}\right.\\-1\le x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le x<0\\2<x\le 3\end{array}\right.$$

g) Ta có: .

$$S=[-1;0)\cup(2;3]$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là .

h) Điều kiện: $x>\frac{9}{4}$.

$$\log_5(4x-9)\le\log_5(3x+7)\Leftrightarrow 4x-9\le 3x+7\Leftrightarrow x\le 16$$

Bất phương trình

$$S=\left(\frac{9}{4};16\right]$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: nên có 14 nghiệm nguyên dương.

$$x^2-x>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>1\\x<0\end{array}\right.$$

i) Điều kiện xác định: .

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x)\ge -1\Leftrightarrow x^2-x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\Leftrightarrow -1\le x\le 2$$

Ta có: .

$$S=[-1;0)\cup(1;2]$$

Kết hợp với điều kiện, ta được: .

$$\log_3(5x-2x^2+7)<2\Leftrightarrow\begin{cases}-2x^2+5x+7>0\\5x-2x^2+7<9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x^2+5x+7>0\\-2x^2+5x-2<0\end{cases}$$

k) Ta có: \

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<\frac{7}{2}\\\left[\begin{array}{l}x<\frac{1}{2}\\x>2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)\cup\left(2;\frac{7}{2}\right)$$

.

Dạng 6: Đưa về cùng cơ số giải bất phương trình mũ và logarit

Nếu gặp bất phương trình $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ thì xét hai trường hợp:

- ♣ **Trường hợp 1:** Nếu $a>1$ thì bất phương trình $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$.
- ♣ **Trường hợp 2:** Nếu $0<a<1$ thì bất phương trình $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$.

Ví dụ 16: Giải các bất phương trình mũ sau :

a) $3^{x+2} \ge \frac{1}{9}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-4} > \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}$

c) $2^{x^2-4x+5} = 8$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} > \frac{1}{16}$

e) $2^{x^2-3x+4} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$

f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1}$

g) $4^{x-1} \ge 2^{x^2-3x+2}$

h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1}$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-7} \ge 8$

k) $2^{x^2-3x+2} \ge 4$

Lời giải

a) Ta có : $3^{x+2} \ge \frac{1}{9} = 3^{-2} \Leftrightarrow x+2 \ge -2 \Leftrightarrow x \ge -4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [-4; +\infty)$.

b) Ta có: $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-4} > \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} \Leftrightarrow 2x-4 < x+1 \Leftrightarrow x < 5$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (-\infty; 5)$.

c) Ta có $2^{x^2-4x+5} = 8 \Leftrightarrow x^2-4x+5 = 3 \Leftrightarrow x^2-4x+2 = 0$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 4.

d) Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} > \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} > \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Leftrightarrow x^2-5 < 4 \Leftrightarrow x^2-9 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.

e) Ta có:

$2^{x^2-3x+4} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x+4} \le 2^{-2x+10} \Leftrightarrow x^2-3x+4 \le -2x+10$

$\Leftrightarrow x^2-x-6 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le 3$.

Vậy bất phương trình đã cho có 3 nghiệm nguyên dương là $x = 1, x = 2, x = 3$.

f) Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{3x^2} < 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3x^2 < 2x+1 \Leftrightarrow \frac{-1}{3} < x < 1$. Vậy $S = \left(\frac{-1}{3}; 1\right)$.

g) Ta có: $4^{x-1} \geq 2^{x^2-3x+2} \Leftrightarrow 2^{2x-2} \geq 2^{x^2-3x+2} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$.

h) Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{3x^2} < 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3x^2 < 2x+1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 1$

i) Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-7} \geq 8 \Leftrightarrow x^2 - 7 \leq -3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

k) Ta có $2^{x^2-3x+2} \geq 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ x \geq 3 \end{array}\right.$.

Ví dụ 17: Giải các bất phương trình logarit sau :

a) $\log_2(x-1) > \log_2 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$

c) $\log_4(x^2-3x) > \log_2(9-x)$

d) $\log_{\frac{1}{2}} x \text{ £ } \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2x-1)$

e) $\log_{2-\sqrt{3}}(x+1) + \log_{2+\sqrt{3}}(11-2x) \geq 0$

Lời giải

a) Ta có: $\log_2(x-1) > \log_2 3 \Leftrightarrow x-1 > 3 \Leftrightarrow x > 4$.

b) Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow (x+1) > (2x-1) > 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > \frac{1}{2} \\ x < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2$

c) Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x < 0 \\ 3 < x < 9 \end{array}\right.$

Ta có: $\log_4(x^2-3x) > \log_2(9-x) \Leftrightarrow \log_2(x^2-3x) > \log_2(9-x)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x > (9-x)^2 \Leftrightarrow 15x > 81 \Leftrightarrow x > \frac{27}{5}$. Kết hợp điều kiện suy ra $\frac{27}{5} < x < 9$.

$$\log_{\frac{1}{2}} x \le \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{x} \le \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2x-1) \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 2x + 1 \ge 0 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

d) Ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \le \sqrt{x} \le 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \le 1$$

.

$$-1 < x < \frac{11}{2}$$

e) Điều kiện xác định .

$$\log_{2-\sqrt{3}}(x+1) + \log_{2+\sqrt{3}}(11-2x) \ge 0$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \log_{(2+\sqrt{3})^{-1}}(x+1) + \log_{2+\sqrt{3}}(11-2x) \ge 0 \quad 2-\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^{-1}$$

vì

$$\Leftrightarrow -\log_{(2+\sqrt{3})}(x+1) + \log_{2+\sqrt{3}}(11-2x) \ge 0 \Leftrightarrow \log_{2+\sqrt{3}} \frac{11-2x}{x+1} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{11-2x}{x+1} \ge (2+\sqrt{3})^0 = 1 \Leftrightarrow \frac{11-2x}{x+1} - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{10-3x}{x+1} \ge 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1; \frac{10}{3}\right]$$

Ví dụ 18: Tìm tham số m để bất phương trình $1 + \log_5(x^2+1) \ge \log_5(mx^2+4x+m)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $mx^2 + 4x + m > 0$.

$$1 + \log_5(x^2+1) \ge \log_5(mx^2+4x+m) \Leftrightarrow \log_5 5(x^2+1) \ge \log_5(mx^2+4x+m)$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow 5(x^2+1) \ge mx^2 + 4x + m \Leftrightarrow (5-m)x^2 - 4x + 5 - m \ge 0$$

Ta thấy $m = 0$ hoặc $m = 5$ không thỏa mãn điều kiện đề bài.

Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $\begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ (5-m)x^2 - 4x + 5 - m \ge 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ 5-m>0 \\ 4-m^2<0 \\ -m^2+10m-21\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m<5 \\ m<-2;m>2 \\ m\le 3;m\ge 7 \end{cases} \Leftrightarrow 2<m\le 3$$

Ví dụ 19: Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $\ln\left(9x^2+9\right)\ge \ln\left(mx^2+6x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi x thuộc □ ?

Lời giải

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+6x+m>0 \\ 9x^2+9\ge mx^2+6x+m \end{cases}, \forall x\in \square$$

Yêu cầu bài toán

$$mx^2+6x+m>0\ ,\forall x\in \square \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \Delta'_m=9-m^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m>3\ (1)$$

Mặt khác:

$$9x^2+9\ge mx^2+6x+m\ ,\forall x\in \square \Leftrightarrow (9-m)x^2-6x+9-m\ge 0,\forall x\in \square$$

Lại có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-m>0 \\ 9-(9-m)^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<9 \\ (12-m)(m-6)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<9 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 6 \\ m\ge 12 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m\le 6\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $3<m\le 6$

Dạng 7: Đặt ẩn phụ giải bất phương trình mũ và logarit

Ta thường gặp các dạng: $m.a^{2f(x)}+n.a^{f(x)}+p>0\quad (1)$.

- ♣ Đặt $t=a^{f(x)},\ t>0$ đưa pt (1) về dạng phương trình bậc 2: $mt^2+nt+p>0$.
- ♣ Giải bất phương trình tìm nghiệm t và kiểm tra điều kiện $t>0$ sau đó tìm nghiệm x.
- ♣ $m.a^{f(x)}+n.b^{f(x)}+p>0$, trong đó $a.b=1$. Đặt $t=a^{f(x)},\ t>0$, suy ra $b^{f(x)}=\frac{1}{t}$.
- ♣ $m.a^{2f(x)}+n.(a.b)^{f(x)}+p.b^{2f(x)}>0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=t>0$.

Ví dụ 20: Giải các bất phương trình mũ sau:

a) $4^x-3.2^x-4\ge 0$

b) $4^x-17.2^x+16\le 0$

c) $25^x-5^x-2<0$

d) $4^x-17.2^x+16\le 0$

e) $4^x-3.2^x-4\ge 0$

f) $\left(3+\sqrt{5}\right)^x+\left(3-\sqrt{5}\right)^x<3.2^x$

Lời giải

a) Đặt $2^x = t(t>0)$ thì bất phương trình $\Leftrightarrow 4^x - 3.2^x - 4 \ge 0 \Rightarrow t^2 - 3t - 4 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -1 \\ t \ge 4 \end{array}\right.$.

Kết hợp với $t>0$ ta được $t \ge 4 \Rightarrow 2^x \ge 4 \Leftrightarrow x \ge 2$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $[2;+\infty]$.

b) Đặt $t = 2^x (t>0)$

Bất phương trình đã cho trở thành $: t^2 - 17.t + 16 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le t \le 16 \Leftrightarrow 0 \le x \le 4$

c) Ta có $25^x - 5^x - 2 < 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 5^x - 2 < 0$.

Đặt $t = 5^x, t>0$. Ta được bất phương trình ẩn t là: $t^2 - t - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 2$.

Đối chiếu điều kiện ta được $0 < t < 2 \Rightarrow 0 < 5^x < 2 \Leftrightarrow x < \log_5 2$.

d) $4^x - 17.2^x + 16 \le 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 17.2^x + 16 \le 0$

Đặt $t = 2^x (t>0)$ ta có bất phương trình $t^2 - 17t + 16 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le t \le 16$

Với $1 \le t \le 16$ ta có $1 \le 2^x \le 16 \Leftrightarrow 0 \le x \le 4$

e) Đặt $t = 2^x (t>0)$

Phương trình trở thành: $t^2 - 3t - 4 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \ge 4 \\ t \le -1 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện: $t>0 \Rightarrow t \ge 4 \Rightarrow x \ge 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [2;+\infty)$.

f) Ta có $\left(3+\sqrt{5}\right)^x + \left(3-\sqrt{5}\right)^x < 3.2^x \Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^x < 3$.

Đặt $t = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x$ với $t>0 \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} < 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} < t < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) < x < \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Ví dụ 21: Giải các bất phương trình logarit sau:

a) $\log^2_{\sqrt{2}}(x-4)-43\log_2(4x-16)+75\le 0$ b) $\log^2_2 x-5\log_2 x-6\le 0$

c) $\log^2_3 x-2\log_{\sqrt{3}} x+3>0$ d) $\left(2^x+2^{4-x}-17\right)\sqrt{10-\log_2 x}\ge 0$

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $x>4$.

Ta có: $\log^2_{\sqrt{2}}(x-4)-43\log_2(4x-16)+75\le 0\Leftrightarrow\left[\log_{2^{\frac{1}{2}}}(x-4)\right]^2-43\log_2\left[4(x-4)\right]+75\le 0$

$\Leftrightarrow 4\left[\log_2(x-4)\right]^2-43\log_2(x-4)-11\le 0\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\le\log_2(x-4)\le 11\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+4\le x\le 2^{11}+4$

$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+4\le x\le 2^{11}+4\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+4\le x\le 2052$

b) Điều kiện: $x>0$. Khi đó: $\log^2_2 x-5\log_2 x-6\le 0\Leftrightarrow -1\le\log_2 x\le 6\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le x\le 64$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=\left[\frac{1}{2};64\right]$.

c) Điều kiện $x>0$. Ta có $\log^2_3 x-2\log_{\sqrt{3}} x+3>0\Leftrightarrow\log^2_3 x-4\log_3 x+3>0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x>3\\ \log_3 x<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>27\\ x<3\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S=(0;3)\cup(27;+\infty)$.

d) Điều kiện: $10-\log_2 x\ge 0\Leftrightarrow 0<x\le 2^{10}$.

$\left[\begin{array}{l}\sqrt{10-\log_2 x}=0\\ \begin{cases}\sqrt{10-\log_2 x}>0\\ 2^x+2^{4-x}-17\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$

Bất phương trình đã cho tương đương

Ta có: $\sqrt{10-\log_2 x}=0\Leftrightarrow x=2^{10}$.

$\begin{cases}\sqrt{10-\log_2 x}>0\\ 2^x+2^{4-x}-17\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<2^{10}\\ 2^{2x}-17\cdot 2^x+16\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<2^{10}\\ \left[\begin{array}{l}2^x\le 1\\ 2^x\ge 16\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<2^{10}\\ \left[\begin{array}{l}x\le 0\\ x\ge 4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 4\le x<2^{10}$

Khi đó:

Ví dụ 22: Xét bất phương trình $\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$. Tìm giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$.

$$\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0 \Leftrightarrow (1+\log_2 x)^2-2(m+1)\log_2 x-2<0 \quad (1)$$

Ta có .

Đặt $t=\log_2 x$. Vì $x>\sqrt{2}$ nên $\log_2 x>\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$. Do đó $t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Khi đó: (1) trở thành $(1+t)^2-2(m+1)t-2<0 \Leftrightarrow t^2-2mt-1<0 \quad (2)$.

Xét bất phương trình (2) có: $\Delta'=m^2+1>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Do $f(t)=t^2-2mt-1=0$ có $ac=-1<0$ nên phương trình $f(t)=0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $t_1<0<t_2$. Tập nghiệm của bất phương trình (2) là $S=(t_1;t_2)$.

Yêu cầu bài toán tương đương tìm m để bất phương trình (2) có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

Khi đó ta cần có $\frac{1}{2}<t_2 \Leftrightarrow m+\sqrt{m^2+1}>\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2+1}>1-2m \quad (3)$

Nếu $1-2m<0 \Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$, do $m^2+1>0,\forall m\in\mathbb{R}$ nên (3) luôn đúng với $\forall m\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Nếu $1-2m\ge 0 \Leftrightarrow m\le\frac{1}{2}$, $(3)\Leftrightarrow 4\left(m^2+1\right)>(1-2m)^2 \Leftrightarrow 4m+3>0 \Leftrightarrow m>-\frac{3}{4}$.

Kết hợp điều kiện $m\le\frac{1}{2}$ ta có $m\in\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right]$.

Tóm lại kết hợp cả 2 trường hợp ta có $m\in\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$.

Ví dụ 23: Tìm tham số m để bất phương trình $\dfrac{\log_3^2 x-3\log_3 x+2}{\sqrt{m-2^x}}<0$ có không quá 3 nghiệm nguyên dương?

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} m-2^x>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\log_2 m \\ x>0 \end{cases}$

Ta có: $\dfrac{\log_3^2 x-3\log_3 x+2}{\sqrt{m-2^x}}<0 \Leftrightarrow \log_3^2 x-3\log_3 x+2<0 \Leftrightarrow 1<\log_3 x<2 \Leftrightarrow 3<x<9$.

Xét: $\log_2 m\le 3 \Leftrightarrow 0<m\le 8$ thì bất phương trình vô nghiệm.

Suy ra có 8 giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Xét: $\log_2 m>3 \Leftrightarrow m>8 \quad (1)$ thì bất phương trình có nghiệm thỏa: $3<x<\min\{\log_2 m;9\}$.

Theo yêu cầu đề bài ta có: $\log_2 m\le 7 \Leftrightarrow m\le 128$.

Kết hợp với điều kiện (1) ta được: $8<m\le 128$.

Ví dụ 24: Tìm tham số m để bất phương trình $\left|\dfrac{3\ln^2 x+2\ln x+12}{\ln^2 x-(m+1)\ln x+4}\right|\ge 2$ nghiệm đúng với mọi $x>0$.

Lời giải

Đặt $t=\ln x$. Vì $x>0$ nên $t\in\mathbb{R}$

$$\left|\frac{3t^2+2t+12}{t^2-(m+1)t+4}\right|\ge 2,\forall t\in\mathbb{R}$$

Bất phương trình trở thành:

$$\Leftrightarrow \left|3t^2+2t+12\right|\ge 2\left|t^2-(m+1)t+4\right|,\forall t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 2\left|t^2-(m+1)t+4\right|\le 3t^2+2t+12,\forall t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2-2(m+1)t+4\le 3t^2+2t+12 \\ 2t^2-2(m+1)t+4\ge -3t^2-2t-12 \end{cases},\forall t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -t^2-2(m+2)t-8\le 0 \\ 5t^2-2mt+16\ge 0 \end{cases},\forall t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2-8\le 0 \\ m^2-5.16\le 0 \end{cases},\forall t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+4m-4\le 0 \\ m^2-80\le 0 \end{cases},\forall t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -2-2\sqrt{2}\le m\le -2+2\sqrt{2} \\ -4\sqrt{5}\le m\le 4\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2-2\sqrt{2}\le m\le -2+2\sqrt{2}$$

Dạng 8: Mũ hóa, logarit hóa giải bất phương trình mũ và logarit

Ví dụ 25: Giải các bất phương trình mũ sau:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x-1} \ge \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}$

b) $5.6^{x+1} \le 2.3^{x+1}$

c) $5^{x^2-4} \le 625$

d) $(0,1)^{\ln(x-4)} \ge 1$

e) $\log_2\left(3^x-2\right)<0$

Lời giải

a) Ta có: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x-1} \ge \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5} \Leftrightarrow -x^2-2x-1 \le x-5 \Leftrightarrow x^2+3x-4 \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-4] \cup [1;+\infty)$.

b) Ta có $5.6^{x+1} \le 2.3^{x+1} \Leftrightarrow \frac{6^{x+1}}{2.3^{x+1}} \le \frac{1}{5} \Leftrightarrow 2^x \le \frac{1}{5} \Leftrightarrow x \le \log_2\left(\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow x \le -\log_2 5$.

c) Ta có: $5^{x^2-4} \le 625 \Leftrightarrow x^2-4 \le \log_5 625 \Leftrightarrow x^2 \le 8 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{2}$.

d) Điều kiện: $x>4$.

Ta có $(0,1)^{\ln(x-4)} \ge 1 \Leftrightarrow \ln(x-4) \le 0 \Leftrightarrow x-4 \le 1 \Leftrightarrow x \le 5$.

Đối chiếu với điều kiện, ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(4;5]$.

e) Ta có $\log_2\left(3^x-2\right)<0 \Leftrightarrow 0<3^x-2<1 \Leftrightarrow 2<3^x<3 \Leftrightarrow \log_3 2<x<1$.

Ví dụ 26: Tìm m để tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2}.m^{x+1}-3^{-x}<0$ chứa đúng một số nguyên

Lời giải

Điều kiện: $m>0$. Ta có: $3^{x^2}.m^{x+1}-3^{-x}<0 \Leftrightarrow 3^{x^2}.m^{x+1}<3^{-x} \Leftrightarrow 3^{x^2+x}.m^{x+1}<1$

$\Leftrightarrow \left(x^2+x\right)+(x+1)\log_3 m<0 \Leftrightarrow (x+1)(x+\log_3 m)<0$

Nếu $m>3 \Leftrightarrow \log_3 m>1 \Rightarrow$ tập nghiệm của bất phương trình là: $-\log_3 m<x<-1$

Khi đó, bất phương trình có đúng một nghiệm nguyên khi:

$$-3 \le -\log_3 m<-2 \Leftrightarrow 2<\log_3 m \le 3 \Leftrightarrow 9<m \le 27$$

Nếu $0<m<3 \Leftrightarrow \log_3 m<1 \Rightarrow$ tập nghiệm của bất phương trình là $-1<x<-\log_3 m$

Khi đó, bất phương trình có đúng một nghiệm nguyên khi:

$$0<-\log_3 m \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \log_3 m<0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le m<1$$

Vậy với $9<m \le 27$ và $\frac{1}{3} \le m<1$ thì tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2}.m^{x+1}-3^{-x}<0$ chứa đúng một số nguyên.

Dạng 9: Vận dụng vào các bài toán thực tế

Ví dụ 27: Bác Minh gửi tiết kiệm 500 triệu đồng ở một ngân hàng với lãi suất không đổi $7,5\%$ một năm theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng. Tổng số tiền bác Minh thu được (cả vốn lẫn lãi) sau n năm là: $A = 500.(1+0,075)^n$ (triệu đồng). Tính thời gian tối thiểu gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

Lời giải

Ta có: $500(1+0,075)^n \geq 800$

Chia cả hai vế của bất phương trình cho 500: $(1+0,075)^n \geq \frac{800}{500} = 1,6$

Lấy logarit tự nhiên ở cả hai vế của bất phương trình: $n\ln(1+0,075)^n \geq \ln(1,6)$

Chia cả hai vế của bất phương trình cho $\ln(1+0,075)$: $n \geq \frac{\ln(1,6)}{\ln(1+0,075)} \approx 9,25$

Vậy thời gian tối thiểu cần gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng là 10 năm.

Ví dụ 28: Số lượng vi khuẩn ban đầu trong một mẻ nuôi cấy là 500 con. Người ta lấy một mẫu vi khuẩn trong mẻ nuôi cấy đó, đếm số lượng vi khuẩn và thấy rằng tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn là 40% mỗi giờ. Khi đó số lượng vi khuẩn $N(t)$ sau t giờ nuôi cấy được ước tính bằng công thức sau: $N(t) = 500e^{0,4t}$. Hỏi sau bao nhiêu giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80 000 con?

Lời giải

Giải phương trình: $80000 = 500e^{0,4t}$

Chia cả hai vế của phương trình cho 500: $160 = e^{0,4t}$

Logarit tự nhiên của cả hai vế: $\ln 160 = 0,4t \Rightarrow t = \frac{\ln 160}{04} \approx 5,43$

Vậy sau khoảng 5.43 giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn sẽ vượt mức 80000 con.

Ví dụ 29: Giả sử nhiệt độ $T(^\circ C)$ của một vật giảm dần theo thời gian cho bởi công thức: $T = 25 + 70e^{-0,5t}$ trong đó thời gian t được tính bằng phút.

a) Tìm nhiệt độ ban đầu của vật.

b) Sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại $30^\circ C$?

Lời giải

a) Nhiệt độ ban đầu của vật: $T = 25 + 70e^{0,5t} = 25 + 70e^{0,5\times 0} = 25 + 70 = 95$

b) Để tìm thời gian t mà nhiệt độ của vật còn lại $30^\circ C$.

$30 = 25 + 70e^{0,5t} \Rightarrow \ln\dfrac{30-25}{70} = 0,5t$

Giải phương trình trên ta tìm được giá trị của t: $t = 2\ln\dfrac{1}{7} \approx 6,04$

Vậy sau khoảng 6,04 phút nhiệt độ của vật sẽ giảm còn $30^{\circ}C$.

Ví dụ 30: Tính nồng độ Ion Hydrogen (tính bằng mol/lít) của một dung dịch có độ pH là 8.

Lời giải

Độ pH của một dung dịch được tính bằng công thức $pH = -\log_{10}\left[H^+\right]$.

$\Rightarrow \left[H^+\right] = 10^{-pH}$. Do đó, nồng độ ion hydrogen của dung dịch có độ pH là 8 là:

$\left[H^+\right] = 10^{-pH} = 10^{-8}(\text{mol/lít})$.

Vậy, nồng độ ion hydrogen của dung dịch là $10^{-8}\,\text{mol/lít}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Tính tổng các nghiệm của phương trình $\ln\left(x^2-3x+1\right) = -9$

Lời giải

Ta có $\ln\left(x^2-3x+1\right) = -9 \Leftrightarrow x^2-3x+1 = e^{-9} \Leftrightarrow x^2-3x+1-e^{-9} = 0$.

Phương trình $x^2-3x+1-e^{-9} = 0$ có $\Delta = 5+4e^{-9} > 0$ nên luôn có hai nghiệm phân biệt và có tổng bằng 3.

Câu 2: Giải phương trình $(4,5)^{4x-5} = \left(\dfrac{2}{9}\right)^{-x-1}$ là

Lời giải

$$(4,5)^{4x-5} = \left(\frac{2}{9}\right)^{-x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^{4x-5} = \left(\frac{9}{2}\right)^{x+1} \Leftrightarrow 4x-5 = x+1 \Leftrightarrow x = 2$$

Ta có:

Câu 3: Tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{7}{11}\right)^{3x+2} \le \left(\dfrac{11}{7}\right)^{x^2}$.

Lời giải

Ta có: $\left(\dfrac{7}{11}\right)^{3x+2} \le \left(\dfrac{11}{7}\right)^{x^2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{11}{7}\right)^{-3x-2} \le \left(\dfrac{11}{7}\right)^{x^2} \Leftrightarrow -3x-2 \le x^2 \Leftrightarrow x^2+3x+2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge -1 \\ x \le -2 \end{array}\right.$.

Câu 4: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $4.9^x - 13.6^x + 9.4^x = 0$.

Lời giải

$$4.9^x-13.6^x+9.4^x=0\Leftrightarrow 4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-13\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^x=1\\\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{9}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

Ta có: .

Suy ra: $T=0+2=2$.

Câu 5: Tìm tham số m để phương trình: $4^x-m.2^{x+1}+2m^2-27=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

$t=2^x>0\Rightarrow$ phương trình đã cho trở thành $t^2-2mt+2m^2-27=0\ (*)$

Đặt

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow t^2-2mt+2m^2-27=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\Delta>0\\P>0\\S>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-m^2+27>0\\2m^2-27>0\\2m>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\frac{3\sqrt{6}}{2}<m<3\sqrt{3}\Rightarrow S=\{4;5\}.$$

.

Câu 6: Cho phương trình $4^x-2m.2^x+3m-2=0(*)$ (m là tham số thực). Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm trái dấu?

Lời giải

Đặt $t=2^x$, với $t>0$, ta được phương trình : $t^2-2mt+3m-2=0\ (1)$.

Phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\left\{\begin{array}{l}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m^2-3m+2>0\\m>0\\m>\frac{2}{3}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{2}{3}<m<1\\m>2\end{array}\right.$$

Khi đó : $x_1<0<x_2\Rightarrow 2^{x_1}<1<2^{x_2}\Rightarrow t_1<1<t_2\Rightarrow(t_1-1)(t_2-1)<0\Leftrightarrow t_1t_2-(t_1+t_2)+1<0$

$\Leftrightarrow 3m-2-2m+1<0\Leftrightarrow m<1$. Từ đó suy ra $m\in\left(\frac{2}{3};1\right)$

Câu 7: Tìm tham số m để phương trình $4^x-(m+3)2^{x+1}+m+9=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Lời giải

$$4^x-(m+3)2^{x+1}+m+9=0 \Leftrightarrow 2^{2x}-2(m+3)2^x+m+9=0 \quad (1)$$

Ta có:

Đặt $t=2^x\,(t>0)$, phương trình (1) trở thành: $t^2-2(m+3)t+m+9=0 \quad (2)$

Phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn $1<t_1<t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\(t_1-1)(t_2-1)>0\\t_1+t_2>2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+3)^2-m-9>0\\m+9-2(m+3)+1>0\\2(m+3)>2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2+5m>0\\-m+4>0\\m+3>1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m<-5 \vee m>0\\m<4\\m>-2\end{cases} \Leftrightarrow 0<m<4$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=1;2;3.$ Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8: Cho phương trình $m4^x-m2^{x+1}+2m-12=0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt?

Lời giải

$$m4^x-m2^{x+1}+2m+12=0 \quad (1)$$

Xét phương trình

Đặt $t=2^x\,(t>0)$ ta được phương trình $mt^2-2mt+2m-12=0 \quad (2)$.

Để (1) có hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\begin{cases}a\neq 0\\\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 0\\-m^2+12m>0\\2>0\\\dfrac{2m-12}{m}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 0\\0<m<12\\2>0\\\left[\begin{array}{l}m<0\\m>6\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow 6<m<12$$

.

Câu 9: Tìm tham số m để phương trình $4^x-(2m+1).2^x+(m-11).0,5^x+m+11=0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

Lời giải

$$4^x-(2m+1).2^x+(m-11).0,5^x+m+11=0\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2-(2m+1).2^x+(m-11).\frac{1}{2^x}+m+11=0\ (1)$$

Đặt $t=2^x\,(t>0)$. Khi đó phương trình đã cho có dạng:

$$t^2-(2m+1)t+(m-11).\frac{1}{t}+m+11=0\Leftrightarrow t^3-(2m+1)t^2+(m+11)t+m-11=0$$

$$\Leftrightarrow(t-1)\left(t^2-2mt+11-m\right)=0\,(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t^2-2mt+11-m=0\ (3)\end{array}\right.$$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có ba nghiệm dương phân biệt hay phương trình (3) có hai nghiệm dương phân biệt khác 1.

Phương trình (3) có hai nghiệm dương phân biệt khác 1 khi và chỉ khi

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta>0\\S>0\\P>0\\-3m+12\neq0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m>\dfrac{-1+3\sqrt{5}}{2}\\m<\dfrac{-1-3\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\\m>0\\m<11\\m\neq4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{-1+3\sqrt{5}}{2}<m<11\\m\neq4\end{array}\right.$$

Câu 10: Tìm tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l}x>1\\mx>8\end{array}\right.\ (1)$

$$\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)\Leftrightarrow2\log_2(x-1)=\log_2(mx-8)$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow\log_2(x-1)^2=\log_2(mx-8)\Leftrightarrow(x-1)^2=mx-8\Leftrightarrow x^2-(2+m)x+9=0\,(2)$$

Để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn điều kiện (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2+m)^2 - 36 = (m-4)(m+8) > 0 \\ x_1 + x_2 = m + 2 > 2 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = 8 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m < 8$$

.

Câu 11: Cho phương trình $\log_3^2(3x) - (m+2)\log_3 x + 2m - 5 = 0$ (m là tham số thực). Tìm tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[9;27]$.

Lời giải

Đặt $t = \log_3 x,$ do $x \in [9;27] \Rightarrow t \in [2;3].$

Khi đó phương trình đã cho trở thành $(t+1)^2 - (m+2)t + 2m - 5 = 0, t \in [2;3].$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4 = m(t-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = m - 2 \end{array} \right.$$

Để thỏa yêu cầu bài toán thì $2 < t_2 \le 3 \Leftrightarrow 4 < m \le 5.$

Vậy với $m \in (4;5]$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[9;27]$.

Câu 12: Tìm tham số m để bất phương trình $9\left(\log_3 \sqrt[3]{x}\right)^2 + \log_3 x + 2m \ge 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x \in (3;81)$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$

Ta có $9\left(\log_3 \sqrt[3]{x}\right)^2 + \log_3 x + 2m \ge 0 \Leftrightarrow (\log_3 x)^2 + \log_3 x + 2m \ge 0$ (1).

Đặt $t = \log_3 x$, khi $x \in (3;81) \Rightarrow t \in (1;4)$

Bất phương trình (1) có dạng: $t^2 + t + 2m \ge 0 \Leftrightarrow 2m \ge -t^2 - t$

Vì hàm số $f(t) = -t^2 - t$ luôn nghịch biến trên $(1;4)$ nên $2m \ge f(t),$ đúng với mọi $t \in (1;4)$

$\Leftrightarrow 2m \ge f(1) = -2 \Leftrightarrow m \ge -1$.

Vì $m \in \square$ và $m \in [-20;10] \Rightarrow m \in \{-1;0;1;2;...;10\}$.

Vậy có 12 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13: Biết phương trình $\log_2^2(x^2+1) - m\log_2(x^2+1) + 8 - m = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt. Tìm m

Lời giải

Đặt $t = \log_2(x^2+1), t \ge 0$.

Phương trình trở thành $t^2 - mt + 8 - m = 0 (*)$.

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương

$$\begin{cases} m^2-4(8-m)>0 \\ 8-m=0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=8$$

Khi đó .

Câu 14: Cho phương trình $\log_3^2 x-(2m+1)\log_3 x+m^2+m=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1<x_2$) thỏa mãn $(x_1+1)(x_2+3)=48$.

Lời giải

Đặt $t=\log_3 x$. Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2-(2m+1)t+m^2+m=0\ (*)$.

Nhận xét: Ứng với mỗi nghiệm t của phương trình $(*)$ có một nghiệm $x>0$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow \Delta=(2m+1)^2-4(m^2+m)=1>0$.

Vậy phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Khi đó $t_1=\dfrac{2m+1+1}{2}=m+1\Rightarrow x_1=3^{m+1}$; $t_2=\dfrac{2m+1-1}{2}=m\Rightarrow x_2=3^m$ với $x_1<x_2$.

Theo đề bài

$$(x_1+1)(x_2+3)=48\Leftrightarrow(3^m+1)(3^{m+1}+3)=48\Leftrightarrow 3.3^{2m}+6.3^m-45=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^m=3\\3^m=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow m=1$$

.

Kết luận: Số phần tử của tập S là 1.

Câu 15: Tìm tham số m để bất phương trình $\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)\left(3^x-m\right)<0$ có tập nghiệm chứa không quá 6 số nguyên

Lời giải

$$\begin{cases}\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)>0\\ \left(3^x-m\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{x+2}>3^{\frac{1}{2}}\\3^x<m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{3}{2}\\x<\log_3 m\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{3}{2}<x<\log_3 m$$

Trường hợp 1: .

Do yêu cầu bài toán bất phương trình có 6 nghiệm nguyên nên $\begin{cases}\log_3 m\le 5\\ m>0\end{cases}\Rightarrow m\le 243$.

$$\begin{cases}\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)<0\\ \left(3^{x}-m\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{x+2}<3^{\frac{1}{2}}\\ 3^{x}>m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<-\dfrac{3}{2}\\ x>\log_3 m\end{cases}\Leftrightarrow\log_3 m<x<-\dfrac{3}{2}$$

Trường hợp 2: .

Câu 16: Tìm tham số m để bất phương trình $1-\log_{\frac{1}{7}}\left(x^2+1\right)\geq\log_7\left(mx^2+4x+m\right)$ có nghiệm đúng với mọi x thuộc $\square$.

Lời giải

Điều kiện: $mx^2+4x+m>0,\forall x\in\square\quad(1)$

Nếu $m=0$ thì $(1)\Leftrightarrow 4x>0,\forall x\in\square$ không thỏa mãn.

Nếu $m\neq 0$ thì $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 4-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ \left[\begin{array}{l}m<-2\\ m>2\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow m>2$ **(*)**

Khi đó $1-\log_{\frac{1}{7}}\left(x^2+1\right)\geq\log_7\left(mx^2+4x+m\right)$, $\forall x\in\square$.

$\Leftrightarrow\log_7\left(7x^2+7\right)\geq\log_7\left(mx^2+4x+m\right)\Leftrightarrow 7x^2+7\geq mx^2+4x+m,\forall x\in\square$

$\Leftrightarrow(7-m)x^2-4x+7-m\geq 0,\forall x\in\square\quad(2)$

Nếu $m=7$ thì $(2)\Leftrightarrow -4x\geq 0,\forall x\in\square$ không thỏa mãn.

Nếu $m\neq 7$ thì $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}7-m>0\\ 4-(7-m)^2\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<7\\ -m^2+14m-45\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<7\\ \left[\begin{array}{l}m\leq 5\\ m\geq 9\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow m\leq 5$.

Kết hợp với $(*)$ ta có $2<m\leq 5$.

Câu 17: Tìm số nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10 của bất phương trình $3^{x+1}-2^{2x+1}-12^{\frac{x}{2}}<0$

Lời giải

Ta biến đổi bất phương trình:

$$3^{x+1}-2^{2x+1}-12^{\frac{x}{2}}<0\Leftrightarrow 3.3^x-2.4^x-12^{\frac{x}{2}}<0\Leftrightarrow 3.\frac{3^x}{4^x}-2-\frac{12^{\frac{x}{2}}}{4^x}<0\Leftrightarrow 3.\left(\frac{3}{4}\right)^x-2-\left(\frac{\sqrt{12}}{4}\right)^x<0$$

$$\Leftrightarrow 3.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x-2<0\quad(1)$$

Đặt $t=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$, điều kiện $t>0$.

Bất phương trình (1) trở thành: $3t^2-t-2<0\Leftrightarrow -\frac{2}{3}<t<1$.

Kết hợp với điều kiện ta được $0<t<1$. Suy ra $0<\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x<1\Leftrightarrow x>0.$

Do đó nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10 của bất phương trình là tập $\{1;2;3;...;8;9\}$.

Vậy số nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10 của bất phương trình là 9.

Câu 18: Tìm tham số m để bất phương trình: $1+\log_5\left(x^2+1\right)\geq \log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Điều kiện: $mx^2+4x+m>0\ (*)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Với $m=0$ thì $(*)$ trở thành $4x>0\Leftrightarrow x>0$ (không đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$) nên $m=0$ không thỏa mãn.

Với $m\neq 0$ thì $(*)$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}a=m>0\\ \Delta'=4-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m^2>4\end{cases}\Leftrightarrow m>2$.

Ta có: $1+\log_5\left(x^2+1\right)\geq \log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \log_5\left[5\left(x^2+1\right)\right]\geq \log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 5\left(x^2+1\right)\geq mx^2+4x+m\Leftrightarrow (5-m)x^2-4x+5-m\geq 0\ (**)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Với $m=5$ thì $(**)$ trở thành $-4x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 0$ (không đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$) nên $m=5$ không thỏa mãn.

Với $m\neq 5$ thì $(**)$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}a=5-m>0\\ \Delta'=4-(5-m)^2\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<5\\ (5-m)^2\geq 4\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m<5\\ \left[\begin{array}{l}5-m\geq 2\\ 5-m\leq -2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<5\\ \left[\begin{array}{l}m\leq 3\\ m\geq 7\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\leq 3$.

Kết hợp với điều kiện ta được: $2<m\leq 3$.

Câu 19: Năm 2020, một doanh nghiệp X có tổng doanh thu là 150 tỉ đồng. Dự kiến trong 10 năm tiếp theo, tổng doanh thu mỗi năm sẽ tăng thêm 12% so với năm liền trước. Theo dự kiến đó thì kể từ năm nào, tổng doanh thu của doanh nghiệp X vượt quá 360 tỉ đồng?

Gọi n là số năm doanh nghiệp X có mức doanh thu vượt quá 360 tỉ đồng kể từ năm 2020.

Lời giải

Ta có $n > \log_{1+12\%}\left(\frac{360}{150}\right) \Leftrightarrow n > 7,72 \Rightarrow n = 8$.

Câu 20: Bạn An gửi tiết kiệm một số tiền ban đầu là 1000000 đồng với lãi suất $0,58\%$ tháng (không kỳ hạn). Hỏi bạn An phải gửi ít nhất bao nhiêu tháng thì được cả vốn lẫn lãi bằng hoặc vượt quá 1300000 đồng?

Lời giải

Ta có : $1000000(1+0,58\%)^n \geq 1300000 \Leftrightarrow n \geq \log_{(1+0,58\%)}\frac{13}{10} \approx 45,37$.

Vậy bạn An phải gửi ít nhất 46 tháng.

Câu 21: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tích lãi cho năm tiếp theo. Hỏi người đó phải gửi ít nhất bao nhiêu năm để nhận được tổng số tiền cả vốn ban đầu và lãi nhiều hơn 140 triệu đồng nếu trong khoảng thời gian gửi người đó không tút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

Lời giải

Theo công thức lãi kép, ta có: $A = A_0(1+r\%)^n$

Trong đó A_0 là số tiền ban đầu gửi vào; $r\%$ là lãi suất của một kì hạn; n là số kì hạn.

Theo yêu cầu bài toán ta cần có: $140 < 100(1+7\%)^n \Leftrightarrow n > \log_{1,07} 0,14 \Leftrightarrow n > 4,97$

Vậy người đó phải gửi ít nhất là 5 năm.

Câu 22: Năm 2020, độ che phủ rừng của nước ta đạt $41,89\%$. Giả sử độ che phủ rừng mỗi năm tiếp theo đều tăng $1,6\%$ so với độ che phủ rừng của năm liền trước. Kể từ sau năm 2020, năm nào là năm đầu tiên nước ta có độ che phủ rừng trong năm đó đạt trên 58%?

Lời giải

Diện tích trồng rừng mới của năm $2020+1$ là $41,89\%(1+1,6\%)^1$.

Diện tích trồng rừng mới của năm $2020+2$ là $41,89\%(1+1,6\%)^2$.

….

Diện tích trồng rừng mới của năm $2020+n$ là $41,89\%(1+1,6\%)^n$.

$$41,89\%(1+1,6\%)^n > 58\% \Leftrightarrow 1,016^n > \frac{5800}{4189} \Leftrightarrow n > \log_{1,016}\left(\frac{5800}{4189}\right) \Leftrightarrow n > 20,49950974$$

Khi đó

Vậy vào năm $2020+21=2041$ là năm đầu tiên nước ta có độ che phủ rừng trong năm đó đạt trên 58%.

Câu 23: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất 6%/ năm. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả sử trong suốt thời gian gửi lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

Lời giải

Áp dụng công thức lãi kép $C=A(1+r)^n$ với $A=50$, $C>100$, $r=6\%=0,06$ ta được:

$$50(1+0,06)^n > 100 \Leftrightarrow 1,06^n > 2 \Leftrightarrow n > \log_{1,06} 2 \approx 11,90$$

.

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Phương trình mũ

Câu 1: Nghiệm của phương trình $3^{3x+5}=3^{1-x}$ là :

A. $x=-1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3^{3x+5}=3^{1-x} \Leftrightarrow 3x+5=1-x \Leftrightarrow 4x=-4 \Leftrightarrow x=-1$.

Câu 2: Nghiệm của phương trình $10^x=5$ là

A. $x=\frac{1}{2}$. **B.** $x=2$. **C.** $x=\log 5$. **D.** $x=\log_5 10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $10^x=5 \Leftrightarrow x=\log 5$.

Câu 3: Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x}=8$ là

A. 3 **B.** 2. **C.** -3 **D.** 0

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2^{x^2-2x}=8\Leftrightarrow 2^{x^2-2x}=2^3\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=3 \end{array}\right. \Rightarrow x_1.x_2=-3$

Câu 4: Tìm tập nghiệm S của phương trình $5^{2x^2-x}=5$.

A. $S=\{0;2\}$. **B.** $S=\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $S=\left\{1;-\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $S=\varnothing$.

Lời giải

Chọn C

$$5^{2x^2-x}=5\Leftrightarrow 2x^2-x=1\Leftrightarrow 2x^2-x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ta có .

$$S=\left\{1;-\frac{1}{2}\right\}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là : .

Câu 5: Tập nghiệm của phương trình $2^{x+1}=5$ có bao nhiêu phần tử?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^{x+1}=5\Leftrightarrow x=-1+\log_2 5$.

$$x=-1+\log_2 5$$

Vậy phương trình có nghiệm .

Câu 6: Số nghiệm thực của phương trình $3^{x^2-2}=81$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3^{x^2-2}=81\Leftrightarrow 3^{x^2-2}=3^4\Leftrightarrow x^2-2=4\Leftrightarrow x^2=6\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{6}$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm thực

Câu 7: Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x-3}=5^{x+1}$ là

A. $x=-1;x=2$. **B.** Vô nghiệm. **C.** $x=1;x=2$. **D.** $x=1;x=-2$.

Lời giải

Chọn A

$$5^{-x^2+2x+3}=5^{x+1}\Leftrightarrow -x^2+x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2.\end{array}\right.$$

Phương trình đã cho tương đương

Vậy phương trình có nghiệm $x=-1;x=2$.

Câu 8: Nghiệm của phương trình $5^{x-4}=125$ là

A. $x=4$. **B.** $x=5$. **C.** $x=7$. **D.** $x=6$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $5^{x-4}=125\Leftrightarrow 5^{x-4}=5^3\Leftrightarrow x-4=3\Leftrightarrow x=7$.

Câu 9: Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-4}=3^{x-2}$ là

A. $\log_2 3$. **B.** $2\log_2 3-4$. **C.** $\log_3 2$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$$2^{x^2-4}=3^{x-2}\Leftrightarrow x^2-4=(x-2)\log_2 3\Leftrightarrow x^2-x\log_2 3+2\log_2 3-4=0$$

Ta có

Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt và tích các nghiệm bằng $2\log_2 3-4$.

Câu 10: Cho phương trình $2^{x^2}.3^{x+1}=2$. Tổng các nghiệm của phương trình bằng

A. $\log_3 2$. **B.** $\log_2\frac{3}{2}$. **C.** $-\log_2 3$. **D.** $\log_2 3$.

Lời giải

Chọn C

$$2^{x^2}.3^{x+1}=2\Leftrightarrow \log_2\left(2^{x^2}.3^{x+1}\right)=1$$

Ta có

$$\Leftrightarrow x^2+(x+1)\log_2 3-1=0\Leftrightarrow x^2+x.\log_2 3+\log_2 3-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-\log_2 3+1\end{array}\right.$$

.

Tổng các nghiệm của phương trình bằng $-1-\log_2 3+1=-\log_2 3$.

Câu 11: Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-x+2}=4$ là

A. $S=\{-1;0\}$. **B.** $S=\{-1\}$. **C.** $S=\{0\}$. **D.** $S=\{0;1\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^{x^2-x+2}=4\Leftrightarrow 2^{x^2-x+2}=2^2\Leftrightarrow x^2-x+2=2\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-x+2}=4$ là $S=\{0;1\}$.

Câu 12: Tổng bình phương tất cả các nghiệm của phương trình $3^{x^2-3x-\frac{1}{3}}=9^{x+\frac{4}{3}}$

A. 31. **B.** 19. **C.** 35. **D.** 22.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3^{x^2-3x-\frac{1}{3}}=9^{x+\frac{4}{3}}\Leftrightarrow x^2-3x-\frac{1}{3}=2x+\frac{8}{3}\Leftrightarrow x^2-5x-3=0$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn: $x_1+x_2=5;x_1.x_2=-3$

Suy ra: $x_1^2+x_2^2=31$

Câu 13: Tổng các nghiệm thực của phương trình $2^{x^2-3x+4}=4^{2x-3}$ bằng

A. 6. **B.** 7. **C.** -7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{x^2-3x+4}=4^{2x-3}\Leftrightarrow 2^{x^2-3x+4}=2^{2(2x-3)}\Leftrightarrow x^2-3x+4=4x-6$

$\Leftrightarrow x^2-7x+10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=2 \end{array}\right.$. Tổng các nghiệm của phương trình là 7.

Câu 14: Số nghiệm phương trình $2^{2x^2-7x+5}=1$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $2^{2x^2-7x+5}=1\Leftrightarrow 2x^2-7x+5=\log_2 1\Leftrightarrow 2x^2-7x+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{5}{2} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 15: Phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x^3}=4^{x^2-2}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x^3}=4^{x^2-2}\Leftrightarrow 2^{x^3-x^2}=2^{2x^2-4}\Leftrightarrow x^3-x^2=2x^2-4\Leftrightarrow x^3-3x^2+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Câu 16: Số nghiệm thực của phương trình $9^{x^2+4x+3}=1$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $9^{x^2+4x+3}=1\Leftrightarrow x^2+4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-3\end{array}\right.$.

Câu 17: Số nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x}=\frac{9}{4}$ là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x}=\frac{9}{4}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\Leftrightarrow x^2-3x=-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Câu 18: Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x^2-3x}=\frac{1}{9}$ bằng

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** -2

Lời giải

Chọn A

Ta có $3^{x^2-3x}=\frac{1}{9}=3^{-2}\Leftrightarrow x^2-3x=-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

Vậy tổng các nghiệm là 3.

Câu 19: Cho phương trình $4^x+2^{x+1}-3=0$. Khi đặt $t=2^x$ ta được phương trình nào sau đây?

A. $t^2+2t-3=0$. **B.** $2t^2-3t=0$. **C.** $t^2+t-3=0$. **D.** $4t-3=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0 \Leftrightarrow 4^x + 2.2^x - 3 = 0$. Đặt $t = 2^x$ ta được phương trình $t^2 + 2t - 3 = 0$.

Câu 20: Số nghiệm thực của phương trình: $1 + \ln(x+3) - \ln(x-1)^2 = 0$ là

A. 2. **B.** 1 **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x+3>0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Ta có: $1 + \ln(x+3) - \ln(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x-1)^2 = \ln(x+3) + 1$

$$\Leftrightarrow \ln(x-1)^2 = \ln e(x+3) \Leftrightarrow (x-1)^2 = ex + 3e \Leftrightarrow x^2 - (2+e)x + 1 - 3e = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{e+2-\sqrt{e^2+16e}}{2}(t/m) \\ x = \dfrac{e+2+\sqrt{e^2+16e}}{2}(t/m) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Câu 21: Số nghiệm của phương trình $3^{2x^2-6x+2} - 4.3^{x^2-3x+2} + 27 = 0$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $3^{2x^2-6x+2} - 4.3^{x^2-3x+2} + 27 = 0 \Leftrightarrow 9.3^{2(x^2-3x)} - 36.3^{x^2-3x} + 27 = 0$

Đặt $3^{x^2-3x} = t, t > 0$, phương trình (1) trở thành: $9t^2 - 36t + 27 = 0 \Leftrightarrow t = 1; t = 3$

Với $t = 1 \Rightarrow 3^{x^2-3x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 3$

Với $t = 3 \Rightarrow 3^{x^2-3x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 22: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{2x+1} - 5.2^x + 2 = 0$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{2x+1}-5.2^x+2=0 \Leftrightarrow 2.2^{2x}-5.2^x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=2 \\ 2^x=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng 0.

Câu 23: Cho phương trình $4.4^x-9.2^{x+1}+8=0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên. Khi đó tích x_1, x_2 bằng:

A. 2. **B.** -2. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4.4^x-9.2^{x+1}+8=0 \Leftrightarrow 4.\left(2^x\right)-18.2^x+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=4 \\ 2^x=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Khi đó $x_1.x_2=-2$.

Câu 24: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $4^{x+y+1}=3^{x^2+y^2}$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4^{x+y+1}=3^{x^2+y^2} \Leftrightarrow (x+y+1)\log_3 4=x^2+y^2 \Leftrightarrow y^2-2(\log_3 2)y+x^2-2(x+1)\log_3 2=0$.

Để tồn tại số thực y khi và chỉ khi $\Delta'=(\log_3 2)^2+2(x+1)\log_3 2-x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow -x^2+2x\log_3 2+(\log_3 2)^2+2\log_3 2 \geq 0 \Leftrightarrow -0,8036 \leq x \leq 2,0655$.

Do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0;1;2\}$.

Câu 25: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $4^{3-2x^2}=5^{x+1}$ gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $-1,07$. **B.** $-0,92$. **C.** $0,92$. **D.** $1,07$.

Lời giải

Chọn B

$4^{3-2x^2}=5^{x+1}\Leftrightarrow 3-2x^2=(x+1)\log_4 5\Leftrightarrow 2x^2+\log_4 5.x+\log_4 5-3=0$

Ta có .

$\frac{\log_4 5-3}{2}\approx -0,92$

Nên tích các nghiệm bằng .

Câu 26: Biết phương trình $9^x-3.3^x-4=0$ có nghiệm $x=\log_a b$ (a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 10), giá trị của $a-b$ bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

$9^x-3.3^x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=-1(\text{loai})\\3^x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\log_3 4$

Ta có . Suy ra . Vậy $a=3;b=4$ $a-b=-1$

Câu 27: Biết phương trình $\log_5^2 x-m\log_5 x-7=0$ (m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2. Tính tích $x_1.x_2$

A. $x_1.x_2=5^{-m}$. **B.** $x_1.x_2=-7$. **C.** $x_1.x_2=5^{-7}$. **D.** $x_1.x_2=5^m$.

Lời giải

Chọn D

Với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Ta có $\log_5(x_1.x_2)=\log_5 x_1+\log_5 x_2=m\Rightarrow x_1.x_2=5^m$.

Câu 28: Phương trình $9^x-3.3^x+2=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$. Giá trị $2x_1+3x_2$ bằng

A. $4\log_2 3$. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $3\log_3 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $9^x-3.3^x+2=0\Leftrightarrow\left(3^x\right)^2-3.3^x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=1\\3^x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\log_3 2\end{array}\right.$.

Vì $x_1<x_2$ nên $x_1=0, x_2=\log_3 2$.

Khi đó: $2x_1+3x_2=2.0+3.\log_3 2=3\log_3 2$.

Câu 29: Tổng tất các các nghiệm của phương trình $9^x-5.6^x+6.4^x=0$ bằng

A. $\log_{\frac{3}{2}} 2$. **B.** $\log_{\frac{3}{2}} 6$. **C.** $\log_{\frac{3}{2}} 3$. **D.** $\log_{\frac{2}{3}} 6$.

Lời giải

Chọn B

$$9^x - 5.6^x + 6.4^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5.\left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 = 0$$

Xét phương trình: .

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x, t > 0$; khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = 3$.

$$\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \log_{\frac{3}{2}} 2 \\ t = \log_{\frac{3}{2}} 3 \end{array}\right.$$

Ta có:

$$\log_{\frac{3}{2}} 2 + \log_{\frac{3}{2}} 3 = \log_{\frac{3}{2}} (2.3) = \log_{\frac{3}{2}} 6$$

Do đó tổng các nghiệm: .

Câu 30: Tổng các nghiệm của phương trình $4.9^x - 13.6^x + 9.4^x = 0$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$$4.9^x - 13.6^x + 9.4^x = 0 \Leftrightarrow 4.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13\left(\frac{3}{2}\right)^x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Ta có .

Tổng các nghiệm của phương trình $4.9^x - 13.6^x + 9.4^x = 0$ bằng $0 + 2 = 2$.

Câu 31: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x} - 2.3^{x+2} + 27 = 0$ bằng

A. 3. **B.** 18. **C.** 27. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

$$3^{2x} - 2.3^{x+2} + 27 = 0 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - 18.3^x + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x_1} = 9 + 3\sqrt{6} \\ 3^{x_2} = 9 - 3\sqrt{6} \end{array}\right.$$

Ta có: .

$$3^{x_1}.3^{x_2} = \left(9 + 3\sqrt{6}\right)\left(9 - 3\sqrt{6}\right) \Leftrightarrow 3^{x_1 + x_2} = 27 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 3$$

Ta có .

Câu 32: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $100^x - 7.10^x + 10 = 0.$

A. 7. **B.** $\log 7$. **C.** 1. **D.** $\ln 7$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $100^x - 7.10^x + 10 = 0 \Leftrightarrow \left(10^x - 2\right)\left(10^x - 5\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10^x - 2 = 0 \\ 10^x - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log 2 \\ x = \log 5 \end{array}\right.$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là: $\log 2 + \log 5 = \log 10 = 1$.

Câu 33: Biết phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2(2x) - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Giá trị của $x_1.x_2$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** -3. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$.

Phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2(2x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 = -1 \\ \log_2 x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 8 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow x_1.x_2 = 4$.

Câu 34: Giả sử phương trình $25^x + 15^x = 6.9^x$ có một nghiệm duy nhất được viết dưới dạng $\frac{a}{\log_b c - \log_b d}$ với a là số nguyên dương và b, c, d là các số nguyên tố. Tính $S = a^2 + b + c + d$.

A. $S = 14$. **B.** $S = 11$. **C.** $S = 19$. **D.** $S = 12$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $25^x + 15^x = 6.9^x \Leftrightarrow 5^{2x} + (3.5)^x - 6.3^{2x} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{5}{3}\right)^x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{5}{3}\right)^x = 2 \\ \left(\frac{5}{3}\right)^x = -3 \quad (ptvn) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \log_{\frac{5}{3}} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 \frac{5}{3}} = \frac{1}{\log_2 5 - \log_2 3}$.

Từ đây suy ra $a=1,b=2,c=5,d=3$. Vậy $S=1^2+2+5+3=11$.

Câu 35: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(9^x-244.3^x+243\right).\sqrt{8-\log_2(x+2)}\ge 0$ có tất cả bao nhiêu số nguyên?

A. 252. **B.** 250. **C.** 249. **D.** 254.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases}x+2>0\\8-\log_2(x+2)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-2\\\log_2(x+2)\le 8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-2\\x+2\le 256\end{cases}\Leftrightarrow -2<x\le 254$.

Trường hợp 1: $\log_2(x+2)=8\Leftrightarrow x+2=256\Leftrightarrow x=254$ (thoả mãn).

Trường hợp 2: $8-\log_2(x+2)>0\Leftrightarrow -2<x<254$.

Ta có $\left(9^x-244.3^x+243\right).\sqrt{8-\log_2(x+2)}\ge 0\Leftrightarrow 9^x-244.3^x+243\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x\ge 243\\3^x\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 5\\x\le 0\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $-2<x<254$ suy ra nghiệm của bất phương trình là $\left[\begin{array}{l}5\le x<254\\-2<x\le 0\end{array}\right.$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=(-2;0]\cup[5;254]$.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình có 252 số nguyên.

Câu 36: Phương trình $4^x-3.2^{x+1}+m=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=2$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(-5;0)$. **D.** $(-7;-5)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4^x-3.2^{x+1}+m=0\Leftrightarrow 2^{2x}-6.2^x+m=0$.

Đặt $t=2^x\,(t>0)\Rightarrow t^2-6t+m=0\ (*)$

$(*)$ có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'\ge 0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9-m\ge 0\\6>0\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m\le 9$

Ta có: $t_1.t_2 = 2^{x_1+x_2} = 2^2 = 4 = m$

Câu 37: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - (m+1).2^x + 2m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 + x_1 + x_2 \le 2$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2^x, t > 0$.

$$t^2 - (m+1)t + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = m-1 \end{array}\right.$$

Phương trình có dạng

Để phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt thì $\begin{cases} m-1 > 0 \\ m-1 \ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \ne 3 \end{cases}$.

Khi đó $x_1 = 1; x_2 = \log_2(m-1)$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + x_1 + x_2 \le 2 \Leftrightarrow 1.\log_2(m-2) + 1 + \log_2(m-2) \le 2 \Leftrightarrow \log_2(m-2) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \le 2 + \sqrt{2}$$

.

Kết hợp ta được $1 < m \le 2+\sqrt{2}; m \ne 3$; $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 2$.

Câu 38: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $9^x - 2m.3^x + m^2 - 8m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 2$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 9. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $9^x - 2m.3^x + m^2 - 8m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 2$ khi

$$\begin{cases} m^2 - 1.(m^2 - 8m) > 0 \\ 2m > 0 \\ m^2 - 8m > 0 \\ m^2 - 8m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 9 \end{array}\right. \Rightarrow S = \{-1; 9\}$$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 8.

Câu 39: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $9^x - 2m.3^x + m^2 - 8m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2$. Tổng các giá trị của S bằng.

A. 9. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $9^x - 2m.3^x + m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - 2m.3^x + m^2 - 8m = 0 (*)$

Đặt $3^x = t$ $(*) \Leftrightarrow t^2 - 2mt + m^2 - 8m = 0$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$.

$\Leftrightarrow m^2 - m^2 + 8m > 0 \Leftrightarrow 8m > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Theo vi-ét ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1.t_2 = m^2 - 8m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x_1} + 3^{x_2} = 2m \\ 3^{x_1}.3^{x_2} = m^2 - 8m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x_1} + 3^{x_2} = 2m \\ 3^{x_1 + x_2} = m^2 - 8m \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x_1} + 3^{x_2} = 2m \\ x_1 + x_2 = \log_3\left(m^2 - 8m\right) \end{cases}$.

Mà $x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow \log_3\left(m^2 - 8m\right) = 2$.

$\Leftrightarrow m^2 - 8m = 9 \Leftrightarrow m^2 - 8m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 9 \\ m = -1 \end{bmatrix} \Rightarrow S = 9$. Vì $m > 0$

Câu 40: Cho phương trình $4^x - (m+3)2^x + 8 = 0$ (m là tham số). Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 8$ thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(29;30)$. **B.** $(27;28)$. **C.** $(30;31)$. **D.** $(28;29)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $t = 2^x$.

Phương trình có dạng: $t^2-(m+3)t+8=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ t_1+t_2>0\\ t_1t_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2+6m-23>0\\ m+3>0\\ 8>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-3\\ \left[\begin{array}{l}m>4\sqrt{2}-3\\ m<-4\sqrt{2}-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m>4\sqrt{2}-3.$$

Ta có: $2^{x_1}=t_1\Rightarrow x_1=\log_2 t_1\quad 2^{x_2}=t_2\Rightarrow x_2=\log_2 t_2$;

Suy ra $x_1+x_2=\log_2 t_1+\log_2 t_2=\log_2(t_1t_2)=\log_2 8=3.$

Ta có: $(x_1+3)(x_2+3)=8\Leftrightarrow x_1.x_2+3(x_1+x_2)+9=8\Leftrightarrow x_1.x_2=-10.$

$$\left[\begin{array}{l}x_1=-2\\ x_2=5\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=\dfrac{1}{4}\\ t_2=32\end{array}\right.$$

Suy ra

$t_1+t_2=m+3\Rightarrow m+3=32,25\Leftrightarrow m=29,25$

.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-21;21]$ để hai phương trình $4^{x+1}+2^{x+4}=2^{x+2}+16$ và $|m-9|.3^{x-2}+m.9^{x-1}=1$ là hai phương trình tương đương?

A. 32. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 31.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=3^x>0$, phương trình hai trở thành: $mt^2+|m-9|t-9=0\ (3)$.

Ta có: $4^{x+1}+2^{x+4}=2^{x+2}+16\Leftrightarrow 2^{2(x+1)}+6.2^{x+1}-16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{x+1}=2\Rightarrow x=0\\ 2^{x+1}=-8\ (ptvn)\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Để hai phương trình tương đương thì thỏa đồng thời 2 điều kiện sau:

Với $x=0$ cũng là nghiệm phương trình thứ hai $\Rightarrow|m-9|.3^{0-2}+m.9^{0-1}=1\Leftrightarrow|m-9|=9-m$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9-m\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}m-9=9-m\Rightarrow m\le 9\\ m-9=m-9\end{array}\right.\end{cases}$$

.

Phương trình thứ hai có duy nhất 1 nghiệm $x=0$ thì $pt(3)$ có thêm 1 nghiệm $t\le 0$

$\Leftrightarrow -9.m\le 0\Leftrightarrow m\ge 0$.

Trường hợp 2: Để hai phương trình tương đương thì phương trình (3) có nghiệm kép $t=1$

$$\Rightarrow -\frac{|m-9|}{2m}=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m=-9\Rightarrow m=-9 \\ m=6 \end{array}\right.$$

.

Kết hợp với điều kiện $m\in[-21;21]$ và $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-9;0;1;2;.....;9\}$.

Câu 42: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x-m.5^{x+1}+7m^2-7=0$ có hai nghiệm phân biệt. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 2. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $5^x=t(t>0)$ thì phương trình trở thành: $t^2-5mt+7m^2-7=0\ (*)$

Để phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm thì $t_1>t_2>0$

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta>0\\ S>0\\ P>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}25m^2-4\left(7m^2-7\right)>0\\ 5m>0\\ 7m^2-7>0\end{array}\right.$$

Khi đó:

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-3m^2+28>0\\ m>0\\ m>1\vee m<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-\frac{2\sqrt{21}}{3}<m<\frac{2\sqrt{21}}{3}\\ m>0\\ \left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-1\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow 1<m<\frac{2\sqrt{21}}{3}$$

Vậy tập hợp S có hai phần tử là: 2 và 3.

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^{\sqrt{x^2-3x+m}}+2.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x}<3^{2x-3}$ có nghiệm?

A. 9. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $\sqrt{x^2-3x+m}=a\ \ (a\ge 0).$

Khi đó: $3^{2a}+2.3^{a-2+x}<3^{2x-3}\Leftrightarrow 3^{2a-2x}+\frac{2}{9}.3^{a-x}-\frac{1}{27}<0\Leftrightarrow\left(3^{a-x}+\frac{1}{9}\right)^2<\left(\frac{2}{9}\right)^2$

$\Leftrightarrow 3^{a-x}+\frac{1}{9}<\frac{2}{9}\Leftrightarrow 3^{a-x}<3^{-2}$

Nên: $\begin{cases}a\ge 0\\ a<x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x+m\ge 0\\ \sqrt{x^2-3x+m}<x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x+m\ge 0\\ x<4-m\\ x>2\end{cases}\Leftrightarrow 4-m>2\Leftrightarrow m<2$

Do m nguyên dương nên $m=1.$

Câu 44: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x-m.4^{x+1}+5m^2-45=0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử là số chẵn?

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $16^x-m.4^{x+1}+5m^2-45=0\Leftrightarrow(4^x)^2-4m.4^x+5m^2-45=0$

Đặt $4^x=t\ \ (t>0)$ khi đó phương trình $(*)$ trở thành: $t^2-4mt+5m^2-45=0$

Khi đó phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=4m^2-(5m^2-45)>0\\ t_1+t_2>0\\ t_1.t_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}45-m^2>0\\ 4m>0\\ 5m^2-45>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\sqrt{5}<m<3\sqrt{5}\\ m>0\\ \left[\begin{array}{l}m>3\\ m<-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 3<m<3\sqrt{5}$$

Mà $m\in\mathbf{Z}\Rightarrow m\in\{4;5;6\}$ nên có 2 giá trị m chẵn thỏa mãn.

2. Phương trình logarit

Câu 45: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_{2023}\left(x^2+2022x\right)=1$ bằng

A. -2022. **B.** -2023. **C.** 2023. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đã cho tương đương với $x^2+2022x=2023\Leftrightarrow x^2+2022x-2023=0$ (1).

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt nên theo Vi-et suy ra tổng các nghiệm là $x_1+x_2=-2022$.

Câu 46: Nghiệm của phương trình $\log_2(2x-6)=3$ là

A. $x=6$ **B.** $x=9$ **C.** $x=8$ **D.** $x=7$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_2(2x-6)=3\Leftrightarrow 2x-6=2^3\Leftrightarrow x=7$

Câu 47: Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1)=1$ là

A. $x=3$. **B.** $x=-1$ **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_2(x-1)=1\Leftrightarrow x-1=2\Leftrightarrow x=3$.

Câu 48: Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1)=3$ là

A. $x=10$. **B.** $x=9$. **C.** $x=7$. **D.** $x=8$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2(x-1)=3\Leftrightarrow x-1=2^3\Leftrightarrow x=9$.

Câu 49: Tập nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2+1\right)=2$ là

A. $S=\left\{\sqrt{3}\right\}$. **B.** $S=\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$. **C.** $S=\{-1;1\}$. **D.** $S=\{1\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_2\left(x^2+1\right)=2\Leftrightarrow x^2+1=2^2\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$.

Câu 50: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2x-3\log_2x+2=0$ bằng

A. 8 **B.** 6 **C.** 16 **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 1\\ \log_2 x = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2\\ x = 4\end{array}\right.$

Suy ra $x_1.x_2 = 8$

Câu 51: Tập nghiệm của phương trình $\log_2(1-x) = 2$ là

A. $x = -4$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = -3$. **D.** $x = 5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_2(1-x) = 2 \Leftrightarrow 1 - x = 2^2 \Leftrightarrow x = -3$.

Câu 52: Tập nghiệm của phương trình $\ln(x+4) - \ln(2x-3) = 0$ là

A. $\left\{7; \frac{3}{2}\right\}$. **B.** $\{7\}$. **C.** $\left\{-4; \frac{3}{2}\right\}$. **D.** $\varnothing$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > \frac{3}{2}$.

Ta có: $\ln(x+4) - \ln(2x-3) = 0 \Leftrightarrow x + 4 = 2x - 3 \Leftrightarrow x = 7(tm)$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{7\}$.

Câu 53: Tập nghiệm S của phương trình $\log_2\left(x^2 + 3x\right) = 2$ là

A. $S = \{1; -4\}$. **B.** $S = \{-1; 4\}$. **C.** $S = \{1\}$. **D.** $S = \{4\}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}x > 0\\ x < -3\end{array}\right.$.

Ta có: $x^2+3x=2^2 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(TM) \\ x=-4(TM) \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{1;-4\}$.

Câu 54: Phương trình $\log(4x+1)=\log(2x+5)$ có nghiệm là

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log(4x+1)=\log(2x+5) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5>0 \\ 4x+1=2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{5}{2} \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Câu 55: Tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-3)=\log_2(2x-1)$ là

A. $S=\{0\}$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\{-2\}$. **D.** $S=\varnothing$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x>3$

Ta có: $\log_2(x-3)=\log_2(2x-1) \Leftrightarrow x-3=2x-1 \Leftrightarrow x=-2(\text{KTMĐK})$. Vậy $S=\varnothing$.

Câu 56: Nghiệm của phương trình $\log_2(2x)=3$ là?

A. $x=3$. **B.** $x=4$. **C.** $x=\dfrac{9}{2}$. **D.** $x=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $2x>0 \Leftrightarrow x>0$. Ta có: $\log_2(2x)=3 \Leftrightarrow 2x=2^3 \Leftrightarrow x=4(tm)$.

Câu 57: Nghiệm của phương trình $\log_4(x-1)=3$ là

A. $x=66$. **B.** $x=68$. **C.** $x=65$. **D.** $x=63$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_4(x-1)=3 \Leftrightarrow x-1=4^3 \Leftrightarrow x=65$.

Câu 58: Nghiệm của phương trình $\log_2(x+2)-\log_2 x=2$ là

A. $x=\frac{1}{2}$. **B.** $x=\frac{3}{2}$. **C.** $x=\frac{2}{3}$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x+2>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$.

Ta có $\log_2(x+2)-\log_2 x=2 \Leftrightarrow \log_2(x+2)=\log_2 4+\log_2 x$

$\Leftrightarrow \log_2(x+2)=\log_2 4x \Leftrightarrow x+2=4x \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ (thỏa mãn).

Nghiệm của phương trình $\log_2(x+2)-\log_2 x=2$ là $x=\frac{2}{3}$.

Câu 59: Biết phương trình $2\log_3 x+2\log_x 3=5$ có ai nghiệm thực phân biệt $x_1<x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T=6x_1^2-x_2+1$.

A. $T=16$. **B.** $T=10$. **C.** $T=8$. **D.** $T=12$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $0<x\neq 1$.

Phương trình $2\log_3 x+2\log_x 3=5 \Leftrightarrow 2\log_3 x+2\frac{1}{\log_3 x}=5$

$\Leftrightarrow 2\log_3^2 x-5\log_3 x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x=\frac{1}{2} \\ \log_3 x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\sqrt{3} \\ x_2=9 \end{array}\right. \Rightarrow T=6x_1^2-x_2+1=10$.

Câu 60: Tổng các nghiệm của phương trình $\log^2 x-\log x-2=0$ bằng

A. $\frac{1001}{100}$. **B.** 101. **C.** $\frac{1001}{10}$. **D.** 1

Lời giải

Chọn C

$$\log^2 x-\log x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log x=2\\ \log x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=100\\ x_2=\dfrac{1}{10}\end{array}\right.\Rightarrow x_1+x_2=\dfrac{1001}{10}$$

Ta có .

Câu 61: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x-2\log_3 x-7=0$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 9. **D.** -7.

Lời giải

Chọn C

$$\log_3^2 x-2\log_3 x-7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=1+2\sqrt{2}\\ \log_3 x=1-2\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3^{1+2\sqrt{2}}\\ x=3^{1-2\sqrt{2}}\end{array}\right.$$

Ta có .

Vậy tích các nghiệm 9.

Câu 62: Tích các nghiệm của phương trình $6\log_4^2 x-\log_4 x^3+\dfrac{1}{5}=0$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** $\sqrt[3]{2}$. **D.** $\dfrac{1}{30}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

Đặt $\log_4 x=t$ thì phương trình trở thành: $6t^2-3t+\dfrac{1}{5}=0,\quad \Delta=9-\dfrac{24}{5}>0$ do nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt, nên phương trình ban đầu luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có: $x_1.x_2=4^{t_1}.4^{t_2}=4^{t_1+t_2}=4^{0,5}=2.$

Vậy tích các nghiệm của phương trình ban đầu bằng $2.$

Câu 63: Biết phương trình $\log_9^2 x+\log_3\dfrac{x}{27}=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 với $x_1<x_2$. Hiệu x_2-x_1 bằng

A. $\dfrac{80}{3}$. **B.** $\dfrac{6560}{729}$. **C.** $\dfrac{80}{27}$. **D.** $\dfrac{6560}{27}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

$$\log_9^2 x+\log_3\frac{x}{27}=0\Leftrightarrow\frac{1}{4}\log_3^2 x+\log_3 x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=2\\ \log_3 x=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=9\\ x=\frac{1}{729}\end{array}\right.$$

Ta có .

$$x_2-x_1=9-\frac{1}{729}=\frac{6560}{729}$$

Ta có .

Câu 64: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3\left(9^x-5.3^x+7\right)=x+1$ bằng

A. $\log_7 3$. **B.** $1+\log_3 7$. **C.** $\log_3 7$. **D.** $1+\log_3 7$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\square$

$$\log_3\left(9^x-5.3^x+7\right)=x+1\Leftrightarrow 9^x-5.3^x+7=3^{x+1}$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow\left(3^x\right)^2-5.3^x+7-3.3^x=0\Leftrightarrow\left(3^x\right)^2-8.3^x+7=0$$

Đặt $t=3^x\ (t>0)$ phương trình trở thành $t_1.t_2=3^{x_1+x_2}\Leftrightarrow 7=3^{x_1+x_2}\Rightarrow x_1+x_2=\log_3 7$

Câu 65: Phương trình $\left(x^2-4x+3\right)\log_{2023}\left(x^2-4\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x^2-4>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\ x<-2\end{array}\right.$.

Phương trình tương đương $\left[\begin{array}{l}x^2-4x+3=0\\ \log_{2023}\left(x^2-4\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\\ x=\sqrt{5}\\ x=-\sqrt{5}\end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện, ta nhận $x=3, x=\pm\sqrt{5}$ nên phương trình đã cho có ba nghiệm.

Vậy $S=\varnothing$.

Câu 66: Số nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2+4x\right)+\log_{\frac{1}{3}}(3x+6)=0$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} x^2+4x>0 \\ 3x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>0 \end{array}\right. \\ x>-2 \end{cases} \Rightarrow x>0$$

Điều kiện: .

$$\log_3\left(x^2+4x\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(3x+6\right)=0 \Leftrightarrow \log_3\left(x^2+4x\right)=\log_3\left(3x+6\right) \Leftrightarrow x^2+4x=3x+6$$

Ta có

$$\Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

.

Kết hợp với điều kiện, phương trình có nghiệm $x=2$.

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất.

Câu 67: Biết rằng phương trình $\log_3\left(x^2-2021x\right)=2022$ có 2 nghiệm x_1, x_2. Tính tổng x_1+x_2.

A. $x_1+x_2=-3^{2022}$. **B.** $x_1+x_2=-2022^3$.

C. $x_1+x_2=2021$. **D.** $x_1+x_2=-2021$.

Lời giải

$$\log_3\left(x^2-2021x\right)=2022 \Leftrightarrow x^2-2021x=3^{2022} \Leftrightarrow x^2-2021x-3^{2022}=0$$

Phương trình: luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 nên theo định lí Viét ta có: $x_1+x_2=2021$.

Câu 68: Số nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_2(x-3)=2$?

A. 0. **B.** 3 **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} x>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>3$$

Điều kiện

$$\log_2 x+\log_2(x-3)=2 \Leftrightarrow \log_2\left[x(x-3)\right]=2 \Leftrightarrow x^2-3x=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1(l) \\ x=4(tm) \end{array}\right.$$

Ta có: .

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 69: Số nghiệm của phương trình $\log_3(x+2)+\log_3(x-2)=\log_3 5$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

$\log_3(x+2)+\log_3(x-2)=\log_3 5\ \ (*)$

Ta có:

$\begin{cases} x+2>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x>2$

Điều kiện .

$(*) \Rightarrow \log_3\left[(x+2)(x-2)\right]=\log_3 5 \Leftrightarrow \log_3\left(x^2-4\right)=\log_3 5 \Leftrightarrow x^2-4=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.$

.

Kết hợp điều kiện suy ra $x=3$.

Câu 70: Số nghiệm thực của phương trình $3\log_3(x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3=3$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x-1>0 \\ x-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>5 (*)$.

$3\log_3(x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3=3 \Leftrightarrow \log_3(x-1)+\log_3(x-5)=1$

Với điều kiện (*) phương trình

$\Leftrightarrow \log_3(x-1)(x-5)=1 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)=3 \Leftrightarrow x^2-6x+2=0 \Rightarrow x=3\pm\sqrt{7}$

.

Vậy số nghiệm thực của phương trình đã cho là 2.

Câu 71: Nghiệm của phương trình $\log_2(x+2)-\log_2 x=2$ là

A. $x=\frac{1}{2}$. **B.** $x=\frac{3}{2}$. **C.** $x=\frac{2}{3}$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x+2>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$.

Ta có $\log_2(x+2)-\log_2 x=2 \Leftrightarrow \log_2(x+2)=\log_2 4+\log_2 x$

$\Leftrightarrow \log_2(x+2)=\log_2 4x \Leftrightarrow x+2=4x \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ (thỏa mãn).

Nghiệm của phương trình $\log_2(x+2)-\log_2 x=2$ là $x=\dfrac{2}{3}$.

Câu 72: Cho phương trình $\log_2(2x-1)^2=2\log_2(x-2)$. Số nghiệm thực của phương trình là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}(2x-1)^2>0\\x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{1}{2}\\x>2\end{cases}\Leftrightarrow x>2$.

$\log_2(2x-1)^2=2\log_2(x-2)\Leftrightarrow 2\log_2(2x-1)=2\log_2(x-2)\Leftrightarrow\log_2(2x-1)=\log_2(x-2)$

$\Leftrightarrow 2x-1=x-2\Leftrightarrow x=-1$ (không thỏa mãn).

Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu 73: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(x^2-4x-1)=\log_{\frac{1}{3}}8x-\log_{\frac{1}{3}}4x$ bằng

A. 5 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$, $x^2-4x-1>0$.

Phương trình $\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x^2-4x-1}=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{8x}{4x}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4x-1}=2\Leftrightarrow x^2-4x-5=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\,(ktm)\\x=5\,(tm)\end{array}\right.$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 5.

Câu 74: Số nghiệm của phương trình $\log_3(x-1)^2+\log_{\sqrt{3}}(2x-1)=2$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>-\dfrac{1}{2}, x\neq 1$

$\log_2(x-1)^2+\log_{\sqrt{2}}(2x+1)=2\Leftrightarrow\log_2(x-1)^2+\log_2(2x+1)^2=\log_2 4$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \log_2\left[(x-1)(2x+1)\right]^2 = \log_2 4 \Leftrightarrow \left(2x^2-x-1\right)^2 = 4$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-x-1=-2 \\ 2x^2-x-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-x+1=0\,(VN) \\ 2x^2-x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Thử lại ta có một nghiệm $x=\dfrac{3}{2}$ thỏa mãn.

Câu 75: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\log_8(x+2)^3+\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-4x+2\right)=0$. Tổng các phần tử của S là

A. 2. **B.** -5. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2>0 \\ x^2-4x+2>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>-2 \\ \left[\begin{array}{l} x>2+\sqrt{2} \\ x<2-\sqrt{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2+\sqrt{2} \\ -2<x<2-\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$\log_8(x+2)^3+\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-4x+2\right)=0 \Leftrightarrow \log_2(x+2)-\log_2\left(x^2-4x+2\right)=0$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2)=\log_2\left(x^2-4x+2\right) \Leftrightarrow x+2=x^2-4x+2 \Leftrightarrow x^2-5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=5 \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện ta có tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;5\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 5.

Câu 76: Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\frac{1}{2}\log\left(x^2-4x-1\right)=\log 8x-\log 4x$ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>2+\sqrt{5}$.

$\frac{1}{2}\log\left(x^2-4x-1\right)=\log 8x-\log 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log\left(x^2-4x-1\right)=\log 2$

Ta có

$\Leftrightarrow \log\left(x^2-4x-1\right)=\log 4 \Leftrightarrow x^2-4x-1=4 \Leftrightarrow x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Do $x>2+\sqrt{5}$ nên $x=5$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình bằng 5.

Câu 77: Số nghiệm thực của phương trình $3\log_3(2x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3=3$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>5$.

$3\log_3(2x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3=3 \Leftrightarrow 3\log_3(2x-1)+3\log_3(x-5)=3$

Ta có:

$\Leftrightarrow (2x-1)(x-5)=3 \Leftrightarrow 2x^2-11x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{11+\sqrt{105}}{4}>5 \\ x=\frac{11-\sqrt{105}}{4}<5 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \log_3(2x-1).(x-5)=1$

Vậy phương trình có một nghiệm.

Câu 78: Phương trình $\log_x 5.\log_5 x=1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$?

A. 10. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 21.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>0;x\neq 1$.

$\log_x 5=\frac{1}{\log_5 x} \Rightarrow \log_x 5.\log_5 x=1$

Với điều kiện trên ta có: .

Vậy phương trình $\log_x 5.\log_5 x=1$ có 9 nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$.

Câu 79: Phương trình $\log_3(x+2)+\frac{1}{2}\log_3(x-5)^2+\log_{\frac{1}{3}}8=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases}x>-2\\x\neq 5\end{cases}$.

$$\log_3(x+2)+\frac{1}{2}\log_3(x-5)^2+\log_{\frac{1}{3}}8=0\Leftrightarrow\log_3(x+2)+\log_3|x-5|=\log_3 8$$

$$\Leftrightarrow\log_3\left[(x+2)|x-5|\right]=\log_3 8\Leftrightarrow(x+2)|x-5|=8.$$

Trường hợp 1: $x>5$, ta có:

$$(x+2)(x-5)=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\ (tm)\\x=-3\ (l)\end{array}\right.$$

Trường hợp 2: $-2<x<5$, ta có:

$$(x+2)(x-5)=-8\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}\ (tm)$$

Câu 80: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\log_2(2x-2)+\log_2(x-3)^2=2$ trên $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. $4+\sqrt{2}$. **B.** $8+\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** $6+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases}2x-2>0\\(x-3)^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x\neq 3\end{cases}$ (*)

$$2\log_2(2x-2)+\log_2(x-3)^2=2$$

Với điều kiện (*) phương trình

$$\Leftrightarrow\log_2(2x-2)^2+\log_2(x-3)^2=2\Leftrightarrow\log_2\left[(2x-2)^2(x-3)^2\right]=2$$

$$\Leftrightarrow\left[(2x-2)(x-3)\right]^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(2x-2)(x-3)=2\\(2x-2)(x-3)=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2-8x+4=0\ (1)\\2x^2-8x+8=0\ (2)\end{array}\right.$$

Phương trình (1) có các nghiệm $x=2+\sqrt{2}\ (N);\ x=2-\sqrt{2}\ (L)$

Phương trình (2) có nghiệm $x=2\ (N)$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{2+\sqrt{2};\ 2\}$. Tổng các nghiệm bằng $4+\sqrt{2}$.

Câu 81: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2\left(12-2^x\right)=5-x$ bằng

A. 12. **B.** 6. **C.** 32. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

$$\log_2\left(12-2^x\right)=5-x\Leftrightarrow\begin{cases}12-2^x>0\\12-2^x=2^{5-x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\log_2 12\\\left(2^x\right)^2-12.2^x+32=0\end{cases}$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x<\log_2 12\\\left[\begin{array}{l}2^x=8\\2^x=4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\log_2 12\\\left[\begin{array}{l}x=3\\x=2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=2\end{array}\right.$$

.

Do đó tích các nghiệm của phương trình là $P=3.2=6$.

Câu 82: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2+x+1\right)=2+\log_2 x$.

A. 6. **B.** 3. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>0$

$$\log_2\left(x^2+x+1\right)=2+\log_2 x\Leftrightarrow\log_2\left(x^2+x+1\right)=\log_2(4x)\Leftrightarrow x^2+x+1=4x$$

Ta có

$\Leftrightarrow x^2-3x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ (thoả mãn). Vậy tổng các nghiệm bằng $\frac{3}{2}$.

Câu 83: Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn $|m|<2023$ và phương trình $\log_{16}(mx)=\log_2\left(\sqrt{x+1}\right)$ có nghiệm thực duy nhất?

A. 2024. **B.** 2025. **C.** 2023. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}x>-1\\mx>0\end{cases}$

$$\log_{16}(mx)=\log_2\left(\sqrt{x+1}\right)\Leftrightarrow\log_2(mx)=4\log_2\left(\sqrt{x+1}\right)$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow\log_2(mx)=\log_2(x+1)^2\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x^2+(2-m)x+1=0\quad(*)\end{cases}$$

Để phương trình có nghiệm duy nhất thì phương trình $(*)$ có nghiệm kép lớn hơn -1 hoặc có 2 nghiệm phân biệt: $x_1>-1\geq x_2$

$$\Delta=0\Leftrightarrow(2-m)^2-4=0\Leftrightarrow m(m-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=4\end{array}\right.$$

Trường hợp 1:

$$m=0\Rightarrow x^2+2x+1=0\Leftrightarrow x=-1\ (KTM)$$

Nếu

$$m=4\Rightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=1\ (TM)$$

Nếu

Trường hợp 2: $x_1>-1>x_2\Leftrightarrow f(-1)<0\Leftrightarrow m<0$.

$$\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\|m|<2023\end{cases}$$

Do nên có 2022 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Trường hợp 3: Phương trình có một nghiệm $x=-1$ và có một nghiệm lớn hơn -1.

$$x=-1\Rightarrow 1-(2-m)+1=0\Leftrightarrow m=0$$

Với $m=0\Rightarrow x^2+2x+1=0\Leftrightarrow x=-1$ khi đó phương trình có 2 nghiệm: $x_1=x_2=-1\ (KTM)$

Vậy có 2023 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 84: Có bao nhiêu số nguyên dương a để tồn tại đúng hai số thực b phân biệt, thỏa mãn điều kiện $\left(4\log_2^2 b+\log_2 b-5\right)\sqrt{7^b-a}=0$.

A. 48. **B.** 47. **C.** 49. **D.** 46.

Lời giải

Chọn D

$$\left(4\log_2^2 b+\log_2 b-5\right)\sqrt{7^b-a}=0\Leftrightarrow\begin{cases}b>0,b\geq\log_7 a\\ \log_2 b=1\\ \log_2 b=\dfrac{-5}{4}\\ 7^b=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b>0,b\geq\log_7 a\\ b=2\\ b=2^{\frac{-5}{4}}\\ b=\log_7 a\end{cases}$$

Ta có: .

Để tồn tại đúng hai số thực b phân biệt $\Leftrightarrow 2^{\frac{-5}{4}}\leq\log_7 a<2\Leftrightarrow 7^{2^{\frac{-5}{4}}}\leq a<49\Rightarrow a\in\{3;4;...;48\}$

Câu 85: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2\log_2(x-3)+(2m+5)\log_{\sqrt{x-3}}2=2m$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1<x_2<5$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$$2\log_2(x-3)+(2m+5)\log_{\sqrt{x-3}}2=2m\ (1)$$

Ta có:

Điều kiện: $3<x\neq 4$ khi đó $(1)\Leftrightarrow\log_2^2(x-3)-m\log_2(x-3)+(2m+5)=0\ (2)$

Đặt $t=\log_2(x-3)$; $x\in(3;5)\setminus\{4\}\Rightarrow t\in(-\infty;1)\setminus\{0\}$.

Thay t vào (2) ta được: $t^2-mt+(2m+5)=0\ (3)$.

Phương trình (1) có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1<x_2<5$

$\Leftrightarrow(3)$ có hai nghiệm phân biệt t_1,t_2 thỏa mãn $t_1,t_2\in(-\infty;1)\setminus\{0\}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2-8m-20>0\\ 1.f(1)=m+6>0\\ f(0)=2m+5\neq 0\\ \dfrac{S}{2}=\dfrac{m}{2}<1\end{cases}$$

, với $f(t)=t^2-mt+(2m+5)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty;-2) \cup (10;+\infty) \\ m \in (-6;2) \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-6;-2) \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}.$$

Câu 86: Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho ứng với mỗi x tồn tại đúng hai số thực y thỏa mãn $\left(\log_2^2 y - 3\log_2 y + 2\right)\sqrt{3^y - x} = 0$?

A. 78. **B.** 72. **C.** 79. **D.** 73.

Lời giải

Chọn B

$$\left(\log_2^2 y - 3\log_2 y + 2\right)\sqrt{3^y - x} = 0$$

Ta có:

Điều kiện: $\begin{cases} y > 0 \\ y \geq \log_3 x \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \log_2^2 y - 3\log_2 y + 2 = 0 \\ 3^y - x = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y = 2 \\ y = 4 \\ y = \log_3 x \end{bmatrix}$$

Phương trình .

Để tồn tại đúng hai số thực $y \Leftrightarrow 2 \leq \log_3 x < 4 \Leftrightarrow 9 \leq x < 81 \Rightarrow x \in \{9;10;...;80\}$.

Câu 87: Biết tổng các nghiệm của phương trình $\log_2\left(4^x + 48\right) = x + 4$ bằng $a + b\log_2 3$ với $(a;b \in \square)$. Tính $2a + b$.

A. $2a + b = 8$. **B.** $2a + b = 5$. **C.** $2a + b = 9$. **D.** $2a + b = 6$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_2\left(4^x + 48\right) = x + 4 \Leftrightarrow 4^x + 48 = 2^{x+4} \Leftrightarrow 2^{2x} - 16.2^x + 48 = 0$$

Ta có

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2^x = 4 \\ 2^x = 12 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 2 \\ x = \log_2 12 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 2 \\ x = 2 + \log_2 3 \end{bmatrix}.$$

Vậy tổng các nghiệm là: $4 + \log_2 3 \Rightarrow a = 4; b = 1 \Rightarrow 2a + b = 9$.

Câu 88: Cho hai số thực x, y thỏa $1 < x < y$ và $\log_x\left(y^4\right) + \log_y\left(x^5\right) = 9$. Tính $\log_{xy} \frac{x^5 + y^4}{2}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** $\frac{20}{9}$. **D.** $\frac{45}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t=\log_x y(t>1)\Leftrightarrow y=x^t$, khi đó $\log_x\left(x^{4t}\right)+\log_{x^t}\left(x^5\right)=9\Leftrightarrow 4t+\frac{5}{t}=9\Rightarrow t=\frac{5}{4}$.

$$\Rightarrow y=x^{\frac{5}{4}}\Rightarrow\begin{cases}y^4=x^5\\ xy=x^{\frac{9}{4}}\end{cases}\Rightarrow\log_{xy}\frac{x^5+y^4}{2}=\log_{x^{\frac{9}{4}}}\frac{2x^5}{2}=\frac{20}{9}.$$

3. Bất phương trình mũ

Câu 89: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}>3$ là

A. $[-2;+\infty)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-\infty;-2]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}>3\Leftrightarrow x+1<-1\Leftrightarrow x<-2$.

Câu 90: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x-2}\geq 2$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^{x-2}\geq 2\Leftrightarrow x-2\geq 1\Leftrightarrow x\geq 3$.

Câu 91: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x-5\leq 0$ là

A. $S=(-\infty;\log_2 5]$. **B.** $S=(0;\log_2 5]$. **C.** $S=[0;\log_2 5]$. **D.** $S=(0;\log_5 2]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2^x-5\leq 0\Leftrightarrow 2^x\leq 5\Leftrightarrow x\leq\log_2 5$.

Tập nghiệm của bất phương trình $2^x-5\leq 0$ là $S=(-\infty;\log_2 5]$.

Câu 92: Tập nghiệm của bất phương trình $3^x>27$

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(9;+\infty)$ **D.** $(0;3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^x > 27 \Leftrightarrow 3^x > 3^3 \Leftrightarrow x > 3 \Leftrightarrow x \in (3;+\infty)$.

Câu 93: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} \geq \frac{1}{27}$ là

A. $(-\infty;2]$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có cơ số $0 < a = \frac{1}{3} < 1$.

$$2x-1 \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} \Leftrightarrow 2x-1 \leq 3 \Leftrightarrow 2x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2$$

Nên bất phương trình đã cho tương đương .

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty;2]$.

Câu 94: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x+2} \geq \frac{1}{9}$ là

A. $(-\infty;0)$. **B.** $[-4;+\infty)$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;4]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3^{x+2} \geq \frac{1}{9} \Leftrightarrow x+2 \geq \log_3 \frac{1}{9} \Leftrightarrow x+2 \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -4$.

Câu 95: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1} < 4$ là

A. $(-\infty;1]$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $[1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^{x+1} < 4 \Leftrightarrow 2^{x+1} < 2^2 \Leftrightarrow x+1 < 2 \Leftrightarrow x < 1$. Vậy tập của bất phương trình là $(-\infty;1)$.

Câu 96: Tập nghiệm của bất phương trình $5^{2x+3} > \frac{1}{25}$ là

A. $\left(-\frac{5}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $5^{2x+3} > \frac{1}{25} \Leftrightarrow 5^{2x+3} > 5^{-2} \Leftrightarrow 2x+3 > -2 \Leftrightarrow 2x > -5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$.

Câu 97: Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1} < 16$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $[1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1]$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $4^{x+1} < 16 \Leftrightarrow 4^{x+1} < 4^2 \Leftrightarrow x+1 < 2 \Leftrightarrow x < 1$

Vậy tập nghiệm của bài toán là $(-\infty;1)$.

Câu 98: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là?

A. $\left[\frac{2}{5};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]$. **C.** $\left[\frac{-2}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{2}{5}\right]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 4x \ge x-2 \Leftrightarrow 3x \ge -2 \Leftrightarrow x \ge \frac{-2}{3}$.

Câu 99: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{17}{11}\right)^{3x} \le \left(\frac{11}{17}\right)^{x^2}$ là

A. $(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$. **B.** $[0;3]$. **C.** $[-3;0]$. **D.** $(-\infty;-3]\cup[0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\left(\frac{17}{11}\right)^{3x} \le \left(\frac{11}{17}\right)^{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{17}{11}\right)^{3x} \le \left(\frac{17}{11}\right)^{-x^2}$

$\Leftrightarrow -x^2 \ge 3x \Leftrightarrow x^2+3x \le 0 \Leftrightarrow -3 \le x \le 0 \Leftrightarrow x \in [-3;0]$.

Câu 100: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x \ge 8$ là

A. $(-3;+\infty)$. **B.** $[-3;+\infty)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2^x \ge 8 \Leftrightarrow 2^x \ge 2^3 \Leftrightarrow x \ge 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[3;+\infty)$.

Câu 101: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{5}-2\right)^{x+1}>9-4\sqrt{5}$

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left(\sqrt{5}-2\right)^{x+1}>9-4\sqrt{5}\Leftrightarrow\left(\sqrt{5}-2\right)^{x+1}>\left(\sqrt{5}-2\right)^{2}\Leftrightarrow x+1<2\Leftrightarrow x<1$.

Câu 102: Số nghiệm nguyên trong khoảng $(-50;50)$ của bất phương trình $16^{x}-5.4^{x}+4\geq 0$ là

A. 100. **B.** 98. **C.** 99. **D.** 51.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t=4^{x},(t>0)$ ta được $t^{2}-5t+4\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<t\leq 1\\ t\geq 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<4^{x}\leq 1\\ 4^{x}\geq 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq 0\\ x\geq 1\end{array}\right.$

Kết hợp $\left\{\begin{array}{l}x\in\mathbb{Z}\\ x\in(-50;50)\end{array}\right.$ nên có 99 giá trị x thỏa mãn.

Câu 103: Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{x}}-2\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}>15$ có tập nghiệm $S=(a;b)$. Giá trị của biểu thức $2a+5b$ bằng

A. -5. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x\neq 0$. Đặt $t=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$, $t>0$.

$$t^{2}-2t-15>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t>5\\ t<-3\,(\text{KTM})\end{array}\right.$$

Bất phương trình trở thành:

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}>5\Leftrightarrow\frac{1}{x}<-1\Leftrightarrow\frac{x+1}{x}<0\Leftrightarrow-1<x<0$$

Vậy tập nghiệm là $S=(-1;0)$. Do đó $2a+5b=-2$.

Câu 104: Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{2}{x}}-5\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}}>14$ có tập nghiệm $S=(a;b)$. Giá trị của biểu thức $3a+4b$ bằng

A. -3. **B.** -2. **C.** -5. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{2}{x}}-5\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}}>14\Leftrightarrow\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{2}{x}}-5\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}}-14>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}}>7\\ \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}}<-2(vn)\end{array}\right.$$

Ta có

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x}<-1\Leftrightarrow\frac{x+1}{x}<0\Leftrightarrow-1<x<0$$

.

Suy ra bất phương trình có tập nghiệm $S=(-1;0)$, do đó $3a+4b=-3$.

Câu 105: Số nghiệm nguyên của phương trình $\left(9^x-5.6^x-6.4^x\right)\sqrt{128-2^{\sqrt{x}}}>0$.

A. 45 **B.** 48 **C.** 49. **D.** 44.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\left(9^x-5.6^x-6.4^x\right)\sqrt{128-2^{\sqrt{x}}}>0\Leftrightarrow\begin{cases}9^x-5.6^x-6.4^x>0\\128-2^{\sqrt{x}}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{3}{2}\right)^x>6\\\sqrt{x}<7\end{cases}\Leftrightarrow\log_{1,5}6<x<49$$

$\Rightarrow x\in\{5;6;7;...;48\}$. Vậy bất phương trình đã cho có 44 nghiệm nguyên.

Câu 106: Số nghiệm nguyên của bất phương trình: $\left(9^x-5.6^x-6.4^x\right)\sqrt{128-2^{\sqrt{x}}}>0$ là

A. 45. **B.** 48. **C.** 49. **D.** 44.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $\begin{cases}128-2^{\sqrt{x}}\geq 0\\x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\leq x\leq 49$.

Bất phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 128-2^{\sqrt{x}}>0 \\ 9^x-5.6^x-6.4^x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x<49 \\ \left(\frac{9}{4}\right)^x-5.\left(\frac{6}{4}\right)^x-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x<49 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-5.\left(\frac{3}{2}\right)^x-6>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x<49 \\ \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x>6 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x<-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x<49 \\ x>\log_{\frac{3}{2}}6 \end{cases} \Leftrightarrow \log_{\frac{3}{2}}6<x<49$$

.

Kết hợp với điều kiện xác định, và x là số nguyên, nên $x\in\{5,6,7,....,47,48\}$.

Vậy có 44 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu đề.

Câu 107: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+2x+5}+3^{x^2+2x}\ge 3^{(x+1)^2+1}+5.2^{x^2+2x}$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **B.** $[-1:3]$. **C.** $[-3;1]$. **D.** $[-1;0]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{x^2+2x+5}+3^{x^2+2x}\ge 3^{(x+1)^2+1}+5.2^{x^2+2x}\Leftrightarrow 2^5.2^{x^2+2x}-5.2^{x^2+2x}\ge 3^2.3^{x^2+2x}-3^{x^2+2x}$

$$\Leftrightarrow 27.2^{x^2+2x}\ge 8.3^{x^2+2x}\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+2x}\le\frac{27}{8}\Leftrightarrow x^2+2x\le\log_{\frac{3}{2}}\frac{27}{8}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x\le 3\Leftrightarrow x^2+2x-3\le 0\Leftrightarrow -3\le x\le 1$$

.

Câu 108: Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^x<4-3^{1-x}$ là $(a;b)$. Giá trị $a+b$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

$$3^x<4-3^{1-x}\Leftrightarrow 3^x<4-\frac{3}{3^x}\Leftrightarrow 3^{2x}-4.3^x+3<0\Leftrightarrow 1<3^x<3\Leftrightarrow 0<x<1$$

Ta có:

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(0;1)$ do đó $a=0,b=1$.

Câu 109: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là?

A. $\left[\frac{2}{5};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]$. **C.** $\left[\frac{-2}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{2}{5}\right]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 4x \ge x-2 \Leftrightarrow 3x \ge -2 \Leftrightarrow x \ge \frac{-2}{3}$.

Câu 110: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ là

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 2x > x-2 \Leftrightarrow x > -2$. Vậy $S = (-2;+\infty)$.

Câu 111: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+2x+5} + 3^{x^2+2x} \ge 3^{(x+1)^2+1} + 5.2^{x^2+2x}$ là

A. $(-\infty;-3] \cup [1;+\infty)$. **B.** $[-1:3]$. **C.** $[-3;1]$. **D.** $[-1;0]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2^{x^2+2x+5} + 3^{x^2+2x} \ge 3^{(x+1)^2+1} + 5.2^{x^2+2x} \Leftrightarrow 2^5.2^{x^2+2x} - 5.2^{x^2+2x} \ge 3^2.3^{x^2+2x} - 3^{x^2+2x}$

$\Leftrightarrow 27.2^{x^2+2x} \ge 8.3^{x^2+2x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+2x} \le \frac{27}{8} \Leftrightarrow x^2+2x \le \log_{\frac{3}{2}} \frac{27}{8}$

$\Leftrightarrow x^2+2x \le 3 \Leftrightarrow x^2+2x-3 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le x \le 1$.

Câu 112: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3x^2} < 5^{5x+2}$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3x^2} < 5^{5x+2} \Leftrightarrow 5^{3x^2} < 5^{5x+2} \Leftrightarrow 3x^2 < 5x+2 \Leftrightarrow 3x^2-5x-2<0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}<x<2$.

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{0;1\}$.

Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 2.

Câu 113: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3x^2} < 5^{5x+2}$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3x^2} < 5^{5x+2} \Leftrightarrow 5^{3x^2} < 5^{5x+2} \Leftrightarrow 3x^2 < 5x+2 \Leftrightarrow 3x^2-5x-2<0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}<x<2$.

Kết hợp điều kiện $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0;1\}$

Câu 114: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1} < 32$ là

A. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6};+\infty\right)$.

C. $\left(-\sqrt{6};\sqrt{6}\right)$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2^{x^2-1} < 2^5 \Leftrightarrow x^2-1<5 \Leftrightarrow x^2<6 \Leftrightarrow -\sqrt{6}<x<\sqrt{6}$.

Câu 115: Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là

A. $S=(1;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;1)$. **C.** $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x} \Leftrightarrow 5^{x+2} < 5^{2x} \Leftrightarrow x+2<2x \Leftrightarrow x>2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(2;+\infty)$.

Câu 116: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^x+2\right)\left(4^{x+1}-8^{2x+1}\right)\le 0$

A. $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right]$. **C.** $(-\infty;4]$ **D.** $[4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Do $3^x+2>0\ \forall x$ nên $\left(3^x+2\right)\left(4^{x+1}-8^{2x+1}\right)\le 0\Leftrightarrow 4^{x+1}-8^{2x+1}\le 0\Leftrightarrow 4^{x+1}\le 8^{2x+1}$

$\Leftrightarrow 2^{2x+2}\le 2^{6x+3}\Leftrightarrow 2x+2\le 6x+3\Leftrightarrow 4x\ge -1\Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{4}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Câu 117: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2}>2^{4-3x}$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2}>2^{4-3x}\Leftrightarrow 2^{-x^2+2}>2^{4-3x}\Leftrightarrow -x^2+2>4-3x\Leftrightarrow -x^2+3x-2>0$

$\Leftrightarrow x\in(1;2)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2}>2^{4-3x}$ là $(1;2)$.

Câu 118: Bất phương trình $3^{|x|}<81$ có tập nghiệm là

A. $[0;4]$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-\infty;4)$. **D.** $(-4;4)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3^{|x|}<81\Leftrightarrow 3^{|x|}<3^4\Leftrightarrow |x|<4\Leftrightarrow -4<x<4.$

Câu 119: Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x+2}\le 25$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $5^{x+2} \le 25 \Leftrightarrow 5^{x+2} \le 5^2 \Leftrightarrow x+2 \le 2 \Leftrightarrow x \le 0$.

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-\infty;0]$.

Câu 120: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\sqrt{x}} > \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2-\sqrt{x}}$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\sqrt{x}} > \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2-\sqrt{x}} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} < 2-\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x < 1$.

Do vậy, tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [0;1)$.

Câu 121: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -3$ là

A. $(-1;5)$. **B.** $(7;+\infty)$. **C.** $(-1;7)$. **D.** $[-1;7)$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 7$$

Ta có: .

Câu 122: Số các số nguyên dương x thỏa mãn $4^x + 2023(x+1) < (x+2024).2^x$ là:

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

$$4^x + 2023(x+1) < (x+2024).2^x \Leftrightarrow 4^x - 2024.2^x + 2023 - (2^x - 2023).x < 0$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow (2^x - 1)(2^x - 2023) - (2^x - 2023).x < 0 \Leftrightarrow (2^x - 2023)(2^x - x - 1) < 0$$

Do x nguyên dương nên $2^x > x+1 \Rightarrow 2^x - x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow 2^x < 2023 \Rightarrow x \in \{1;2;....;10\}$

Do đó bpt .

Vậy có 10 số nguyên dương x thỏa mãn.

Câu 123: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(2^x - y\right) < 0$?

A. 2047. **B.** 1022. **C.** 1023. **D.** 1024.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\left(2^{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(2^x - y\right) < 0 \Leftrightarrow \left(2^x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(2^x - y\right) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 2^x - \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \\ 2^x - y < 0 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} 2^x - \frac{1}{\sqrt{2}} < 0 \\ 2^x - y > 0 \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x > \frac{-1}{2} \\ x < \log_2 y, y > 0 \end{cases} (1) \right. \left. \begin{cases} x < \frac{-1}{2} \\ x > \log_2 y, y > 0 \end{cases} (2)\right.$$

Nhận thấy (2) không thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy $y > 0$ nên bất phương trình có không quá 10 nghiệm nguyên khi và chỉ khi

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < 2^x < y \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \log_2 y.$$

Nếu $\log_2 y > 10 \Rightarrow x \in \{0;1;2;...;10\}$ đều là nghiệm, do đó không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow \log_2 y \le 10 \Leftrightarrow y \le 1024.$

Mà y là số nguyên dương nên $y \in \{1;2;3;...;1023;1024\}$.

Vậy có 1024 giá trị nguyên dương của y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 124: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $6^x + 12 \le 2^{x+1} + 2.3^{x+1}$

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

$$6^x+12\le 2^{x+1}+2.3^{x+1}\Leftrightarrow 2^x.3^x+12\le 2.2^x+6.3^x\Leftrightarrow 2^x\left(3^x-2\right)-6\left(3^x-2\right)\le 0$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \left(3^x-2\right)\left(2^x-6\right)\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{cases}3^x-2\le 0\\2^x-6\ge 0\end{cases}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{cases}x\le \log_3 2\\x\ge \log_2 6\end{cases}\right.\Leftrightarrow \log_3 2\le x\le \log_2 6$$

.

Các nghiệm nguyên của bất phương trình là: 1, 2.

Vậy bất phương trình có 2 nghiệm nguyên.

Câu 125: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\left(\frac{2}{e}\right)^{x^2+2mx+1}\le\left(\frac{e}{2}\right)^{2x-3m}$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(\frac{2}{e}\right)^{x^2+2mx+1}\le\left(\frac{e}{2}\right)^{2x-3m}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{e}\right)^{x^2+2mx+1}\le\left(\frac{2}{e}\right)^{-2x+3m}\Leftrightarrow x^2+2mx+1\ge -2x+3m$

$$\Leftrightarrow x^2+2(m+1)x+1-3m\ge 0\quad (*)$$

,

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ Bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'\le 0\\a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)^2-(1-3m)\le 0\\1>0\end{cases}\Leftrightarrow m^2+5m\le 0\Leftrightarrow -5\le m\le 0$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-5;-4;-3;-2;-1;0\}$.

Câu 126: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;100]$ để bất phương trình $4^{2x-m}-4.2^{3x-2m}+4.2^{x-m}<1$ nghiệm đúng với $\forall x\in(-\infty;4]$?

A. 99. **B.** 92. **C.** 98. **D.** 93.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4^{2x-m}-4.2^{3x-2m}+4.2^{x-m}<1\Leftrightarrow 2^{4x}-4.2^{3x}+4.2^x.2^m<2^{2m}$

$$\Leftrightarrow \left(2^m-2^{2x}\right)\left(2^m+2^{2x}-4.2^x\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases}2^m>2^{2x}\\2^m>4.2^x-2^{2x}\end{cases}(1)\right.$$
$$\left[\begin{cases}2^m<2^{2x}\\2^m<4.2^x-2^{2x}\end{cases}(2)\right.$$

$$\forall x\in(-\infty;4]\Rightarrow\begin{cases}0<2^{2x}\le 2^8\\-192\le 4.2^x-2^{2x}\le 2^2\end{cases}.$$

$$\begin{cases}2^m>2^{2x}\\2^m>4.2^x-2^{2x}\end{cases}(1)$$

Giải

$$\forall x\in(-\infty;4]\Leftrightarrow\begin{cases}2^m>2^8\\2^m>2^2\end{cases}\Leftrightarrow m>8$$

Để (1) nghiệm đúng với $\forall x\in(-\infty;4]$. Do m nguyên thuộc đoạn $[0;100]$ nên có $100-8=92$ giá trị của m.

$$\begin{cases}2^m<2^{2x}\\2^m<4.2^x-2^{2x}\end{cases}(2)$$

Giải

$$\forall x\in(-\infty;4]\Leftrightarrow\begin{cases}2^m\le 0\\2^m<-192\end{cases}$$

Để (1) nghiệm đúng với $\forall x\in(-\infty;4]$ không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Vậy có 92 giá trị của m.

4. Bất phương trình logarit

Câu 127: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\le 1$ là

A. $\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$. **C.** $(-\infty;\log_2 5)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x-2>0\Leftrightarrow x>2$.

Bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\le 1\Leftrightarrow x-2\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\ge\frac{5}{2}$.

$T=\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm .

Câu 128: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x+4)\le 3$ là:

A. $(-4;23]$. **B.** $(-\infty;23]$. **C.** $(-\infty;27]$. **D.** $(-4;5]$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>-4$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow x+4\le 27\Leftrightarrow x\le 23$.

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x\in(-4;23]$.

Câu 129: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-3)<-2.$ là

A. $(12;+\infty)\cdot$ **B.** $(-\infty;12)\cdot$ **C.** $\left(-\infty;\frac{7}{3}\right)\cdot$ **D.** $(3;12)\cdot$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>3$

$\log_{\frac{1}{3}}(x-3)<-2\Leftrightarrow x-3>9\Leftrightarrow x>12.$

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S=(12;+\infty)\cdot$

Câu 130: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(2x)<\log(x+6)$ là:

A. $[0;6)$ **B.** $(0;6)$ **C.** $(6;+\infty)$ **D.** $(-\infty;6)$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases}2x>0\\x+6>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0$

Vì cơ số $a=10>1$ nên bất phương trình $\log(2x)<\log(x+6)$

$\Leftrightarrow 2x<x+6\Leftrightarrow x<6$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $0<x<6$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(0;6)$.

Câu 131: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x+10)<\log_{\frac{1}{3}}(4x-9)$

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3

Lời giải

Chọn B

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+10)<\log_{\frac{1}{3}}(4x-9)\Leftrightarrow\begin{cases}x+10>4x-9\\4x-9>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\frac{19}{3}\\x>\frac{9}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{9}{4}<x<\frac{19}{3}$$

Ta có:

Vậy phương trình có 4 nghiệm nguyên.

Câu 132: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 2x<\log_2(x+2)$ là

A. $(0;2)$. **B.** $[0;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_2 2x<\log_2(x+2)\Leftrightarrow\begin{cases}2x<x+2\\2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0;2)$$

Ta có

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 2x<\log_2(x+2)$ là $(0;2)$.

Câu 133: Gọi S là tập hợp các số nguyên x thỏa mãn $\log_3^2 x-2\log_3(3x)-1\le 0$. Số phần tử của tập S là

A. 27. **B.** 230. **C.** 103. **D.** 54.

Lời giải

Chọn A.

Điều kiện: $x>0$.

$$\log_3^2 x-2\log_3(3x)-1\le 0\Leftrightarrow\log_3^2 x-2\log_3 x-3\le 0\Leftrightarrow-1\le\log_3 x\le 3\Leftrightarrow\frac{1}{3}\le x\le 27$$

Ta có .

$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{1;\ 2;\ 3;\ldots\ 27\}$

Vì .

Vậy có 27 số nguyên x.

Câu 134: Bất phương trình $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 \ge 0$ có tập nghiệm S là

A. $S = (-\infty;1] \cup [3;+\infty)$. **B.** $S = (-\infty;0] \cup [\log_2 5;+\infty)$.

C. $S = (0;2] \cup [8;+\infty)$. **D.** $S = (-\infty;2] \cup [8;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 \ge 0$.

Điều kiện $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$, bất phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 4t + 3 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \ge 3 \\ t \le 1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \ge 3 \\ \log_2 x \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 8 \\ x \le 2 \end{array}\right.$

So sánh với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0;2] \cup [8;+\infty)$.

Câu 135: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(5^x - 125\right)\left(\log_3^2 x - 8\log_3 x + 15\right) < 0$

A. 242. **B.** 217. **C.** 220. **D.** 215.

Lời giải

Chọn B

Giải phương trình: $\left(5^x - 125\right)\left(\log_3^2 x - 8\log_3 x + 15\right) < 0$ với điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5^x - 125 < 0 \\ \log_3^2 x - 8\log_3 x + 15 > 0 \end{array}\right.$ *hay* $\left\{\begin{array}{l} 5^x - 125 > 0 \\ \log_3^2 x - 8\log_3 x + 15 < 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5^x < 5^3 \\ \left[\begin{array}{l} \log_3 x < 3 \\ \log_3 x > 5 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5^x > 5^3 \\ 3 < \log_3 x < 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x < 3 \\ \left[\begin{array}{l} x < 27 \\ x > 243 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > 3 \\ 27 < x < 243 \end{array}\right. \Leftrightarrow 27 < x < 243$

x nguyên $\Rightarrow x = 1, 2, 28, 29, \ldots, 242$ có 217 số.

Câu 136: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn điều kiện $\left(7^x - 49\right)\left(\log_3^2 x - 7\log_3 x + 6\right) < 0$?

A. 728. **B.** 726. **C.** 725. **D.** 729.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 0$.

$$\left(7^x-49\right)\left(\log_3^2 x-7\log_3 x+6\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}7^x-49>0\\ \log_3^2 x-7\log_3 x+6<0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}7^x-49<0\\ \log_3^2 x-7\log_3 x+6>0\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}7^x>49\\ 1<\log_3 x<6\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}7^x<49\\ \left[\begin{array}{l}\log_3 x<1\\ \log_3 x>6\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>2\\ 3<x<3^6\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<2\\ \left[\begin{array}{l}0<x<3\\ x>3^6\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<2\\ 3<x<3^6\end{array}\right.$$

$x\in\square \Rightarrow x\in\{1;4;5;\ldots;728\}$ mà .

Vậy có 726 số thỏa mãn.

Câu 137: Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1)\le\log_2(5-x)+1$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **B.** $(1;3]$. **C.** $[-3;1]$. **D.** $[-1;0]$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $1<x<5$

Ta có:

$$2\log_2(x-1)\le\log_2(5-x)+1\Leftrightarrow\log_2(x-1)^2\le\log_2(10-2x)$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2\le10-2x\Leftrightarrow x^2\le9\Leftrightarrow-3\le x\le3$$.

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm là: $S=(1;3]$

Câu 138: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x+2)<1$ là

A. $(-\infty;8)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-2;8)$. **D.** $(8;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $\log(x+2)<1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x+2>0\\ x+2<10\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>-2\\ x<8\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\log(x+2)<1$ là $T=(-2;8)$

Câu 139: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_4(x+6)<2-2\log_4 x$ bằng

A. 2. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x>0$.

Ta có: $\log_4(x+6)<2-2\log_4 x \Leftrightarrow \log_4(x+6)<\log_4\frac{16}{x^2}$

$$\Leftrightarrow x+6<\frac{16}{x^2}\Leftrightarrow x^3+6x^2-16<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2-2\sqrt{3} \\ -2<x<-2+2\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

So với điều kiện ta có $0<x<-2+2\sqrt{3}$.

Suy ra nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là $x=1$.

Vậy bất phương trình có 1 nghiệm nguyên.

Câu 140: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(3x-2)+\log_{\frac{1}{2}}(6-5x)>0$ là

A. $S=(1;+\infty)$. **B.** $S=\left(\frac{2}{3};1\right)$. **C.** $S=\left(1;\frac{6}{5}\right)$. **D.** $S=\left(1;\frac{6}{5}\right]$.

Lời giải

Chọn C

$$\Leftrightarrow \log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2>6-5x \\ 6-5x>0 \end{cases}\Leftrightarrow 1<x<\frac{6}{5}.$$

Bất phương trình

Vậy $S=\left(1;\frac{6}{5}\right)$.

Câu 141: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

A. $S=(-\infty;2)$. **B.** $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$. **C.** $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=(-1;2)$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>2x-1\\2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

Ta có:

Vậy tập nghiệm S của bất phương trình đã cho là $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Câu 142: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x+3)<\log_3(1-x)$ là khoảng $(a;b)$. Giá trị $a.b$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$$\log_3(2x+3)<\log_3(1-x)\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3<1-x\\2x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x<-2\\x>-\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{3}{2}<x<-\frac{2}{3}$$

Ta có .

$$a.b=-\frac{3}{2}.\left(-\frac{2}{3}\right)=1$$

Khi đó .

Câu 143: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1)<\log_2(3-x)$ là

A. $S=(-1;1)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=(1;3]$. **D.** $S=(-\infty;1)$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{cases}x+1>0\\3-x>0\end{cases}\Leftrightarrow-1<x<3$$

Điều kiện: .

$$\log_2(x+1)<\log_2(3-x)\Rightarrow x+1<3-x\Leftrightarrow x<1$$

Ta có: .

Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $(-1;1)$.

Câu 144: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)+\log_2(3x-3)<0$ là

A. $S=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $S=(1;2)$.

C. $S=(-1;2)$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>1$.

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)+\log_2(3x-3)<0 \Leftrightarrow \log_2(3x-3)<\log_2\left(x^2-1\right)$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow 3x-3<x^2-1 \Leftrightarrow x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<1 \end{array}\right.$$

.

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm bất phương trình là $S=(2;+\infty)$.

Câu 145: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(x-1)>4$.

A. $S=(-\infty;17)$. **B.** $S=(1;17)$. **C.** $S=(17;+\infty)$. **D.** $S=(0;17)$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_2(x-1)>4 \Leftrightarrow x-1>2^4 \Leftrightarrow x>17 \Leftrightarrow x\in(17;+\infty)$$

Ta có .

Câu 146: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)\le 3$ là

A. $(-\infty;9]$. **B.** $[1;9]$. **C.** $(1;9]$. **D.** $(1;10]$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_2(x-1)\le 3 \Leftrightarrow 0<x-1\le 8 \Leftrightarrow 1<x\le 9$$

Ta có .

Câu 147: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)>2$ là

A. $(-5;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>1$

$$\log_2(x-1)>2 \Leftrightarrow x-1>4 \Leftrightarrow x>5$$

Ta có:

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $x>5$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $(5;+\infty)$.

Câu 148: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3(x+1)<2$ là

A. $S=(0;8)$. **B.** $S=(-\infty;8)$. **C.** $S=(8;+\infty)$. **D.** $S=(-1;8)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3(x+1)<2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x+1<9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x<8 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<8$

Câu 149: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]\le 0$?

A. 26. **B.** 25. **C.** vô số. **D.** 24.

Lời giải

Chọn A

Xét $f(x)=\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]$:

Điều kiện xác định: $x>-25$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x^2}-9^x=0 \\ \log_3(x+25)-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

x	-25		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-25;0]\cup\{2\}$.

Suy ra, có 26 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 150: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(7x+2)\le 2$ là

A. $(-\infty;14)$. **B.** $\left[-\frac{2}{7};14\right]$. **C.** $(-\infty;14]$. **D.** $\left(-\frac{2}{7};14\right]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log(7x+2)\le 2 \Leftrightarrow 0<7x+2<10^2 \Leftrightarrow -\frac{2}{7}<x\le 14.$

Vậy tập nghiệm $s=\left(-\frac{2}{7};14\right]$.

Câu 151: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)<2$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(5;+\infty)$. **C.** $(-\infty;5)$. **D.** $(1;5)$.

Lời giải

Chọn D

$$\log_2(x-1)<2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x-1<2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<5 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<5$$

Ta có: .

$S=(1;5)$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là .

Câu 152: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(4-x)>2$ là

A. $(-5;4)$. **B.** $(-\infty;4)$. **C.** $(-\infty;-5]$. **D.** $(-\infty;-5)$.

Lời giải

Chọn D

$$\log_3(4-x)>2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x>0 \\ 4-x>3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<4 \\ x<-5 \end{cases} \Leftrightarrow x<-5$$

Ta có .

$S=(-\infty;-5)$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là .

Câu 153: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ là:

A. $S=(2;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;2)$. **C.** $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$. **D.** $S=(-1;2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} x+1>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$$

Điều kiện .

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow x+1>2x-1 \Leftrightarrow x<2 \xrightarrow{x>\frac{1}{2}} \frac{1}{2}<x<2$$

Ta có .

Câu 154: Số các giá trị nguyên của x thỏa $\left(2^{x^2}-16\right)(\log_3 x-4)\le 0$ là

A. Vô số. **B.** 80. **C.** 17. **D.** 78.

Lời giải

Chọn B

$$\left(2^{x^2}-16\right)\left(\log_3 x-4\right)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x^2}-16\ge 0\\ \log_3 x-4\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}2^{x^2}-16\le 0\\ \log_3 x-4\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2\ge 4\\ 0\le x\le 3^4\end{cases}\\ \begin{cases}x^2\le 4\\ x\ge 3^4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le -2\end{array}\right.\\ 0\le x\le 81\end{cases}\Leftrightarrow 2\le x\le 81\\ \begin{cases}-2\le x\le 2\\ x\ge 81\end{cases}\end{array}\right.$$

Ta có:

.

Do x nguyên nên có 80 giá trị thỏa mãn.

Câu 155: Gọi S là tập hợp các số nguyên x thoả mãn bất phương trình $\log_3\left(\frac{2x^2-7}{625}\right)\le\log_5\left(\frac{2x^2-7}{81}\right)$ .Số tập hợp con của S là

A. 2^{316}. **B.** 2^{318}. **C.** 319. **D.** 2^{319}.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của bất phương trình $2x^2-7>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le -2\end{array}\right.$ (*)(do x nguyên).

Bất phương trình tương đương với $\log_3\left(2x^2-7\right)-4\log_3 5\le\log_5\left(2x^2-7\right)-4\log_5 3$

$\Leftrightarrow\log_3\left(2x^2-7\right)-\log_5 3.\log_3\left(2x^2-7\right)\le 4\left(\log_3 5-\log_5 3\right)$

$\Leftrightarrow\log_3\left(2x^2-7\right)\left(1-\log_5 3\right)\le 4\left(\frac{1-\log_5{}^2 3}{\log_5 3}\right)\Leftrightarrow\log_3\left(2x^2-7\right)\le\frac{4\left(1+\log_5 3\right)}{\log_5 3}$

$\Leftrightarrow 2x^2-7\le 50625\Leftrightarrow-\sqrt{25316}\le x\le\sqrt{25316}\Leftrightarrow-159\le x\le 159$ (do x nguyên)

Kết hợp với điều kiện (*) ta có tập S có 316 số nguyên. Do đó số tập con của S là 2^{316}.

Câu 156: Số nghiệm nguyên của bất phương trình thỏa mãn $\left[1-\log_2(x+8)\right]\sqrt{2.4^{x+1}-17.2^x+2}\ge 0$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases}x+8>0\\ 2.4^{x+1}-17.2^x+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>-8\\ \begin{cases}2^x\ge 2\\ 2^x\le\frac{1}{8}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>-8\\ \begin{cases}x\ge 1\\ x\le -3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ -8<x\le -3\end{array}\right.$$

Điều kiện: .

$$\left[1-\log_2(x+8)\right]\sqrt{2.4^{x+1}-17.2^x+2}\ge 0$$

Khi đó:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}2.4^{x+1}-17.2^{x}+2=0\\ x>-8\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}2.4^{x+1}-17.2^{x}+2>0\\ 1-\log_2(x+8)\geq 0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-3\end{array}\right.\\ x>-8\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\geq 1\\ -8<x<-3\end{array}\right.\\ \log_2(x+8)\leq 1\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-3\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\geq 1\\ -8<x<-3\end{array}\right.\\ x\leq -6\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ -8<x\leq -6\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $x\in\mathbb{Z}$ ta có trường hợp này các giá trị x thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x\in\{-7;-6;-1;3\}$.

Câu 157: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right)\leq -1$ là:

A. $S=\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

B. $S=\left[1;\sqrt{5}\right]$.

C. $S=\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$.

D. $S=\left[-\sqrt{5};1\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right]$.

Lời giải

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right)\leq -1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2-1>0\\ \log_2\left(x^2-1\right)>0\\ \log_2\left(x^2-1\right)\geq 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2-1>0\\ x^2-1>1\\ x^2-1\geq 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x<-\sqrt{2}\\ x>\sqrt{2}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\leq -\sqrt{5}\\ x\geq \sqrt{5}\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq -\sqrt{5}\\ x\geq \sqrt{5}\end{array}\right.$$

Ta có:

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

Câu 158: Tổng các giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $\log_x\left(\log_3\frac{9^x-328}{78}\right)<1$ là

A. 7.

B. 5.

C. 9.

D. 12.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\left\{\begin{array}{l}x>0, x\neq 1\\ 9^x>328\end{array}\right. \Leftrightarrow x>\log_9 328$.

$$\log_x\left(\log_3\frac{9^x-328}{78}\right)<1\Leftrightarrow\log_3\frac{9^x-328}{78}<x$$

Khi đó:

$$\Leftrightarrow 9^x-328<78.3^x\Leftrightarrow 3^{2x}-78.3^x-328<0\Leftrightarrow 3^x<82\Leftrightarrow x<\log_3 82.$$

So với điều kiện, suy ra $\log_9 328<x<\log_3 82$.

Vì $x\in\mathbb{N}$ nên $x\in\{3;4\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $\log_x\left(\log_3\frac{9^x-328}{78}\right)<1$ là 7.

Câu 159: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+31\right)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\ge 0$?

A. 27. **B.** Vô số. **C.** 28. **D.** 26.

Lời giải

Chọn A

$$\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+31\right)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+31\right)\ge 0\\32-2^{x-1}\ge 0\end{cases}\right.\left.\begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+31\right)\le 0\\32-2^{x-1}\le 0\end{cases}\right.$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow\left[\begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right)\ge\log_3\left(x+31\right)\\2^{x-1}\le 32\end{cases}\right.\left.\begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right)\le\log_3\left(x+31\right)\\2^{x-1}\ge 32\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x^2+1\ge x+31\\x+31>0\\2^{x-1}\le 2^5\end{cases}\right.\left.\begin{cases}x^2+1\le x+31\\2^{x-1}\ge 2^5\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x^2-x-30\ge 0\\x>-31\\x\le 6\end{cases}\right.\left.\begin{cases}x^2-x-30\le 0\\x\ge 6\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-31<x\le -5\\x=6\end{array}\right.$$

Mà $x\in\mathbb{N}$ nên $x\in\{-30;-29;-28;....;-6;-5;6\}$.

Vậy có 27 số nguyên x thỏa đề.

Câu 160: Bất phương trình $\log_2\left(x^2-x-2\right)\ge\log_{0,5}\left(x-1\right)+1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc [0;2023]?

A. 2019. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn C

$$\log_2\left(x^2-x-2\right)\ge\log_{0,5}\left(x-1\right)+1$$

Ta có:

$$\begin{cases}x-1>0\\x^2-x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x>2$$

Điều kiện:

$$\log_2\left(x^2-x-2\right)\ge\log_{0,5}\left(x-1\right)+1\Leftrightarrow\log_2\left(x^2-x-2\right)\ge-\log_2\left(x-1\right)+1$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow\log_2\left(x^2-x-2\right)(x-1)\ge1\Leftrightarrow\left(x^2-x-2\right)(x-1)\ge2\Leftrightarrow x^3-2x^2-x\ge0$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[1-\sqrt{2};0\right]\cup\left[1+\sqrt{2};+\infty\right)$$

$$\Rightarrow x\in\left[1+\sqrt{2};+\infty\right)$$

So với điều kiện

Vậy có 2021 nghiệm nguyên x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 161: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2\left(8x^2\right)+\log_3\left(3x^3\right)\ge\log_2 x.\log_3 x$?

A. 27. **B.** 8. **C.** 134. **D.** 133.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>0$. Với điều kiện trên, bpt tương đương với:

$$3+2\log_2 x+1+3\log_3 x-\log_2 x.\log_3 x\ge0$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow2\log_2 x+3\log_3 2.\log_2 x-\log_2 x.\log_3 2.\log_2 x+4\ge0$$

$$\Leftrightarrow-\log_3 2.\left(\log_2 x\right)^2+\left(2+3\log_3 2\right).\log_2 x+4\ge0$$

$$\Leftrightarrow\underbrace{-0,897...}_{A}\le\log_2 x\le\underbrace{7,067...}_{B}\Leftrightarrow0,536...\le x\le134,087...$$

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{1;2;...;134\}$.

Câu 162: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn bất phương trình $\log_2(2x).\log\left(\frac{100}{x}\right)>2$?

A. 198. **B.** 48. **C.** 96. **D.** 149.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x>0$.

$$\log_2(2x).\log\left(\frac{100}{x}\right)>2 \Leftrightarrow (1+\log_2 x)(2-\log x)>2$$

Phương trình:

$$\Leftrightarrow 2\log_2 x-\log x-\log_2 x.\log x>0 \Leftrightarrow 2\log_2 x-\log 2.\log_2 x-\log_2 x.\log x>0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x(2-\log 2-\log x)>0 \Leftrightarrow \log_2 x(\log 50-\log x)>0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_2 x>0\\ \log 50-\log x>0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2 x<0\\ \log 50-\log x<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<50\\ x<1 \vee 50<x\end{array}\right. \Leftrightarrow 0<x<50$$

.

Câu 163: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(\log_3\left(x^2+10\right)-\log_3(x+40)\right)\left(32-2^{x-1}\right)\geq 0$?

A. Vô số. **B.** 38. **C.** 36. **D.** 37.

Lời giải

Chọn C

$$\left(\log_3\left(x^2+10\right)-\log_3(x+40)\right)\left(32-2^{x-1}\right)\geq 0$$

Ta có:

$$x+40>0 \Leftrightarrow x>-40 \ (*)$$

Điều kiện: .

$$\left[\begin{array}{l}\log_3\left(x^2+10\right)-\log_3(x+40)=0\\ 32-2^{x-1}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3\left(x^2+10\right)=\log_3(x+40)\\ 32=2^{x-1}\end{array}\right.$$

Xét .

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+10=x+40\\ 5=x-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-x-30=0\\ x=6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-5\\ x=6\end{array}\right.$$

là nghiệm của bất phương trình.

$$\begin{cases}\log_3\left(x^2+10\right)-\log_3(x+40)\neq 0\\ 32-2^{x-1}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq -5\\ x\neq 6\end{cases}$$

Xét .

$$\left(\log_3\left(x^2+10\right)-\log_3(x+40)\right)\left(32-2^{x-1}\right)\geq 0$$

Khi đó

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\left(x^2+10\right)-\log_3\left(x+40\right)>0 \\ 32-2^{x-1}>0 \end{cases} \cup \begin{cases} \log_3\left(x^2+10\right)-\log_3\left(x+40\right)<0 \\ 32-2^{x-1}<0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\left(x^2+10\right)>\log_3\left(x+40\right) \\ 32>2^{x-1} \end{cases} \cup \begin{cases} \log_3\left(x^2+10\right)<\log_3\left(x+40\right) \\ 32<2^{x-1} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+10>x+40 \\ 5>x-1 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2+10<x+40 \\ 5<x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-30>0 \\ x-6<0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-x-30<0 \\ x-6>0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-5 \cup x>6 \\ x<6 \end{cases} \cup \begin{cases} -5<x<6 \\ x>6 \end{cases} \Leftrightarrow x<-5.$$

Từ các trường hợp trên, ta có nghiệm của bất phương trình là $-40<x\le -5 \cup x=6$.

Mà x nguyên nên ta có: $x\in\{-39;-38;\ldots -5;6\}$.

Câu 164: Cho bất phương trình $\log_3(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\ge \log_4(x+1)^2-\log_3\left(\frac{x-2}{4}\right)-2$. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x+1>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Rightarrow x>2$.

Trên điều kiện, bất phương trình $\Leftrightarrow \log_3\left[\frac{(x+1)(x-2)}{4}\right]\ge \log_2\left[\frac{(x+1)(x-2)}{4}\right]$

$$\Leftrightarrow \log_3 2.\log_2\left[\frac{(x+1)(x-2)}{4}\right]\ge \log_2\left[\frac{(x+1)(x-2)}{4}\right]$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left[\frac{(x+1)(x-2)}{4}\right]\le 0 \Rightarrow (x+1)(x-2)\le 4 \Leftrightarrow -2\le x\le 3.$$

Kết hợp điều kiện $x>2$, ta được: $2<x\le 3$ và $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=3$.

Câu 165: Số nghiệm nguyên thuộc $[-100;100]$ của bất phương trình $\log_5\left(3^x-1\right).\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{3^x-1}{25}\right)\le -143$ là

A. 81. **B.** 79. **C.** 83. **D.** 84.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của bất phương trình là $3^x-1>0\Leftrightarrow x>0$ (*).

$$\log_5\left(3^x-1\right).\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{3^x-1}{25}\right)\le -143\Leftrightarrow \log_5\left(3^x-1\right)\left[\log_5\left(\frac{25}{3^x-1}\right)\right]\le -143$$

Ta có,

$$\Leftrightarrow \log_5\left(3^x-1\right)\left[2-\log_5\left(3^x-1\right)\right]+143\le 0 \quad (1)$$

Đặt $t=\log_5\left(3^x-1\right)$, bất phương trình (1) trở thành: $t\left(2-t\right)+143\le 0$

$$\Leftrightarrow -t^2+2t+143\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le -11 \\ t\ge 13 \end{array}\right.$$

.

Với $t\le -11\Rightarrow \log_5\left(3^x-1\right)\le -11\Rightarrow 3^x-1\le 5^{-11}\Rightarrow x<1$.

Do x nguyên thoả điều kiện $x>0$ nên trường hợp này không tồn tại giá trị x.

Với $t\ge 13\Rightarrow \log_5\left(3^x-1\right)\ge 13\Rightarrow 3^x-1\ge 5^{13}\Rightarrow 3^x\ge 1+5^{13}$.

Do x nguyên thoả điều kiện $x>0$ và $x\in[-100;100]$ nên chọn $x\in\{20,21,...,100\}$.

Vậy có 81 số nguyên x thoả mãn điều kiện.

5. Vận dụng kiến thức vào toán thực tế

Câu 166: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $8,4\%/$ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo(lãi kép). Hỏi sau ít nhất n năm $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ thì người đó có được số tiền nhiều hơn 200 triệu đồng.

A. $n=8$. **B.** $n=9$. **C.** $n=10$. **D.** $n=7$.

Lời giải:

Chọn B

Ta có $100(1+8,4\%)^n > 200 \Rightarrow (1+8,4\%)^n > 2 \Rightarrow n > \log_{(1+8,4\%)} 2 \approx 8,59$.

Câu 167: Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất $6,1\%/$ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 11 năm. **B.** 12 năm. **C.** 13 năm. **D.** 10 năm.

Lời giải

Chọn B

Gọi số tiền ban đầu người đó gửi là A (đồng), $A > 0$.

Số tiền lãi và gốc sau n năm là $T = a(1+6,1\%)^n$.

Ta có $a(1+6,1\%)^n = 2a \Leftrightarrow (1+6,1\%)^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{1+6,1\%} 2 \approx 11,7$.

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu

Câu 168: Một người gửi ngân hàng 18 triệu đồng theo hình thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất $8\%/$ năm. Hỏi sau 7 năm người đó có bao nhiêu tiền? (đơn vị: triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 31,17. **B.** 30,85. **C.** 31,45. **D.** 31,34.

Lời giải

Chọn B

Theo công thức lãi kép, ta có: $A = A_0(1+r\%)^n$

Trong đó A_0 là số tiền ban đầu gửi vào; $r\%$ là lãi suất của một kì hạn; n là số kì hạn.

Sau 7 năm người đó có số tiền là $A = 18.(1+8\%)^7 \approx 30,85$.

Câu 169: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 13 năm. **B.** 12 năm. **C.** 14 năm. **D.** 11 năm.

Lời giải

Chọn B

Ta có số tiền cả gốc và lãi người đó nhận được sau n năm là: $S_n = 50.(1+6\%)^n = 50.1,06^n$

$S_n > 100 \Leftrightarrow 50.1,06^n > 100 \Leftrightarrow n > 11,9$

.

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó sẽ nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi là hơn 100 triệu đồng.

Câu 170: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $0,4\%/$ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ta khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?

A. 102423000 (đồng). **B.** 102160000 (đồng).

C. 102017000 (đồng). **D.** 102424000 (đồng).

Lời giải

Chọn D

Sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền là $100000000.(1+0,4\%)^6 \approx 102424000$ (đồng).

Câu 171: Một người gửi ngân hàng 18 triệu đồng theo hình thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất $8\%/$ năm. Hỏi sau 7 năm người đó có bao nhiêu tiền? (đơn vị: triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 31,17. **B.** 30,85. **C.** 31,45. **D.** 31,34.

Lời giải

Chọn B

Theo công thức lãi kép, ta có: $A = A_0(1+r\%)^n$

Trong đó A_0 là số tiền ban đầu gửi vào; $r\%$ là lãi suất của một kì hạn; n là số kì hạn.

Sau 7 năm người đó có số tiền là $A = 18.(1+8\%)^7 \approx 30,85$.

Câu 172: Ông A bị nhiễm một loại virus nên phải nhập viện và được điều trị ngay lập tức. Kể từ ngày nhập viện, sau mỗi ngày điều trị thì lượng virus trong cơ thể ông A giảm đi 10% so với ngày trước đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày thì ông A sẽ được xuất viện, biết rằng ông A được xuất viện khi lượng virus trong cơ thể không quá 30% so với ngày nhập viện?

A. 11 ngày **B.** 12 ngày **C.** 13 ngày **D.** 14 ngày

Lời giải

Chọn B

Gọi K là lượng virus trong cơ thể ông A khi bắt đầu nhập viện.

Sau mỗi ngày điều trị thì lượng virus trong cơ thể ông A giảm đi 10% so với ngày trước đó, nên lượng virus trong cơ thể ông A ở ngày thứ n là : $T \le K.(1-10\%)^n$

Ông A được xuất viện khi lượng virus trong cơ thể không quá 30% so với ngày nhập viện, nên ta có : $K.(1-10\%)^n \le K.30\% \Leftrightarrow (1-10\%)^n \le 30\% \Leftrightarrow n \le \log_{(1-10\%)} 30\% \Leftrightarrow n \ge 11.4$

Vậy, sau ít nhất 12 ngày thì ông A sẽ được xuất viện.

Câu 173: Năm 2022, một hãng công nghệ có 30 triệu người dùng phần mềm của họ. Hãng đặt kế hoạch, tron 3 năm tiếp theo, mỗi năm số lượng người dùng phần mềm tăng 8% so với năm trước và từ năm thứ 4 trở đi, số lượng người dùng phần mềm sẽ tăng 5% so với năm trước đó. Theo kế hoạch đó, hỏi bắt đầu từ năm nào số lượng người dùng phần mềm của hãng sẽ vượt quá 50 triệu người?

A. Năm 2029. **B.** Năm 2028. **C.** Năm 2031. **D.** Năm 2030.

Lời giải

Chọn C

Số lượng người dùng phần mềm của công ty sau 3 năm: $T_1 = 30.\left(1+\frac{8}{100}\right)^3 = 37,79136$.

Số lượng người dùng phần mềm của công ty sau n năm tiếp theo: $T_2 = 37,79.\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$

Để người dùng vượt quá 50 triệu người thì $37,79136.\left(1+\frac{5}{100}\right)^n > 50 \Leftrightarrow n > 5$, $n \in \mathbb{N}$ nên $n = 6$

Suy ra cần ít nhất $3+6=9$ năm.

Năm cần tìm sẽ là: $2022+9=2031$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho phương trình $9^{2x}.27^{x^2} = \frac{1}{3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $x=0$ là một nghiệm của phương trình.

b) $x=-1$ không phải là nghiệm của phương trình.

c) $S=\{1;-1\}$ là tập nghiệm của phương trình.

d) $(x_1)^2+(x_2)^2=\frac{10}{9}$, với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên.

Lời giải

a) Sai: Thay $x=0$ vào phương trình ta được $9^0.27^0=\frac{1}{3}$ (sai).

b) Sai: Thay $x=-1$ vào phương trình ta được $9^{-2}.27^1=\frac{1}{3}$ (đúng)

c) Sai: Thay $x=1$ vào phương trình ta được $9^2.27^1=\frac{1}{3}$ (sai)

d) Đúng

$9^{2x}.27^{x^2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3^{4x}.3^{3x^2}=3^{-1}\Leftrightarrow 3^{4x+3x^2}=3^{-1}\Leftrightarrow 4x+3x^2=-1\Leftrightarrow 3x^2+4x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\frac{-1}{3}\end{array}\right.$. Suy ra $\left(x_1\right)^2+\left(x_2\right)^2=\frac{10}{9}$.

Câu 2: Cho phương trình $9^x-2(2m+1)3^x+3(4m-1)=0\,(1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với $m=-\frac{1}{2}$ phương trình (1) không phải phương trình mũ cơ bản

b) Phương trình có nghiệm $x=2$ khi $m=\frac{5}{2}$

c) Với $m=\frac{1}{4}$ phương trình (1) có một nghiệm

d) Phương trình (1) có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2)=12$. Giá trị của m thuộc khoảng $(1;3)$

Lời giải

a) Sai: Với $m=-\frac{1}{2}$ phương trình (1) trở thành $9^x-9=0\Leftrightarrow 9^x=9$ là phương trình mũ cơ bản

b) Sai: Phương trình có nghiệm $x=2$ nên

$9^2-2(2m+1)3^2+3(4m-1)=0\Leftrightarrow 81-36m-18+12m-3=0\Leftrightarrow 24m=60\Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$

c) Đúng: Với $m=\frac{1}{4}$ phương trình (1) trở thành $9^x-3.3^x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=0\\3^x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1$ vậy phương trình có một nghiệm

d) Đúng: Đặt $t=3^x$, $t>0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2-2(2m+1)t+3(4m-1)=0$ (1)

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 8m + 4 > 0 \\ 2(2m+1) > 0 \\ 3(4m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -\dfrac{1}{2} \\ m > \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm là $t = 4m-1$ và $t = 3$.

Với $t = 4m-1$ thì $3^{x_1} = 4m-1 \Leftrightarrow x_1 = \log_3(4m-1)$.

Với $t = 3$ thì $3^{x_2} = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1$.

Ta có $(x_1+2)(x_2+2) = 12 \Leftrightarrow x_1 = 2 \Leftrightarrow \log_3(4m-1) = 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{2}$ (thỏa điều kiện).

Vậy $m = \dfrac{5}{2}$ là giá trị cần tìm nên m thuộc khoảng $(1;3)$.

Câu 3: Cho phương trình $2^{x^2-x} + 2^{x^2-x-2} = 4^{x^2-x-1} + 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình có nghiệm $x = 1$.

b) Phương trình có ngiệm $x = -1$.

c) Đặt $2^{x^2-x-1} = t$ phương trình đã cho trở thành $2t^2 - 5t + 2 = 0$

d) Tổng các nghiệm của phương trình bằng 2.

Lời giải

Ta có: $2^{x^2-x} + 2^{x^2-x-2} = 4^{x^2-x-1} + 1$

$$\Leftrightarrow 2.2^{x^2-x-1} + \frac{1}{2}.2^{x^2-x-1} = \left(2^{x^2-x-1}\right)^2 + 1 \Leftrightarrow 2.\left(2^{x^2-x-1}\right)^2 - 5.2^{x^2-x-1} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-x-1} = 2 \\ 2^{x^2-x-1} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 1 = 1 \\ x^2 - x - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

a) Đúng

b) Đúng

c) Đúng

d) Đúng

Câu 4: Cho phương trình $3^{x-5} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+1}}$ (1). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $x = 1$ là nghiệm của phương trình (1).

b) $x = 3$ không là nghiệm của phương trình (1).

c) Điều kiện của x để vế phải của (1) có nghĩa là $x \geq -1$.

d) Phương trình (1) có tổng bình phương các nghiệm lớn hơn 30.

Lời giải

a) Sai: $x=1$ là nghiệm của phương trình (1)

Thay $x=1$ vào (1) ta được: $3^{-4}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$: vô lý.

Do đó $x=1$ không là nghiệm của phương trình (1)

b) Sai: $x=3$ không là nghiệm của phương trình (1).

Thay $x=3$ vào (1) ta được: $3^{-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\Leftrightarrow\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$: đúng.

Do đó $x=3$ là nghiệm của phương trình (1)

c) Đúng: Điều kiện của x để vế phải của (1) có nghĩa là $x\ge -1$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+1}}$ có nghĩa khi $x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge -1$.

d) Đúng:

$$3^{x-5}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow 3^{x-5}=3^{-\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=5-x\Leftrightarrow\begin{cases}5-x\ge 0\\ x+1=(5-x)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 5\\ x^2-11x+24=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 5\\ \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=5\end{array}\right.$$

Suy ra tổng bình phương các nghiệm là $3^2+5^2=9+25=34$.

Vậy phương trình (1) có tổng bình phương các nghiệm lớn hơn 30:

Câu 5: Cho phương trình $27^{2x-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2}\ (1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình (1) tương đương với phương trình $27^{2x-3}=3^{-x^2+2}$.

b) $x=1$ là một nghiệm của phương trình (1).

c) Phương trình (1) tương đương với phương trình $3^{3(2x-3)}=3^{-x^2-2}$.

d) Tổng các nghiệm của phương trình (1) bằng 6.

Lời giải

a) Sai: Phương trình (1) tương đương với với phương trình $27^{2x-3}=3^{-x^2-2}$.

b) Đúng: Thay $x=1$ vào phương trình ta được $27^{2.1-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{1^2+2}\Leftrightarrow 27^{-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{3}$ luôn đúng.

c) Đúng: Phương trình (1) tương đương với phương trình $27^{2x-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2}\Leftrightarrow 3^{3(2x-3)}=3^{-x^2-2}$

d) Sai: Ta có $27^{2x-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2}\Leftrightarrow 3^{3(2x-3)}=3^{-x^2-2}\Leftrightarrow 6x-9=-x^2-2\Leftrightarrow x^2+6x-7=0$

$\Rightarrow x_1+x_2=-6$.

$(*) \Leftrightarrow 2^6 = 2m - 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{65}{2} = 32.5$

Do đó: $m_0 = 32,5$. Vậy .

Câu 6: Cho phương trình $4^{x^2} + (m-2).2^{x^2} - 2m = 0\ (1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khi $m = -1$ thì phương trình (1) có đúng hai nghiệm và hai nghiệm đó trái dấu nhau.

b) Phương trình (1) luôn có ít nhất hai nghiệm.

c) Khi $m < -1$ thì phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt.

d) Khi phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt $x_1 > x_2 > 0 > x_3 > x_4$; số giá trị nguyên m để $x_1 + x_2 < 3$ là 14.

Lời giải

Ta có: $4^{x^2} + (m-2).2^{x^2} - 2m = 0 \Leftrightarrow 4^{x^2} - 2.2^{x^2} + m.2^{x^2} - 2m = 0 \Leftrightarrow \left(2^{x^2} + m\right).\left(2^{x^2} - 2\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2} = -m \\ 2^{x^2} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2} = -m \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

a) Sai: Khi $m = -1$ thì phương trình đã cho thành $\left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

b) Đúng.

c) Sai: Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $2^{x^2} = -m$ có hai nghiệm phân biệt và $m \neq -2$ khi và chỉ khi $m < -1; m \neq -2$.

d) Sai. Khi $m < -1; m \neq -2$ thì phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt:

$-1;1;-\sqrt{\log_2(-m)};\sqrt{\log_2(-m)}$

Theo đề $1 + \sqrt{\log_2(-m)} < 3 \Leftrightarrow \sqrt{\log_2(-m)} < 2 \Leftrightarrow \log_2(-m) < 4 \Leftrightarrow m > -16$.

Do đó $-16 < m < -1;\ m \neq -2$. Suy ra có 13 giá trị nguyên của m.

Câu 7: Cho phương trình $25^x - 6.5^x + 5 \geq 0 \quad (1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $x = \dfrac{1}{2}$ là một nghiệm của bất phương trình (1).

b) $x = -1$ là một nghiệm của bất phương trình (1).

c) Với $t = 5^x,\ (t > 0)$ thì bất phương trình (1) trở thành bất phương trình $t^2 - 6t + 5 \geq 0$.

d) Tập nghiệm của bất phương trình (1) là: $S = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$

Lời giải

a) Sai: Với $x = \dfrac{1}{2}$ thay vào bất phương trình (1) không thỏa mãn.

b) Đúng: Với $x = -1$ thay vào bất phương trình (1) thỏa mãn.

c) Đúng: Với $t = 5^x,\ (t > 0)$ thì bất phương trình (1) trở thành bất phương trình $t^2 - 6t + 5 \geq 0$.

d) Đúng: Ta có: Đặt $t = 5^x,\ (t > 0)$ thì bất phương trình (1) trở thành bất phương trình

$$t^2 - 6t + 5 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 5 \\ t \leq 1 \end{array}\right.$$

Với $t \geq 5$ thì $5^x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Với $t \leq 1$ thì $5^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$.

Tập nghiệm của bất phương trình (1) là: $S = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Câu 8: Cho hai biểu thức $f(x) = 0,1^{x^2 - 3x + m}$ và $g(x) = 10^{1-x}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Bất phương trình $g(x) > 100$ có tập nghiệm là $(-\infty; 3)$.

b) Khi $m = -4$ thì bất phương trình $f(x) < 1$ có tập nghiệm là $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

c) Khi $m=2$ thì bất phương trình $f(x)\ge g(x)$ có 3 nghiệm nguyên.

d) $f(x)\le g(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m\le 3$.

Lời giải

a) Sai: $g(x)>100\Leftrightarrow 10^{1-x}>100\Leftrightarrow 10^{1-x}>10^2\Leftrightarrow 1-x>2\Leftrightarrow x<-1$.

Suy ra bất phương trình $g(x)>100$ có tập nghiệm là $(-\infty;-1)$.

b) Đúng: Khi $m=-4$ thì $f(x)<1\Leftrightarrow 0,1^{x^2-3x-4}<0,1^0\Leftrightarrow x^2-3x-4>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-1\\x>4\end{array}\right.$.

Suy ra bất phương trình $f(x)<1$ có tập nghiệm là $(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

c) Đúng: Khi $m=2$ thì $f(x)\ge g(x)\Leftrightarrow 0,1^{x^2-3x+2}\ge 10^{1-x}\Leftrightarrow 10^{-x^2+3x-2}\ge 10^{1-x}$

$\Leftrightarrow -x^2+3x-2\ge 1-x\Leftrightarrow -x^2+4x-3\ge 0\Leftrightarrow 1\le x\le 3$.

Suy ra bất phương trình $f(x)\ge g(x)$ có 3 nghiệm nguyên.

d) Sai: $f(x)\le g(x),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 0,1^{x^2-3x+m}\le 10^{1-x},\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 10^{-x^2+3x-m}\le 10^{1-x},\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -x^2+3x-m\le 1-x,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -x^2+4x-m-1\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 4^2-4.(-1).(-m-1)\le 0\Leftrightarrow m\ge 3.$

Suy ra $f(x)\le g(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m\ge 3$.

Câu 9: Cho bất phương trình: $9^x-2(m+1)3^x-3-2m>0\ (1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu đặt $t=3^x(t>0)$ thì bất phương trình (1) trở thành bất phương trình $t^2-2(m+1)t-3-2m>0$.

b) Bất phương trình (1) luôn có nghiệm $x=0$ với mọi giá trị của tham số m.

c) Với $m=1$ bất phương trình (1) có tập nghiệm là $S=(1;+\infty)$.

d) Có 2 giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^x-2(m+1)3^x-3-2m>0$ nghiệm đúng với mọi số thực x.

Lời giải

$9^x-2(m+1)3^x-3-2m>0\ (1)\Leftrightarrow 3^{2x}-2(m+1).3^x-3-2m>0$

a) Đúng:

Khi đặt $t=3^x(t>0)$ thì (1) trở thành phương trình $t^2-2(m+1)t-3-2m>0$.

b) Sai: Bất phương trình (1) có nghiệm $x=0$ với mọi tham số m ta có

$9^0-2(m+1)3^0-3-2m>0(\forall m)\Leftrightarrow -4-4m>0(\forall m)$

.

c) Sai: Với $m=1$ bất phương trình (1) trở thành $9^x-4.3^x-5>0$.

ta có $9^x-4.3^x-5>0\Leftrightarrow 3^x>1\Leftrightarrow x>0$.

bất phương trình có tập nghiệm là $S=(0;+\infty)$.

d) Sai: Đặt $t=3^x$, $t>0$. Khi đó, bất phương trình trở thành:

$t^2-2(m+1)t-3-2m>0\Leftrightarrow (t+1)(t-3-2m)>0$

$\Leftrightarrow t-3-2m>0\Leftrightarrow t>3+2m$ (1) (Do $t>0$).

Để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in\square$ thì (1) phải nghiệm đúng với mọi $t\in(0;+\infty)$.

Điều này tương đương với $3+2m\le 0\Leftrightarrow m\le -\frac{3}{2}$.

Không có giá trị nguyên dương nào của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 10: Cho phương trình $\log_2^2(x)=1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện của phương trình là $x>0$.

b) $x=2$ là nghiệm của phương trình.

c) Phương trình tương đương với $\log_2 x = 1$.

d) Phương trình đã cho chỉ có một nghiệm.

Lời giải

a) Đúng: Điều kiện của phương trình là $x > 0$.

b) Đúng: Thay $x = 2$ vào phương trình ta được $\log_2^2(2) = 1^2 = 1$ (có thể sử dụng MTCT)

c) Sai: Ta có $\log_2^2(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 1\\ \log_2 x = -1\end{array}\right.$.

d) Sai: $\log_2^2(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 1\\ \log_2 x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2\\ x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$. Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Câu 11: Cho phương trình $\log_2\left(x^2 - x + 2\right) = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x > 0$.

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c) Tổng bình phương các nghiệm là 1.

d) Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Lời giải

a) Sai: Điều kiện xác định của phương trình là $x^2 - x + 2 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Đúng: $\log_2\left(x^2 - x + 2\right) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0\\ x = 1\end{array}\right.$.

c) Đúng: Tổng bình phương các nghiệm là $0^2 + 1^2 = 1$.

d) Sai: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 0$ và $x = 1$.

Câu 12: Cho hai hàm số $y = \log_2 x, y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2x-1}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = \log_2 x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

b) Hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2x-1}\right)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số $y=\log_2 x$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x=1$.

d) Phương trình $\log_2 x=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2x-1}\right)$ có 2 nghiệm.

Lời giải

a) Đúng: Cơ số $a=2>1$.

b) Sai: Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

c) Đúng: $\log_2 x=0\Leftrightarrow x=1$.

d) Sai: $\log_2 x=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2x-1}\right)\Leftrightarrow \log_2 x=\log_2(2x-1)\Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x=2x-1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Câu 13: Cho phương trình $\log_3\left(3^x-1\right).\log_{27}\left(3^{x+2}-9\right)=m$ với m là tham số. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x\geq 0$.

b) Khi $m=1$ phương trình có một nghiệm là $x=\log_3 2$.

c) Đặt $\log_3\left(3^x-1\right)=t$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $t^2+2t-3m=0$.

d) Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m>-\frac{1}{3}$.

Lời giải

a) Sai: Điều kiện xác định: $\begin{cases}3^x-1>0\\ 3^{x+2}-9>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0$.

b) Sai: Khi $m=1$ phương trình có dạng:

$$\log_3\left(3^x-1\right).\log_{27}\left(3^{x+2}-9\right)=1\Leftrightarrow \log_3\left(3^x-1\right).\log_{3^3}\left[3^2\left(3^x-1\right)\right]=1$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(3^x-1\right).\left[\log_3\left(3^x-1\right)+2\right]=3\Leftrightarrow \left[\log_3\left(3^x-1\right)\right]^2+2\log_3\left(3^x-1\right)-3=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3\left(3^x-1\right)=1\\ \log_3\left(3^x-1\right)=-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x-1=3\\ 3^x-1=\dfrac{1}{27}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=4\\ 3^x=\dfrac{28}{27}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\log_3 4\\ x=\log_3\dfrac{28}{27}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\log_3 2\\ x=\log_3\dfrac{28}{27}\end{array}\right.$$

.

$$\log_3\left(3^x-1\right).\log_{27}\left(3^{x+2}-9\right)=m \Leftrightarrow \log_3\left(3^x-1\right).\log_{3^3}\left[3^2\left(3^x-1\right)\right]=m$$

c) Đúng:

$$\Leftrightarrow \log_3\left(3^x-1\right).\left[\log_3\left(3^x-1\right)+2\right]=3m \Leftrightarrow \left[\log_3\left(3^x-1\right)\right]^2+2\log_3\left(3^x-1\right)-3m=0$$

.

Khi đó đặt $\log_3\left(3^x-1\right)=t$ thì phương trình đã cho trở thành $t^2+2t-3m=0 \quad (1)$.

d) Đúng: Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=1+3m>0 \Leftrightarrow m>-\dfrac{1}{3}$.

Câu 14: Cho phương trình $\log_2\left(x^2-3x\right)=\log_4\left(x-3\right)^2+2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x<0$ hoặc $x>3$.

b) Phương trình tương đương với $\log_2\left(x^2-3x\right)=\log_2\left(x-3\right)+2$.

c) Phương trình có một nghiệm duy nhất.

d) Tổng bình phương các nghiệm của phương trình bằng 32.

Lời giải

a) Đúng: Điều kiện: $\begin{cases}x^2-3x>0\\ \left(x-3\right)^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<0\vee x>3\\ x\neq 3\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<0\\ x>3\end{array}\right.$

b) Sai: Phương trình tương đương với $\log_2\left(x^2-3x\right)=\log_2\left|x-3\right|+2$

c) Sai.

$$\log_2\left(x^2-3x\right)=\log_2\left|x-3\right|+\log_2 4 \Leftrightarrow x^2-3x=4\left|x-3\right|$$

d) Đúng: Có

$$x^2-3x=-4\left(x-3\right) \Leftrightarrow x^2+x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-4\left(nhan\right)\\ x=3\left(loai\right)\end{array}\right.$$

TH1: Với $x<0$ ta có phương trình:

$$x^2-3x=4(x-3)\Leftrightarrow x^2-7x+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4(nhan)\\x=3(loai)\end{array}\right.$$

TH2: Với $x>3$ ta có phương trình:

Câu 15: Cho phương trình $\log_2(x-1)-\log_2(x^2-5x+m)=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với $m=0$ điều kiện xác định của phương trình là $\left[\begin{array}{l}x>5\\x<0\end{array}\right.$.

b) Với $m=0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

c) Với $m=7$ thì tổng các nghiệm của phương trình bằng 6.

d) Với $m<3$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

a) Sai: Với $m=0$, điều kiện xác định của phương trình là $\left\{\begin{array}{l}x-1>0\\x^2-5x>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>1\\\left[\begin{array}{l}x>5\\x<0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow x>5$.

b) Sai: Với $m=0$ thì phương trình trở thành:

$$\log_2(x-1)=\log_2(x^2-5x)\Leftrightarrow x^2-5x=x-1\Leftrightarrow x^2-6x+1=0\Leftrightarrow x=3\pm2\sqrt{2}$$

Đối chiếu với điều kiện ta được $x=3+2\sqrt{2}$.

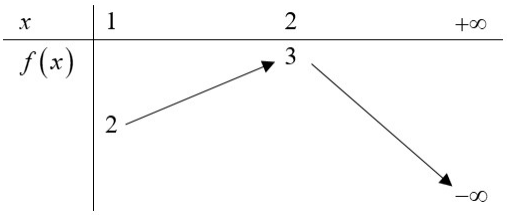
c) Đúng: Với $m=7$ thì phương trình trở thành:

$$\log_2(x-1)=\log_2(x^2-5x+7)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-1>0\\x^2-5x+7=x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>1\\x^2-6x+8=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>1\\\left[\begin{array}{l}x=2\\x=4\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=4\end{array}\right.$$

d) Sai: Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2(x-1)=\log_2(x^2-3x+m)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>1\\x^2-3x+m=x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>1\\m=-x^2+4x-1\ (1)\end{array}\right.$$

Xét hàm số $f(x)=-x^2+4x-1, x\in(1;+\infty)$, ta có bảng biến thiên:



Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc khi và chỉ phi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(1;+\infty)$.

Từ bảng biến thiên suy ra $m \in (2;3)$

Câu 16: Cho phương trình $\log_3^2 x - m\log_3 x + 2m - 7 = 0$ (1) với m là tham số. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình (1) là $x \in [0; +\infty)$.

b) Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $\forall m \in \mathbb{R}$.

c) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 81$ khi $m = 4$.

d) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt phân biệt trái dấu khi $m < \frac{7}{2}$.

Lời giải

a) Sai: Điều kiện $x > 0$

b) Đúng: Đặt $t = \log_3 x$ thì phương trình (1) trở thành $t^2 - mt + 2m - 7 = 0$.

$\Delta = m^2 - 8m + 28 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$

Như vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2.

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

c) Đúng: Theo giả thiết $x_1.x_2 = 81 \Leftrightarrow \log_3(x_1x_2) = \log_3 81 = 4 \Leftrightarrow \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 4$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 = 81$ khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 + t_2 = 4$.

Vậy $m = 4$

d) Sai: Vì điều kiện $x>0$ nên phương trình (1) không thể có hai nghiệm trái dấu.

Câu 17: Cho phương trình $3\log_{27}\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]+\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-x+1-3m\right)=0$ (1) với m là tham số thực. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình (1) tương đương $\log_3\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]=\log_3\left(x^2-x+1-3m\right)$

b) Khi $m=0$ thì tích tất cả các nghiệm của phương trình (1) bằng 2.

c) Có 14 giá trị nguyên của m để phương trình (1) có tập xác định là $\mathbb{R}$.

d) Có 21 giá trị nguyên của m trên đoạn $[-20;20]$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

$$(1)\Leftrightarrow 3.\frac{1}{3}\log_3\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]-\log_3\left(x^2-x+1-3m\right)=0$$

a) Đúng:

$\Leftrightarrow \log_3\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]=\log_3\left(x^2-x+1-3m\right)$.

b) Sai: Khi $m=0$ thì phương trình (1) trở thành:

$$\log\left(2x^2-3x+1\right)=\log_3\left(x^2-x+1\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-3x+1=x^2-x+1\\x^2-x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

.

Vậy tích tất cả các nghiệm của phương trình (1) bằng 0.

c) Sai: Phương trình (1) có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}2x^2-(m+3)x+1-m>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\x^2-x+1-3m>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_1=m^2+14m+1<0\\\Delta_2=12m-3<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7-4\sqrt{3}<m<-7+4\sqrt{3}\\m<\frac{1}{4}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow -7-4\sqrt{3}<m<-7+4\sqrt{3}$. Vậy có 13 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

$$(1)\Leftrightarrow \log_3\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]=\log_3\left(x^2-x+1-3m\right)$$

d) Đúng:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1-3m>0 \\ 2x^2-(m+3)x+1-m=x^2-x+1-3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1-3m>0 \\ x^2-(m+2)x+2m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1-3m>0 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=m \end{array}\right. \end{cases}$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m\neq 2 \\ 2^2-2+1-3m>0 \\ m^2-m+1-3m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ 3-3m>0 \\ m^2-4m+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ \left[\begin{array}{l} m>2+\sqrt{3} \Leftrightarrow m<2-\sqrt{3} \\ m<2-\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases}$$

.

Vậy có 21 giá trị nguyên của m trên đoạn $[-20;20]$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Câu 18: Cho bất phương trình $\log_m\left(x^2+x+3\right)\le \log_m\left(2x^2-x\right)$ (1). Với m là tham số thực dương khác 1, x là số thực dương và $x=1$ là một nghiệm của bất phương trình (1). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

a) Với $m>1$ thì bất phương trình $(1)\Leftrightarrow x^2+x+3\ge 2x^2-x$.

b) Điều kiện của bất phương trình (1) là $x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

c) Với $x=1$ là nghiệm của bất phương trình (1) suy ra $m>1$.

d) Gọi $S=(a;b],(a,b\in\mathbb{Z})$ là tập nghiệm của bất phương trình thì $2a+3b=10$.

Lời giải

$$\log_m\left(x^2+x+3\right)\le \log_m\left(2x^2-x\right)\ (1)$$

Xét bất phương trình:

a) Đúng: Với $m>1$, $\log_m\left(x^2+x+3\right)\le \log_m\left(2x^2-x\right)\Leftrightarrow x^2+x+3\ge 2x^2-x$.

b) Đúng: Điều kiện của bất phương trình (1) là $x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

c) Sai: Với $x=1$, bất phương trình (1) có dạng: $\log_m 5\le \log_m 1\Leftrightarrow 0<m<1$.

d) Đúng: Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow x^2+x+3\ge 2x^2-x\Leftrightarrow -x^2+2x+3\ge 0\Leftrightarrow x\in[-1;3]$.

Kết hợp với điều kiện $x \in \left(\frac{1}{2};3\right]$. Do đó: $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow 2a + 3b = 10.$

Câu 19: Cho bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - m\right) < \log_{\frac{1}{2}}\left(4x - x^2\right)$ (1). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Vế phải của bất phương trình (1) xác định khi $0 < x < 4$.

b) Với $0 < x < 4$ thì bất phương trình (1) tương đương với bất phương trình $2x^2 - 4x - m > 0$.

c) Với $m = 6$ thì bất phương trình (1) có tập nghiệm là $S = (3;+\infty)$.

d) Bất phương trình (1) có nghiệm $x \in (0;2)$ khi $-2 < m < 0$.

Lời giải

a) Đúng: $\log_{\frac{1}{2}}\left(4x - x^2\right)$ xác định khi $4x - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$.

b) Đúng: Với $0 < x < 4$ thì bất phương trình $(1) \Leftrightarrow x^2 - m > 4x - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - m > 0$.

c) Sai: Với $m = 6$ thì bất phương trình (1) trở thành $2x^2 - 4x - 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 3 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $0 < x < 4$ ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = (3;4)$.

d) Sai: Có $2x^2 - 4x - m > 0 \Leftrightarrow m < 2x^2 - 4x$.

Xét hàm số $f(x) = 2x^2 - 4x$, với $x \in (0;2)$. Ta có bảng biến thiên

x	0		1		2
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Bất phương trình (1) có nghiệm $x \in (0;2)$ khi $m < f(x)$, với $x \in (0;2) \Leftrightarrow m < 0$.

Câu 20: Cho bất phương trình $3\log_2^2 2x - 12\log_2 x - 1 - m \geq 0\ (*)$ với m là tham số. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện đề bất phương trình $(*)$ có nghĩa là $x \ge 0$,

b) Khi $m = 0$ thì $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình $(*)$.

c) Bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$ khi $m \le -1$.

d) Bất phương trình $(*)$ có nghiệm $x \in \left(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ khi $m \le -\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

a) Sai: Dễ thấy điều kiện của bất phương trình là $x > 0$.

b) Đúng: Khi $m = 0$ thì bất phương trình trở $(*)$ thành $3\log_2^2 2x - 12\log_2 x - 1 \ge 0$.

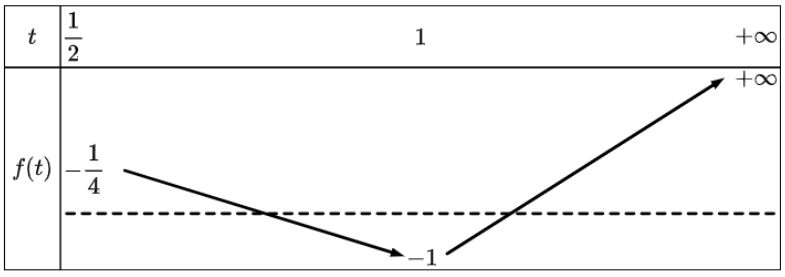
Với $x = 1$ thì $VT = 2 > 0$. Do đó lúc này $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình $(*)$.

c) Đúng: $(*) \Leftrightarrow 3\log_2^2 x - 6\log_2 x + 2 \ge m$. Đặt $t = \log_2 x$, với $x \in \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$ thì $t \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Khi đó bất phương trình $(*)$ trở thành $3t^2 - 6t + 2 \ge m$.

Xét hàm số $f(t) = 3t^2 - 6t + 2$ với $t \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Bảng biến thiên



Bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$ khi bất phương trình $3t^2 - 6t + 2 \ge m$ nghiệm đúng với mọi $t \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. Từ bảng biến thiên suy ra $m \le -1$.

d) Sai: $(*) \Leftrightarrow 3\log_2^2 x - 6\log_2 x + 2 \ge m$

Đặt $t = \log_2 x$, với $x \in \left(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ thì $t \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Khi đó bất phương trình $(*)$ trở thành $3t^2 - 6t + 2 \geq m$.

Xét hàm số $f(t) = 3t^2 - 6t + 2$ với $t \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$
$f(t)$	$-\frac{1}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{1}{4}$

Với $t \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ thì $f(t) \in \left[-1; -\frac{1}{4}\right)$. Bất phương trình $(*)$ có nghiệm $x \in \left(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ khi bất phương trình $3t^2 - 6t + 2 \geq m$ có nghiệm $t \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Từ bảng biến thiên suy ra $m < -\frac{1}{4}$.

Câu 21: Dân số nước ta năm 2023 ước tính là $A = 100,3$ triệu người. *(Nguồn:Tổng Cục Thống Kê https://gso.gov.vn)*. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm của nước ta là $r = 0,84\%$. Biết rằng sau t năm, dân số Việt Nam (tính từ mốc năm 2023) được tính theo công thức: $S = A.e^{rt}$ triệu người. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Sau 1 năm nữa dân số Việt Nam đạt $101,1$ triệu người.

b) Đến năm 2030, dân số Việt Nam ước đạt 120 triệu người.

c) Người ta ước tính rằng, đến năm 2035. Mức sinh của Việt Nam có xu hướng giảm, tỉ lệ tăng dân số hằng năm chỉ còn khoảng $r = 0,4\%$. Dân số Việt Nam vào năm 2040 là hơn 120 triệu người.

d) Dân số nước ta vượt 110 triệu người trong vòng 10 năm nữa.

Lời giải

a) Đúng: Sau 1 năm nữa (tính từ 2023) dân số Việt Nam ước tính là: $100,3.e^{0,0084.1} = 101,1$ triệu người.

b) Sai: Đến năm 2030, tức là sau 7 năm dân số Việt Nam ước tính là: $100,3.e^{0,0084.7}=106,4$ triệu người.

c) Sai: Với tỉ lệ tăng dân số hằng năm là $r=0,84\%$, ước tính dân số Việt Nam vào năm 2035 là $100,3.e^{0,0084.12}=110,9$ triệu người.

Từ 2035, tỉ lệ tăng dân số hằng năm chỉ còn khoảng $r=0,4\%$, nên tính đến 2040, dân số Việt Nam khoảng: $110,9.e^{0,004.5}=113,1$ triệu người.

$$100,3.e^{0,0084.t}>110\Leftrightarrow e^{0,0084.t}>\frac{110}{100,3}\Leftrightarrow 0,0084t>\ln\frac{110}{100,3}\Leftrightarrow t>10,9$$

d) Sai: Ta có: .

Vậy sau 11 năm nữa tính từ mốc 2023, tức là từ năm 2034 trở đi, dân số Việt Nam ước tính vượt quá 110 triệu người.

Câu 22: Cô Minh lần đầu gởi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Sau 6 tháng cô Minh có tổng số tiền là $104,04$ triệu.

b) Để số tiền nhận được là 150 triệu thì cô Minh phải gởi ngân hàng 18 quý.

c) Sau đúng 6 tháng cô Minh gởi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền cô Minh nhận được 1 năm sau khi gởi thêm tiền gần nhất là 216 triệu

d) Để nhận được số tiền 200 triệu trong 30 tháng với lãi suất như trên thì ban đầu cô Minh phải gởi ít nhất 164 triệu.

Lời giải

a) Đúng: 3 tháng = 1 quý, nên 6 tháng = 2 quý

Sau 6 tháng cô Minh có tổng số tiền là $100(1+2\%)^2=104,04$ triệu.

$$100(1+2\%)^n=150\Leftrightarrow n=\log_{(1+2\%)}1,5\approx 20,475$$

b) Sai: Ta có: .

c) Sai: Cô Minh gởi thêm 100 triệu đồng nên tổng số tiền gởi là $204,04$ triệu

Số tiền sau 1 năm nữa là $204,04(1+2\%)^4\approx 220$ triệu.

d) Sai: Để nhận được số tiền 200 triệu trong 30 tháng với lãi suất như trên thì ban đầu cô Minh phải gởi ít nhất số tiền $x(1+2\%)^{10}=200\Leftrightarrow x\approx 164,06966$ triệu.

Câu 23: Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được cho bởi công thức: $m(t)=m_0.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$; trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ bạn đầu (tại thời điểm $t=0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t và T là chu kì bán rã (Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Hạt nhân Poloni (Po) là chất phóng xạ α có chu kì bán rã là 138 ngày (Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Giả sử lúc đầu có 100 gam Poloni. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Sau 138 ngày thì khối lượng Poloni còn lại là $50\,(gam)$

b) Khối lượng Poloni còn lại sau 30 ngày nhiều hơn $85\,(gam)$

c) Kể từ ngày thứ 55 trở đi thì khối lượng Poloni còn lại ít hơn $75\,(gam)$

d) Kể từ ngày thứ 117 trở đi thì khối lượng Poloni mất đi nhiều hơn 80% so với khối lượng Poloni còn lại.

Lời giải

a) Đúng: Sau 138 ngày thì khối lượng Poloni còn lại là $m(138)=100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{138}{138}}=50(gam)$

b) Đúng: Khối lượng Poloni còn lại sau 30 ngày là $m(30)=100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{138}}\approx 86,01(gam)$

c) Sai: $100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}<75\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}<0,75\Leftrightarrow\frac{t}{138}>\log_{\frac{1}{2}}0,75\Leftrightarrow t>138\log_{\frac{1}{2}}0,75\approx 57,28$

Kể từ ngày thứ 58 trở đi thì khối lượng Poloni còn lại ít hơn $75\,(gam)$

d) Sai: Khối lượng Poloni mất đi nhiều hơn 80% so với khối lượng Poloni còn lại.

Giả sử lúc đầu có 100 gam Poloni, khối lượng Poloni còn lại là $x(gam)$.

Khối lượng Poloni mất đi bằng $100-x\ (gam)$,

$$100-x>80\%x\Rightarrow x+80\%x<100\Rightarrow 1,8x<100\Rightarrow x<\frac{100}{1,8}=\frac{500}{9}$$

Suy ra

$$m(t)=100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}<\frac{500}{9}\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}<\frac{5}{9}\Rightarrow\frac{t}{138}>\log_{\frac{1}{2}}\frac{5}{9}\Rightarrow t>138.\log_{\frac{1}{2}}\frac{5}{9}\approx 117,02$$

Vậy phải kể từ ngày thứ 118 trở đi.

Câu 24: Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,6\%$/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho tháng tiếp theo (thể thức lãi kép) và trong suốt thời gian gửi tiền người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Sau 1 tháng, số tiền cả vốn lẫn lãi là 106 triệu đồng.

b) Sau 2 tháng, số tiền lãi thu được là 1.203.600 đồng.

c) Sau n tháng, số tiền cả vốn lẫn lãi là: $100.(1+0,6\%)^{n+1}$ (triệu đồng).

d) Để thu được nhiều hơn 10 triệu tiền lãi, cần phải gửi ít nhất 16 tháng.

Lời giải

Sau n tháng, người đó lĩnh được số tiền là: $100.(1+0,6\%)^{n}$ (triệu đồng).

$$100.(1+0,6\%)^{n}-100\geq 10\Leftrightarrow n\geq\log_{1+0,6\%}\frac{11}{10}\approx 15,9.$$

Ta có

a) Sai:

b) Đúng:

c) Sai:

d) Đúng:

Câu 25: Một người gửi ngân hàng 100 triệu theo thể thức lãi kép, lãi suất 0,5% một tháng. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Sau 3 tháng số tiền cả gốc và lãi người đó nhận được nhiều hơn 101 triệu đồng

b) Sau ít nhất 40 tháng, người đó nhận được tổng số tiền nhiều hơn 125 triệu.

c) Số tiền lãi thu được sau 3 tháng khi gửi lãi suất 0,5% một tháng *nhiều hơn* số tiền lãi thu được sau 4 tháng nếu gửi lãi suất 0,4% một tháng.

d) Tổng số tiền gốc và lãi gấp đôi số tiền ban đầu sau 10 năm.

Lời giải

$$P_3=100(1+0,005)^3\approx 101.507.513$$

a) Đúng: Sau 3 tháng số tiền cả gốc và lãi là:

b) Sai: Sau n tháng, người đó nhận được: $P_n = 100(1+0,005)^n$ triệu đồng

Theo đề bài: $P_n = 100(1+0,005)^n > 125 \Leftrightarrow (1,005)^n > 1,25 \Leftrightarrow n > \log_{1,005} 1,25 = 44,7$ tháng

Vậy sau 45 tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu đồng.

$$P_3 = 100(1+0,005)^3 \approx 101.507.513$$

c) Sai: Sau 3 tháng số tiền cả gốc và lãi là:

Số tiền lãi là: 1. 507.513 đồng

Số tiền gốc và lãi thu được sau 4 tháng nếu gửi lãi suất 0,4% một tháng.

$$A_4 = 100(1+0,004)^4 \approx 101.609.625$$

Số tiền lãi là: 1.609.625

$200 = 100(1+0,005)^n \Leftrightarrow (1,005)^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{1,005} 2 = 138,975$

d) Sai:

Sau số năm là: 138,975:12 = 11,58 (năm) > 10 năm.

Câu 26: Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ của âm. Một đơn vị thường dùng để đo mức cường độ của âm là đề xi ben (viết tắt là dB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức: $L = 10\log\frac{I}{I_o}$. Trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét I_o cường độ âm ở ngưỡng nghe $\left(I_o = 10^{-12} w/m^2\right)$.

a) Một cuộc trò chuyện bình thường trong lớp học có mức cường độ âm trung bình là 68 dB. Cường độ âm tương ứng ra lớn hơn $6,5.10^{-6}\left(w/m^2\right)$?

b) Hai cây đàn ghi ta giống nhau, cùng hòa tấu một bản nhạc. Mỗi chiếc phtá ra âm có mức âm trung bình là 60 dB. Mức cường độ âm tổng cộng do hai chiếc đàn cùng phát ra xấp xỉ 63 dB?

c) Tiếng ồn phát ra ở xưởng cưa ở mức cường độ âm đo được là 93 dB, do 7 chiếc cưa máy giống nhau cùng hoạt động gây ra. Giả sử có 3 chiếc cưa máy đột ngột ngừng hoạt động thì mức cường độ âm trong xưởng lúc này nhỏ hơn 90 dB?

d) Tiếng ồn phát ra từ tiếng phím liên tục ở một bàn phím của máy tính có cường độ âm đo được là $10^{-5}\left(w/m^2\right)$. Giả sử phòng làm việc của một công ty có hai nhân viên văn phòng cùng thực hiện thao tác gõ phím trên hai bàn phím máy tính giống nhau thì mức cường độ âm tổng cộng đo cả hai bàn phím phát ra cùng lúc là 70dB?

Lời giải

a) Sai: Theo giả thiết ta có $L = 68db$, $I_o = 10^{-12} w/m^2$.

Áp dụng công thức ta có:

$$L = 10\log\frac{I}{I_o} \Leftrightarrow 68 = 10\log\frac{I}{I_o} \Leftrightarrow \frac{I}{I_o} = 10^{6,8} \Leftrightarrow I = 10^{6,8}.10^{-12} \approx 6,3.10^{-6}\, w/m^2$$

.

$$L = 10\log\frac{I}{I_o} = 60$$

b) Đúng: Mức cường độ âm do một chiếc đàn ghita phát ra là:
Mức cường độ âm do hai chiếc đàn ghita phát ra là:

$$L_2 = 10\log\frac{2I}{I_o} = 10.\left(\log 2 + \log\frac{I}{I_o}\right) = 10\log 2 + 10\log\frac{I}{I_o} = 10\log 2 + 60 \approx 63dB$$

c) Sai: Gọi cường độ của âm do 1 cái cưa phát ra là: I_1
Lúc đầu mức cường độ âm là: 7 I_1 (do 7 cưa cùng hoạt động)

$$L = 10\log\frac{7I_1}{I_o} = 93 \Leftrightarrow 10\log 7 + 10\log\frac{I_1}{I_o} = 93 \Leftrightarrow 10\log\frac{I_1}{I_o} = 93 - 10\log 7 \approx 84,5$$

Lúc sau mức cường độ âm là: 4 I_1 (3 cưa máy hỏng nên còn 4 cưa hoạt động)

$$L = 10\log\frac{4I_1}{I_o} = 10\log 4 + 10\log\frac{I_1}{I_o} = 93 \Leftrightarrow 10\log\frac{I_1}{I_o} = 10\log 4 + 84,5 \approx 90,5\text{d}B.$$

$$L = 10\log\frac{I}{I_o} = 10\log\frac{10^{-5}}{10^{-12}} = 70\text{d}B$$

d) Sai vì nếu chỉ một bàn phím thì

$$L_2 = 10\log\frac{2I}{I_o} = 10\log 2 + 10\log\frac{I}{I_o} = 10\log 2 + 70 \approx 73\text{d}B.$$

Cả hai bàn phím cùng gõ thì

Câu 27: Cent âm nhạc là một đơn vị trong thang lôgarit của cao độ hoặc khoảng tương đối. Một quãng tám bằng 1200 cent. Công thức xác định chênh lệch khoảng thời gian (tính bằng cent) giữa hai nốt nhạc có tần số a và b $(a > b)$là $n = 1200.\log_2\frac{a}{b}$

(Theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008) (Lưu ý: Làm tròn số đến hàng phần mười)

a) Khoảng thời gian chênh lệch giữa hai nốt nhạc có tần số 443 Hz và 415 Hz là 131 cent.

b) Khoảng thời gian chênh lệch giữa hai nốt nhạc có tần số 345 Hz và 398 Hz nằm trong khoảng $(246;250)$.

c) Giả sử khoảng thời gian là 230 cent và tần số đầu là 328 Hz thì tần số cuối cùng là 287,2 Hz.

d) Với tần số đầu không vượt quá 355 Hz và tần số cuối cùng là 384 Hz thì khoảng thời gian chênh lệnh giữa hai nốt nhạc không vượt quá 178 cent.

Lời giải

a) Sai: Khoảng thời gian chênh lệch giữa hai nốt nhạc có tần số 443 Hz và 415 Hz là

$$n = 1200.\log_2 \frac{443}{415} \approx 113$$

cent.

b) Đúng: Khoảng thời gian chênh lệch giữa hai nốt nhạc có tần số 345 Hz và 398 Hz là

$$n = 1200.\log_2 \frac{398}{345} \approx 247,4$$

$$230 = 1200.\log_2 \frac{328}{b} \Leftrightarrow \log_2 \frac{328}{b} = \frac{23}{120} \Leftrightarrow \frac{328}{b} = 2^{\frac{23}{120}} \Leftrightarrow b \approx 287,2$$

c) Đúng: Ta có phương trình
Hz

$$178 \geq 1200.\log_2 \frac{a}{320} \Leftrightarrow \log_2 \frac{a}{320} \leq \frac{89}{600} \Leftrightarrow \frac{a}{320} \leq 2^{\frac{89}{600}} \Leftrightarrow a \leq 354,6$$

d) Sai: Ta có phương trình Hz

Câu 28: Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng 1 tỷ đồng (với lãi suất $0,5\%$/tháng, lãi tính theo từng tháng và cộng dồn vào gốc). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) 8 tháng sau người đó lấy về tất cả số tiền cả gốc và lãi là $1.020.175.878$ đồng.

b) 2 năm sau thì người đó thu được số tiền số tiền cả gốc và lãi là $1.127.159.776$ đồng.

c) Kể từ lúc gửi sau mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi người đó rút 10 triệu đồng để chi tiêu (nếu tháng cuối cùng không đủ 10 triệu thì rút hết) thì đến 139 tháng người đó rút hết tiền trong tài khoản.

d) Chưa đầy một năm thì lãi suất tăng lên thành $1,15\%$/ tháng. Tiếp theo, sáu tháng sau lãi suất chỉ còn $0,9\%$/ tháng. Người đó tiếp tục gửi thêm một số tháng nữa rồi rút cả vốn lẫn lãi được $1.143.816.503$ đồng. Vậy người đó gửi tiền vào ngân hàng với tổng thời gian là 16 tháng.

Lời giải

a) Sai: Đặt $T_0 = 1.000.000.000.$ Theo công thức lãi kép, số tiền người đó nhận được sau 8 tháng là $T_8 = T_0(1+r)^8$ thay $T_0 = 1.000.000.000$ và $r = 0,5\%$ ta được $T_8 = 1.040.707.044$.

b) Đúng: Theo công thức lãi kép $T_{24}=T_0(1+r)^{24}$ thay $T_0=1.000.000.000$ và $r=0,5\%$ ta được $T_{24}=1.127.159.776$.

c) Đúng: Số tiền người đó gửi ban đầu là $T_0=1000$ triệu đồng, lãi suất hàng tháng $m=0,005$; số tiền người đó rút ra hàng tháng là $r=10$ triệu đồng.

Sau tháng thứ nhất (người đó chưa rút 10 triệu) người đó thu được số tiền là $T_1=T_0(1+m)$.

Đầu tháng thứ hai người đó có số tiền là $T_0(1+m)-r$

Cuối tháng thứ hai (người đó chưa rút 10 triệu) người đó có số tiền là

$$T_2=\left(T_0(1+m)-r\right)(1+m)=T_0(1+m)^2-r(1+m).$$

Đầu tháng thứ ba người đó có số tiền là $T_0(1+m)^2-r(1+m)-r$.

Cuối tháng thứ ba (người đó chưa rút 10 triệu) người đó có số tiền là

$$T_3=T_0(1+m)^3-r(1+m)^2-r(1+m).$$

Cứ như thế số tiền người đó có cuối tháng thứ n là (người đó chưa rút 10 triệu)

$$T_n=T_0(1+m)^n-\left[r(1+m)^{n-1}+r(1+m)^{n-2}+...+r(1+m)\right]=T_0(1+m)^n-r.\frac{(1+m)^n-(1+m)}{m}.$$

Người đó rút hết tiền trong tài khoản khi

$$T_n-r\le 0\Leftrightarrow T_n\le 10\Leftrightarrow T_0(1+m)^n-r.\frac{(1+m)^n-(1+m)}{m}\le 10$$

$$1000.1,005^n-10.\frac{1,005^n-1,005}{0,005}\le 10\Leftrightarrow 1,005^n\ge 2\Leftrightarrow n\ge 138,975$$

Thay số ta được.

d) Đúng: Gọi m là số tháng người đó gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất $0,5\%/$ tháng $(m\in\mathbb{N},1\le m\le 11)$.

Khi đó, số tháng người đó gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất $1,15\%/$ tháng là $12-m$.

Gọi n là số tháng người đó gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất $0,9\%$/ tháng $(n \in \mathbb{N}, 1 \le n)$.

Tổng số tiền cả vốn lẫn lãi người đó có được cho đến khi rút là $T = T_0.(1,005)^m.(1,0115)^{12-m}.(1,009)^n$, với $T_0 = 1.000.000.000$

Theo đề bài thì $T = 1.143.816.503$.

Bước 1: Với $1 \le m \le 11$, ta có đánh giá

$$T_0.(1,005)^{11}.(1,0115).(1,009)^n \le T \le T_0.(1,005).(1,0115)^{11}.(1,009)^n$$

$$\Leftrightarrow \log_{1,009}\left(\frac{T}{T_0.(1,005).(1,0115)^{11}}\right) \le n \le \log_{1,009}\left(\frac{T}{T_0.(1,005)^{11}.(1,0115)}\right) \Rightarrow 1 \le n \le 7.$$

Bước 2. Với $1 \le n \le 7$, ta đánh giá được

$$T_0.(1,005)^m.(1,0115)^{12-m}.(1,009)^1 \le T \le T_0.(1,005)^m.(1,0115)^{12-m}.(1,009)^7$$

$$\Leftrightarrow \frac{T}{T_0.(1,0115)^{12}.(1,009)^7} \le \left(\frac{1,005}{1,0115}\right)^m \le \frac{T}{T_0.(1,0115)^{12}.(1,009)^1} \Rightarrow 2 \le m \le 10.$$

Lặp lại các bước $1, 2$ với các giá trị m, n mới tìm được. Sau một số lần ta tìm được $m = 6$ $n = 4$,

Thử lại $m = 6, n = 4$ thỏa mãn bài toán.

Vậy người đó gửi tiền vào ngân hàng với tổng thời gian là 16 tháng.

Câu 29: Lạm phát là sự tăng mức giá chung một cách liên tục của hàng hoá và dịch vụ theo thời gian, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó. Chẳng hạn, nếu lạm phát là 5% một năm thì sức mua của 1 triệu đồng sau một năm chỉ còn là 950 nghìn đồng. Nói chung, nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là $r\%$ một năm thì tổng số tiền P ban đầu, sau n năm số tiền đó chỉ còn giá trị là $A = P(1 - r\%)^n$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu tỉ lệ lạm phát là 7% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại là 86.490.000 đồng.

b) Nếu tỉ lệ lạm phát là 7% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại 96.490.000 đồng.

c) Nếu sức mua của 100 triệu đồng sau ba năm chỉ còn lại 80 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của ba năm đó là $9,17\%$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

d) Nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là 6% một năm thì sau ít nhất 15 năm sức mua của số tiền ban đầu chỉ còn lại không quá một nửa.

Lời giải

a) Đúng: Sau 2 năm, sức mua còn lại của 100 triệu đồng là $A = 10^8.(1-7\%)^2 = 86.490.000$ đồng.

b) Sai:

c) Sai: Ta có $10^8.(1-r\%)^3 = 8.10^7 \Rightarrow r \approx 7,17$.

d) Sai: Gọi số tiền ban đầu là P, ta có $P.(1-6\%)^n = \frac{P}{2} \Rightarrow n \approx 11,2$. Vậy sau ít nhất 12 năm thì sức mua của số tiên ban đầu chỉ còn lại không quá một nửa.

Câu 30: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con.

a) Phương trình thể hiện tỷ lệ tăng trưởng là $300 = 100.e^{5r}$

b) Tỉ lệ tăng trưởng của loại vi khuẩn này là $r = \ln\frac{3}{5}$ mỗi giờ.

c) Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có $100.e^{10.\frac{\ln 3}{5}} = 900$ con.

d) Phải cần ít nhất 20 giờ để số con vi khuẩn lớn hơn 10000 con.

Lời giải

a) Đúng: Từ giả thiết ta có: $300 = 100.e^{5r}$

b) Sai: Ta có $300 = 100.e^{5r} \Leftrightarrow r = \frac{\ln 300 - \ln 100}{5} = \frac{\ln 3}{5}$. Tức tỉ lệ tăng trưởng của loại vi khuẩn này là $r = \frac{\ln 3}{5}$ mỗi giờ.

c) Đúng: Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có $100e^{10.\frac{\ln 3}{5}} = 900$ con.

d) Sai: Để số con số vi khuẩn lớn hơn 10000 con thì

$$100e^{t.\frac{\ln 3}{5}} > 10000 \Leftrightarrow e^{t.\frac{\ln 3}{5}} > 100 \Leftrightarrow t.\frac{\ln 3}{5} > \ln 100 \Leftrightarrow t > \frac{5\ln 100}{\ln 3} \approx 20,96$$

Câu 31: Người ta dùng thuốc để khử khuẩn cho một thùng nước. Biết rằng nếu lúc đầu mỗi mililít nước chứa P_0 vi khuẩn thì sau t giờ (kể từ khi cho thuốc vào thùng), số lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước là $P = P_0 \cdot 10^{-\alpha t}$, với α là một hằng số dương nào đó. Biết rằng ban đầu mỗi mililit nước có 4000 vi khuẩn và sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước là 1000. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) α nằm trong khoảng $(1,2)$.

b) Sau 3 giờ 30 phút thì lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước ít hơn 500.

c) Lượng vi khuẩn mất đi trong mỗi mililít trong khoảng thời gian từ 1 giờ đến 2,5 giờ tính từ lúc dùng thuốc thì lớn hơn 1200.

d) Lượng vi khuẩn sau khoảng 1,32 giờ sẽ bằng 40% lượng vi khuẩn ban đầu.

Lời giải

$$P = P_0 \cdot 10^{-\alpha t} \Rightarrow 1000 = 4000 \cdot 10^{-2\alpha} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\log 4 \approx 0,31 \notin (1,2)$$

a) Sai: Ta có

$$P = P_0.10^{-\alpha t} \le 500 \Leftrightarrow 4000.10^{-\alpha t} \le 500 \Leftrightarrow 10^{-\alpha t} \le \frac{1}{8} \Leftrightarrow -\alpha t \le \log\frac{1}{8}$$

b) Đúng:

$$\Leftrightarrow t \ge -\frac{1}{\alpha}\log\frac{1}{8} \Leftrightarrow t \ge \frac{-1}{\frac{1}{2}\log 4} \cdot \log\frac{1}{8} \Leftrightarrow t \ge 3$$

c) Đúng: Lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước sau 1 giờ là: $4000 \cdot 10^{-\frac{1}{2}\log 4.1} = 2000$.

Lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước sau 2,5 giờ là: $4000 \cdot 10^{-\frac{1}{2}\log 4.2,5} \approx 707$.

Lượng vi khuẩn mất đi khoảng: $2000 - 707 = 1293 > 1200$

$$P = P_0 \cdot 10^{-\alpha t} = \frac{40}{100}.P_0 \Leftrightarrow 10^{-\alpha t} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow t = \frac{\log\frac{2}{5}}{-\alpha} = \frac{\log\frac{2}{5}}{-\frac{1}{2}\log 4} \approx 1,32$$

d) Đúng:

Câu 32: Ông A đem 800 triệu đồng gửi vào một ngân hàng với lãi suất 0,5% một tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho tháng tiếp theo và từ tháng thứ hai trở đi. Lãi suất được cho là không đổi trong suốt thời gian vay tiền. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số tiền cả gốc và lãi ông A rút về sau một năm lớn hơn 850 triệu đồng?

b) Ông A định dùng tiền lãi sau 2 năm để mua chiếc xe SH trị giá 100 triệu đồng. Sau đúng 2 năm tiền lãi thu được đủ để ông A mua chiếc xe đó.

c) Sau ít nhất 45 tháng thì số tiền thu về cả gốc lẫn lãi lớn hơn 1 tỷ đồng?

d) Sau khi gửi, cứ tròn mỗi tháng, ông đến ngân hàng rút 6 triệu để chi tiêu cho gia đình. Một năm sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông An còn lại ít hơn 776 triệu đồng?

Lời giải

a) Sai: Số tiền cả gốc và lãi ông A rút về sau một năm:

$$A_{12} = A(1+r)^{12} = 800000000.(1+0,5\%)^{12} \approx 849342250 < 850000000$$

b) Đúng: Số tiền lãi ông A rút về sau hai năm:

$$A_{12} = A(1+r)^{12} = 800000000.(1+0,5\%)^{24} - 800000000 \approx 101728000 > 100000000$$

c) Đúng: Số tiền thu về cả gốc lẫn lãi lớn hơn 1 tỷ đồng:

$$800000000.(1+0,5\%)^{n} > 1000000000$$

$$\Leftrightarrow (1+0,5\%)^{n} > \frac{5}{4} \Leftrightarrow n > \log_{(1+0,5\%)}\left(\frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow n > 44,74$$

tháng.

d) Đúng: Gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất r/tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền là X đồng. Sô tiền còn lại sau n tháng đươc tính theo công thức:

$$S_n = A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 800(1,005)^{12} - 6.\frac{(1,005)^{12} - 1}{0,005} = 775.3288753$$

$$= 1200 - 400.(1,005)^{12}$$

Câu 33: Ông Xuân gửi 200 triệu đồng vào ngân hàng theo phương thức lãi kép với lãi suất cố định là $0,5\%$ một tháng. Cùng thời điểm đó, ông Thắng gửi 10 triệu đồng mỗi tháng vào ngân hàng đó theo phương thức lãi kép với lãi suất cố định là $0,5\%$ một tháng. (Các kết quả trong khẳng định **a)** và **c)** làm tròn đến hàng nghìn). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số tiền cả gốc và lãi ông Xuân nhận được sau 10 tháng là 210228000.

b) Sau ít nhất 81 tháng thì số tiền (cả gốc và lãi) của ông Xuân nhiều hơn 300 triệu đồng.

c) Sau 1 năm số tiền cả gốc và lãi trong ngân hàng của ông Thắng là 123972000.

d) Sau ít nhất 22 tháng thì số tiền của ông Thắng lớn hơn số tiền của ông Xuân.

Lời giải

a) Đúng: Số tiền cả gốc và lãi ông Xuân nhận được sau 10 tháng là

$$200000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^{10}\approx 210228026$$

b) Sai: Theo công thức lãi kép, số tiền cả gốc và lãi ông Xuân nhận được sau n tháng là

$$200000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^{n}$$

.

$$200000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^{n}>300000000\Leftrightarrow n>\log_{\frac{201}{200}}\frac{3}{2}\approx 81,29558565...$$

Do đó

c) Đúng: Theo công thức lãi kép, số tiền cả gốc và lãi ông Thắng nhận được sau 1 tháng là

$$10000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^{1}$$

.

Số tiền cả gốc và lãi ông Thắng nhận được sau 2 tháng là:

$$10000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^{2}+10000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^{1}=10000000\left[\left(1+\frac{1}{200}\right)^{1}+\left(1+\frac{1}{200}\right)^{2}\right]$$

Số tiền cả gốc và lãi ông Thắng nhận được sau 3 tháng là:

$$10000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^{3}+10000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^{2}+10000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^{1}$$

$$=10000000\left[\left(1+\frac{1}{200}\right)^{1}+\left(1+\frac{1}{200}\right)^{2}+\left(1+\frac{1}{200}\right)^{3}\right]$$

Số tiền sau 1 năm là:

$$10000000\left[\left(1+\frac{1}{200}\right)^{1}+\left(1+\frac{1}{200}\right)^{2}+...+\left(1+\frac{1}{200}\right)^{12}\right]$$

$$=10000000\frac{\left(1+\frac{1}{200}\right)\left[\left(1+\frac{1}{200}\right)^{12}-1\right]}{\frac{1}{200}}\approx 123972401$$

d) Đúng: Theo công thức lãi kép, số tiền cả gốc và lãi ông Xuân và ông Thắng nhận được sau n tháng lần lượt là:

$$200000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^n,10000000\frac{\left(1+\frac{1}{200}\right)\left[\left(1+\frac{1}{200}\right)^n-1\right]}{\frac{1}{200}}=2010000000\left[\left(1+\frac{1}{200}\right)^n-1\right].$$

$$2010000000\left[\left(1+\frac{1}{200}\right)^n-1\right]>200000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^n\Leftrightarrow n>\log_{\frac{201}{200}}\frac{201}{181}\approx 21,01393574$$

Do đó

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Chú Thanh gửi vào ngân hàng 10 triệu đồng với lãi kép 4%/năm. Biết rằng lãi kép là hình thức gửi tiền, nếu đến kỳ hạn người gửi không rút tiền lãi thì số tiền lãi sẽ được cộng dồn vào tiền vốn cho kỳ tiếp theo. Hãy tính số tiền cả gốc lẫn lãi chú Việt nhận được sau khi gửi ngân hàng 8 năm.

Lời giải

Số tiền cả gốc lẫn lãi chú Việt nhận được sau khi gửi ngân hàng 10 năm là:

$10.(1+4\%)^8\approx 13,686$ triệu đồng.

Câu 2: Chất phóng xạ polonium ^{210}Po có chu kì bán rã là 138 ngày. Điều này có nghĩa là cứ sau 138 ngày, lượng polonium còn lại trong mẫu chỉ còn lại một nửa lượng ban đầu. Một mẫu 100 g có khối lượng polonium ^{210}Po còn lại sau t ngày được tính theo công thức $M(t)=100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}(g)$. Điều kiện về thời gian để mẫu chất ngày còn lại không nhiều hơn 25 g là

Lời giải

Theo đề bài, ta có:

$$M\le 25\Leftrightarrow 100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}\le 25\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}\le\frac{25}{100}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}\le\left(\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow\frac{t}{138}\ge 2\Leftrightarrow t\ge 276$$ ngày.

Câu 3: Chú Việt gửi vào ngân hàng 10 triệu đồng với lãi kép 5%/năm. Biết rằng lãi kép là hình thức gửi tiền, nếu đến kỳ hạn người gửi không rút tiền lãi thì số tiền lãi sẽ được cộng dồn vào tiền vốn cho kỳ tiếp theo. Hãy tính số tiền cả gốc lẫn lãi chú Việt nhận được sau khi gửi ngân hàng 10 năm.

Lời giải

Số tiền cả gốc lẫn lãi chú Việt nhận được sau khi gửi ngân hàng 10 năm là:

$10.(1+5\%)^{10} \approx 16,289$ triệu đồng.

Câu 4: Mức cường độ âm L được tính bằng công thức $L = 10\log\left(\frac{I}{I_o}\right)(dB)$, trong đó I là cường độ của âm tính bằng W/m^2 và $I_o = 10^{-12}\ W/m^2$. Biết rằng mức cường độ âm lớn nhất mà tai người có thể nghe được là $130\ dB$. Điều kiện của cường độ âm để tai người không bị tổn thương là

Lời giải

Do mức cường độ âm lớn nhất mà tai người có thể nghe được là $130\ dB$ nên ta suy ra:

$$L < 130 \Leftrightarrow 10\log\left(\frac{I}{I_o}\right) < 130 \Leftrightarrow \log\left(\frac{I}{I_o}\right) < \frac{130}{10} \Leftrightarrow \frac{I}{I_o} < 10^{13} \Leftrightarrow I < 10^{13}.10^{-12} \Leftrightarrow I < 10\ W/m^2$$

Câu 5: Cho biết chu kì bán rã của chất phóng xạ radi ^{226}Ra là 1602 năm (tức là một lượng ^{226}Ra sau 1602 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S = A.e^{-r.t}$ trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm $(r<1)$, t là thời gian phân hủy, s là lượng còn lại sau thời gian phân hủy. Hỏi 5 gam ^{226}Ra sau 4000 năm phân hủy sẽ còn lại bao nhiêu gam (làm tròn đến 3 chữ số thập phân)?

Lời giải

Vì chu kì bán rã của chất phóng xạ radi ^{226}Ra là 1602 năm nên ta có:

$$\frac{A}{2} = A.e^{-1602.r} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-1602.r} \Leftrightarrow \ln 2 = 1602.r \Leftrightarrow r = \frac{\ln 2}{1602}.$$

Vậy 5 gam ^{226}Ra sau 4000 năm phân hủy sẽ còn lại số gam là:

$$S = A.e^{-r.t} = 5.e^{-4000\frac{\ln 2}{1602}} \approx 0,886$$ (gam).

Câu 6: Số lượng của loại vi khuẩn C trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t) = S(0).5^t$, trong đó $S(0)$ là số lượng vi khuẩn C lúc ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn C có sau t phút. Biết sau 4 phút thì số lượng vi khuẩn C là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn C là 390625000 con?

Lờigiải

Sau 4 phút ta có: $S(4) = S(0).5^4 \Rightarrow S(0) = \frac{S(4)}{5^4} = 1000.$

Tại thời điểm t số lượng vi khuẩn C là 390625000 con nên ta có:

$$S(t)=S(0).5^t \Leftrightarrow 5^t=\frac{S(t)}{S(0)} \Leftrightarrow 5^t=\frac{390625000}{1000} \Leftrightarrow 5^t=390625 \Leftrightarrow t=\log_5 390625=8$$

.

Câu 7: Chu kì bán rã của chất phóng xạ Plutolium ^{239}Pu là 24360 năm (tức là một lượng chất ^{239}Pu sau 24360 năm phân hủy còn một nửa). Sự phân hủy này được tính theo công thức $S=Ae^{-rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm, t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 20 gam ^{239}Pu sau ít nhất bao nhiêu năm thì phân hủy còn 4 gam?

Lời giải

Vì Pu^{239} có chu kì bán rã là 24360 năm nên với 20 gam Pu^{239} ta có:

$$10=20.e^{-r.24360} \Leftrightarrow -r.24360=\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow r=\frac{\ln 2}{24360}$$

.

Theo bài ra ta có phương trình $4=20.e^{-rt} \Leftrightarrow -rt=\ln\frac{1}{5} \Leftrightarrow rt=\ln 5 \Leftrightarrow t=\frac{\ln 5}{r}$.

Suy ra $t\approx 56562,2$.

Vậy sau ít nhất 56563 năm thì 20 gam Pu^{239} sẽ phân hủy còn 4 gam.

Câu 8: Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) theo công thức $P=P_0.e^{kx}$ (mmHg),trong đó x là độ cao (đo bằng mét), $P_0=760$ (mmHg) là áp suất không khí ở mức nước biển $(x=0)$, k là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất không khí là $672,71$ (mmHg). Tính áp suất của không khí ở độ cao 3000 m.

Lời giải

Ở độ cao 1000 m áp suất không khí là $672,71$ (mmHg).

Nên ta có: $672,71=760e^{1000k} \Leftrightarrow e^{1000k}=\frac{672,71}{760} \Leftrightarrow k=\frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}$.

Áp suất ở độ cao 3000 m là $P=760e^{3000k}=760e^{3000.\frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}}\approx 527,06$ (mmHg).

Câu 9: Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức: $m(t)=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t=0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t, T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Cho biết chu kì bán rã của một chất phóng xạ là 24

giờ (1 ngày đêm). Giả sử khối lượng còn lại của 250 gam chất đó sau t ngày là 23 gam, xác định t.

Lời giải

Theo đề bài $m_0 = 250$, $T = 24$ (giờ) $= 1$ (ngày), $m(t) = 23$.

Ta có $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Leftrightarrow 23 = 250\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1}} \Leftrightarrow t \approx 3,4$ (ngày).

Vậy sau 3,5 ngày thì khối lượng còn lại của 250 gam chất đó là 23 gam.

Câu 10: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$, t là thời gian tăng trưởng). Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Để số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng gấp đôi thì thời gian tăng trưởng t bằng bao nhiêu?

Lời giải

Theo đề bài ta có $300 = 100e^{5r} \Leftrightarrow r \approx 0,2197$.

Để số lượng vi khuẩn ban đầu tăng gấp đôi thì $200 = 100e^{0,2197t} \Leftrightarrow t \approx 3,15$ (giờ).

Vậy để số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng gấp đôi thì thời gian tăng trưởng là 3 giờ 9 phút.

Câu 11: Chu kì bán rã của Cacbon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Một vật có khối lượng Cacbon ^{14}C ban đầu là m_0 thì sau khoảng thời gian t năm, khối lượng Cacbon ^{14}C còn lại của vật đó là $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$. Các nhà khảo cổ đã tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cacbon và xác đinh được nó đã mất khoảng 25% lượng Cacbon ^{14}C ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ đó có tuổi là bao nhiêu?

Lời giải

Khối lượng của mẫu đồ cổ khi được tìm thấy là $m(t) = m_0 - \frac{25}{100}m_0 = \frac{3}{4}m_0$.

Ta có $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Leftrightarrow \frac{3}{4}m_0 = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Leftrightarrow t \approx 2387$ (năm).

Vậy mẫu đồ cổ đó có tuổi là 2387 năm.

Câu 12: Biết rằng năm 2023, dân số Việt Nam là 78.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = Ae^{Nr}$ (trong đó A: là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm), cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người.

Lời giải

Theo đề bài ta có $r = \frac{17}{100} = 0,017$ và $A = 78685800$.

Áp dụng công thức ta được $S = Ae^{Nt} \Leftrightarrow 120000000 = 78685800e^{0,017N} \Leftrightarrow N \approx 24,8$.

Vậy đến năm 2048 thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13: Biết rằng nếu gọi các loại cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của cây xanh đó bị chết thì hiện tượng quang hợp cũng dừng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp và chuyển hóa thành nitơ 14. Biết rằng nếu gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được tính theo công thức $P(t) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5750}}(\%)$. Phân tích mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là 65%. Hãy xác định niên đại của công trình đó.

Lời giải

Theo đề bài ta có $P(t) = 65 \Leftrightarrow 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5750}} = 65 \Leftrightarrow t \approx 3574$.

Vậy tuổi của công trình kiến trúc đó là 3574 năm.

Câu 14: Một nguồn âm đẳng hướng đặt tại điểm O có công suất truyền âm không đổi. Mức cường độ âm tại điểm M cách O một khoảng R được tính bởi công thức $L_M = \log\frac{k}{R^2}$ (Ben) với k là hằng số. Biết điểm O thuộc đoạn thẳng AB và mức cường độ âm tại A và B lần lượt là $L_A = 3$ (Ben) và $L_B = 5$ (Ben). Tính mức cường độ âm tại trung điểm AB (làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải

Ta có $\begin{cases} L_A = \log\frac{k}{OA^2} = 3 \\ L_B = \log\frac{k}{OB^2} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = \frac{\sqrt{10k}}{100} \\ OB = \frac{\sqrt{10k}}{1000} \end{cases} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{10k}}{100} + \frac{\sqrt{10k}}{1000} = \frac{11\sqrt{10k}}{1000}$

Gọi N là trung điểm AB $\Rightarrow ON = \frac{AB}{2} - OB = \frac{11\sqrt{10k}}{2000} - \frac{\sqrt{10k}}{1000} = \frac{9\sqrt{10k}}{2000}$

Suy ra mức cường độ âm tại N bằng $L_N = \log\frac{k}{ON^2} = \log\frac{2000^2 k}{81.10k} \approx 3,69$ (Ben).

Câu 15: Cường độ một trận động đất M (richter) được cho bởi công thức $M = \log\frac{A}{A_0}$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỉ XX, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Tính cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ.

Lời giải

$$M_1 = 8,3 \Leftrightarrow \log\frac{A_1}{A_0} = 8,3$$

Gọi trận động đất ở San Francisco có cường độ

$$A_2 = 4.A_1$$

Trận động đất ở Nam Mỹ có biên độ

$$\Rightarrow M_2 = \log\frac{A_2}{A_0} = \log\frac{4.A_1}{A_0} = \log 4 + \log\frac{A_1}{A_0} = \log 4 + M_1 \approx 8,9$$

độ richter.

Câu 16: Thang đo Richte được Charles Francis đề xuất và sử dụng lần đầu tiên vào năm 1935 để sắp xếp các số đo độ chấn động của các cơn động đất với đơn vị Richte. Công thức tính độ chấn động như sau: $M_L = \log A - \log A_0$, M_L là độ chấn động, A là biên độ tối đa được đo bằng địa chấn kế và A_0 là biên độ chuẩn. Hỏi theo thang độ Richte, cùng với một biên độ chuẩn thì biên độ tối đa của một chận động đất 7 độ Richte sẽ lớn gấp mấy lần biên độ tối đa của một trận động đất 5 độ Richte?

Lời giải

Trận động đất 7 độ Richte có $M_7 = \log\frac{A_7}{A_0} = 7 \Leftrightarrow \frac{A_7}{A_0} = 10^7 \Leftrightarrow A_7 = 10^7.A_0$.

Trận động đất 5 độ Richte có $M_5 = \log\frac{A_5}{A_0} = 5 \Leftrightarrow \frac{A_5}{A_0} = 10^5 \Leftrightarrow A_5 = 10^5.A_0$.

$\Rightarrow A_7 = 100.A_5$.

Vậy trận động đất 7 độ Richte có biên độ tối đa gấp 100 lần trận động đất 5 độ Richte.

Câu 17: Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm Trái đất nóng lên. Theo OECD (Tổ chức Hợp tác và Phát triển kinh tế thế giới), khi nhiệt độ Trái đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng, khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm $2^\circ C$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%; còn khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm $5^\circ C$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%. Biết rằng, nếu nhiệt độ Trái đất tăng thêm $t^\circ C$, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm

$f(t)\%$ thì $f(t)=k.a^t$ trong đó k,a là các hằng số dương. Khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm bao nhiêu độ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm đến 20%?

Lời giải

$$\begin{cases} k.a^2=3\% \\ k.a^5=10\% \end{cases} \Rightarrow a=\sqrt[3]{\frac{10}{3}};k=\frac{3\%}{a^2}$$

Ta có:

$$\Rightarrow \frac{3\%}{a^2}.a^t=20\% \Rightarrow a^{t-2}=\frac{20}{3}$$

Tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm đến 20%

$$\Rightarrow t=2+\log_a \frac{20}{3}=2+\log_{\sqrt[3]{\frac{10}{3}}} \frac{20}{3}\approx 6,7$$

Câu 18: Vào năm 1938, nhà vật lí Frank Benford đã đưa ra công thức ước tính xác suất P để chữ số d là chữ số đầu tiên của một bộ số trong tự nhiên (ví dụ: độ dài một con sông, chiều cao một tòa nhà, lợi nhuận một công ty, các hằng số vật lý cơ bản…).

Trích nguồn https://vi.wikipedia.org/wiki/Lu%E1%BA%ADt_Benford

$$P(d)=\log\left(1+\frac{1}{d}\right)$$

Chữ số có xác suất bằng $12,5\%$ được chọn là

Lời giải

Với $P=12,5\%=0,125$, ta có $\log\left(1+\frac{1}{d}\right)=0,125 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{d}=10^{0,125} \Leftrightarrow d=\frac{1}{10^{0,125}-1}\approx 3$.

Câu 19: Năm 2023, hãng xe ô tô Vinfast niêm yết giá bán loại xe điện VF8 là $850.000.000$ đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2028 Vinfast niêm yết giá bán loại xe điện VF8 là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

Lời giải

Sau năm thứ nhất giá bán loại xe điện VF8 là: $850.000.000(1-2\%)$ đồng

Sau năm thứ hai giá bán loại xe điện VF8 là: $850.000.000(1-2\%)^2$ đồng

Sau năm thứ 5 giá bán loại xe điện VF8 là: $850.000.000(1-2\%)^5\approx 768.333.000$ đồng.

Như vậy, năm 2028 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe điện VF8 là $768.333.000$ đồng.

Câu 20: Thang Richter, một hàm logarit được sử dụng để đo cường độ của các trận động đất. Cường độ của một trận động đất có liên quan đến lượng năng lượng được giải phóng bởi trận động đất. Dụng cụ gọi là địa chấn phát hiện chuyển động trong trái đất; chuyển động nhỏ nhất có thể được phát hiện sẽ hiển thị trên máy đo địa chấn dưới dạng sóng có biên độ A0.

A – thước đo biên độ của sóng động đất

A0 – biên độ của sóng nhỏ nhất có thể phát hiện được (hoặc sóng chuẩn)

Từ đó, bạn có thể tìm thấy R, thước đo độ Richter về cường độ của trận động đất bằng côngthức:

$$R = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

Cường độ của một trận động đất thường sẽ đo được từ 2 đến 10 độ Richter. Bất kỳ trận động đất nào đăng ký dưới 5 là khá nhỏ; chúng có thể làm rung chuyển mặt đất một chút, nhưng hiếm khi đủ mạnh để gây ra nhiều thiệt hại. Các trận động đất có cường độ từ 5 đến 7,9 độ Richter thường nghiêm trọng hơn nhiều và bất kỳ trận động đất nào trên 8 độ Richter đều có khả năng gây ra thiệt hại lớn. (Đánh giá cao nhất từng được ghi nhận cho một trận động đất là 9,5 trong trận động đất Valdivia năm 1960 ở Chile.)

(Nguồn: Mathematical Modeling with Exponential and Logarithmic Functions (nroc.org))

Nếu biên độ của sóng động đất đo được gấp 256 lần biên độ của sóng nhỏ nhất thì máy sẽ đo được độ lớn là

Lời giải

Nếu biên độ của sóng động đất đo được gấp 256 lần biên độ của sóng nhỏ nhất thì $\frac{A}{A_o} = 256$ nên

$$R = \log\left(\frac{A}{A_0}\right) = \log(256) = 2.4$$

độ lớn động đất ở đây là

Câu 21: Sau khi tốt nghiệp đại học, anh Nam thực hiện một dự án khởi nghiệp. Anh vay vốn từ ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất $0,6\%$ một tháng. Phương án trả nợ của Nam là sau đúng một tháng kể từ thời điểm vay anh tao bắt đầu trả nợ, hai lần liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền trả của mỗi lần là như nhau và hoàn thành sau đúng 5 năm kể từ khi vay. Tuy nhiên sau khi dự án có hiệu quả và trả nợ được 12 tháng theo phương án cũ, anh Nam muốn rút ngắn thời gian trả nợ nên từ tháng tiếp theo, mỗi tháng anh trả nợ cho ngân hàng 9 triệu đồng. Biết rằng ngân hàng chỉ tính tiền lãi trên số dưnợ thực tế của tháng đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng từ thời điểm vay anh Nam trả hết nợ?

Lời giải

Theo dự định số tiền phải trả hàng tháng bằng

$$m = A_o.\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 200.0,006.\frac{(1,006)^{60}}{(1,006)^{60} - 1} = \frac{6}{5}.\frac{(1,006)^{60}}{(1,006)^{60} - 1}$$

Số tiền còn nợ sau 12 tháng là

$$A_{12} = A.(1+i)^{12} - \left[m + m(1+i) + ... + m(1+i)^{11}\right] = A(1+i)^{12} - m.\frac{(1+i)^{12}-1}{i} = 165,53$$

triệu đồng

Gọi n là số tháng tính từ thời điểm hết 12 tháng đến lúc trả hết nợ có

$$A_{12}.(1+i)^n - \left[9 + 9.(1+i) + ... + 9(1+i)^{n-1}\right] = 0 \Leftrightarrow A_{12}.(1+i)^n - 9.\frac{(1+i)^n - 1}{i} \le 0$$

$$\Leftrightarrow (1,006)^n (1500 - A_{12}) \le 1500 \Leftrightarrow n \ge \log_{1,006} \frac{1500}{1500 - A_{12}} \approx 19,55$$

Vậy anh Nam cần ít nhất $12 + 20 = 32$ tháng để trả hết nợ.

Câu 22: Mùa hè năm 2023, để chuẩn bị cho "học kì quân đội" dành cho các bạn nhỏ, một đơn vị bộ đội chuẩn bị thực phẩm cho các bạn nhỏ, dự kiến đủ dùng trong 45 ngày (năng suất ăn của mỗi ngày là như nhau). Nhưng bắt đầu từ ngày thứ 11, do số lượng thành viên tham gia tăng lên, nên lượng tiêu thụ thực phẩm tăng lên 10% mỗi ngày (ngày sau tăng 10% so với ngày trước đó). Hỏi thực tế lượng thức ăn đó đủ dùng cho bao nhiêu ngày?

Lời giải

Gọi x là số thực phẩm dự kiến dùng cho 1 ngày $\Rightarrow$ Tổng số thực phẩm $45x$.

Số thực phẩm đã dùng trong 10 ngày đầu là $10x$.

Nhưng bắt đầu từ ngày thứ 11, do số lượng thành viên tham gia tăng lên, nên lượng tiêu thụ thực phẩm tăng lên 10% mỗi ngày.

$\Rightarrow$ Số thực phẩm dùng trong ngày thứ n là $x(1+0,1)^n$.

Tổng số thực phẩm đã dùng sau ngày thứ n là

$$10x + x + x(1+0,1)^1 + ... + x(1+0,1)^n = 10x + x\frac{(1+0,1)^{n+1} - 1}{0,1}$$

Sau n ngày dùng hết sản phẩm nếu

$$10x + x\frac{(1+0,1)^{n+1} - 1}{0,1} = 45x \Leftrightarrow \frac{(1+0,1)^{n+1} - 1}{0,1} = 35$$

$$\Leftrightarrow (1,1)^{n+1} = 4,5 \Leftrightarrow n + 1 = \log_{1,1} 4,5 \Leftrightarrow n \approx 15,78$$

.

Suy ra, thực tế lượng thức ăn đó đủ dùng cho $10 + 15 = 25$ ngày.