

Chủ đề III

Vấn đề cần

- I. Nguyên hàm và các tính chất cơ bản
- II. Hai phương pháp cơ bản tìm nguyên hàm
- III. Khái niệm và tính chất cơ bản tích phân
- IV. Hai phương pháp cơ bản tính tích phân
- V. Ứng dụng hình học của tích phân

STUDY TIP

Từ định nghĩa nguyên hàm ta có được:

Chú ý

Biểu thức chính là vi phân của nguyên hàm của , vì

Từ đây ta suy ra hệ quả

Với $u = ax + b, (a \neq 0)$ ta có

$$\int f(ax + b)dx$$

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN

I. Nguyên hàm và các tính chất cơ bản

Kí hiệu K là một khoảng, một đoạn hay một nửa khoảng

1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .

Định lý 1

1. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên K .
2. Đảo lại nếu $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $F(x) = G(x) + C$.

Định lý 2

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

Người ta chứng minh được rằng: “Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .”

Từ hai định lý trên ta có

- Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Kí hiệu

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

2. Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

Tính chất 2

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

Tính chất 3

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} \int f(u)du$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

II. Hai phương pháp cơ bản để tìm nguyên hàm

1. Phương pháp đổi biến số

Định lý 3

Cho hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K và hàm số $y = f(u)$ liên tục sao cho hàm hợp $f[u(x)]$ xác định trên K . Khi đó nếu F là một nguyên hàm của f thì $\int f[u(x)] u'(x) dx = F[u(x)] + C$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm $\int (x-1)^{10} dx$.

Lời giải

Theo định lý trên thì ta cần viết về dạng $\int f(u) du$.

Mà $u' = (x-1)' = 1$, do vậy

$$\int (x-1)^{10} dx = \int (x-1)^{10} \cdot (x-1)' dx = \int (x-1)^{10} d(x-1) = \frac{(x-1)^{11}}{11} + C$$

Từ ví dụ trên ta có các bước gợi ý để xử lý bài toán tìm nguyên hàm theo phương pháp đổi biến.

Dạng 2: Gửi vào ngân hàng một số tiền a đồng với lãi suất $x\% = r$ mỗi tháng theo hình thức lãi kép. Gửi theo phương thức có kỳ hạn m tháng. Tính số tiền cả gốc lẫn lãi A sau n kỳ hạn.

Từ “STUDY TIP” ở bên ta thấy đưa về một ghi nhớ quan trọng: Trong cùng một kỳ hạn, lãi suất sẽ giống nhau mà không được cộng dồn vào vốn để tính lãi kép. Ví dụ kỳ hạn là 3 tháng thì lãi suất tháng 1 là ar , tháng 2, tháng 3 cũng là ar , sau hết kỳ hạn 3 tháng mà không rút ra thì số tiền lãi một kỳ hạn sẽ được cộng dồn vào tiền gốc.

Lời giải tổng quát

- Đặt $u = g(x)$.
- Biến đổi x và dx về u và du .

STUDY TIP

Với phương pháp đổi biến ta cần chú trọng công thức mà suy ra từ định lý như sau:
Nếu , khi đó

Nếu tính nguyên hàm theo biến mới thì sau khi tính nguyên hàm xong, ta phải trở lại biến x ban đầu bằng cách thay u bởi .

3. Giải bài toán dưới dạng nguyên hàm hàm hợp $\int f(u) du$, sau đó thay biến x vào nguyên hàm tìm được và kiểm tra lại kết quả.

Ta đến với ví dụ 2

Ví dụ 2: Tìm $\int x^2 (1-x)^7 dx$.

Ở bài toán này, ta thấy số mũ 7 khá cao mà lại có biểu thức trong ngoặc phức tạp hơn là x^2 . Do vậy ta sẽ đặt $(1-x)^7$ để đổi biến, dưới đây là lời giải áp dụng gợi ý các bước trên.

Lời giải

Đặt $u = 1 - x \Leftrightarrow du = (1 - x)' dx \Leftrightarrow du = -dx$

ta có $\int x^2 (1-x)^7 dx = \int (1-u)^2 \cdot u^7 \cdot (-1) du = -\int (u^7 - 2u^8 + u^9) du$

$$= -\frac{u^8}{8} + \frac{2u^9}{9} - \frac{u^{10}}{10} + C = -\frac{(1-x)^8}{8} + \frac{2(1-x)^9}{9} - \frac{(1-x)^{10}}{10} + C$$

2. Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần.

Định lý 4

Nếu u và v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) u'(x) dx$$

Nếu nguyên hàm có dạng $\int p(x) \cdot q(x) dx$ thì ta có thể nghĩ đến phương pháp nguyên hàm từng phần. Bảng sau gợi ý cách đặt ẩn phụ để tính nguyên hàm $\int p(x) \cdot q(x) dx$.

Chú ý

Đẳng thức trong định lý 4 còn dc viết dưới dạng

Hàm dưới dấu tích phân	Cách đặt
$p(x)$ là đa thức, $q(x)$ là hàm lượng giác	$\begin{cases} u = p(x) \\ dv = q(x) dx \end{cases}$
$p(x)$ là đa thức, $q(x) = f'(e^x) \cdot e^x$	$\begin{cases} u = p(x) \\ dv = q(x) dx \end{cases}$
$p(x)$ là đa thức, $q(x) = f(\ln x)$	$\begin{cases} u = q(x) \\ dv = p(x) dx \end{cases}$

$p(x)$ là hàm lượng giác, $q(x) = f(e^x)$	$\begin{cases} u = q(x) \\ dv = p(x)dx \end{cases}$
$p(x)$ là đa thức, $q(x) = f'(\ln x) \frac{1}{x}$	$\begin{cases} u = p(x) \\ dv = q(x)dx \end{cases}$
$p(x)$ là đa thức, $q(x) = f'(u(x)) \cdot (u(x))'$, $u(x)$ là các hàm lượng giác ($\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$)	$\begin{cases} u = p(x) \\ dv = q(x)dx \end{cases}$

Ví dụ 3: Thầy **Điệp Châu** cho bài toán “Tìm $\int \sin x \cos x dx$,” thì ba bạn Huyền, Lê và Hằng có ba cách giải khác nhau như sau

<p>Bạn Huyền giải bằng phương pháp đổi biến số như sau:</p> <p>“Đặt $u = \sin x$, ta có: $du = \cos x dx$</p> <p>Vậy $\int \sin x \cos x dx = \int u du$</p> <p>$= \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C$”</p>	<p>Bạn Lê giải bằng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần như sau:</p> <p>“Đặt $u = \cos x, v' = \sin x$. Ta có $u' = -\sin x, v = -\cos x$.</p> <p>Công thức nguyên hàm từng phần cho ta $\int \sin x \cos x dx = -\cos^2 x - \int \sin x \cos x dx$</p> <p>Giả sử F là một nguyên hàm của $\sin x \cos x$. Theo đẳng thức trên ta có</p> <p>$F(x) = -\cos^2 x - F(x) + C$</p> <p>Suy ra $F(x) = -\frac{\cos^2 x}{2} + \frac{C}{2}$.</p> <p>Điều này chứng tỏ $-\frac{\cos^2 x}{2}$ là một nguyên hàm của $\sin x \cos x$.</p> <p>Vậy $\int \sin x \cos x dx = -\frac{\cos^2 x}{2} + C$”</p>	<p>Bạn Minh Hằng chưa học đến hai phương pháp trên nên làm như sau:</p> <p>“$\int \sin x \cos x dx$</p> <p>$= \int \frac{\sin 2x}{2} dx$</p> <p>$= -\frac{\cos 2x}{4} + C$”</p>
---	--	--

Kết luận nào sau đây là **đúng**?

- A. Bạn Hằng giải đúng, bạn Lê và Huyền giải sai
- B. Bạn Lê sai, Huyền và Hằng đúng.
- C. Ba bạn đều giải sai.
- D. Ba bạn đều giải đúng.

Đáp án D.

STUDY TIP

Bài toán củng cố về định lý 1 đã nêu ở trên, và củng cố các cách giải nguyên hàm cơ bản.

Nhận xét: Sau khi soát kỹ cả ba lời giải, ta thấy ba lời giải trên đều không sai ở bước nào cả, tuy nhiên, tại sao đến cuối cùng đáp án lại khác nhau? Ta xem giải thích ở lời giải sau

Lời giải

Cả ba đáp số đều đúng, tức là cả ba hàm số $\frac{\sin^2 x}{2}$; $-\frac{\cos^2 x}{2}$ và $-\frac{\cos 2x}{4}$ đều là nguyên hàm của $\sin x \cdot \cos x$ do chúng chỉ khác nhau về một hằng số. Thật vậy

$$\frac{\sin^2 x}{2} - \left(-\frac{\cos^2 x}{2} \right) = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\sin^2 x}{2} - \left(-\frac{\cos 2x}{4} \right) = \frac{2\sin^2 x + (1 - 2\sin^2 x)}{4} = \frac{1}{4}.$$

3. Bảng một số nguyên hàm mở rộng

$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)} + C, \alpha \neq -1$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$	$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + C$
$\int m^{ax+b} dx = \frac{1}{a \ln m} m^{ax+b} + C, (m > 0)$	$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + C$
$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2+a^2} \right) + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left \frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x} \right + C$	$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$
$\int \ln(ax+b) dx = \left(x + \frac{b}{a} \right) \ln(ax+b) - x + \frac{b}{a}$	$\int \frac{dx}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a} \ln \left \tan \frac{ax+b}{2} \right + C$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C \quad \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C$$

III. Các dạng toán về nguyên hàm

Dạng 1: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ trên $D \subset \mathbb{R}$.

Các bài toán ở dạng 1 thì chỉ yêu cầu độc giả nhớ bảng công thức nguyên hàm cơ bản thường gặp. Chú ý với các nguyên hàm hàm hợp để áp dụng đúng công thức!

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$.

A. $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$

B. $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

C. $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$

D. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$

Đáp án B.

Lời giải

Ta có $\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int d(\sin 3x) = \frac{\sin 3x}{3} + C$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$.

A. $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln |5x-2| + C$

B. $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} (\ln 5x-2) + C$

C. $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln |5x-2| + C$

D. $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln |5x-2| + C$

Đáp án A.

Lời giải

Ta có $\int f(x) dx = \int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \int \frac{d(5x-2)}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln |5x-2| + C$

Ví dụ 3: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

A. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$

B. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$

C. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$

D. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$

Đáp án B.

Lời giải

STUDY TIP

Ta có $\int 7^x dx = \int 7^x \cdot \frac{d(7^x)}{7^x \cdot \ln 7} = \int \frac{d(7^x)}{\ln 7} = \frac{7^x}{\ln 7} + C$.

Ví dụ 4: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{(1+x)^5}$ là

A. $F(x) = -\frac{1}{3(x+1)^3} + C$ B. $F(x) = \frac{1}{4(x+1)^4} + C$

C. $F(x) = \frac{1}{3(x+1)^3} - \frac{1}{4(x+1)^4} + C$ D. $F(x) = \frac{1}{4(x+1)^4} - \frac{1}{3(x+1)^3} + C$

Đáp án D.

Lời giải

Đặt $u = x+1$ thì $u' = 1$.

Khi đó $\int \frac{x}{(1+x)^5} dx = \int \frac{u-1}{u^5} du = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^5} \right) du = \int u^{-4} du - \int u^{-5} du$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{u^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{u^4} + C$$

Thay $u = x+1$ ta được $\int \frac{x}{(x+1)^5} dx = \frac{1}{4(x+1)^4} - \frac{1}{3(x+1)^3} + C$

Ví dụ 5: Nguyên hàm của hàm số $x \cdot \ln x$ là

A. $\frac{x^2 \cdot \ln x}{2} + C$ B. $\frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$

C. $\frac{x^2 \cdot \ln x}{2} + \frac{x^2}{4} + C$ D. $\frac{x^2}{4} + C$

Đáp án B.

Lời giải

Ta có $\int x \cdot \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} \ln x = u \Rightarrow \frac{1}{x} dx = du \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

Theo phương pháp nguyên hàm từng phần ta có

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln x dx &= \int u dv = uv - \int v du = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

STUDY TIP

Ở đây xuất hiện tích của nên ta áp dụng nguyên hàm từng phần.

Dạng 2: Chứng minh $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $D \subset \mathbb{R}$.

Ví dụ 1: Cho $F(x) = \ln(\ln(\ln x))$. Hỏi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(\ln x)}$

B. $f(x) = \frac{1}{\ln(\ln(\ln x))}$

C. $f(x) = \frac{1}{\ln x \cdot \ln(\ln x)}$

D. $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)}$

Đáp án D.

Lời giải

Để tìm $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số nào trong số 4 hàm số trên, ta sẽ đi đạo hàm $F(x)$ từ đó suy ra $f(x)$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= [\ln(\ln(\ln x))]' = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot [\ln(\ln x)]' = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} (\ln x)' \\ \text{Ta có} \quad &= \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} = f(x) \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Cho $F(x) = \frac{1}{6} \cdot \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + \frac{1}{12}$. Hỏi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

B. $f(x) = \frac{1}{x-9}$

C. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9} + \frac{x}{12}$

D. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 9} + \frac{x}{12}$

Đáp án A.

Lời giải

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\frac{1}{6} \cdot \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + \frac{1}{12} \right)' = \left(\frac{1}{6} \cdot \ln|x-3| - \frac{1}{6} \cdot \ln|x+3| + \frac{1}{12} \right)' \\ \text{Cách 1: Ta có} \quad &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x-3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{x^2 - 3^2} = \frac{1}{x^2 - 9} \end{aligned}$$

Cách 2: Thực chất đây là công thức nguyên hàm mà tôi đã giới thiệu ở bảng nguyên hàm phía trên (dòng số 6 trong bảng).

Chú ý

Sai lầm thường gặp là không biết cách đạo hàm hàm hợp. Ở đây ta cần đạo hàm như sau:
với lần lượt như thế ta sẽ ra được kết quả như bên.

STUDY TIP

Công thức cần nhớ:

Áp dụng công thức trên ta có ngay $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$.

Dạng 3: Xác định nguyên hàm của một hàm số với điều kiện ràng buộc.

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

A. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$ B. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$
 C. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$ D. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$

Đáp án D.

Lời giải

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int (\sin x + \cos x) dx = \sin x - \cos x + C$

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ nên $\sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} + C = 2 \Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1$

Vậy hàm số cần tìm là $F(x) = \sin x - \cos x + 1$

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$ B. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$
 C. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2$ D. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15$

Đáp án A.

Lời giải

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int (3 - 5 \sin x) dx = 3x + 5 \cos x + C$

Do $f(0) = 10$ nên $3 \cdot 0 + 5 \cos 0 + C = 10 \Leftrightarrow C = 5$. Vậy $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$

Ví dụ 3: Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$?

- A. $\int f'(x)e^{2x} = -x^2 + 2x + C$ B. $\int f'(x)e^{2x} = -x^2 + x + C$
 C. $\int f'(x)e^{2x} = 2x^2 - 2x + C$ D. $\int f'(x)e^{2x} = -2x^2 + 2x + C$

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: Sử dụng tính chất của nguyên hàm $\int f(x) dx = F(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$

STUDY TIP

Rõ ràng trong bài toán này, việc sử dụng công thức nguyên hàm từng phần sẽ mang lại kết quả nhanh hơn. Do có sự xuất hiện của tích hai phần tử, nếu sử dụng nguyên hàm từng phần sẽ xuất hiện ngay và kết hợp đủ kiện đề bài sẽ có ngay đáp án.

Từ giả thiết, ta có

$$\int f(x)e^{2x} dx = F(x) \Rightarrow f(x)e^{2x} = F'(x) = (x^2)' = 2x \Rightarrow f(x) = \frac{2x}{e^{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{(2x)' \cdot e^{2x} - 2x \cdot (e^{2x})'}{(e^{2x})^2} = \frac{(2-4x)e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{2-4x}{e^{2x}}$$

Suy ra

$$\text{Vậy } \int f'(x)e^{2x} dx = \int \frac{2-4x}{e^{2x}} \cdot e^{2x} dx = (2-4x)dx = 2x - 2x^2 + C$$

Cách 2: Sử dụng công thức nguyên hàm từng phần.

Nếu u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

$$\text{Ta có } \int e^{2x} \cdot f'(x) dx = e^{2x} \cdot f(x) - \int f(x) \cdot 2e^{2x} dx = f(x)e^{2x} - 2 \int f(x)e^{2x} dx$$

$$\text{Từ giả thiết: } \int f(x)e^{2x} dx = F(x) = x^2 \Rightarrow f(x)e^{2x} = F'(x) = (x^2)' = 2x$$

$$\text{Vậy } \int f'(x)e^{2x} dx = 2x - 2x^2 + C$$

Ví dụ 4: Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x} dx = (4-2x)e^x + C$

B. $\int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2-x}{2}e^x + C$

C. $\int f'(x)e^{2x} dx = (2-x)e^x + C$

D. $\int f'(x)e^{2x} dx = (x-2)e^x + C$

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Sử dụng tính chất của nguyên hàm $\int f(x) dx = F(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$

$$\text{Từ giả thiết, ta có } \int f(x)e^{2x} dx = F(x) \Rightarrow f(x)e^{2x} = F'(x) = [(x-1)e^x]' = xe^x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{xe^x}{(e^x)^2} = \frac{x}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{(x)' \cdot e^x - x \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$$

Suy ra

$$\text{Vậy } \int f'(x)e^{2x} dx = \int \frac{1-x}{e^x} \cdot e^{2x} dx = \int (1-x)e^x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 1 - x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int (1-x)e^x dx = (1-x)e^x + \int e^x dx = (1-x)e^x + e^x + C = (2-x)e^x + C$$

Cách 2: Sử dụng công thức nguyên hàm từng phần.

$$\text{Ta có } \int e^{2x} \cdot f'(x) dx = e^{2x} \cdot f(x) - \int f(x) \cdot 2e^{2x} dx = f(x)e^{2x} - 2 \int f(x)e^{2x} dx$$

$$\text{Từ giả thiết: } \int f(x)e^{2x} dx = F(x) = (x-1)e^x$$

$$\Rightarrow f(x)e^{2x} = F'(x) = [(x-1)e^x]' = xe^x$$

$$\text{Vậy } \int f'(x)e^{2x} dx = xe^x - 2(x-1)e^x + C = (2-x)e^x + C$$

Dạng 4: Tìm giá trị của tham số để $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Ví dụ 1: Tìm a, b, c, d để $F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x$ là một nguyên hàm của $f(x) = (2x^3 + 9x^2 - 2x + 5)e^x$

A. $a = 3; b = 3; c = -7; d = 13$

B. $a = 2; b = 3; c = -8; d = 13$

C. $a = -2; b = 3; c = -8; d = 13$

D. $a = 3; b = 3; c = -8; d = 15$

Đáp án B.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } F'(x) &= (3ax^2 + 2bx + c)e^x + (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x \\ &= [ax^3 + (3a + b)x^2 + (2b + c)x + (c + d)]e^x \end{aligned}$$

$$F'(x) = f(x), \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 3a + b = 9 \\ 2b + c = -2 \\ c + d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -8 \\ d = 13 \end{cases}$$

Với các bài toán dạng này ta chỉ cần tìm đạo

hàm của $F(x) = F'(x)$ sau đó cho

$F'(x) = f(x)$ và sau đó sử dụng hệ số bất định để tìm giá trị của tham số.

IV. Bổ sung một số vấn đề về nguyên hàm

Nguyên hàm của các dạng hàm số đặc biệt

Dạng 1: Nguyên hàm của các hàm số dạng tích, phương.

Cho hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K .

Lúc này ta có bảng sau:

Dạng	Cấu trúc hàm số	Nguyên hàm
Tổng	$f(x) = u' + v' = (u + v)'$	$F(x) = u + v$
Hiệu	$f(x) = u' - v' = (u - v)'$	$F(x) = u - v$
Tích	$f(x) = u'v + uv' = (uv)'$	$F(x) = uv$
Phương	$f(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \left(\frac{u}{v}\right)'$	$F(x) = \frac{u}{v}$

Với các bài toán dạng này ta chỉ cần tìm đạo

hàm của $\int v du = 2 \int f(x) e^{2x} dx$ sau đó cho

$uv = f(x) e^{2x}$ và sau đó sử dụng hệ số bất định để tìm giá trị của tham số.

Ví dụ 1: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ là:

A. $\int f(x) dx = x - \ln(e^x + 1) + C$

B. $\int f(x) dx = \ln(e^x + 1) + C$

C. $\int f(x) dx = \frac{\ln(e^x + 1)}{x} + C$

D. $\int f(x) dx = x \ln(e^x + 1) + C$

Đáp án A.

Lời giải

Thay vì đi tìm nguyên hàm của hàm số theo cách truyền thống, ta có thể giải bài toán bằng bảng ở trên như sau:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} = \frac{(1+e^x) - e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = x' - \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} = x' - (\ln(e^x + 1))'$$

$$= (x - \ln(e^x + 1))' \Rightarrow \int f(x) dx = x - \ln(e^x + 1) + C$$

Ví dụ 2: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{(\ln x)^2} - \frac{1}{\ln x}$ là

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{\ln^3 x} + \frac{1}{\ln^2 x} + C$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{\ln^3 x} - \frac{1}{\ln^2 x} + C$

C. $\int f(x) dx = \frac{x}{\ln x} + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{-x}{\ln x} + C$

Đáp án D.

Lời giải

Ta có
$$f(x) = \frac{1}{(\ln x)^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{1 - \ln x}{(\ln x)^2} = \frac{(-x)' \cdot \ln x - (-x) \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \left(\frac{-x}{\ln x} \right)'$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \frac{-x}{\ln x} + C$$

Ví dụ 3: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x \cdot \ln(ex^2)$ với $x > 0$.

A. $F(x) = ex^2 \cdot \ln(ex) + C$

B. $F(x) = x^2 \cdot \ln(ex) + C$

C. $F(x) = x^2 \cdot \ln x + C$

D. $F(x) = x \ln x + C$

Đáp án C.

Lời giải

Ta có

$$f(x) = x \cdot (\ln e + 2 \ln x) = x(1 + 2 \ln x) = x^2 \cdot \frac{1}{x} + (2x) \ln x = x^2 \cdot (\ln x)' + (x^2)' \cdot \ln x$$

$$= (x^2 \ln x)' \Rightarrow F(x) = x^2 \cdot \ln x + C$$

Dạng 2: Các dạng nguyên hàm đơn giản chứa hàm e^x .

Bảng nhận dạng nguyên hàm và đạo hàm của hàm số chứa e^x .

Đặc trưng	Nguyên hàm	Hàm số (đạo hàm)
e^x	$F(x) = u(x) \cdot e^x$	$F'(x) = [u'(x) + u(x)] e^x = f(x)$
e^{-x}	$F(x) = u(x) \cdot e^{-x}$	$F'(x) = [u'(x) - u(x)] e^{-x} = f(x)$
e^{ax+b}	$F(x) = u(x) e^{ax+b}$	$F'(x) = [u'(x) + au(x)] e^{ax+b} = f(x)$
$e^{v(x)}$	$F(x) = u(x) e^{v(x)}$	$F'(x) = [u'(x) + v'(x)u(x)] e^{v(x)} = f(x)$

Ví dụ 1: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x^2 + 13x + 9)e^x$ là

A. $F(x) = (5x^2 + 6)e^x + C$

B. $F(x) = e^x(x^2 + 1) + 5x + C$

C. $F(x) = (5x^2 + 3x)e^x + C$

D. $F(x) = (5x^2 + 3x + 6)e^x + C$

Đáp án D.

Lời giải

Ta có $f(x) = (10x + 3 + 5x^2 + 3x + 6)e^x = [(5x^2 + 3x + 6)' + 5x^2 + 3x + 6]e^x$

Từ bảng nhận dạng nguyên hàm phía trên $\Rightarrow F(x) = (5x^2 + 3x + 6)e^x + C$ là nguyên hàm của hàm số đã cho.

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^x + x.e^x \cdot \ln x}{x}$

A. $F(x) = e^x \cdot \ln 2x + C$

B. $F(x) = e^x \cdot \ln x + C$

C. $F(x) = e^{-x} \cdot \ln x + C$

D. $F(x) = -e^x \cdot \ln x + C$

Đáp án B.

Lời giải

Ta có $f(x) = \frac{e^x + x.e^x \cdot \ln x}{x} = \frac{(1 + x \ln x)e^x}{x} = \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)e^x = [(\ln x)' + \ln x]e^x$

$\Rightarrow F(x) = e^x \cdot \ln x + C$ là nguyên hàm của hàm số đã cho.

Ví dụ 3: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)e^{-x}$ là

A. $F(x) = \frac{e^{-x}}{x} + C$

B. $F(x) = \frac{e^{-x}}{x^2} + C$

C. $F(x) = \frac{e^{-x}}{-x} + C$

D. $F(x) = \frac{e^{-x}}{-x^2} + C$

Đáp án A.

Lời giải

Ta có $f(x) = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)e^{-x} = \left[\left(\frac{1}{x}\right)' - \frac{1}{x}\right]e^{-x} \Rightarrow F(x) = \frac{e^{-x}}{x} + C$

là nguyên hàm của hàm số đã cho.

Tương tự với hai nhận dạng còn lại, quý độc giả có thể áp dụng vào các bài toán phức tạp hơn.

Nguyên hàm một số hàm lượng giác

a. Dạng $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ trong đó m, n là các số tự nhiên.

Trường hợp 1: Trong hai số m, n có ít nhất một số lẻ.

Lũy thừa của $\cos x$ là số lẻ, $n = 2k + 1$ thì đổi biến $u = \sin x$	Lũy thừa của $\sin x$ là số lẻ, $m = 2k + 1$ thì đổi biến $u = \cos x$
$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \int \sin^m x (\cos^2 x)^k \cos x dx$ $= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k (\sin x)' dx$ $= \int u^m (1 - u^2)^k du$	$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \int \cos^n x (\sin^2 x)^k \sin x dx$ $= -\int \cos^n x (1 - \cos^2 x)^k (\cos x)' dx$ $= -\int (1 - u^2)^k u^n du$

Ví dụ 1: Tìm $\int \sin^5 x \cdot \cos^2 x dx$.

Lời giải

Vì lũy thừa của $\sin x$ là số lẻ nên ta đổi biến $u = \cos x \Rightarrow du = (\cos x)' dx$.

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cdot \cos^2 x dx &= -\int (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \cos^2 x \cdot (\cos x)' dx \\ &= -\int (1 - u^2)^2 u^2 du = \int (2u^4 - u^2 - u^6) du = \frac{2u^5}{5} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^7}{7} + C \\ &= \frac{2 \cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^7 x}{7} + C. \end{aligned}$$

Trường hợp 2: Cả hai số m, n đều là số chẵn: Ta sử dụng công thức hạ bậc để giảm một nửa số mũ của $\sin x; \cos x$, để làm bài toán trở nên đơn giản hơn.

b. Dạng $\int \sin mx \cdot \cos nx dx, \int \sin mx \cdot \sin nx dx, \int \cos mx \cdot \cos nx dx$.

Ta sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng trong lượng giác.

c. Dạng $\int \frac{\tan^m x}{\cos^n x} dx$ trong đó m, n là các số nguyên.

Lũy thừa của $\cos x$ là số nguyên dương chẵn, $n = 2k$ thì ta đổi biến $u = \tan x$	Lũy thừa của $\tan x$ là số nguyên dương lẻ, $m = 2k + 1$ thì ta đổi biến
--	---

	$u = \frac{1}{\cos x}$
$\int \frac{\tan^m x}{\cos^n x} dx = \int \frac{\tan^m x}{\cos^{2k-2} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$ $= \int \frac{\tan^m x}{(\cos^2 x)^{k-1}} (\tan x)' dx$ $= \int \tan^m x \cdot (1 + \tan^2 x)^{k-1} \cdot d(\tan x)$ $= \int u^m \cdot (1 + u^2)^{k-1} du$	<p>Khi đó $u' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$, do đó</p> $\int \frac{\tan^m x}{\cos^n x} dx = \int \frac{\tan^{2k} x}{\cos^{n-1} x} \cdot \frac{\tan x}{\cos x} dx$ $= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)^k \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ $= \int (u^2 - 1)^k u^{n-1} du$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm

a. $\int \frac{\tan^6 x}{\cos^4 x} dx$

b. $\int \frac{\tan^5 x}{\cos^7 x} dx$

Lời giải

a. Do lũy thừa của $\cos x$ là số nguyên dương chẵn nên đặt $u = \tan x$. Từ công thức tổng quát đã chứng minh ở trên ta có

$$\int \frac{\tan^6 x}{\cos^4 x} du = \int u^6 \cdot (1 + u^2)^1 du = \frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C = \frac{\tan^9 x}{9} + \frac{\tan^7 x}{7} + C$$

b. Do lũy thừa của $\tan x$ là một số lẻ nên ta đặt $u = \frac{1}{\cos x}$, do vậy, từ công thức tổng quát chứng minh ở trên ta có

$$\int \frac{\tan^5 x}{\cos^7 x} dx = \int (u^2 - 1)^2 \cdot u^6 du = \frac{u^{11}}{11} - \frac{2u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C$$

$$= \frac{1}{11 \cos^{11} x} - \frac{2}{9 \cos^9 x} + \frac{1}{7 \cos^7 x} + C$$

Đổi biến lượng giác

Khi nguyên hàm, tích phân của các hàm số mà biểu thức của nó có chứa các dạng $\sqrt{x^2 + a^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, thì ta có cách biến đổi lượng giác như sau:

Biểu thức có chứa	Đổi biến
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ Hoặc $x = a \cot t, t \in (0; \pi)$

Tương tự với hai nhận dạng còn lại, quý độc giả có thể áp dụng vào các bài toán phức tạp hơn.

$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = \frac{ a }{\sin t}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ Hoặc $x = \frac{ a }{\cos t}, t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ Hoặc $x = a \cos t, t \in [0; \pi]$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \vee \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a \cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b-a)\sin^2 t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Nguyên hàm của hàm phân thức hữu tỉ

STUDY TIP

Kí hiệu là bậc của đa thức.

Cho hàm số $y = f(x)$ có dạng $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó P và Q là các đa thức, và P không chia hết cho Q .

Hàm $f(x)$ được gọi là hàm **phân thức hữu tỉ thực sự** nếu $\deg(P) < \deg(Q)$.

Trong các bài toán tìm nguyên hàm và tích phân của hàm phân thức hữu tỉ, nếu $f(x)$ chưa phải là hàm phân thức hữu tỉ thực sự thì ta thực hiện chia tử thức cho mẫu thức để được

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} = S(x) + h(x)$$

Khi đó, $h(x)$ sẽ là hàm phân thức hữu tỉ thực sự.

Định lý: Một phân thức thực sự luôn phân tích được thành tổng các phân thức đơn giản hơn.

$$\frac{1}{x-a}; \frac{1}{(x-a)^k}; \frac{ax+b}{x^2+px+q}; \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$$

Đó là các biểu thức có dạng là các hàm số có thể tìm nguyên hàm một cách dễ dàng. Để tách được phân thức ta dùng phương pháp hệ số bất định.

a. Trường hợp phương trình $Q(x) = 0$ không có nghiệm phức và các nghiệm đều là nghiệm đơn.

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots (a_kx + b_k)$$

(Số nhân tử chính bằng bậc của đa thức $Q(x)$).

Trong trường hợp này, g có thể biểu diễn dưới dạng

$$g(x) = \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \dots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Sau khi biểu diễn được $g(x)$ về dạng này, bài toán trở thành bài toán cơ bản.

Ví dụ 3: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{4x-3}{x^2-3x+2}$ là

A. $F(x) = 4 \ln|x-2| + \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + C$

B. $F(x) = 4 \ln|x-2| - \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + C$

C. $F(x) = -4 \ln|x-2| - \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$

D. $F(x) = 4 \ln|x-2| - \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$

Phân tích

Đáp án B.

Ta có $\frac{4x-3}{x^2-3x+2} = \frac{4x-3}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)}$

Khi đó $(A+B)x - 2A - B = 4x - 3$, đồng nhất hệ số thì ta được

$$\begin{cases} A+B=4 \\ 2A+B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=5 \end{cases}$$

Lời giải

Ta có $\int \frac{4x-3}{x^2-3x+2} dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{5}{x-2} \right) dx = -\ln|x-1| + 5 \ln|x-2| + C$

$$= 4 \ln|x-2| + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C = 4 \ln|x-2| - \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + C$$

Đáp số bài tập kiểm tra khả năng vận dụng:

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} dx = \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{10} \ln|2x-1| - \frac{1}{10} \ln|x+2| + C$$

Kiểm tra khả năng vận dụng
từ ví dụ 3

Tìm

b. Trường hợp $Q(x) = 0$ không có nghiệm phức, nhưng có nghiệm thực là nghiệm bội.

Nếu phương trình $Q(x) = 0$ có các nghiệm thực $a_1; a_2; \dots; a_n$ trong đó a_1 là nghiệm

bội k thì ta phân tích $g(x) = \frac{R(x)}{Q(x)}$ về dạng

$$g(x) = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a_1)^k} + \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{x-a_3} + \dots + \frac{B_{n+1}}{x-a_n}$$

Trên đây là phần lý thuyết khá phức tạp, ta đến với bài tập ví dụ đơn giản sau:

Ví dụ 4: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$

A. $F(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + C$

B. $F(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C$

C. $F(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4(1-x)^4} + C$

D. $F(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{4(1-x)^4} + C$

Phân tích

Nhận thấy $x=1$ là nghiệm bội ba của phương trình $(x-1)^3 = 0$, do đó ta biến đổi

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(1-x)^3} &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3} = \frac{A(x^2 - 2x + 1) + B(1-x) + C}{(1-x)^3} \\ &= \frac{Ax^2 + (-2A - B)x + A + B + C}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ -2A - B = 2 \\ A + B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -2 \\ C = 2 \end{cases}$$

Từ đây ta có

Lời giải

Ta có
$$\int \frac{2x}{(1-x)^3} dx = \int \left(\frac{-2}{(1-x)^2} + \frac{2}{(1-x)^3} \right) dx = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C$$

Đáp số bài tập kiểm tra khả năng vận dụng ví dụ 4:

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C$$

Kiểm tra khả năng vận dụng
từ ví dụ 4

Tìm

TỔNG QUÁT: Việc tính nguyên hàm của hàm phân thức hữu tỉ thực sự được đưa về các dạng nguyên hàm sau:

$$1. \int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + C \quad k \neq 1$$

$$2. \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = -\frac{A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$$

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Tìm nguyên hàm

$$I = \int (2x-1)e^{-x} dx$$

A. $I = -(2x+1)e^{-x} + C$

B. $I = -(2x-1)e^{-x} + C$

C. $I = -(2x+3)e^{-x} + C$

D. $I = -(2x-3)e^{-x} + C$

Câu 2: Tìm nguyên hàm

$$I = \int x \ln(2x-1) dx$$

A.

$$I = \frac{4x^2-1}{8} \ln|2x-1| + \frac{x(x+1)}{4} + C$$

B.

$$I = \frac{4x^2+1}{8} \ln|2x-1| + \frac{x(x+1)}{4} + C$$

C.

$$I = \frac{4x^2-1}{8} \ln|2x-1| - \frac{x(x+1)}{4} + C$$

D.

$$I = \frac{4x^2+1}{8} \ln|2x-1| - \frac{x(x+1)}{4} + C$$

Câu 3: Tìm nguyên hàm

$$I = \int (x-1) \sin 2x dx$$

A. $I = \frac{(1-2x) \cos 2x + \sin 2x}{2} + C$

B.

$$I = \frac{(2-2x) \cos 2x + \sin 2x}{2} + C$$

C.

$$I = \frac{(1-2x) \cos 2x + \sin 2x}{4} + C$$

D.

$$I = \frac{(2-2x) \cos 2x + \sin 2x}{4} + C$$

Câu 4: Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau?

A. $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$ với k là hằng số

B.

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

C.

$$\int [f(x) \cdot g(x)] dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

D.

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Câu 5: Nguyên hàm của hàm số $f = e^{-2017x}$ là:

A. $\frac{1}{2017} e^{-2017x} + C$

B. $e^{-2017x} + C$

C. $-2017 \cdot e^{-2017x} + C$ D.
 $\frac{-1}{2017} e^{-2017x} + C$

Câu 6: Tìm một nguyên hàm $F(x)$

của hàm số $f(x) = \frac{4}{\cos^2 3x}$ biết
 $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \sqrt{3}$

A. $F(x) = \frac{4}{3} \tan 3x - \frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $F(x) = 4 \tan 3x - 3\sqrt{3}$

C. $F(x) = \frac{4}{3} \tan 3x + \frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $F(x) = -\frac{4}{3} \tan 3x - \frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 7: Tìm nguyên hàm của hàm số
 $f(x) = x\sqrt{x}$

A. $\int f(x) dx = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$

B. $\int f(x) dx = \frac{2}{5} x \sqrt{x} + C$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} x^2 \sqrt{x} + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{3}{2} \sqrt{x} + C$

Câu 8: Tìm nguyên hàm của hàm số
 $f(x) = (2x-3)^2$

A. $\int f(x) dx = \frac{(2x-3)^3}{3} + C$

B. $\int f(x) dx = (2x-3)^3 + C$

C. $\int f(x) dx = \frac{(2x-3)^3}{6} + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{(2x-3)^3}{2} + C$

Câu 9: Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = 3 \sin 3x - \cos 3x$$

A. $\int f(x) dx = \cos 3x - \sin 3x + C$

B. $\int f(x) dx = \cos 3x + \sin 3x + C$

C.

$\int f(x) dx = -\cos 3x - \frac{1}{3} \sin 3x + C$

D.

$\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{3} \sin 3x + C$

Câu 10: Tìm nguyên hàm của hàm số
 $f(x) = e^x - e^{-x}$

A. $\int f(x) dx = e^x + e^{-x} + C$

B. $\int f(x) dx = -e^x + e^{-x} + C$

C. $\int f(x) dx = e^x - e^{-x} + C$

D. $\int f(x) dx = -e^x - e^{-x} + C$

Câu 11: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của
 hàm số $f(x) = \sqrt{3x+4}$, biết
 $F(0) = 8$

A. $F(x) = \frac{1}{3} \sqrt{3x+4} + \frac{38}{3}$

B.

$F(x) = \frac{2}{3} (3x+4) \sqrt{3x+4} + \frac{16}{3}$

C.

$F(x) = \frac{2}{9} (3x+4) \sqrt{3x+4} + \frac{56}{9}$

D. $F(x) = \frac{2}{3} (3x+4) \sqrt{3x+4} + \frac{8}{3}$

Câu 12: Tìm nguyên hàm

$$I = \int \frac{1}{4-x^2} dx$$

A. $I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C$ **B.**

$$I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

C. $I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$ **D.**

$$I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C$$

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-3}$

. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Chọn phương án sai.

A. $F(x) = \frac{\ln |2x-3|}{2} + 10$

B. $F(x) = \frac{\ln |4x-6|}{4} + 10$

C. $F(x) = \frac{\ln (2x-3)^2}{4} + 5$

D. $F(x) = \frac{\ln \left| x - \frac{3}{2} \right|}{2} + 1$

Câu 14: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của

hàm số $f(x) = \frac{x^2+x-1}{\sqrt{x^2-1}} e^x$

A. $F(x) = \sqrt{x^2-1} \cdot e^x + C$

B. $F(x) = -\sqrt{x^2-1} \cdot e^x + C$

C. $F(x) = -2x\sqrt{x^2-1} \cdot e^{-2x} + C$

D. $F(x) = \sqrt{x^2-1} \cdot e^{-x} + C$

Câu 15: Tìm nguyên hàm của hàm

số $f(x) = \frac{3x-7}{x+2}$

A. $\int f(x) dx = x - 13 \ln |x+2| + C$

B. $\int f(x) dx = \ln |x+2| + C$

C.

$$\int f(x) dx = 3x - 13 \ln |x+2| + C$$

D. $\int f(x) dx = 3x - 7 \ln |x+2| + C$

Câu 16: Tìm nguyên hàm của hàm

số $f(x) = \frac{x^4+5}{x+1}$

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 6 \ln |x+1| + C$

B.

$$\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 6 \ln |x+1| + C$$

C.

$$\int f(x) dx = x^4 - x^3 + x^2 - x + 6 \ln |x+1| + C$$

D.

$$\int f(x) dx = x^4 - x^3 + x^2 - x - 6 \ln |x+1| + C$$

Câu 17: Tìm nguyên hàm của hàm

số $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$

A.

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} + C$$

B. $\int f(x) dx = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} + C$

C.

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}-1} + C$$

D.

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} + C$$

Câu 18: Tìm nguyên hàm của hàm

số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$.

A.

$$\int f(x) dx = \left[(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right] + C$$

B.

$$\int f(x) dx = \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}} \right] + C$$

C.

$$\int f(x) dx = \frac{1}{3} \left[(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right] + C$$

D.

$$\int f(x) dx = \frac{1}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}} \right] + C$$

Câu 19: Tìm nguyên hàm của hàm

số $f(x) = \frac{1}{e^x + 3}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{e^x}{e^x + 3} \right| + C$

B. $\int f(x) dx = \ln \left| \frac{e^x}{e^x + 3} \right| + C$

C.

$$\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln [e^x (e^x + 3)] + C$$

D.

$$\int f(x) dx = \frac{1}{6} \ln [e^x (e^x + 3)] + C$$

Câu 20: Biết $F(x)$ là một nguyên

hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$

và $F(0) = \pi$. Tìm $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$ **B.**

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi$$

C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi$ **D.**

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Câu 21: Biết $F(x)$ là nguyên hàm

của $f(x) = 4^x$ và $F(1) = \frac{1}{\ln 2}$. Khi

đó giá trị $F(2)$ bằng

A. $\frac{7}{\ln 2}$ **B.** $\frac{8}{\ln 2}$

C. $\frac{9}{\ln 2}$ **D.** $\frac{3}{\ln 2}$

Câu 22: Nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$$
 là:

A. $F(x) = 2e^x + \cot x + C$

B. $F(x) = 2e^x - \tan x + C$

C. $F(x) = 2e^x + \tan x + C$

D. $F(x) = 2e^x - \tan x$

Câu 23: Tìm nguyên hàm

$F(x) = \int (x + \sin x) dx$ biết

$$F(0) = 19$$

A. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \cos x + 20$

B. $F(x) = x^2 + \cos x + 20$

C. $F(x) = x^2 - \cos x + 20$

D. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + 20$

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án A.

Đặt $u = 2x - 1 \Rightarrow du = 2dx$;

$$e^{-x} dx = dv \Rightarrow v = -e^{-x}$$

Lúc này ta có

$$\begin{aligned} \int (2x-1)e^{-x} dx &= -(2x-1).e^{-x} + \int 2e^{-x} dx \\ &= -(2x-1).e^{-x} - 2e^{-x} + C = -(2x+1)e^{-x} + C \end{aligned}$$

Câu 2: Đáp án C.

Đặt

$$u = \ln(2x-1) \Rightarrow du = \frac{2}{2x-1} dx, dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \int x \ln(2x-1) dx &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(2x-1) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2}{2x-1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln|2x-1| - \int \frac{x^2}{2x-1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln|2x-1| - \int \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(2x-1)} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln|2x-1| - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \ln|(2x-1)| \right) + C \\ &= \frac{4x^2-1}{8} \cdot \ln|2x-1| - \frac{x(x+1)}{4} + C \end{aligned}$$

Câu 3: Đáp án D.

$$I = \int (x-1) \sin 2x dx$$

Đặt $x-1 = u \Rightarrow dx = du$.

$$\sin 2x dx = dv \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{-(x-1)}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx$$

$$= \frac{(1-x) \cos 2x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Câu 4: Đáp án C.

Câu 5: Đáp án D.

$$\text{Ta có } \int e^{-2017x} dx = \frac{1}{-2017} e^{-2017x} + C$$

Câu 6: Đáp án A.

$$\text{Ta có } F(x) = \int \frac{4}{\cos^2 3x} dx = \frac{4}{3} \tan 3x + C$$

Mà

$$F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \tan \frac{\pi}{3} + C = \sqrt{3} \Leftrightarrow C = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Câu 7: Đáp án A.

$$\int x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$$

Câu 8: Đáp án C.

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \frac{1}{3.2} (2x-3)^3 + C$$

Câu 9: Đáp án C.

$$\int (3 \sin 3x - \cos 3x) dx = \frac{3}{3} (-\cos 3x) - \frac{1}{3} \sin 3x + C$$

Câu 10: Đáp án A.

Câu 11: Đáp án C.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sqrt{3x+4} dx = \int (3x+4)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{9} (3x+4)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{9} (3x+4) \sqrt{3x+4} + C \end{aligned}$$

$$\text{Mà } F(0) = 8 \Rightarrow C = \frac{56}{9}, \text{ ta chọn C.}$$

Câu 12: Đáp án D.

Ta có

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx &= \int \frac{1}{(a+x)(a-x)} dx \\ &= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C \end{aligned}$$

Áp dụng vào bài ta chọn D.

Câu 13: Đáp án B.

$$F(x) = \int \frac{1}{2x-3} dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2x-3)} d(2x-3)$$

Ta có

$$= \frac{\ln|2x-3|}{2} + C$$

Từ đây ta thấy A đúng.

Với B ta thấy

$$\frac{\ln|4x-6|}{4} + 10 = \frac{\ln 2 + \ln|2x-3|}{4} + 10 \neq F(x)$$

, B sai.

Câu 14: Đáp án A.

$$f(x) = \frac{x^2+x-1}{\sqrt{x^2-1}} e^x = \frac{(x^2-1)+x}{\sqrt{x^2-1}} e^x$$

Ta có

$$= \left[\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2-1} \right] e^x = \left[(\sqrt{x^2-1})' + \sqrt{x^2-1} \right] e^x$$

$$\Rightarrow F(x) = \sqrt{x^2-1} \cdot e^x + C \quad (\text{áp dụng bảng ở lý thuyết}).$$

Câu 15: Đáp án C.

$$f(x) = \int \frac{3x-7}{x+2} dx = \int \frac{3(x+2)-13}{x+2} dx$$

Ta có

$$= \int \left(3 - \frac{13}{x+2} \right) dx = \int 3 dx - 13 \int \frac{d(x+2)}{x+2}$$

$$= 3x - 13 \ln|x+2| + C$$

Câu 16: Đáp án B.

$$f(x) = \int \frac{x^4+5}{x+1} dx = \int \frac{(x^4-1)+6}{x+1} dx$$

Ta có

$$= \int \left[(x-1)(x^2+1) + \frac{6}{x+1} \right] dx$$

$$= \int (x^3 - x^2 + x - 1) dx + 6 \int \frac{d(x+1)}{x+1}$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 6 \ln|x+1| + C$$

Câu 17: Đáp án A.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \int \frac{d(\sqrt{x^2+1})}{x^2} = \int \frac{d(\sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{x^2+1})^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} + C$$

$$\left(\text{Áp dụng công thức } \int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C \right)$$

Câu 18: Đáp án D.

Ta có

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \int \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}$$

$$= \frac{1}{2} \int (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}} \right] + C$$

$$= \frac{1}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}} \right] + C$$

Câu 19: Đáp án A.

$$\int \frac{dx}{e^x+3} = \int \frac{e^x dx}{e^x(e^x+3)} = \int \frac{d(e^x)}{e^x(e^x+3)}$$

Ta có

$$= \frac{1}{3} \int \left[\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x+3} \right] d(e^x) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{e^x}{e^x+3} \right| + C$$

Câu 20: Đáp án C.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \sin^3 x \cdot \cos x dx$$

$$= \int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$$

$$F(0) \Rightarrow \pi \Rightarrow C = \pi \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4} \sin^4 x + \pi$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi$$

Câu 21: Đáp án A.

$$\int 4^x dx = \frac{1}{\ln 4} \cdot 4^x + C = F(x)$$

Ta có

$$F(1) = \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow \frac{4}{\ln 4} + C = \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow C = -\frac{1}{\ln 2}$$

Mà

$$F(2) = \frac{1}{\ln 4} \cdot 4^2 - \frac{1}{\ln 2} = \frac{16}{2\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{7}{\ln 2}$$

Do đó

Câu 22: Đáp án C.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$= 2 \int e^x dx + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = 2e^x + \tan x + C$$

Câu 23: Đáp án D.

$$F(x) = \int (x + \sin x) dx = \frac{x^2}{2} - \cos x + C$$

$$F(0) = 19 \Rightarrow C = 20 \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 20$$

V. Khái niệm và các tính chất cơ bản của tích phân

1. Định nghĩa

Ta gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

Chú ý

1. Định nghĩa tích phân chỉ được áp dụng khi biết một nguyên hàm của trên đoạn .
2. Tích phân là một số, còn nguyên hàm là một (họ) hàm số (nó còn được gọi là tích phân không xác định).
3. không phụ thuộc vào chữ viết biến số trong dấu tích phân, mà chỉ phụ thuộc vào hàm số f và đoạn .

Cho hàm số $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định

trên đoạn $[a; b]$) của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x) dx$

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Vậy

2. Nhận xét

a. Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x) dx$ hay

$\int_a^b f(t) dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến số x hay t .

b. Ý nghĩa hình học của tích phân. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm

trên đoạn $[a; b]$, thì tích phân $\int_a^b f(x) dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a; x = b$. Vậy

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

3. Các tính chất của tích phân

Tính chất 1

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

với k là hằng số.

Tính chất 2

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

Tính chất 3

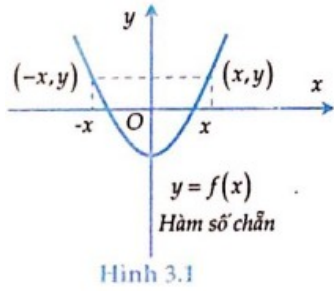
$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Ta quy ước

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \text{với } a < c < b.$$



Định lý 1

Cho f là hàm số xác định trên K và a là một điểm cố định thuộc K . Xét hàm số $G(x)$ xác định trên K bởi công thức

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Khi đó G là một nguyên hàm của f .

Định lý 2

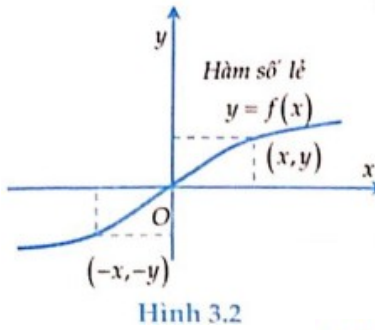
Tích phân của hàm lẻ và hàm chẵn trên $\square$.

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

1. Nếu f là một hàm số chẵn, khi đó

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

2. Nếu f là một hàm số lẻ, khi đó



Đọc thêm

Ta vừa đưa ra 3 tính chất của tích phân theo chương trình chuẩn. Dưới đây là các tính chất bổ sung:

$$1. \int_a^b 0 dx = 0$$

$$2. \int_a^b c dx = c(b-a)$$

$$3. \text{ Nếu } f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \text{ thì } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Hệ quả 3: Nếu hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục và thỏa mãn

$$f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b] \text{ thì } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{Chú ý: Nếu } f(x) \text{ liên tục và dương trên } [a, b] \text{ thì } \int_a^b f(x) dx > 0$$

$$4. \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, (a \leq b)$$

5. Nếu $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]; m, M$ là các hằng số thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad \text{hay} \quad m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

--

VI. Hai phương pháp cơ bản để tìm tích phân

1. Phương pháp đổi biến số

Định lý 1

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$ sao cho $\varphi(\alpha) = a; \varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha; \beta]$. Khi đó

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Từ định lý 1 ta rút ra các bước đổi biến số

1. Đặt $x = \varphi(t)$, ta xác định đoạn $[\alpha; \beta]$ sao cho $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b, \forall t \in [\alpha; \beta]$;

2. Biến đổi $f(x) dx = f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = g(t) dt$

3. Tìm một nguyên hàm $G(t)$ của $g(t)$

4. Tính $\int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$

5. Kết luận $\int_a^b f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha)$.

Ví dụ 1: Tính tích phân

$$I = \int_0^3 \frac{x^2}{(1+x)^3} dx$$

A. $I = \ln 4 + \frac{33}{32}$

B. $I = \ln 4 - \frac{4121}{4000}$

C. $I = \ln 4 - 1$

D. $I = \ln 4 - \frac{33}{32}$

Đáp án D.

Lời giải

Đặt $1+x = u \Rightarrow dx = du$.

Đổi cận $x=0 \Rightarrow u=1; x=3 \Rightarrow u=4$

Khi đó
$$I = \int_1^4 \frac{(u-1)^2}{u^3} du = \int_1^4 \frac{u^2 - 2u + 1}{u^3} du = \int_1^4 \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{u^2} + \frac{1}{u^3} \right) du = \left(\ln|u| + \frac{2}{u} - \frac{1}{2u^2} \right) \Big|_1^4$$

$$= \ln 4 - \frac{33}{32}$$

Định lý 2

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $\alpha \leq u(x) \leq \beta$ với mọi $x \in [a; b]$ sao cho $f(x) = g(u(x))u'(x)$, $g(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$ thì

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u) du$$

Từ định lý 2 ta rút ra các bước đổi biến số

1. Đặt $u = u(x)$,
2. Biến đổi $f(x) dx = g(u) du$.
3. Tìm một nguyên hàm $G(u)$ của $g(u)$.
4. Tính $\int_{u(a)}^{u(b)} g(u) du = G(u(b)) - G(u(a))$.
5. Kết luận $\int_a^b f(x) dx = G(u(b)) - G(u(a))$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x dx$

Ví dụ 2: Tính tích phân

A. $I = \frac{1}{2}$

B. $I = \frac{1}{3}$

C. $I = \frac{2}{3}$

D. $I = \frac{1}{5}$

Đáp án B.

Lời giải

Đặt $u = \sin x$, ta có

$$\sin^2 x \cos x dx = \sin^2 x (\sin x)' dx = u^2 du$$

Hàm số $g(u) = u^2; u \in [0; 1]$ do $\left(u(0) = 0; u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \right)$ có nguyên hàm $G(u) = \frac{u^3}{3}$.

Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^1 u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

2. Phương pháp tích phân từng phần

Tương tự tính nguyên hàm từng phần, ta có định lý sau:

Định lý

Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = (u(x) v(x)) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx \quad \text{hay} \quad \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Ta có bảng sau

	$\int P(x) e^x dx$	$\int P(x) \cos x dx$	$\int P(x) \ln x dx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$\ln x$
dv	$e^x dx$	$\cos x dx$	$P(x) dx$

Trong thực tế, đôi khi việc sử dụng phương pháp tích phân từng phần phải linh hoạt, đôi khi phải dự đoán khác thường như ví dụ 1 dưới đây.

Ta thấy trong bài toán bên việc sử dụng tích phân từng phần ở đây rất thông minh khi phát hiện được khi nhân thêm x sẽ triệt tiêu được.

Ví dụ 3: Cho $I = \int_1^2 \left(1 + x + \frac{1}{x}\right) e^{x-\frac{1}{x}} dx = ae^b - c$ với $a; b; c \in \mathbb{Q}$; $a \neq 0$. Lúc này $S = a + b + c$ có giá trị bằng

A. $S = -\frac{1}{2}$ **B.** $S = -\frac{3}{2}$ **C.** $S = \frac{1}{3}$ **D.** $S = \frac{9}{2}$

Đáp án D.

Lời giải

Ta có
$$I = \int_1^2 \left(1 + x + \frac{1}{x}\right) e^{x-\frac{1}{x}} dx = \int_1^2 e^{x-\frac{1}{x}} dx + \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) e^{x-\frac{1}{x}} dx \quad (1)$$

Đặt
$$I_1 = \int_1^2 e^{x-\frac{1}{x}} dx$$

Đặt
$$\begin{cases} u = e^{x-\frac{1}{x}} \Rightarrow du = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) e^{x-\frac{1}{x}} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần ta có
$$I_1 = x e^{x-\frac{1}{x}} \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) e^{x-\frac{1}{x}} dx \quad (2)$$

Từ (1); (2) ta có

$$I = x e^{x-\frac{1}{x}} \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) e^{x-\frac{1}{x}} dx + \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) e^{x-\frac{1}{x}} dx$$

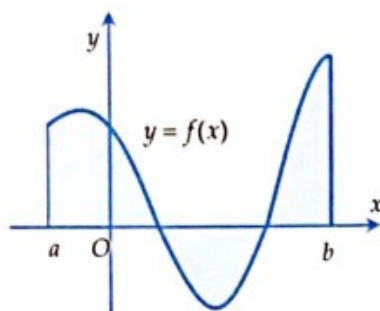
$$= x \cdot e^{\frac{1}{x}} \Big|_1^2 = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}} - 1 \cdot e^{\frac{1}{1}} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$\Rightarrow a = 2; b = \frac{3}{2}; c = 1 \Rightarrow a + b + c = \frac{9}{2}$$

VII. Ứng dụng hình học của tích phân

1. Tính diện tích hình phẳng

a. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành



Hình 3.3

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x = a; x = b$ được tính theo công thức

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

Chú ý: Trong trường hợp dấu của $f(x)$ thay đổi trên đoạn $[a; b]$ thì ta phải chia đoạn $[a; b]$ thành một số đoạn con để trên đó dấu của $f(x)$ không đổi, do đó ta có thể bỏ dấu giá trị tuyệt đối trên đoạn đó.

b. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

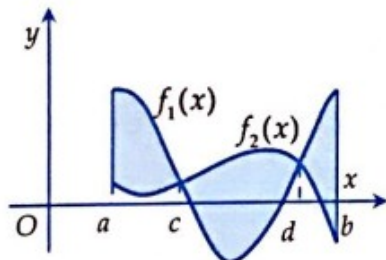
Tương tự như chú ý ở trên thì ở bài toán này ta cũng phải xét đoạn mà dấu của $f(x) - g(x)$ không đổi.

Chú ý

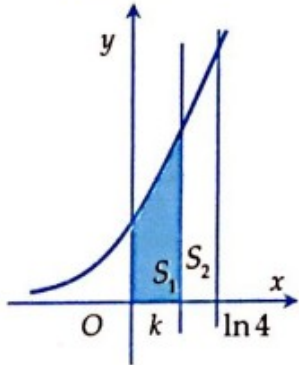
Khi áp dụng công thức này cần khử dấu giá trị tuyệt đối của hàm số dưới dấu tích phân. Muốn vậy ta phải giải phương trình $f(x) - g(x) = 0$ trên đoạn $[a; b]$.

Giả sử phương trình có hai nghiệm $c; d (c < d)$. Khi đó $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên các đoạn $[a; b], [c; d], [d; b]$. Trên mỗi đoạn đó, chẳng hạn trên đoạn $[a; c]$ thì ta có

$$\int_a^c |f(x) - g(x)| dx = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx$$



Hình 3.4



Ví dụ 4: Tính diện tích hình phẳng (hình được tô màu) ở biểu diễn ở hình 3.4.

Lời giải

Nhận thấy trên $[a; c]$ và $[d; b]$ thì $f_1(x) \geq f_2(x)$; trên $[c; d]$ thì $f_1(x) \leq f_2(x)$

Do vậy

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx = \int_a^c (f_1(x) - f_2(x)) dx + \int_c^d (f_2(x) - f_1(x)) dx + \int_d^b (f_1(x) - f_2(x)) dx$$

(Trên đây là cách bỏ dấu giá trị tuyệt đối)

Ví dụ 5: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.

- A. $k = \frac{2}{3} \ln 4$ B. $k = \ln 2$ C. $k = \ln \frac{8}{3}$ D. $k = \ln 3$

Lời giải

Đáp án D.

Nhìn vào hình vẽ ta có được các công thức sau:

$$\int_0^k e^x dx = 2 \cdot \int_k^{\ln 4} e^x dx \Leftrightarrow e^x \Big|_0^k = 2 \cdot e^x \Big|_k^{\ln 4} \Leftrightarrow e^k - e^0 = 2 \cdot e^{\ln 4} - 2 \cdot e^k \Leftrightarrow 3e^k = 9$$

$$\Leftrightarrow e^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3$$

Ví dụ 6: Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16m và độ dài trục bé bằng 10m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/1m². Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)

- A. 7.862.000 đồng B. 7.653.000 đồng.
C. 7.128.000 đồng. D. 7.826.000 đồng.

Lời giải

Đáp án B.

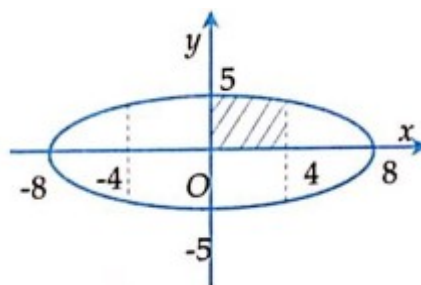
Nhận thấy đây là bài toán áp dụng ứng dụng của tích phân vào tính diện tích hình phẳng. Ta có hình vẽ bên:

Ta thấy, diện tích hình phẳng cần tìm gấp 4 lần diện tích phần gạch chéo, do đó ta chỉ cần đi tìm diện tích phần gạch chéo.

$$\int_0^4 \frac{5}{2} \sqrt{8^2 - x^2} dx = 76.5289182$$

Ta có phương trình đường elip đã cho là $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$. Xét trên $[0; 4]$ nên $y > 0$ thì $y = \frac{5}{8} \sqrt{8^2 - x^2}$. Khi đó $S_{cheo} = \int_0^4 \frac{5}{8} \sqrt{8^2 - x^2} dx$, vậy diện tích trồng hoa của ông An

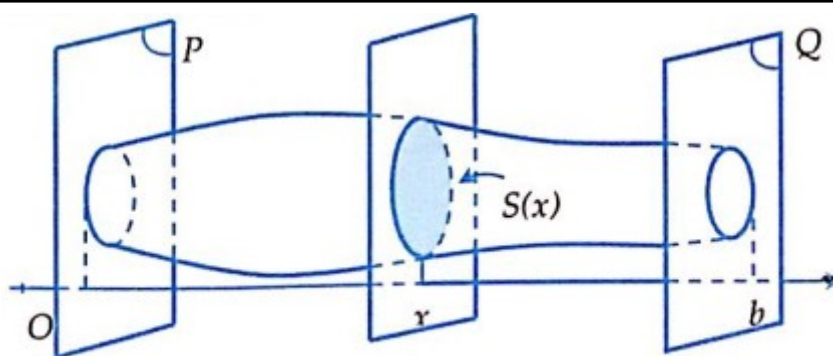
trên mảnh đất là $S = 4 \cdot \int_0^4 \frac{5}{8} \sqrt{8^2 - x^2} dx \approx 76,5289182$



Khi đó số kinh phí phải trả của ông An là $76,5289182 \cdot 100000 \approx 7.653.000$ đồng.

c. Tính thể tích vật thể

Cho H là một vật thể nằm giới hạn giữa hai mặt phẳng $x = a$ và $x = b$. Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ x ($a \leq x \leq b$). Giả sử $S(x)$ là một hàm liên tục. Khi đó thể tích V của H là $V = \int_a^b S(x) dx$. (hình 3.5)



Hình 3.5

Ví dụ 7: Tính thể tích vật thể tạo được khi lấy giao vuông góc hai ống nước hình trụ có cùng bán kính đáy bằng a . (hình 3.6)

A. $k = \frac{2}{3} \ln 4$

B. $k = \ln 2$

C. $k = \ln \frac{8}{3}$

D. $k = \ln 3$

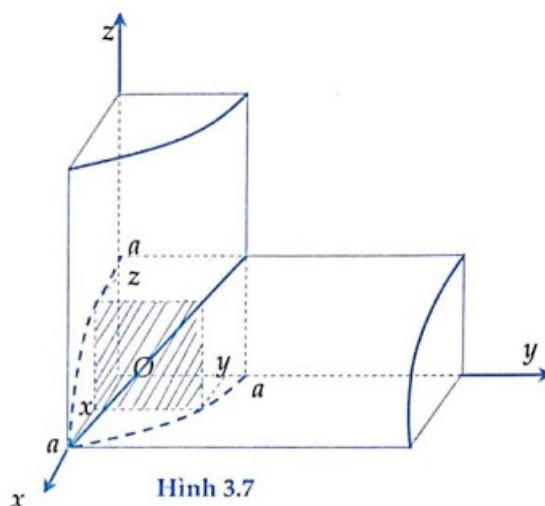
Đáp án A

Lời giải

Ta sẽ gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ vào vật thể này, tức là ta sẽ đi tính thể tích vật thể V giới hạn bởi hai mặt trụ: $x^2 + y^2 = a^2$ và $x^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$).



Hình 3.6



Hình 3.7

Hình vẽ trên mô tả một phần tám thứ nhất của vật thể này, với mỗi $x \in [0; a]$ thiết diện của vật thể (vuông góc với trục Ox) tại x là một hình vuông có cạnh $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (chính là phần gạch chéo trong hình 3.7). Do đó diện tích thiết diện sẽ là:

$$S(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = a^2 - x^2, \quad x \in [0; a].$$

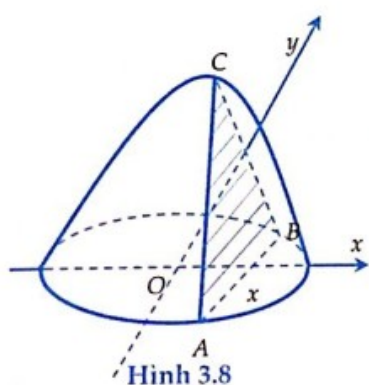
Khi đó áp dụng công thức (*) thì thể tích vật thể cần tìm sẽ bằng:

$$V = 8 \int_0^a S(x) dx = 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx = 8 \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{16a^3}{3}$$

Ví dụ 8: Tính thể tích của vật thể H biết rằng đáy của H là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$ và thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành luôn là tam giác đều.

Lời giải

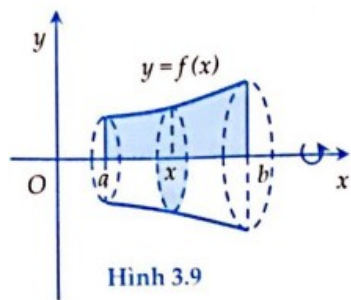
Giả sử mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ là x ($-1 \leq x \leq 1$) cắt vật thể (H) theo thiết diện là tam giác ABC đều, với AB chứa trong mặt phẳng xOy (hình 3.8).



Hình 3.8

Ta có $AB = 2\sqrt{1 - x^2}$. Do đó $S(x) = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}(1 - x^2)$. Vậy

$$S = \int_{-1}^1 S(x) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{3}(1 - x^2) dx = \sqrt{3} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (\text{đvtt}).$$



d. Tính thể tích khối tròn xoay

Định lý

Chú ý

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay. Thể tích V của khối tròn

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

xoay đó là

Ví dụ 9: Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng được giới hạn bởi đường cong $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = \pi$ (hình 3.10) quanh trục Ox là

- A. $\frac{\pi}{2}$ (đvtt) B. $\frac{\pi^2}{2}$ (đvtt) C. π (đvtt) D. π^2 (đvtt)

Lời giải

Đáp án B.

Áp dụng công thức ở định lý trên ta có

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

Tiếp theo dưới đây là một bài toán thường xuất hiện trong các đề thi thử, bài toán có thể đưa về dạng quen thuộc và tính toán rất nhanh.

Ví dụ 10: Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng được giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{A^2 - x^2}$ và trục hoành quanh trục hoành.

Lời giải tổng quát

Ta thấy $y = \sqrt{A^2 - x^2} \Leftrightarrow y^2 = A^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = A^2$

Do $\sqrt{A^2 - x^2} \geq 0$ với mọi x , do vậy đây là phương trình nửa đường tròn tâm O , bán kính $R = A$ nằm phía trên trục Ox . Khi quay quanh trục Ox thì hình phẳng sẽ tạo nên một khối cầu tâm O , bán kính $R = A$ (hình 3.11). Do vậy ta có luôn

$$V = \frac{4}{3} \pi A^3$$

Vậy với bài toán dạng này, ta không cần viết công thức tích phân mà kết luận luôn theo công thức tính thể tích khối cầu.



Đọc thêm

Định lý

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a, b] (a \geq 0)$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh trục tung tạo nên một khối xoay. Thể tích V của khối

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

tròn xoay đó là

VIII. Một số dạng tích phân thường gặp

Tích phân hàm phân thức hữu tỉ

Trong bài toán này, ta sẽ tham khảo lại phần “Nguyên hàm phân thức hữu tỉ” phía trên để hiểu được các định nghĩa phân thức hữu tỉ, phân thức hữu tỉ thực sự và phân thức đơn giản, cùng các định lý đã được nêu ở phần nguyên hàm ở phần trước.

Dưới đây là một số bài toán thường gặp về dạng này.

A. MỘT SỐ CÔNG THỨC VÀ KỸ NĂNG BIẾN ĐỔI

$$1. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

$$2. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C$$

Kỹ năng biến đổi tam thức bậc hai

$$1. ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \quad 2. ax^2 + bx + c = \pm (mx + n)^2 \pm p^2$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

$$I_1 = \int_a^b \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

Dạng 1: Tích phân dạng

Phương pháp chung

$$I_1 = \int_a^b \frac{dx}{(mx + n)^2 - p^2} = \left[\frac{1}{2mp} \ln \left| \frac{mx + n - p}{mx + n + p} \right| \right]_a^b$$

Biến đổi

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 8x + 1} = \frac{\ln \left(\frac{a + b\sqrt{3}}{13} \right)}{c\sqrt{3}}, \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Q}; c \neq 0.$$

Ví dụ 1: Cho $S = a + b + c$, lúc này S có giá trị bằng

A. $S = 20 + 37\sqrt{3}$ B. $S = 37 + 24\sqrt{3}$ C. $S = 57$ D. $S = 61$

Đáp án D.

Lời giải

Áp dụng bài toán tổng quát trên ta có

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(2x+2)^2 - 3} = \left[\frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{2x+2-\sqrt{3}}{2x+2+\sqrt{3}} \right| \right]_0^1$$

STUDY TIP

Khi mẫu thức có dạng tam thức bậc hai thì thường đưa về dạng

STUDY TIP

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\ln \left| \frac{2.1+2-\sqrt{3}}{2.1+2+\sqrt{3}} \right| - \ln \left| \frac{2.0+2-\sqrt{3}}{2.0+2+\sqrt{3}} \right| \right) = \frac{\ln \left(\frac{37+20\sqrt{3}}{13} \right)}{4\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S = a + b + c = 37 = 37 + 20 + 4 = 61.$$

Ví dụ 2: Cho $I = \int_{-1}^0 \frac{dx}{7-10x-4x^2} = \frac{1}{a\sqrt{53}} \cdot \ln \frac{b-\sqrt{53}}{b+\sqrt{53}}$ với $a, b \in \mathbb{Q}; a \neq 0$. Tích ab có giá trị bằng

A. -24 B. 24 C. -48 D. 48

Đáp án A.

Lời giải

Áp dụng bài toán tổng quát trên ta có

$$I = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{53}}{2}\right)^2 - \left(2x + \frac{5}{2}\right)^2} = - \int_{-1}^0 \frac{dx}{\left(2x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{53}}{2}\right)^2}$$

$$= \left[-\frac{1}{2\sqrt{53}} \cdot \ln \left| \frac{4x+5-\sqrt{53}}{4x+5+\sqrt{53}} \right| \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{2\sqrt{53}} \cdot \left[\ln \left| \frac{4.0+5-\sqrt{53}}{4.0+5+\sqrt{53}} \right| - \ln \left| \frac{4.(-1)+5-\sqrt{53}}{4.(-1)+5+\sqrt{53}} \right| \right]$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{53}} \cdot \ln \frac{12-\sqrt{53}}{12+\sqrt{53}}$$

$$\Rightarrow a = -2; b = 12 \Rightarrow ab = -24.$$

Dạng 2: Tính tích phân $I_2 = \int_a^\beta \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$

Phương pháp chung

Cách 1:

$$I_2 = \int_a^\beta \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b) + \left(n - \frac{mb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c} dx = \frac{m}{2a} \int_a^\beta \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c} + \left(n + \frac{mb}{2a}\right) \int_a^\beta \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$= \frac{m}{2a} \int_a^\beta \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} + \left(n - \frac{mb}{2a}\right) I_1 = \left[\frac{m}{2a} \ln |ax^2+bx+c| \right]_a^\beta + \left(n - \frac{mb}{2a}\right) I_1$$

Cách 2: Phương pháp hệ số bất định (Sử dụng khi mẫu có nghiệm)

* Nếu mẫu số có nghiệm kép $x = x_0$ tức là $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$ ta giả sử

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2}$$

STUDY TIP

Khi mẫu thức có dạng tam thức bậc hai thì thường đưa về dạng

Quy đồng về phải và đồng nhất hệ số hai vế để tìm $A; B$.

$$I_2 = \left[A \ln |x - x_0| - \frac{B}{x - x_0} \right]_{\alpha}^{\beta}$$

Sau khi tìm được $A; B$ thì ta có

* Nếu mẫu số có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ thì ta giả sử:

$$\frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

Quy đồng và đồng nhất hệ số để tìm $A; B$.

Sau khi tìm được $A; B$ ta có $I_2 = \left[A \ln |x - x_1| + B \ln |x - x_2| \right]_{\alpha}^{\beta}$.

Ví dụ 1: Cho $I = \int_{-2}^0 \frac{2x-9}{x^2-3x+2} dx = a \ln 3 + b \ln 2$, $a; b \in \mathbb{Q}$ thì $a + 2b$ có giá trị bằng

A. -35

B. -2

C. 2

D. 3

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: Ta có $I = \int_{-2}^0 \frac{(2x+3)-6}{x^2-3x+2} dx = \int_{-2}^0 \frac{2x+3}{x^2-3x+2} dx - \int_{-2}^0 \frac{6dx}{x^2-3x+2}$

$$= \int_{-2}^0 \frac{dx(x^2-3x+2)}{x^2-3x+2} - 6 \int_{-2}^0 \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left[\ln |x^2-3x+2| - 6 \ln \left| \frac{x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} \right| \right]_{-2}^0$$

$$= \left[\ln |(x-1)(x-2)| - 6 \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \right]_{-2}^0 = (7 \ln |x-1| - 5 \ln |x-2|) \Big|_{-2}^0$$

$$= 7 \ln 1 - 5 \ln 2 - (7 \ln 3 - 5 \ln 4) = -7 \ln 3 + 10 \ln 2 - 5 \ln 2 = -7 \ln 3 + 5 \ln 2$$

$$\Rightarrow a + 2b = 3.$$

Cách 2: Ta thấy $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

$$\text{Giả sử } \frac{2x-9}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \Leftrightarrow \frac{2x-9}{x^2-3x+2} = \frac{(A+B)x - (2A+B)}{x^2-3x+2}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số ta có } \begin{cases} A+B=2 \\ 2A+B=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=7 \\ B=-5 \end{cases}$$

$$\text{Áp dụng công thức ta có } I = \left[7 \ln |x-1| - 5 \ln |x-2| \right]_{-2}^0 = -7 \ln 3 + 5 \ln 2$$

Cách 3: Sử dụng máy tính cầm tay.

Trong bài toán này ta có thể sử dụng chức năng TABLE để giải quyết, tuy nhiên cách làm này chỉ mang tính chất “mò” (tức dự đoán khoảng của a ; b).

$$I = a \cdot \ln 3 + b \cdot \ln 2 \Rightarrow a = \frac{I - b \cdot \ln 2}{\ln 3}$$

Ta thấy

Giải thích cách sử dụng MTCT

Ta thấy khi nhập vào màn hình thì ta đã coi b (biến X) chạy trong khoảng từ và step là 1. Ở đây ta chọn STEP 1 vì dễ cho a ; b nguyên. Lúc này màn hình sẽ hiện giá trị của b (chính là X) và giá trị tương ứng của a (chính là cột $f(X)$). Do a ; b nguyên nên ta sẽ chọn.

1. Lúc này ta nhập biểu thức tích phân vào máy tính và gán giá trị này cho biến A.



2. Tiếp tục sử dụng MODE 7 TABLE để chạy biến giá trị của b từ đó tìm ra bảng giá trị tương ứng của a .

$f(X) = \frac{A - X \cdot \ln(2)}{\ln(3)}$	Table of values for $f(X)$ at $X = -5, -4, -3$	Table of values for $f(X)$ at $X = 4, 5, 6$
$\int_{-2}^0 \frac{2x-9}{x^2-3x+2} dx = A$	Table of values for $f(X)$ at $X = 10, 11$	Table of values for $f(X)$ at $X = 8, 9, 10$

Ta thấy chỉ có trường hợp $X = 5; F(X) = -7$ là thỏa mãn 2 số nguyên, do đó ta kết luận $a = -7; b = 5 \Rightarrow a + 2b = 3$.



Đọc thêm: Tích phân hàm phân thức chứa căn ở mẫu thức

$$I_3 = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Dạng 1: Tính tích phân

Phương pháp chung

Ta có

$$\left(\ln \left| u + \sqrt{u^2 + k} \right| \right)' = \frac{1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + k}}}{u + \sqrt{u^2 + k}} = \frac{1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + k}}}{u + \sqrt{u^2 + k}} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + k}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + k}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + k} \right| + C$$

Áp dụng bài toán vừa chứng minh ở trên ta áp dụng vào bài toán biến đổi sau:

$$I_3 = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(mx + n)^2 + k}} = \left[\frac{1}{m} \cdot \ln \left| (mx + n) + \sqrt{(mx + n)^2 + k} \right| \right]_a^b$$

Chú ý

Phương pháp này chỉ áp dụng được khi hệ số.

Dạng 2: Tính tích phân

$$I_4 = \int_a^\beta \frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Phương pháp chung

Ta có
$$I_4 = \int_a^\beta \frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{m}{2a} \int_a^\beta \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} - \frac{mb}{2a} \int_a^\beta \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$= \frac{m}{2a} \int_a^\beta \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} - \frac{mb}{2a} I_3$$

Dạng 3: Tính tích phân

$$I_5 = \int_a^\beta \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Phương pháp chung

Đặt $px+q = \frac{1}{t} \Rightarrow p dx = -\frac{dt}{t^2}; x = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{t} - q \right)$. Khi đó

$$I_5 = \int_a^\beta \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int_{\frac{1}{p\beta+q}}^{\frac{1}{p\alpha+q}} \frac{-dt}{\frac{1}{p\alpha+q} pt^2 \cdot \frac{1}{t} \sqrt{\frac{a}{p^2} \left(\frac{1}{t} - q \right)^2 + \frac{b}{p} \left(\frac{1}{t} - q \right) + c}}$$

$$= \pm \int_{\frac{1}{p\alpha+q}}^{\frac{1}{p\beta+q}} \frac{dt}{\sqrt{At^2 + Bt + \gamma}}$$

(quay trở về bài toán dạng 1).

Tích phân hàm lượng giác

A. MỘT SỐ CÔNG THỨC VÀ KỸ NĂNG BIẾN ĐỔI

Các công thức nguyên hàm của hàm lượng giác

$$\begin{aligned}\int \cos(ax+b)dx &= \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C & \int \sin(ax+b)dx &= -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x(ax+b)} &= \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C & \int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} &= -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C\end{aligned}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

$$I_1 = \int_{a_1}^{b_1} (\sin x)^n dx, I_2 = \int_{a_2}^{b_2} (\cos x)^n dx$$

Dạng 1: Tính tích phân:

1. Nếu n chẵn thì ta sử dụng công thức hạ bậc.
2. Nếu $n = 3$ thì ta sử dụng công thức hạ bậc hoặc biến đổi theo trường hợp 3.
3. Nếu $n \geq 3$ và n lẻ ($n = 2p + 1$) thì ta thực hiện biến đổi.

$$I_1 = \int_{a_1}^{b_1} (\sin x)^n dx = \int_{a_1}^{b_1} (\sin x)^{2p+1} dx = \int_{a_1}^{b_1} (\sin x)^{2p} \cdot \sin x dx = - \int_{a_1}^{b_1} (1 - \cos^2 x)^p d(\cos x)$$

Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton để khai triển $(1 - \cos^2 x)^p$.

Từ đây ta giải quyết dc bài toán.

$$I_2 = \int_{a_2}^{b_2} (\cos x)^n dx = \int_{a_2}^{b_2} (\cos x)^{2p+1} dx = \int_{a_2}^{b_2} (\cos x)^{2p} \cdot \cos x dx = \int_{a_2}^{b_2} (1 - \sin^2 x)^p d(\sin x)$$

Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton để khai triển $(1 - \sin^2 x)^p$.

Từ đây ta giải quyết dc bài toán.

Ví dụ 1: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{10}} \cos^4 3x dx$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

$$\begin{aligned}\text{A. } I &= \left[\frac{3}{8}x + \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{96} \sin 12x \right]_0^{\frac{\pi}{10}} & \text{B. } I &= \left[\frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{96} \sin 12x \right]_0^{\frac{\pi}{10}} \\ \text{C. } I &= \left[-\frac{3}{8}x + \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{96} \sin 12x \right]_0^{\frac{\pi}{10}} & \text{D. } I &= \left[\frac{3}{8}x - \frac{1}{96} \sin 12x \right]_0^{\frac{\pi}{10}}\end{aligned}$$

Đáp án A.

Lời giải

Ta có

Ta thấy bậc của $\cos 3x$ là 4 là một số chẵn. Từ 1 trong phần phương pháp chung ta sẽ sử dụng công thức hạ bậc như lời giải bên.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{10}} \left(\frac{1 + \cos 6x}{2} \right)^2 dx &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{10}} (1 + 2 \cos 6x + \cos^2 6x) dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{10}} \left(1 + 2 \cos 6x + \frac{1 + \cos 12x}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{3}{8}x + \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{96} \sin 12x \right]_0^{\frac{\pi}{10}} \end{aligned}$$

Từ đây ta giải quyết được bài toán.

Ví dụ 2: Cho:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 5x)^9 dx = -\frac{1}{5} \left(\cos 5x + a \cos^3 5x + b \cos^5 5x + c \cos^7 5x + \frac{1}{9} \cos^9 5x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

Đặt $S = a + b + c$. Giá trị của S bằng

- A.** $S = 3$ **B.** $S = -\frac{74}{105}$ **C.** $S = -\frac{5}{4}$ **D.** $S = \frac{1}{9}$

Đáp án B.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 5x)^8 \sin 5x dx = -\frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos^2 5x)^4 d(\cos 5x) \\ &= -\frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{3}} [1 - 4\cos^2 5x + 6\cos^4 5x - 4\cos^6 5x + \cos^8 5x] d(\cos 5x) \\ &= -\frac{1}{5} \left(\cos 5x - \frac{4}{3} \cos^3 5x + \frac{6}{5} \cos^5 5x - \frac{4}{7} \cos^7 5x + \frac{1}{9} \cos^9 5x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &\Rightarrow a = -\frac{4}{3}; b = \frac{6}{5}; c = -\frac{4}{7} \Rightarrow S = -\frac{74}{105} \end{aligned}$$

$$I = \int_a^b \sin^m x \cdot \cos^n x dx$$

Dạng 2*: Tính tích phân

Phương pháp chung

a. Trường hợp 1: $m; n$ là các số nguyên

1. Nếu m chẵn, n chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc, biến đổi tích thành tổng.
2. Nếu m chẵn, n lẻ ($n = 2p + 1$) thì biến đổi

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b (\sin x)^m (\cos x)^{2p+1} dx = \int_a^b (\sin x)^m (\cos x)^{2p} \cos x dx \\ &= \int_a^b (\sin x)^m (1 - \sin^2 x)^p d(\sin x) \end{aligned}$$

Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton để khai triển và giải quyết bài toán.

3. Nếu m lẻ ($m = 2p + 1$), n chẵn thì ta biến đổi

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b (\sin x)^{2p+1} \cdot (\cos x)^n dx = \int_a^b (\sin x)^{2p} \cdot (\cos x)^n \cdot \sin x dx \\ &= - \int_a^b (1 - \cos^2 x)^p \cdot (\cos x)^n d(\cos x) \end{aligned}$$

Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton để khai triển và giải quyết bài toán.

4. Nếu m lẻ, n lẻ thì sử dụng biến đổi 2 hoặc 3 cho số mũ lẻ bé hơn.

b. Trường hợp 2: m, n là các số hữu tỉ

$$I = \int_a^b \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \int_a^b (\sin x)^m \cdot (\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cos x dx = \int_{\sin a}^{\sin b} u^m (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} du (*)$$

Ví dụ 1: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x)^7 \cdot (\cos 2x)^{100} dx$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $I = \left[\frac{(\cos 2x)^{101}}{10} - \frac{3(\cos 2x)^{103}}{103} + \frac{3(\cos 2x)^{105}}{105} - \frac{(\cos 2x)^{107}}{107} \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

B. $I = -2 \left[\frac{(\cos 2x)^{101}}{10} + \frac{3(\cos 2x)^{103}}{103} + \frac{3(\cos 2x)^{105}}{105} + \frac{(\cos 2x)^{107}}{107} \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

C. $I = -\frac{1}{2} \left[\frac{(\cos 2x)^{101}}{10} - \frac{3(\cos 2x)^{103}}{103} + \frac{3(\cos 2x)^{105}}{105} - \frac{(\cos 2x)^{107}}{107} \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

D. $I = \frac{1}{2} \left[\frac{(\cos 2x)^{101}}{101} - \frac{3(\cos 2x)^{103}}{103} + \frac{3(\cos 2x)^{105}}{105} - \frac{(\cos 2x)^{107}}{107} \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

Đáp án C.

Lời giải

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2x)^{100} \cdot (\sin 2x)^6 \cdot \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2x)^{100} (1 - \cos^2 2x)^3 d(\cos 2x) \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2x)^{100} \cdot (1 - 3\cos^2 2x + 3\cos^4 2x - \cos^6 2x) d(\cos 2x) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{(\cos 2x)^{101}}{101} - \frac{3(\cos 2x)^{103}}{103} + \frac{3(\cos 2x)^{105}}{105} - \frac{(\cos 2x)^{107}}{107} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Trong bài toán này, ta thấy m lẻ, n chẵn nên ta áp dụng phương pháp 3 trong bài toán tổng quát phía trên.

$$I_1 = \int_{a_1}^{b_1} (\tan x)^n dx; I_2 = \int_{a_2}^{b_2} (\cot x)^n dx \quad (n \in \mathbb{Z}^*)$$

Dạng 3: Tích tích phân

Phương pháp chung

Sử dụng các công thức sau:

$$\int (1 + \tan^2 x) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int d(\tan x) = \tan x + C$$

$$\int (1 + \cot^2 x) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int d(\cot x) = -\cot x + C$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln |\sin x| + C$$

Dạng 4*: Tích phân liên kết.

Phương pháp chung

Bài toán 1: Tính tích phân $I = \int_a^b \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x}$

* $I_1 = \int_a^b \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x}$. Xét tích phân liên kết $I_2 = \int_a^b \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x}$

Ta có
$$\begin{cases} I_1 + I_2 = \int_a^b dx = x \Big|_a^b \\ I_1 - I_2 = \int_a^b \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_a^b \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln |\sin x + \cos x| \Big|_a^b \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \left[\frac{1}{2} (x + \ln |\sin x + \cos x|) \right]_a^b \\ I_2 = \left[\frac{1}{2} (x - \ln |\sin x + \cos x|) \right]_a^b \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được

Bài toán 2: Tính tích phân $I_1 = \int_a^\beta \frac{\sin x dx}{a \cos x + b \sin x}$

Phương pháp chung

Xét tích phân liên kết với I_1 là $I_2 = \int_a^\beta \frac{\cos x dx}{a \cos x + b \sin x}$

Các trường hợp thường gặp:

* $I_1 = I_2$ khi đó tính

$$I_1 + I_2 = \alpha \Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{\alpha}{2}$$

* I_2 là một tích phân đơn giản, thường thì các hàm số dưới dấu tích phân $f(x)$; $g(x)$ (của hai tích phân liên kết) thường có tính cân xứng hoặc bổ sung cho nhau như ở bài toán 1 và bài toán 2.

Việc tìm được tích phân liên kết phụ thuộc vào kinh nghiệm giải toán của người

$$\text{Ta có } \begin{cases} bI_1 + aI_2 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a \cos x + b \sin x}{a \cos x + b \sin x} dx = \int_{\alpha}^{\beta} dx = x \Big|_{\alpha}^{\beta} \\ bI_2 - aI_1 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{b \cos x - a \sin x}{a \cos x + b \sin x} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d(a \cos x + b \sin x)}{a \cos x + b \sin x} = \ln |a \cos x + b \sin x| \Big|_{\alpha}^{\beta} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $I_1; I_2$.

Từ hai bài toán trên ta đưa ra kết luận về tích phân liên kết như sau:

Trong một số bài toán tính tích phân $I_1 = \int_a^b f(x) dx$, ta sẽ sử dụng tích phân $I_2 = \int_a^b g(x) dx$ là tích phân liên kết của I_1 sao cho ta có thể xác lập được mối quan hệ ràng buộc giữa I_1 và I_2 thành hệ phương trình như sau:

$$\begin{cases} mI_1 + nI_2 = \alpha \\ pI_1 + qI_2 = \beta \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta dễ dàng tìm được $I_1; I_2$.

Một số bài toán tích phân gốc thường gặp

Bài toán 1: Cho f là hàm số chẵn và liên tục trên $[-b; b]$ với $b > 0$. Chứng minh rằng:

$$\int_{-b}^b \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_0^b f(x) dx \quad (\text{với } a > 0 \text{ và } a \neq 1) \quad (1)$$

Lời giải tổng quát

Đặt $x = -t$ thì $dx = -dt$; $f(-t) = f(t)$ nên

$$\int_{-b}^0 \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_b^0 \frac{-f(-t)}{a^{-t} + 1} dt = \int_0^b \frac{a^t f(t)}{a^t + 1} dt = \int_0^b \frac{a^x f(x)}{a^x + 1} dx$$

Do đó

$$\int_{-b}^b \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_0^b \frac{a^x f(x)}{a^x + 1} dx = \int_0^b \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_0^b f(x) dx$$

Ví dụ 1: Tính tích phân $\int_{-1}^1 \frac{x^4 + x^2 + 1}{2^x + 1} dx$

A. $\frac{23}{15}$

B. $\frac{15}{23}$

C. 1

D. -1

Đáp án A.

Lời giải

Ta thấy hàm số $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ là hàm số chẵn, áp dụng bài toán 1 ở trên ta có:

$$\int_{-1}^1 \frac{x^4 + x^2 + 1}{2^x + 1} dx = \int_0^1 (x^4 + x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{23}{15}$$

Bài toán 2*: Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Chứng minh rằng:

$$\int_a^b f(a+b-x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

Đặc biệt $\int_0^b f(b-x) dx = \int_0^b f(x) dx \quad (3)$

Lời giải tổng quát

Đặt $t = a + b - x$ thì $dt = -dx$. Khi đó

$$\int_a^b f(a+b-x) dx = \int_b^a -f(t) dt = \int_a^b f(x) dx$$

Khi $a = 0$, ta nhận được công thức (3).

Ví dụ 2: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = \frac{\pi}{a} \cdot \ln b$ ($a \neq 0; b > 0$). Khi đó tổng $a + b$ bằng

A. 8**B. 10****C. 5****D. 4****Đáp án B.****Lời giải**

Nhận xét: $f(x) = \ln(1 + \tan x)$ liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, áp dụng (3) với bài toán này ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(1 + \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{2}{1 + \tan x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - \ln(1 + \tan x)) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dx - I \Leftrightarrow 2I = \ln 2 \cdot x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

Vậy $a + b = 10$.

Bài toán 3: Cho hàm số f liên tục trên $[0; 1]$. Chứng minh rằng:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx \quad (4)$$

Lời giải tổng quát

$$\text{Đặt } t = \frac{\pi}{2} - x \text{ thì } dt = -dx, \text{ khi đó}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

Ví dụ 3: Tính tích phân:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[2011]{\sin x^{2011}}}{\sqrt[2011]{\cos x^{2011}} + \sqrt[2011]{\sin x^{2011}}} dx$$

A. $\frac{\pi}{2}$ **B. 1****C. $\frac{\pi}{4}$** **D. $\frac{\pi}{8}$** **Đáp án C.****Lời giải**

$$\text{Sử dụng công thức (4) ta có}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[2011]{\cos x^{2011}}}{\sqrt[2011]{\sin x^{2011}} + \sqrt[2011]{\cos x^{2011}}} dx$$

$$\text{Từ đây suy ra}$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

**** Bài toán 4: (đọc thêm)** Cho f là hàm số liên tục trên $[a; b]$ thỏa mãn

$$f(x) = f(a + b - x). \text{ Chứng minh rằng: } \int_a^b xf(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx \quad (8)$$

Đặc biệt $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx \quad (9)$.

Lời giải tổng quát

Thực hiện phép biến đổi $x = a + b - t$ thì

$$\int_a^b xf(x)dx = \int_a^b (a+b-t)f(t)(-dt) = (a+b) \int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx$$

Từ đó suy ra (8). Chọn $a = 0, b = \pi$ ta có (9).

Bài tập rèn luyện kỹ năng

1. Bài toán tính tích phân

Câu 1: Biết tích phân $I = \int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + be$ ($a \in \mathbb{Q}; b \in \mathbb{Q}$). Khi đó tích $a.b$ có giá trị bằng

- A. 1 B. -1 C. 2 D. 3

Câu 2: Biết $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $f(x)$ là hàm số lẻ.

Khi đó $I = \int_{-1}^0 f(x) dx$ có giá trị bằng

A. $I = 1$ B. $I = 0$ C. $I = -2$ D. $I = 2$

Câu 3: Tích phân $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx$ có giá trị bằng

- A. $I = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ B. $I = \frac{\sqrt{2}}{3}$
C. $I = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $I = \frac{2}{3}$

Câu 4: Cho tích phân $I = \int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} dx$ nếu đặt

$t = \sqrt{x+1}$ thì $I = \int_1^2 f(t) dt$ trong đó

A. $f(t) = t^2 + t$ B. $f(t) = 2t^2 + 2t$
C. $f(t) = t^2 - t$ D. $f(t) = 2t^2 - 2t$

Câu 5: Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$

- A. $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{2}$
C. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}-2}{2}$

Câu 6: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x} dx = \frac{1}{4} \ln 3$. Tìm giá trị của a là

- A. 3 B. 2 C. 4 D. 6

Câu 7: Tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$ bằng

- A. $\frac{1}{4} - \ln \sqrt{2}$ B. $-\frac{1}{4} - \ln \sqrt{2}$
C. $\frac{1}{4} + \ln \sqrt{2}$ D. $-\frac{1}{4} + \ln \sqrt{2}$

Câu 8: Tích phân $\int_0^1 xe^{-x^2} dx$ bằng

- A. $\frac{e-1}{2}$ B. $\frac{e+1}{2e}$ C. $\frac{e+1}{2}$ D. $\frac{e-1}{2e}$

Câu 9: Tính tích phân: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

- A. $\frac{1}{6} - \ln 2$ B. $2 \ln 2 - \frac{5}{3}$
C. $\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$ D. $\ln 2 - \frac{1}{6}$

Câu 10: Giá trị dương a sao cho

$\int_0^a \frac{x^2+2x+2}{x+1} dx = \frac{a^2}{2} + a + \ln 3$ là

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

Câu 11: Giả sử $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln c$. Giá trị của c là

A. 9 B. 3 C. 81 D. 8

Câu 12: Tích phân $I = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3} dx$ có giá trị là

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $-\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{4}$

Câu 13: Giả sử $\int_{-1}^1 f(t)dt = 5$ và $\int_{-1}^3 f(r)dr = 6$. Tính

$$I = \int_1^3 f(u)du$$

- A. $I = 4$ B. $I = 3$ C. $I = 2$ D. $I = 1$

Câu 14: Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} |\cos x| dx$

- A. $I = 0$ B. $I = 1$ C. $I = 2$ D. $I = 3$

Câu 15: Cho biết $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x \cos(\pi x)$. Tính $f(4)$.

- A. $f(4) = 2\sqrt{3}$ B. $f(4) = -1$
C. $f(4) = \frac{1}{2}$ D. $f(4) = \sqrt[3]{12}$

Câu 16: Đẳng thức $\int_0^a \cos(x+a^2)dx = \sin a$ xảy ra nếu

- A. $a = \pi$ B. $a = \sqrt{\pi}$
C. $a = \sqrt{3\pi}$ D. $a = \sqrt{2\pi}$

Câu 17: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

- A. $I = 3$ B. $I = 2$ C. $I = 1$ D. $I = -1$

Câu 18: Nếu $\int_0^a x e^x dx = 1$ thì giá trị của a bằng:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. e

Câu 19: Nếu $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cos x dx = \frac{1}{64}$ thì n bằng

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 20: Giá trị của $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{1+e^x} dx$ bằng

- A. -1 B. 1 C. e D. 0

Câu 21: Tích phân $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} x dx$ có giá trị bằng

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{10}{3}$

Câu 22: Tích phân $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot x dx$ có giá trị bằng

- A. $-\ln \sqrt{2}$ B. $\ln 2$ C. $\ln 4$ D. $\ln \sqrt{2}$

Câu 23: Tích phân $I = \int_1^e 2x(1-\ln x) dx$ bằng

- A. $\frac{e^2-1}{2}$ B. $\frac{e^2}{2}$ C. $\frac{e^2-3}{4}$ D. $\frac{e^2-3}{2}$

Câu 24: Hàm số nào sau đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$?

- A. $\frac{x^2+x-1}{x+1}$ B. $\frac{x^2-x-1}{x+1}$
C. $\frac{x^2+x+1}{x+1}$ D. $\frac{x^2}{x+1}$

Câu 25: Biết $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+7} dx = a \ln \sqrt{12} + b \ln \sqrt{7}$, với a, b là các số nguyên. Tính tổng $a+b$ bằng

- A. -1 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. 0

Câu 26: Cho $\int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx = \frac{1}{64}$ và $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln m$, với n, m là các số nguyên dương. Khi đó:

- A. $n > m$ B. $1 < n+m < 5$
C. $n < m$ D. $n = m$

Câu 27: Biết $\int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a \ln 3 + b \ln 4 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a+b+c$

- A. $S = 6$ B. $S = 2$ C. $S = -2$ D. $S = 0$

$$I = \int_0^1 (2x+3)e^x dx$$

Câu 28: Kết quả tích phân được viết dưới dạng $I = ae + b$ với a, b là các số hữu tỉ. Tìm khẳng định đúng.

- A. $a^3 + b^3 = 28$ B. $a + 2b = 1$
C. $a - b = 2$ D. $ab = 3$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos x}}$$

Câu 29: Xét tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos x}}$. Nếu đặt $t = \sqrt{1 + \cos x}$, ta được:

- A. $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{4t^3 - 4t}{t} dt$ B. $I = -4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt$
C. $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{-4t^3 + 4t}{t} dx$ D. $I = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (x^2 - 1) dx$

Câu 30: Có bao nhiêu giá trị của a trong đoạn $\left[\frac{\pi}{4}; 2\pi\right]$ thỏa mãn $\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx = \frac{2}{3}$.

A. 2 B. 1 C. 4 D. 3

Câu 31: Cho hàm số $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-1; 1]$. Có $g(-1) = 3$ và tích phân $I = \int_{-1}^1 g'(x) dx = -2$. Tính $g(1)$.

- A. 1 B. -5 C. -6 D. $-\frac{3}{2}$

Câu 32: Cho $\int_1^2 f(x) dx = -3$, tính $I = \int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$.

- A. -6 B. $-\frac{3}{2}$ C. -1 D. 5

Câu 33: Biết rằng:

$$\int_0^{\ln 2} \left(x + \frac{1}{2e^x + 1}\right) dx = \frac{1}{2} \ln^a 2 + b \ln 2 + c \ln \frac{5}{3}$$

Trong đó a, b, c là những số nguyên. Khi đó $S = a + b - c$ bằng

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Câu 34: Có bao nhiêu số $a \in (0; 20\pi)$ sao cho $\int_0^a \sin^5 x \cdot \sin 2x dx = \frac{2}{7}$.

- A. 20 B. 19 C. 9 D. 10

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1) \sin 2x dx$$

Câu 35: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1) \sin 2x dx$. Tìm đẳng thức đúng.

- A. $I = -(x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$
B. $I = -(x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$
C. $I = -\frac{1}{2} (x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$
D. $I = -\frac{1}{2} (x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$

Câu 36: Tìm tất cả các số thực m dương thỏa mãn $\int_0^m \frac{x^2 dx}{x+1} = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

- A. $m = 3$ B. $m = 2$ C. $m = 1$ D. $m > 3$

$$I = \int_0^4 x \ln(2x+1) dx = \frac{a}{b} \ln 3 - c$$

Câu 37: Biết $I = \int_0^4 x \ln(2x+1) dx = \frac{a}{b} \ln 3 - c$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c$.

- A. $S = 60$ B. $S = 70$ C. $S = 72$ D. $S = 68$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = a \ln \frac{b}{c}$$

Câu 38: Biết $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = a \ln \frac{b}{c}$, với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c$.

- A. $S = 7$ B. $S = 8$ C. $S = 10$ D. $S = 9$

Câu 39: Biết rằng:

$\int e^{2x} \cdot \cos 3x \cdot dx = e^{2x} (a \cos 3x + b \sin 3x) + c$, trong đó a, b, c là các hằng số, khi đó tổng $a + b$ có giá trị là

- A. $-\frac{1}{13}$ B. $-\frac{5}{13}$ C. $\frac{5}{13}$ D. $\frac{1}{13}$

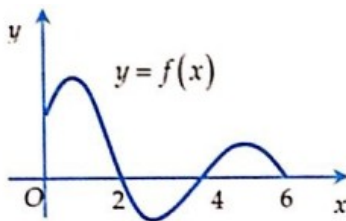
$$I = \int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + be$$

Câu 40: Biết tích phân

$(a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R})$. Khi đó tích $a \cdot b$ có giá trị bằng:

- A. 1 B. -1 C. 2 D. 3

Câu 41: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ như hình vẽ.



Biểu thức nào dưới đây có giá trị lớn nhất:

- A. $\int_0^1 f(x) dx$ B. $\int_0^2 f(x) dx$
C. $\int_0^3 f(x) dx$ D. $\int_0^6 f(x) dx$

Câu 42: Tính tích phân: $I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ được kết quả $I = a \ln 3 + b \ln 5$. Giá trị $a^2 + ab + 3b^2$ là

- A. 4 B. 1 C. 0 D. 5

Câu 43: Cho $\int_0^6 f(x) dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x) dx$

- A. $I = 6$ B. $I = 36$ C. $I = 2$ D. $I = 4$

Câu 44: Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$.

Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$.

- A. $I = \frac{5}{2}$ B. $I = \frac{7}{2}$ C. $I = \frac{17}{2}$ D. $I = \frac{11}{2}$

Câu 45: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$$

- A. $I = 7$ B. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$
C. $I = 3$ D. $I = 5 + \pi$

2. Ứng dụng của tích phân trong hình học

Câu 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + 2$ và $y = 3x$:

- A. 1 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 2: Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục Ox hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị

hàm số $y = (2-x)e^{\frac{x}{2}}$ và hai trục tọa độ là

- A. $2e^2 - 10$ B. $2e^2 + 10$
C. $\pi(2e^2 - 10)$ D. $\pi(2e^2 + 10)$

Câu 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ. Chọn kết quả đúng?

- A. $3 \ln 6$ B. $3 \ln \frac{3}{2}$
C. $3 \ln \frac{3}{2} - 2$ D. $3 \ln \frac{3}{2} - 1$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm

số $y = f(x)$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = 3$

A. $S = \frac{10}{4}$ B. $S = \frac{12}{4}$ C. $S = \frac{11}{4}$ D. $S = \frac{9}{4}$

Câu 5: Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 3$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 3$) là một hình chữ nhật có hai kích thước là x và $2\sqrt{9-x^2}$.

A. 18 B. 19 C. 20 D. 21

Câu 6: Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = 2^x$ và $y = 3 - x$, trục hoành và trục tung.

A. $S = \frac{5}{2} - \frac{1}{\ln 2}$ B. $S = 2$
C. $S = 2 - \frac{1}{\ln 2}$ D. $S = 4$

Câu 7: Công thức tính diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$, ($a < b$)

A. $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$
B. $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$
C. $S = \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$
D. $S = \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$

Câu 8: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y = -2x^3 + x^2 + x + 5$ và đồ thị (C') của hàm số $y = x^2 - x + 5$ bằng

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 9: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-1)e^{2x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

A. $\frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{2} - \frac{3}{4}$ B. $\frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{2} - \frac{3}{4}$
C. $\frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{2} + \frac{3}{4}$ D. $\frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{2} + \frac{3}{4}$

Câu 10: Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2 - 2x$ và $y = -x^2$ quay quanh trục Ox .

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{4\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

Câu 11: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \pi - 1$ B. $V = (\pi - 1) - \pi$
C. $V = (\pi + 1)\pi$ D. $V = \pi + 1$

Câu 12: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = 2(\pi + 1)$ B. $V = 2\pi(\pi + 1)$
C. $V = 2\pi^2$ D. $V = 12\pi$

Câu 13: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1$, $x = 0$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{4\pi}{3}$ B. $V = 2\pi$

C. $V = \frac{4}{3}$ D. $V = 2$

Câu 14: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị

hàm số $y = \frac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = e$ là

A. 0 B. 1 C. e D. $\frac{1}{e}$

Câu 15: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường

cong $y^2 = 4x$ và đường thẳng $x = 1$ bằng S . Giá trị của S là

A. 1 B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{8}{3}$ D. 16

Câu 16: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi nhánh

đường cong $y = x^2$ với $x \geq 0$, đường thẳng $y = 2 - x$ và trục hoành bằng

A. 2 B. $\frac{7}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

Câu 17: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị

hàm số $y = ax^3$ ($a > 0$), trục hoành và hai đường

thẳng $x = -1$, $x = k$ ($k > 0$) bằng $\frac{15a}{4}$. Tìm k .

A. $k = 1$ B. $k = \frac{1}{4}$

C. $k = \frac{1}{2}$ D. $k = \sqrt[4]{14}$

Câu 18: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình

thang $ABCD$ với $A(-1;2)$, $B(5;5)$, $C(5;0)$,

$D(-1;0)$. Quay hình thang $ABCD$ xung quanh

trục Ox thì thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng bao nhiêu?

A. 72π B. 74π

C. 76π D. 78π

Hướng dẫn giải chi tiết

1. Bài toán tính tích phân

Câu 1: Đáp án A

$$I = \int_0^1 (2x+1)e^x dx = \int_0^1 2xe^x dx + \int_0^1 e^x dx$$

$$= \int_0^1 2xe^x dx + e - 1$$

Đặt $\begin{cases} e^x dx = dv \\ x = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = e^x \\ dx = du \end{cases}$

$$I = 2 \int_0^1 u dv + e - 1 = 2uv \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 v du + e - 1$$

$$= 2x \cdot e^x \Big|_0^1 - e \int_0^1 e^x dx + e - 1 = e + 1$$

$$\Rightarrow a = b = 1 \Rightarrow ab = 1$$

Câu 2: Đáp án C

$f(x)$ là hàm số lẻ

$$\Rightarrow \int_{-1}^0 f(x) dx = - \int_0^1 f(x) dx = -2$$

Câu 3: Đáp án A

$$I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx$$

Ta thử bằng máy tính để tìm ra kết quả.

Câu 4: Đáp án D

$$I = \int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} dx$$

$$t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2t dt = dx$$

$$I = \int_0^3 \frac{x(1-\sqrt{x+1})}{1-(x+1)} dx = \int_0^3 (\sqrt{x+1}-1) dx$$

$$I = 2 \int_1^2 (t-1) t dt = \int_1^2 (t^2-1) 2dt \Rightarrow f(t) = 2t^2 - 2t$$

Câu 5: Đáp án B

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \sin x \right) dx = -\cot x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \cos x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{-2+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{2}$$

Câu 6: Đáp án C

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x d2x}{1+2\sin 2x} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin 2x)}{1+2\sin 2x}$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(2\sin 2x+1)}{1+2\sin 2x} = \frac{1}{4} \ln |2+\sin 2x+1| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| 2\sin \frac{2\pi}{a} + 1 \right| = \frac{1}{4} \ln 3$$

$$\text{Suy ra: } \left| 2\sin \frac{2\pi}{a} + 1 \right| = 3$$

Trong các đáp án $\Rightarrow a = 4$.

Câu 7: Đáp án D

Cách 1: Thử

Cách 2: Đặt $\sin x = t$.

Câu 8: Đáp án D

Cách 1: Thử bằng máy tính

$$I = \int_0^1 x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2x) e^{-x^2} dx$$

Cách 2:

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} \cdot e^{-1} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} = \frac{e-1}{2e}$$

Câu 9: Đáp án C

Cách 1: Thử trực tiếp bằng máy tính

Cách 2: Đặt $\sqrt{x+1} = t$, biến đổi

Câu 10: Đáp án D

$$I = \int_0^a \frac{x^2+2x+2}{x+1} dx = \int_0^a \frac{(x+1)^2+1}{x+1} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^a x+1 + \frac{1}{x+1} d(x+1) \\
 &= \frac{(x+1)^2}{2} \Big|_0^a + \ln|x+1| \Big|_0^a = \frac{(a+1)^2}{2} - \frac{1}{2} + \ln|a+1| \\
 &= \frac{a^2}{2} + a + \ln|a+1| \\
 &\Rightarrow a+1=3 \Rightarrow a=2.
 \end{aligned}$$

Câu 11: Đáp án B.

Câu 12: Đáp án B.

Thử máy tính.

$$I = \int_0^1 \left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} \right] d(x+1)$$

Gợi ý:

Câu 13: Đáp án D

$$I = \int_1^3 f(u) du = \int_{-1}^3 f(u) du - \int_{-1}^1 f(u) du = 6 - 5 = 1$$

Câu 14: Đáp án C

$$I = \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos x| dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= 1 + 1 = 2$$

Câu 15: Đáp án D

Ta có:

$$\int_0^{f(x)} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{f(x)} = \frac{f^3(x)}{3} \Rightarrow \frac{f^3(x)}{3} = x \cdot \cos(\pi x)$$

$$\text{Thay } x=4 \Rightarrow \frac{f^3(4)}{3} = 4 \cdot \cos(4\pi)$$

$$\Rightarrow f^3(4) = 12 \Rightarrow f(4) = \sqrt[3]{12}$$

Câu 16: Đáp án D

$$\int_0^a \cos(x+a^2) dx = \sin a$$

$$\Leftrightarrow \sin(a+a^2) - \sin a^2 = \sin a$$

Trong 4 phương án, chỉ có phương án D thỏa mãn.

Câu 17: Đáp án C

Cách 1: Thử bằng máy tính

Cách 2: Tích phân thành phần: $\begin{cases} \sin x dx = dv \\ x = u \end{cases}$

Câu 18: Đáp án B

Theo như biến đổi câu 1, ta có:

$$I = \int_0^a x \cdot e^x dx = x \cdot e^x \Big|_0^a - \int_0^a e^x dx$$

$$\Rightarrow a \cdot e^a - e^a + 1 = 1$$

$$\Rightarrow a = 1$$

Câu 19: Đáp án A

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cdot \cos x dx$$

Đặt $\sin x = t$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$

$$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow n = 3.$$

Câu 20: Đáp án D

Cách 1: Thử bằng máy tính

Lấy giá trị n càng lớn càng tốt. Giả sử $n=100$.

$$\text{Nhập biểu thức } \int_{100}^{101} \frac{1}{1+e^x} dx$$

Máy tính cho kết quả $\approx 2.35 \times 10^{-44} \approx 0$.

Cách 2: Giải chi tiết

$$I = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{1+e^x} \right) dx = \int_n^{n+1} 1 dx - \int_n^{n+1} \frac{e^x}{1+e^x} dx = 1 - \int_n^{n+1} \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$\Leftrightarrow I = 1 - \int_n^{n+1} \frac{d(e^x+1)}{1+e^x} = 1 - \ln|1+e^x| \Big|_n^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow I = 1 + \ln|1+e^n| - \ln|1+e^{n+1}|$$

Ta luôn có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^n)}{n} = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{1+e^x} dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \ln|1+e^n| - \ln(1+e^{n+1}) \right] \\ &= 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^n)}{n} - \frac{\ln|1+e^{n+1}|}{n+1} \cdot (n+1) \\ &= 1 + n - (n+1) = 0 \end{aligned}$$

Câu 21: Đáp án C

Cách 1: Thử bằng máy tính

Cách 2: Đặt $\sqrt{4-x^2} = t$

Câu 22: Đáp án D

Cách 1: Thử bằng máy tính

$$\sin x = t \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t} dt$$

Cách 2: Đặt

Câu 23: Đáp án D

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e 2x(1-\ln x) dx = -\int_1^e 2x \ln x dx + \int_1^e 2x dx \\ &= e^2 - 1 - 2 \int_1^e x \ln x dx \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln x = u \\ x dx = dv \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} dx = du \\ \frac{x^2}{2} = v \end{array} \right.$$

Đặt

$$\Rightarrow \int_1^e x \ln x dx = \int_1^e u dv = uv \Big|_1^e - \int_1^e v du$$

$$= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow I = e^2 - 1 - \frac{e^2 + 1}{2} = \frac{e^2 - 3}{2}$$

Câu 24: Đáp án A

Để nhận thấy $\frac{x^2}{x+1} + 1 = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$

$$\frac{x^2}{x+1} - 1 = \frac{x^2 - x - 1}{x+1}$$

Ta thấy 3 phương án B, C, D có cùng đạo hàm.

Vậy phương án A sai.

Câu 25: Đáp án D

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+7} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x+4}{x^2+4x+7} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2+4x+7)}{x^2+4x+7} = \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+7) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \ln 12 - \frac{1}{2} \ln 7 = \ln \sqrt{12} - \ln \sqrt{7} \\ \Rightarrow a &= 1; b = -1 \Rightarrow a + b = 0 \end{aligned}$$

Câu 26: Đáp án D

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx = \frac{1}{64} \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{64} \Rightarrow n = 3$$

$$\begin{aligned} \int_1^5 \frac{dx}{2x-1} &= \frac{1}{2} \int_1^5 \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2} \ln|2x-1| \Big|_1^5 \\ &= \frac{1}{2} \ln 9 - \frac{1}{2} \ln 1 = \ln 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m = n = 3$$

Câu 27: Đáp án D

$$\begin{aligned} I &= \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = \int_3^4 \frac{1}{x(x+1)} dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= (\ln|x| - \ln|x+1|) \Big|_3^4 = \ln 4 - \ln 5 - (\ln 3 - \ln 4) \\ &= -\ln 3 + 2 \ln 4 - \ln 5 \\ \Rightarrow S &= a + b + c = 0 \end{aligned}$$

Câu 28: Đáp án B

$$I = \int_0^1 (2x+3) \cdot e^x dx = 2 \int_0^1 x \cdot e^x dx + 3 \int_0^1 e^x dx$$

Tương tự các bài trên

$$\Rightarrow \int_0^1 x \cdot e^x dx = x \cdot e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$\Rightarrow I = 2x.e^x \Big|_0^1 + \int_0^1 e^x dx = 2x.e^x + e^x \Big|_0^1 = 3e - 1$$

$$a = 3; b = -1$$

Suy ra, đáp án B: $a + 2b = 1$

Câu 29: Đáp án D

$$t = \sqrt{1 + \cos x}, t \geq 0 \Rightarrow t^2 = 1 + \cos x$$

$$\Rightarrow 2tdt = -\sin x dx$$

Đổi cận:

$$x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2}; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x \cdot \sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} dx$$

$$= - \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{4(t^2 - 1)t}{t} dt = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (x^2 - 1) dx$$

Câu 30: Đáp án A

$$I = \int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx$$

$$\text{Đặt } \sqrt{1 + 3 \cos x} = t, t \geq 0$$

$$\Rightarrow t^2 = 1 + 3 \cos x \Rightarrow 2tdt = -3 \sin x dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2tdt}{3} = \sin x dx$$

$$\Rightarrow I = -\frac{2}{3} \int_2^{\sqrt{1+3\cos a}} \frac{tdt}{t} = -\frac{2}{3} \int_2^{\sqrt{1+3\cos a}} dt$$

$$= -\frac{2}{3} \sqrt{1 + 3 \cos a} + \frac{2}{3} \cdot 2$$

$$\text{Mà } I = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{1 + 3 \cos a} = 1 \Rightarrow \cos a = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$$

Suy ra, đáp án A

Câu 31: Đáp án A

$$I = \int_{-1}^1 g'(x) dx = -2 \Leftrightarrow g(1) - g(-1) = -2$$

$$\Rightarrow g(1) = -2 + g(-1) = -2 + 3 = 1$$

Câu 32: Đáp án A

$$\frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = 2 dt$$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 2f(t) dt = 2 \int_1^2 f(t) dt = 2 \cdot (-3) = -6$$

Câu 33: Đáp án C

$$\int_0^{\ln 2} \left(x + \frac{1}{2e^x + 1} \right) dx = \int_0^{\ln 2} x dx + \int_0^{\ln 2} \frac{2e^x + 1 - 2e^x}{2e^x + 1} dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} (x + 1) dx - \int_0^{\ln 2} \frac{2e^x}{2e^x + 1} dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} \frac{d(2e^x + 1)}{2e^x + 1}$$

$$= \frac{\ln^2 2}{2} + \ln 2 - \ln |2e^x + 1| \Big|_0^{\ln 2}$$

$$= \frac{\ln^2 2}{2} + \ln 2 - \ln 5 + \ln 3 = \frac{\ln^2 2}{2} + \ln 2 - \ln \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow a = 2; b = 1; c = -1 \Rightarrow a + b - c = 4$$

Câu 34: Đáp án D

$$I = \int_0^a \sin^5 x \cdot \sin 2x dx = 2 \int_0^a \sin^6 x \cdot \cos x dx$$

$$= 2 \int_0^a \sin^6 x d(\sin x) = 2 \cdot \frac{\sin^7 x}{7} \Big|_0^a = \frac{2 \sin^7 a}{7}$$

$$I = \frac{2}{7} \Rightarrow \sin a = 1 \Rightarrow a = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$a > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + k2\pi > 0 \Rightarrow k2\pi > -\frac{\pi}{2} \Rightarrow k > -\frac{1}{4}$$

$$a < 20\pi \Rightarrow \frac{1}{2} + 2k < 20 \Rightarrow k < \frac{39}{4}$$

$$\Rightarrow k = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 \Rightarrow \text{Có 10 giá trị của } a.$$

Câu 35: Đáp án C

$$\begin{cases} \sin 2x dx = dv \\ x - 1 = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \cos 2x = v \\ dx = du \end{cases}$$

Đặt

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1) \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u dv = uv \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} v du$$

$$= -\frac{1}{2} (x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$$

Suy ra, đáp án C.

Câu 36: Đáp án C

Thử các đáp án, suy ra $m=1$

Câu 37: Đáp án B

$$I = \int_0^4 x \ln(2x+1) dx$$

$$\begin{cases} \ln(2x+1) = u \\ x dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{2x+1} dx = du \\ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} = v \end{cases}$$

Đặt

$$I = \int_0^4 u dv = uv \Big|_0^4 - \int_0^4 v du$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} \right) \ln |2x+1| \Big|_0^4 - \int_0^4 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} \right) \cdot \frac{2}{2x+1} dx$$

$$= \frac{63}{8} \ln 9 - \int_0^4 \frac{4x^2-1}{4(2x+1)} dx = \frac{63}{8} \ln 9 - \frac{1}{4} \int_0^4 (2x-1) dx$$

$$= \frac{63}{8} \ln 9 - \frac{1}{4} (x^2 - x) \Big|_0^4 = \frac{63}{4} \ln 3 - 3$$

$$\Rightarrow a = 63; b = 4; c = 3 \Rightarrow S = 63 + 4 + 3 = 70$$

Câu 38: Đáp án A

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}$$

Ta có:

$$1 = \frac{\sin \left[\left(x + \frac{\pi}{6} \right) - x \right]}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos x - \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \sin x}{\sin \frac{\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} \cdot \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} \right)$$

$$I = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x} dx - 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} dx$$

$$= 2 \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 2 \ln \frac{1}{2} - 2 \ln 1 + 2 \ln \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 4 \ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 2 \ln 2 = 2 \ln \frac{3}{4} + 2 \ln 2 = 2 \ln \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow S = 2 + 3 + 2 = 7$$

Câu 37: Đáp án C

$$\begin{cases} e^{2x} dx = dv \\ \cos 3x = u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{e^{2x}}{2} \\ -3 \sin 3x dx = du \end{cases}$$

Đặt

$$I = \int u dv = uv - \int v du$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} \cdot \cos 3x - \int \frac{-e^{2x}}{2} \cdot 3 \sin 3x dx$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} \cdot \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \cdot \sin 3x dx$$

$$\text{Đặt } \sin 3x = u_1 \Rightarrow 3 \cos 3x dx = du_1$$

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx = \int u_1 dv = u_1 v - \int v du_1$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} \cdot \sin 3x - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot 3 \cdot \cos 3x dx = \frac{e^{2x}}{2} \cdot \sin 3x - \frac{3}{2} I$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^{2x} \cdot \cos 3x}{2} + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{2} - \frac{3}{2} I \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{4} I = e^{2x} \left(\frac{\cos 3x}{2} + \frac{3}{4} \cdot \sin 3x \right)$$

$$\Rightarrow I = e^{2x} \left(\frac{2 \cos 3x}{13} + \frac{3}{13} \cdot \sin 3x \right)$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} = \frac{5}{13}$$

Câu 40: Đáp án A

Câu 41: Đáp án B

Câu 42: Đáp án D

$$I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{3x+1} = t \Rightarrow 3x = t^2 \Rightarrow 3dx = 2tdt$$

$$\text{Đổi cận: } x=1 \Rightarrow t=2$$

$$x=5 \Rightarrow t=4$$

$$I = \frac{2}{3} \int_2^4 \frac{tdt}{t\left(\frac{t^2-1}{3}\right)} = 2 \int_2^4 \frac{dt}{(t-1)(t+1)}$$

$$= \int_2^4 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= \left(\ln|t-1| - \ln|t+1| \right) \Big|_2^4 = 2\ln 3 - \ln 5$$

$$\Rightarrow a=2; b=-1 \Rightarrow a^2+ab+3b^2=5$$

Câu 43: Đáp án D

$$\text{Đặt } t=3x \Rightarrow dt=3dx, \text{ Đổi cận:}$$

$$x=0 \Rightarrow t=0; x=2 \Rightarrow t=6$$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 f(3x) dx = \frac{1}{3} \int_0^6 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^6 f(x) dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$$

Câu 44: Đáp án C

$$I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$$

Ta có

$$= \int_{-1}^2 x dx + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx - 3 \int_{-1}^2 g(x) dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + 2 \cdot 2 - 3(-1) = \frac{3}{2} + 4 + 3 = \frac{17}{2}$$

Câu 45: Đáp án A

Ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

$$= 5 - 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 7$$

2. Ứng dụng của tích phân trong hình học

Câu 1: Đáp án C

Giao điểm tại $x^2 + 2 = 3x \Rightarrow x = 1 \vee 2$

$$S = \int_1^2 |x^2 + 2 - 3x| dx$$

$$= \left| \int_1^2 (x^2 + 2 - 3x) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_1^2 \right| = \frac{1}{6}$$

Câu 2: Đáp án C

$y = (2-x)e^{\frac{x}{2}}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2

$$V = \pi \int_0^2 (2-x)^2 e^x dx$$

Thế tích

Sử dụng phương pháp tích phân thành phần

$$\Rightarrow V = \pi(2e^2 - 10)$$

Câu 3: Đáp án D

$$S = \int_{-1}^0 \left| \frac{x+1}{x-2} \right| dx = \left| \int_{-1}^0 \left(1 + \frac{3}{x-2} \right) dx \right|$$

$$= \left| x \Big|_{-1}^0 + 3 \ln|x-2| \Big|_{-1}^0 \right|$$

$$= |1 + 3 \ln 2 - 3 \ln 3|$$

$$= \left| 1 + 3 \ln \frac{2}{3} \right| = 3 \ln \frac{3}{2} - 1$$

Câu 4: Đáp án C

$$S = \int_0^1 |x^3 - 3x^2 + 2x| dx$$

$$= \int_0^3 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx$$

$$+ \int_2^3 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{11}{4}$$

Câu 5: Đáp án A

$$V = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2} dx = 18$$

Câu 6: Đáp án A

Giao điểm $2^x = 3-x \Rightarrow$ Nhẩm được nghiệm 1

$$S = \int_0^1 |2^x + x - 3| dx = \left| \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^2}{2} - 3x \right|_0^1$$

$$= \frac{2}{\ln 2} + \frac{1}{2} - 3 - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{5}{2}$$

Câu 7: Đáp án B

Câu 8: Đáp án B

Ta xét phương trình hoành độ giao điểm

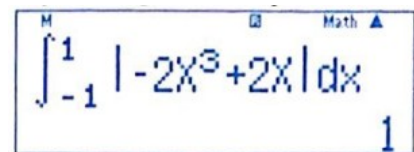
$$-2x^3 + x^2 + x + 5 = x^2 - x + 5$$

$$\Leftrightarrow -2x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

$$S = \int_{-1}^1 |-2x^3 + 2x| dx = 1$$

Lúc này ta có

Ta bấm máy và cũng được kết quả như trên:



Câu 9: Đáp án A

Xét phương trình hoành độ giao điểm $(x-1).e^{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy diện tích hình phẳng

được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-1).e^{2x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ được tính bởi công thức:

$$S = -\int_0^1 (x-1).e^{2x} dx + \int_1^2 (x-1).e^{2x} dx$$

$$= \int_1^0 (x-1).e^{2x} dx + \int_1^2 (x-1).e^{2x} dx$$

$$I_1 = \int_1^0 (x-1).e^{2x} dx \quad I_2 = \int_1^2 (x-1).e^{2x} dx$$

Đặt

$$x-1 = u \Rightarrow dx = du; v dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}.e^{2x}$$

Đặt

$$I_0 = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot (x-1) \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b e^{2x} dx$$

Khi đó

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot (x-1) \Big|_a^b - \frac{1}{4} \cdot e^{2x} \Big|_a^b$$

$$I_1 = -\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} \cdot e^0 - \frac{1}{4} \cdot e^2 \right) = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4}$$

Vậy từ đây ta có

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot e^4 - \left(\frac{1}{4} \cdot e^4 - \frac{1}{4} \cdot e^2 \right) = \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4}$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{2} - \frac{3}{4}$$

Suy ra

Câu 10: Đáp án C

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 - 2x = -x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Khi đó thể tích khối tròn xoay có được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số

$y = x^2 - 2x$; $y = -x^2$ quay quanh trục Ox được tính bởi công thức

$$V = \pi \int_0^1 \left| (x^2 - 2x)^2 - (-x^2)^2 \right| dx$$

Ta thấy trên $[0;1]$ thì $(-x^2)^2 \leq (x^2 - 2x)^2$, do vậy ta có công thức

$$V = \pi \int_0^1 \left[-x^4 + (x^4 - 4x^3 + 4x^2) \right] dx$$

$$= \pi \int_0^1 (-4x^3 + 4x^2) dx = \pi \cdot \left(-x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3} \quad (\text{đvtt})$$

Câu 11: Đáp án C

Thể tích khối tròn xoay được tạo nên bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2 + \cos x}$,

$x=0$, $x = \frac{\pi}{2}$ và trục hoành khi quay quanh Ox là:

$$V_x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos x) dx = \pi (2x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi(\pi + 1)$$

(đvtt).

Câu 12: Đáp án B

Thể tích khối tròn xoay được tạo nên bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2 + \sin x}$, $x=0$, $x=\pi$ và trục hoành khi quay quanh Ox là:

$$V_x = \pi \int_0^{\pi} (2 + \sin x) dx = \pi (2x - \cos x) \Big|_0^{\pi} = 2\pi(\pi + 1)$$

(đvtt).

Câu 13: Đáp án A

Thể tích khối tròn xoay được tạo nên bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $x=0$, $x=1$ và trục hoành khi quay quanh Ox là:

$$V_x = \pi \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3} \quad (\text{đvtt}).$$

Câu 14: Đáp án B

$$S = \int_1^e \left| \frac{1}{x} \right| dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = 1$$

Ta có

Câu 15: Đáp án C

Ta có: Phương trình tung độ giao điểm

$$\frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow y = \pm 2$$

$$\Rightarrow S = \left| \int_{-2}^2 \left(\frac{y^2}{4} - 1 \right) dy \right| = \left| \left(\frac{y^3}{12} - y \right) \Big|_{-2}^2 \right| = \left| -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \right| = \frac{8}{3}$$

Câu 16: Đáp án B

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

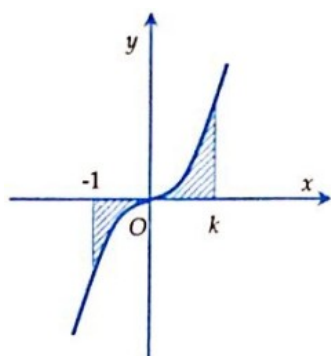
$$x^2 = 2 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{hoặc} \quad x = -2$$

(loại vì $x \geq 0$).

$$S = \int_0^1 |x^2 - (2 - x)| dx = \frac{7}{6}$$

Ta có

Câu 17: Đáp án D



Ta thấy hàm số $y = ax^3$, ($a > 0$) luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ và có tâm đối xứng là $O(0;0)$. Hình vẽ minh họa ở bên ta thấy với $x \in (-1;0)$ thì $ax^3 < 0$, với $x \in (0;k)$ thì $ax^3 > 0$.

$$S = \int_{-1}^k |ax^3| dx = \frac{15a}{4}$$

Vậy

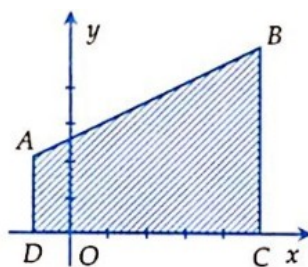
$$\Leftrightarrow \int_{-1}^0 (-ax^3) dx + \int_0^k ax^3 dx = \frac{15a}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left. \frac{-ax^4}{4} \right|_{-1}^0 + \left. \frac{ax^4}{4} \right|_0^k = \frac{15a}{4} \quad (\text{Do } k > 0).$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{4} + \frac{ak^4}{4} = \frac{15a}{4} \Leftrightarrow k^4 = 14 \Leftrightarrow k = \sqrt[4]{14}$$

(vì $k > 0$).

Câu 18: Đáp án D



Phương trình đường thẳng AB là:

$$\frac{x+1}{5+1} = \frac{y-2}{5-2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Thể tích khối tròn xoay là:

$$V = \pi \int_{-1}^5 f^2(x) dx = \pi \int_{-1}^5 \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \right)^2 dx = 78\pi$$

IX. Ứng dụng nguyên hàm, tích phân trong thực tế

Ví dụ 1: Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì tài xế đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A. 0,2 m B. 2 m C. 10 m D. 20 m

Lời giải

Đáp án C.

Nguyên hàm của hàm vận tốc chính là quãng đường $s(t)$ mà ô tô đi được sau quãng đường t giây kể từ lúc tài xế đạp phanh xe.

Vào thời điểm người lái xe bắt đầu đạp phanh ứng với $t = 0$.

Thời điểm ô tô dừng lại ứng với t_1 , khi đó $v(t_1) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 2$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng lại quãng đường ô tô đi được là:

$$s = \int_0^2 (-5t + 10) dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t \right) \Big|_0^2 = 10m$$

STUDY TIP

Hàm số thể hiện quãng đường vật đi được tính theo thời gian là biểu thức nguyên hàm của hàm số vận tốc.

Ví dụ 2: Một chiếc ô tô đang đi trên đường với vận tốc $v(t) = 2\sqrt{t}$ ($0 \leq t \leq 30$) (m/s). Giả sử tại thời điểm $t = 0$ thì $s = 0$. Phương trình thể hiện quãng đường theo thời gian ô tô đi được là

- A. $s = \frac{4}{3}\sqrt{t^3}$ (m) B. $s = 2\sqrt{t}$ (m) C. $s = \frac{4}{3}t^3$ (m) D. $s = 2t$ (m)

Đáp án A.

Lời giải

$$s(t) = \int 2\sqrt{t} dt = 2 \int t^{\frac{1}{2}} dt = 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} t^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \sqrt{t^3} \quad (m)$$

Tương tự như ở ví dụ 1 thì ta có

Ví dụ 3: Một vật chuyển động với vận tốc đầu bằng 0, vận tốc biến đổi theo quy luật, và có gia tốc $a = 0,3$ (m/s²). Xác định quãng đường vật đó đi được trong 40 phút đầu tiên.

- A. 12000m B. 240 m C. 864000 m D. 3200 m

Đáp án C.

Phân tích

Nhận thấy bài toán này khác với hai ví dụ trên ở chỗ bài toán cho biểu thức gia tốc mà không cho biểu thức vận tốc, ở đây ta có thêm một kiến thức như sau:

STUDY TIP

Biểu thức gia tốc là đạo hàm cấp một của biểu thức vận tốc, và là đạo hàm cấp hai của biểu thức quãng đường.

Biểu thức gia tốc là đạo hàm của biểu thức vận tốc, đến đây, kết hợp với 2 ví dụ đầu ta kết luận: “Biểu thức gia tốc là đạo hàm cấp một của biểu thức vận tốc, và là đạo hàm cấp hai của biểu thức quãng đường”. Từ đây ta có lời giải:

Lời giải

Ta có $v(t) = \int 0,3dt = 0,3t$ (do ban đầu vận tốc của vật bằng 0).

Vậy quãng đường vật đi được trong 40 phút đầu tiên là:

$$\int_0^{40,60} 0,3tdt = \frac{0,3}{2}t^2 \Big|_0^{2400} = 864000 \quad (\text{m})$$

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian được tính bởi công thức $v(t) = 3t + 2$, thời gian tính theo đơn vị giây, quãng đường vật đi được tính theo đơn vị m . Biết tại thời điểm $t = 2s$ thì vật đi được quãng đường là $10m$. Hỏi tại thời điểm $t = 30s$ thì vật đi được quãng đường là bao nhiêu?

- A. 1410 m B. 1140 m C. 300 m D. 240 m

Câu 2: Một tàu lửa đang chạy với vận tốc 200 m/s thì người lái tàu đạp phanh; từ thời điểm đó, tàu chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 200 - 20t$ (m/s). Trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi thời gian khi tàu đi được quãng đường 750 m (kể từ lúc bắt đầu đạp phanh) ít hơn bao nhiêu giây so với lúc tàu dừng hẳn?

- A. 5 s B. 8 s C. 15 s D. 10 s

Câu 3: Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ khi $t = 0$ (s) chuyển động thẳng với vận tốc $v(t) = t(5 - t)$ (m/s). Tìm quãng đường vật đi được cho đến khi nó dừng lại.

- A. $\frac{125}{12}$ (m) B. $\frac{125}{9}$ (m)
C. $\frac{125}{3}$ (m) D. $\frac{125}{6}$ (m)

Câu 4: Một người đi xe đạp dự định trong buổi sáng đi hết quãng đường 60 km . Khi đi được $\frac{1}{2}$ quãng đường, anh ta thấy vận tốc của mình chỉ bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc dự định, anh ta bèn đạp nhanh hơn vận tốc dự định 3 km/h , đến nơi anh ta vẫn chậm mất 45 phút. Hỏi vận tốc dự định của người đi xe đạp là bao nhiêu?

- A. 5 km/h B. 12 km/h
C. 7 km/h D. 18 km/h

Câu 5: Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v = -5t + 15$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A. 20 m B. 10 m C. $22,5 \text{ m}$ D. 5 m

Câu 6: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = 2t^3 - t + 1$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 2s$ là:

- A. 63 m/s^2 B. 64 m/s^2
C. 23 m/s^2 D. 24 m/s^2

Câu 7: Cho một vật chuyển động có phương trình là:

$$s = 2t^3 - \frac{2}{t} + 3 \quad (t \text{ được tính bằng giây, } S \text{ tính bằng mét}).$$

Vận tốc của chuyển động thẳng $t = 2s$ là:

- A. 3 m/s B. $\frac{49}{2} \text{ m/s}$
C. 12 m/s D. $\frac{47}{2} \text{ m/s}$

Câu 8: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = 2t^4 - t + 1$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Vận tốc của chuyển động khi $t = 1s$ là:

- A. 24 m/s B. 23 m/s C. 7 m/s D. 8 m/s

Câu 9: Một chiếc ô tô sẽ chạy trên đường với vận tốc tăng dần đều với vận tốc $v = 10t$ (m/s) t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu chạy. Hỏi quãng đường xe phải đi là bao nhiêu từ lúc xe bắt đầu chạy đến khi đạt vận tốc 20 (m/s) ?

- A. 10 m B. 20 m C. 30 m D. 40 m

Câu 10: Một ô tô đang chạy với vận tốc 19 m/s thì người lái hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -38t + 19$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A. 4,75m B. 4,5m C. 4,25m D. 5m

Câu 11: Một ô tô đang chạy đều với vận tốc 15 m/s thì phía trước xuất hiện chướng ngại vật nên người lái đạp phanh gấp. Kể từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-a$ m/s². Biết ô tô chuyển động thêm được 20 m thì dừng hẳn. Hỏi a thuộc khoảng nào dưới đây:

- A. (3;4) B. (4;5) C. (5;6) D. (6;7)

Câu 12: Bỏ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn là 28cm, trục nhỏ 25cm. Biết cứ 1000cm³ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20.000 đ. Hỏi từ quả dưa như trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? (Biết rằng bề dày của vỏ dưa không đáng kể, kết quả đã được quy tròn)

- A. 183.000 đ B. 180.000 đ
C. 185.000 đ D. 190.000 đ

Câu 13: Một viên đạn được bắn theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu 29,4 m/s. Gia tốc trọng trường là 9,8 m/s². Tính quãng đường S viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho đến khi chạm đất.

- A. $S = 88,2m$ B. $S = 88,5m$
C. $S = 88$ m D. $S = 89$ m

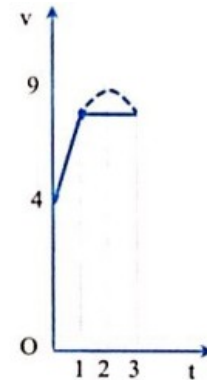
Câu 14: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15$ m/s thì tăng vận tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t$ (m/s²). Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

- A. 68,25 m B. 70,25 m
C. 69,75 m D. 67,25 m

Câu 15: Một ca nô đang chạy trên Hồ Tây với vận tốc 20 m/s thì hết xăng. Từ thời điểm đó, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc hết xăng. Hỏi từ lúc hết xăng đến lúc dừng hẳn, ca nô đi được bao nhiêu mét?

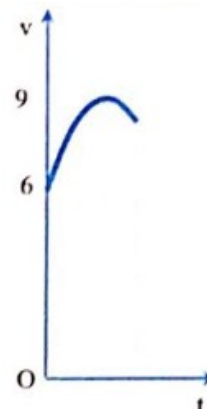
- A. 10 m B. 20 m C. 30 m D. 40 m

Câu 16: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình dưới. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



- A. $s = 23,25$ (km) B. $s = 21,58$ (km)
C. $s = 15,50$ (km) D. $s = 13,83$ (km)

Câu 17: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình dưới. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



- A. $s = 24,25$ (km) B. $s = 26,75$ (km)
C. $s = 24,75$ (km) D. $s = 25,25$ (km)

Câu 18: Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là

một phần của đường thẳng parabol với $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy



- A.** $s = 4,0$ (km) **B.** $s = 2,3$ (km)
C. $s = 4,5$ (km) **D.** $s = 5,3$ (km)

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án A

$$S = \int v(t) dt = \int (3t + 2) dt = \frac{3t^2}{2} + 2t + c$$

$$S(2) = 10 \Rightarrow \frac{3 \cdot 2^2}{2} + 2 \cdot 2 + c = 10 \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow S = \frac{3t^2}{2} + 2t$$

Suy ra: Khi $t = 30$ s, vật đi được quãng đường

$$s = \frac{3 \cdot 30^2}{2} + 2 \cdot 30 = 1410 \text{ m.}$$

Câu 2: Đáp án A

Khi tàu dừng hẳn: $v = 0 \Rightarrow t = 10$ (s).

$$S = \int v(t) dt = \int (200 - 2t) dt \Rightarrow s = 200t - t^2$$

$$S = 750 \Rightarrow 200t - 10t^2 = 750 \Rightarrow \begin{cases} t = 15 > 10 \Rightarrow \text{loại} \\ t = 5 \end{cases}$$

$$\Delta t = 10 - 5 = 5 \text{ (s).}$$

Câu 3: Đáp án D

$$S = \int t(5 - t) dt \Rightarrow S = \frac{5t^2}{2} - \frac{t^3}{3}$$

Khi vật dừng lại $\Rightarrow v = t(5 - t) = 0 \Rightarrow t = 5$.

$$\text{Khi đó } S = \frac{5 \cdot 5^2}{2} - \frac{5^3}{3} = \frac{5^3}{6} = \frac{125}{6} (m)$$

Câu 4: Đáp án B

Vận tốc dự định là $v (km/h)$.

Thời gian đi nửa quãng đường đầu

$$t_1 = \frac{30}{\frac{2}{3}v} = \frac{45}{v} (h)$$

Thời gian đi nửa quãng đường sau $t_2 = \frac{30}{v+3}$.

Ta có phương trình

$$t_1 + t_2 = \frac{60}{v} - 0,75 \Leftrightarrow \frac{45}{v} + \frac{30}{v+3} = \frac{60}{v} + 0,75$$

Giải phương trình suy ra: $v = 12$ km/h.

Câu 5: Đáp án C

Quãng đường vật đi từ lúc đạp phanh cho đến lúc dừng hẳn

$$-5t + 15 = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

$$\Rightarrow \int_3^0 (-5t + 15) dt = \left(-\frac{5t^2}{2} + 15t \right) \Big|_0^3$$

$$= -\left(-\frac{5}{2} \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 \right) = 22,5 (m)$$

Câu 6: Đáp án D

$$v = s' = 6t^2 - 1$$

$$a = v'' = 12t$$

$$\text{Khi } t = 2 \Rightarrow a = 24 (m/s^2)$$

Câu 7: Đáp án B

$$\text{Ta có } v = s' = 6t^2 + \frac{2}{t^2}$$

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow v = 6 \cdot 2^2 + \frac{2}{2^2} = \frac{49}{2}$$

Câu 8: Đáp án C

$$\text{Ta có } v = s' = 8t^3 - 1$$

$$\text{Khi } t = 1 \Rightarrow v = 8 - 1 = 7 (m/s)$$

Câu 9: Đáp án B

$$s = \int 10t dt \Rightarrow s = 5t^2$$

$$\text{Khi } v = 20 m/s \Rightarrow t = 2 \Rightarrow s = 5 \cdot 2^2 = 20 m$$

Câu 10: Đáp án A

Khi ô tô dừng lại hẳn

$$\Rightarrow v = 0 \Leftrightarrow 19 - 38t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$s = \int (19 - 38t) dt \Rightarrow s = 19t - 19t^2$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow s = 19 \cdot \frac{1}{2} - 19 \cdot \frac{1}{4} = \frac{19}{4} = 4,75 (m)$$

Câu 11: Đáp án C

Từ giả thiết ta có $v = \int (-a) dt \Rightarrow v = 15 - at$

Mà $s = \int v dt = \int (15 - at) dt \Rightarrow s = 15t - \frac{at^2}{2}$

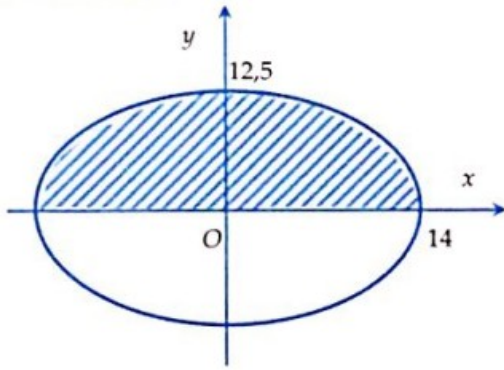
Ô tô chuyển động được 20m thì dừng tại thời điểm t_1

Suy ra

$$\begin{cases} v = 0 \\ s = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 - at_1 = 0 \\ 15t_1 - \frac{at_1^2}{2} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} at_1 = 15 \\ 15t_1 - \frac{15t_1}{2} = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} at_1 = 15 \\ t_1 = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{45}{8} \Rightarrow a \in (5; 6)$$

Câu 12: Đáp án A



Giả sử thiết diện nằm trên hệ Oxy , tâm O trùng với tâm thiết diện

Suy ra elip: $\frac{x^2}{14^2} + \frac{y^2}{12,5^2} = 1$. Thể tích quả dưa hấu chính là thể tích vật thể thu được khi quay phần gạch chéo quanh trục Ox .

$$\Rightarrow V = \left| \pi \int_{-14}^{14} 12,5^2 \left(1 - \frac{x^2}{14^2} \right) dx \right| = \frac{8750\pi}{3}$$

Số tiền thu được là:

$$20000 \cdot \frac{8750\pi}{3 \cdot 1000} \approx 183259 \approx 183.000 \text{ đ.}$$

Câu 13: Đáp án A

Ta có công thức liên hệ giữa vận tốc, gia tốc và quãng đường đi được là $v^2 - v_0^2 = 2as$

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - 29,4^2}{-2 \cdot 9,8} = 44,1$$

Quãng đường đi được từ lúc bắn đến khi chạm đất là $s = 44,1 \cdot 2 = 88,2(m)$

Câu 14: Đáp án C

Ta có:

$$v = \int a(t) dt = \int (t^2 + 4t) dt \\ \Rightarrow v = 15 + \frac{t^3}{3} + 2t^2$$

$$\text{Mà } s = \int v dt \Rightarrow s = 15t + \frac{t^4}{12} + \frac{2t^3}{3}$$

Sau 3 giây, chất điểm đi được quãng đường:

$$s(3) = 15 \cdot 3 + \frac{3^4}{12} + \frac{2 \cdot 3^3}{3} = 69,75(m)$$

Câu 15: Đáp án D

Khi dừng hẳn $\Rightarrow v = 0(m/s) \Rightarrow t = 4(s)$

Phương trình quãng đường đi được của ca - nô từ khi hết xăng

$$s = \int (20 - 5t) dt \Rightarrow s = 20t - \frac{5t^2}{2}$$

Tại $t = 4 \Rightarrow s = 40$

Suy ra: ca - nô đi được 40 mét

Câu 16: Đáp án B

Ta tìm được phương trình của parabol là

$$(P): v(t) = -\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4$$

Khi $t = 1$ thì $v(1) = -\frac{5}{4} + 5 + 4 = \frac{31}{4} \text{ (km/h).}$

$$v(t) = \begin{cases} -\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4 & \text{khi } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{31}{4} & \text{khi } 1 < t \leq 3 \end{cases}$$

Vậy

Vậy quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ là:

$$s = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4 \right) dt + \frac{31}{4} \cdot 2 = \frac{73}{12} + \frac{31}{2}$$

$$= \frac{259}{12} \approx 21,58(km)$$

Câu 17: Đáp án C

Ta tìm được phương trình của parabol là

$$(P): y = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 6$$

Như vậy, quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ là:

$$s = \int_0^3 \left(-\frac{3}{4}x^2 + 3x + 6 \right) dx = \left(-\frac{x^3}{4} + \frac{3x^2}{2} + 6x \right) \Big|_0^3$$

$$= \frac{99}{4} = 24,75(km)$$

Câu 18: Đáp án C

Ta tìm được phương trình của parabol là

$$(P): v(t) = -32t^2 + 32t$$

Quãng đường s mà người đó chạy được trong khoảng thời gian 0,75 (h) là:

$$s = \int_0^{0,75} (-32t^2 + 32t) dt = \left(-\frac{32}{3}t^3 + 16t^2 \right) \Big|_0^{0,75}$$

$$= 4,5(km)$$

X. Tổng ôn tập chủ đề 3

Quý độc giả vui lòng khai báo sách chính hãng tại web: congphatoan.com để nhận được đáp án chi tiết.

BÀI KIỂM TRA SỐ 1

Câu 1: Nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = 2\sin x + \cos x \text{ là}$$

- A. $-2\cos x - \sin x + C$ B. $-2\cos x + \sin x + C$
C. $2\cos x - \sin x + C$ D. $2\cos x + \sin x + C$

Câu 2: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \text{ và } F(0) = 2. \text{ Tính } F(1)$$

- A. $F(1) = \ln 2 - 2$ B. $F(1) = \frac{1}{2}$
C. $F(1) = \ln 2 + 2$ D. $F(1) = 2$

Câu 3: Giá trị nào của b để $\int_1^b (2x-6)dx = 0$?

- A. $b = 5$ hoặc $b = 0$ B. $b = 0$ hoặc $b = 3$
C. $b = 0$ hoặc $b = 1$ D. $b = 1$ hoặc $b = 5$

Câu 4: Giá trị của tích phân $I = \int_1^e \frac{x^2 + 2\ln x}{x} dx$ là

- A. $e^2 + 1$ B. e^2 C. $\frac{e^2 - 1}{2}$ D. $\frac{e^2 + 1}{2}$

Câu 5: Tìm nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = x^3 + \sin 2x$$

- A. $\int (x^3 + \sin 2x) dx = \frac{x^4}{4} - \cos 2x + C$
B. $\int (x^3 + \sin 2x) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + C$
C. $\int (x^3 + \sin 2x) dx = \frac{x^4}{4} + \cos 2x + C$
D. $\int (x^3 + \sin 2x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + C$

$$I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x} dx$$

Câu 6: Cho tích phân và đặt

$$t = \sqrt{1+3\ln x}. \text{ Mệnh đề nào dưới đây sai?}$$

- A. $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t dt$ B. $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t^2 dt$
C. $I = \frac{2}{9} t^3 \Big|_1^2$ D. $I = \frac{14}{9}$

Câu 7: Biết $\int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{3e^a + 1}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $ab = 48$ B. $ab = 64$
C. $a - b = 20$ D. $a - b = 12$

Câu 8: Cho $0 < b < d < a < c$ và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\int_a^d f(x) dx = 10, \int_b^d f(x) dx = 8, \int_{\ln a}^{\ln e} e^x f(e^x) dx = 7$$

$$I = \int_{\ln b}^{\ln c} e^x f(e^x) dx$$

Tính

- A. $I = -5$ B. $I = 5$
C. $I = 7$ D. $I = e^c - e^b$

Câu 9: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + 2^x$ là

- A. $\int f(x) dx = 1 + \frac{2^x}{\ln 2} + C$
B. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{2^x}{\ln 2} + C$
C. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + 2^x \ln 2 + C$
D. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + 2^x + C$

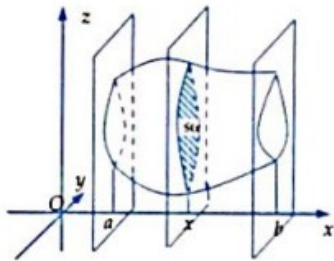
Câu 10: Biết một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ là $F(x) = x^2 + 4x + 1$. Khi đó, giá trị của hàm số $y = f(x)$ tại $x = 3$ là

- A. $f(3) = 30$ B. $f(3) = 6$
C. $f(3) = 22$ D. $f(3) = 10$

Câu 11: Biết rằng $\int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{a}{b} e^3 + \frac{c}{d}$, với $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ là hai phân số tối giản. Khi đó, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{1}{3}$ B. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{1}{9}$
C. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = -\frac{1}{9}$ D. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = -\frac{1}{3}$

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vật thể (H) giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = a$ và $x = b$ ($a < b$).



Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của (H) bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x , với $a \leq x \leq b$. Giả sử hàm số $y = S(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, thể tích V của vật thể (H) được tính bởi công thức

- A. $V = \pi \int_a^b [S(x)]^2 dx$ B. $V = \int_a^b [S(x)]^2 dx$
C. $V = \pi \int_a^b S(x) dx$ D. $V = \int_a^b S(x) dx$

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = 3 - 2 \cos x$, với mọi

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

$x \in \mathbb{R}$. Khi đó, giá trị của tích phân bằng bao nhiêu?

- A. $I = \frac{\pi}{2} + 2$ B. $I = \frac{3\pi}{2} - 2$
C. $I = \frac{\pi - 1}{3}$ D. $I = \frac{\pi + 1}{2}$

Câu 14: Một ô tô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t) = 6 - 2t$ (m/s^2), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Hỏi quãng đường ô tô đi được kể từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ô tô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

- A. 18 mét B. $\frac{45}{2}$ mét
C. 36 mét D. $\frac{27}{4}$ mét

Câu 15: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \sin \frac{x}{2} \right)$

- A. $\int f(x) dx = x^2 + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} + C$
B. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2} + C$
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} x^2 - \cos \frac{x}{2} + C$
D. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} + C$

$$I = \int_0^2 (3x - 1) e^{\frac{x}{2}} dx = a + be$$

Câu 16: Biết $I = \int_0^2 (3x - 1) e^{\frac{x}{2}} dx = a + be$, với a, b là các số nguyên. Tính $S = a + b$.

- A. $S = 12$ B. $S = 8$ C. $S = 16$ D. $S = 10$

Câu 17: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{\frac{\pi}{2}}$ và $F(0) = -1$. Tính $F(4)$.

- A. $F(4) = 4e^2 - 3$ B. $F(4) = 3$
C. $F(4) = 4e^2 + 3$ D. $F(4) = \frac{7}{4}e^2 - \frac{3}{4}$

Câu 18: Xét $I = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A. $I = \frac{1}{x} \Big|_1^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
B. $I = -\frac{1}{x} \Big|_1^2 = -\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}$
C. $I = \ln|x^2| \Big|_1^2 = \ln 4$
D. $I = -\frac{1}{x} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2-1} = -1$

Câu 19: Biết $I = \int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = 3 \ln a - \ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = ab$.

- A. $P = 15$ B. $P = 10$
C. $P = 20$ D. $P = -10$

Câu 20: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 2x}$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cot 2x + C$
B. $\int f(x) dx = 2 \cot 2x + C$
C. $\int f(x) dx = -2 \cot 2x + C$
D. $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \cot 2x + C$

Câu 21: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 2x}$.

- A. $\int f(x) dx = (x-1)e^x + C$
B. $\int f(x) dx = x^2 e^x + C$
C. $\int f(x) dx = xe^x + C$
D. $\int f(x) dx = (x+1)e^x + C$

Câu 22: Cho $I = \int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} (a > 0)$ và đặt $x = a \tan t$. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

- A. $I = \int_0^a \frac{1}{a} dt$
B. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a} dt$
C. $a^2 + x^2 = a^2 (1 + \tan^2 t)$
D. $dx = a (1 + \tan^2 t) dt$

Câu 23: Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx$

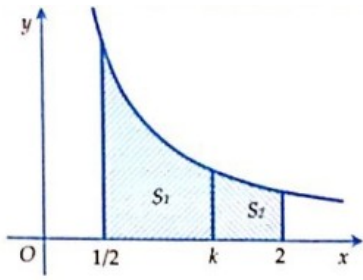
- A. $I = \frac{3 + 2 \ln 2}{16}$ B. $I = \frac{3 - 2 \ln 2}{16}$
C. $I = \frac{2 + \ln 2}{16}$ D. $I = \frac{2 - \ln 2}{16}$

Câu 24: Biết $\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

- A. $S = 10$ B. $S = 5$
C. $S = 2$ D. $S = -2$

Câu 25: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{2}, x = 2$ và trục hoành. Đường thẳng $x = k \left(\frac{1}{2} < k < 2 \right)$ chia (H) thành

hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ dưới đây. Tìm tất cả giá trị thực của k để $S_1 = 3S_2$.



- A. $k = \frac{7}{5}$ B. $k = \sqrt{3}$
C. $k = 1$ D. $k = \sqrt{2}$

Câu 26: Cho $\int_0^1 f(x) dx = 9$.

Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x) \cdot \cos 3x dx$.

- A. $I = 3$ B. $I = 5$ C. $I = 2$ D. $I = 9$

Câu 27: Xét $I = \int x^3 (4x^4 - 3)^5 dx$. Bằng cách đặt $u = 4x^4 - 3$, đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $I = \frac{1}{4} \int u^5 du$ B. $I = \frac{1}{12} \int u^5 du$
C. $I = \frac{1}{16} \int u^5 du$ D. $I = \int u^5 du$

Câu 28: Cho $\int_0^{\ln m} \frac{e^x dx}{e^x + 2} = \ln 2$. Khi đó giá trị của m là

- A. $m = \frac{1}{2}$ B. $m = 2$
C. $m = 4$ D. $m = 0, m = 4$

Câu 29: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^x (1 - 3e^{-2x})$

- A. $F(x) = e^x - 3e^{-3x} + C$
B. $F(x) = e^x + 3e^{-x} + C$

C. $F(x) = e^x - 3e^{-x} + C$

D. $F(x) = e^x + 3e^{-2x} + C$

Câu 30: Tính tích phân $\int_1^e (x+1) \ln x dx$

- A. $\frac{e^2 + 5}{4}$ B. $\frac{e^2 - 5}{4}$
C. $\frac{e^2 + 5}{2}$ D. $\frac{e^2 - 5}{4}$

Câu 31: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$f(x) = \cos 5x \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$. Tính

$F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{12}$ B. 0 C. $\frac{\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

Câu 32: Cho n là số tự nhiên sao cho

$\int_0^1 (x^2 - 1)^n x dx = \frac{-1}{20}$. Tính tích phân

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos x dx$.

A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{15}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{20}$

Câu 33: Tính $\int_{-1}^2 2x dx$. Chọn kết quả đúng.

- A. 6 B. -3 C. 3 D. -6

Câu 34: Tìm $\int \frac{dx}{2x+1}$ ta được

- A. $\frac{1}{2} \ln |2x+1| + C$ B. $\frac{1}{2} \ln (2x+1) + C$
C. $\ln |2x+1| + C$ D. $-\frac{2}{(2x+1)^2} + C$

Câu 35: Cho biết $F(x)$ là một nghiệm nguyên của hàm số $f(x)$. Tìm $I = \int [3f(x) + 1] dx$.

- A. $I = 3xF(x) + 1 + C$
 B. $I = 3F(x) + 1 + C$
 C. $I = 3F(x) + x + C$
 D. $I = 3xF(x) + x + C$

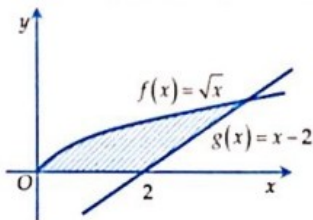
Câu 36: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ có gia tốc là $a(t) = 3t^2 + t$ (m/s²). Vận tốc ban đầu của vật là 2 (m/s). Hỏi vận tốc của vật sau 2s bằng bao nhiêu?

- A. 12 m/s
 B. 10 m/s
 C. 8 m/s
 D. 16 m/s

Câu 37: Cho $\int_0^1 \ln(x+1) dx = a + \ln b$, ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính $(a+3)^b$.

- A. 25
 B. $\frac{1}{9}$
 C. 16
 D. $\frac{1}{7}$

Câu 38: Diện tích hình phẳng trong hình vẽ sau là



- A. $\frac{16}{3}$
 B. $\frac{22}{3}$
 C. $\frac{10}{3}$
 D. 2

Câu 39: Một nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ là

- A. $\frac{3}{2}x\sqrt{x}$
 B. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
 C. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
 D. $\frac{2}{3}\sqrt{x}$

Câu 40: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khi đó hiệu số $F(1) - F(2)$ bằng

- A. $\int_1^2 f(x) dx$
 B. $\int_1^2 -f(x) dx$
 C. $\int_2^1 -F(x) dx$
 D. $\int_1^2 -F(x) dx$

Câu 41: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ bằng

- A. $\frac{23}{15}$
 B. $\frac{4}{3}$
 C. $\frac{5}{3}$
 D. $\frac{3}{2}$

Câu 42: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\int dx = x + 2C$ (C là hằng số)
 B. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (C là hằng số; $n \in \mathbb{Q}$)
 C. $\int 0 dx = C$ (C là hằng số)
 D. $\int e^x dx = e^x - C$ (C là hằng số)

Câu 43: Cho $\int f(x) dx = F(x) + C$. Khi đó với $a \neq 0$, ta có $\int f(ax+b) dx$ bằng

- A. $F(ax+b) + C$
 B. $aF(ax+b) + C$
 C. $\frac{1}{a+b} F(ax+b) + C$
 D. $\frac{1}{a} F(ax+b) + C$

Câu 44: Cho $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+2^x} dx = 4$ trong đó hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn trên $[-1; 1]$, khi đó $\int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng

- A. 2
 B. 16
 C. 4
 D. 8

Câu 45: Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$
 B. $\int e^{2x} dx = e^{2x} + C$
 C. $\int e^{2x} dx = 2e^{2x} + C$
 D. $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x+1}}{2x+1} + C$

Câu 46: Giả sử $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln K$. Tìm K .

- A. $K = 3$ B. $K = 9$ C. $K = 81$ D. $K = 8$

Câu 47: Cho $I = \int_0^4 x\sqrt{1+2x}dx$ và $u = \sqrt{2x+1}$.
Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $I = \frac{1}{2} \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^3$

B. $I = \frac{1}{2} \int_1^3 u^2(u^2-1)du$

C. $I = \int_1^3 u^2(u^2-1)du$

D. $I = \frac{298}{15}$

Câu 48: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$, biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 3$) là một hình chữ nhật có hai kích thước là x và $2\sqrt{9-x^2}$.

A. $V = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}dx$

B. $V = 4\pi \int_0^3 (9-x^2)dx$

C. $V = 2 \int_0^3 (x + 2\sqrt{9-x^2})dx$

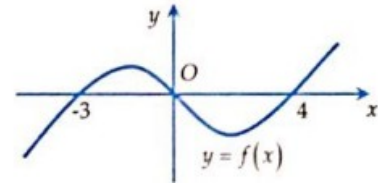
D. $V = \int_0^3 (x + 2\sqrt{9-x^2})dx$

Câu 49: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t được tính theo công thức $f(t) = 45t^2 - t^3$, $0 \leq t \leq 25$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc

độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

- A. Ngày thứ 16 B. Ngày thứ 15
C. Ngày thứ 5 D. Ngày thứ 19

Câu 50: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua gốc tọa độ O , ngoài ra còn cắt trục Ox tại các điểm có hoành độ lần lượt bằng -3 và 4 như hình bên. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục Ox .



A. $S = \int_{-3}^4 f(x)dx$

B. $S = \int_0^{-3} f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx$

C. $S = \int_{-3}^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx$

D. $S = \int_{-3}^0 f(x)dx + \int_4^0 f(x)dx$

BÀI KIỂM TRA SỐ 2

Câu 1: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$

A. $\int \sin 2x dx = -2 \cos 2x + C$

B. $\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$

C. $\int \sin 2x dx = 2 \cos 2x + C$

D. $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \cos 2x + C$

Câu 2: Cho tích phân $I = 4 \int_1^e x(1 + \ln x) dx = a.e^2 + b$

; với a, b là các số nguyên. Tính $M = ab + 4(a + b)$.

A. $M = -5$

B. $M = -2$

C. $M = 5$

D. $M = -6$

Câu 3: Cho m là số thực dương thỏa mãn

$$\int_0^m \frac{x}{(1+x^2)^3} dx = \frac{3}{16}$$

. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. $m \in \left(3; \frac{7}{2}\right)$

B. $m \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$

C. $m \in \left(\frac{3}{2}; 3\right)$

D. $m \in \left(\frac{7}{2}; 5\right)$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = 2x + \sin x + 2 \cos x$. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 1$.

A. $x^2 + \cos x + 2 \sin x - 2$

B. $2 + \cos x + 2 \sin x$

C. $x^2 - \cos x + 2 \sin x$

D. $x^2 - \cos x + 2 \sin x + 2$

Câu 5: Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ là hàm số liên tục trên R , có $F(x), G(x)$ lần lượt là một nguyên hàm của $f(x), g(x)$. Xét các mệnh đề sau

(I): $F(x) + G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) + g(x)$

(II): $k.F(x)$ là một nguyên hàm của $kf(x)$ ($k \in \mathbb{R}$)

(III): $F(x).G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x).g(x)$. Những mệnh đề nào là mệnh đề **đúng**?

A. (I) và (II)

B. (I), (II) và (III)

C. (II)

D. (I)

Câu 6: Cho $\int_2^5 f(x) dx = 3$. Tính $I = \int_1^2 f(3x-1) dx$.

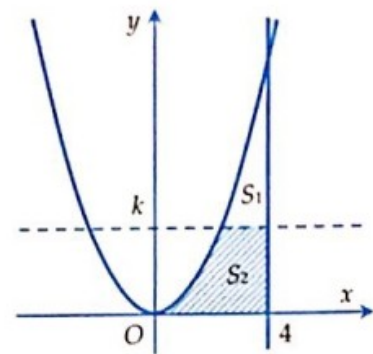
A. $I = \frac{1}{3}$

B. $I = 1$

C. $I = 9$

D. $I = 3$

Câu 7: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = 0, x = 0, x = 4$. Đường thẳng $y = k$ ($0 < k < 16$) chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ).



Tìm k để $S_1 = S_2$.

A. $k = 3$

B. $k = 8$

C. $k = 4$

D. $k = 5$

Câu 8: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 \frac{x}{3}$.

A. $\int f(x)dx = -x + 3 \tan \frac{x}{3} + C$

B. $\int f(x)dx = x - 3 \tan \frac{x}{3} + C$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{3} \tan^3 \frac{x}{3} + C$

D. $\int f(x)dx = 3 \tan \frac{x}{3} + C$

Câu 9: Hàm số nào sau đây **không phải** nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+1}$?

A. $F(x) = \ln|2x+1| + 1$

B. $F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + 2$

C. $F(x) = \frac{1}{2} \ln|4x+2| + 3$

D. $F(x) = \frac{1}{4} \ln(4x^2 + 4x + 1) + 3$

Câu 10: Một trường THPT dự định xây một bồn hoa hình tròn có đường kính $AB = 10m$. Để tạo ấn tượng người thiết kế đã tạo ra hai hình tròn nhỏ trong hình tròn lớn bằng cách lấy điểm M giữa A và B rồi dựng các hình tròn đường kính MA, MB . Trong hai hình tròn nhỏ nhà trường dự định trồng hoa hồng đỏ và phần còn lại trồng hoa hồng vàng. Biết giá mỗi gốc hồng đỏ là 5000 đồng, giá mỗi gốc hồng vàng là 4000 đồng và ít nhất $0,5m^2$ mới trồng được một gốc hồng. Hỏi chi phí thấp nhất để trồng bồn hoa là bao nhiêu?

A. 622000 đồng B. 702000 đồng

C. 706858 đồng D. 752000 đồng

Câu 11: Giả sử $\int_1^2 (2x-1) \ln x dx = a \ln 2 + b$ với a, b là số thực. Khi đó $a+b$ bằng

A. $\frac{5}{2}$

B. 2

C. 1

D. $\frac{3}{2}$

Câu 12: Cho $\int f(x)dx = F(x) + C$, khi đó với a khác 0 ta có $\int f(ax+b)$ bằng

A. $F(ax+b) + C$

B. $aF(ax+b) + C$

C. $\frac{1}{a} F(ax+b) + C$

D. $\frac{1}{2a} F(ax+b) + C$

Câu 13: Tìm nguyên hàm của hàm số $\int \left(x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} \right) dx$.

A. $\frac{x^3}{3} + 3 \ln|x| + \frac{4}{3} \sqrt{x^3} + C$

B. $\frac{x^3}{3} + 3 \ln x - \frac{4}{3} \sqrt{x^3}$

C. $\frac{x^3}{3} + 3 \ln|x| - \frac{4}{3} \sqrt{x^3}$

D. $\frac{x^3}{3} - 3 \ln|x| - \frac{4}{3} \sqrt{x^3} + C$

Câu 14: Nguyên hàm $\int \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$ bằng

A. $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$

B. $x\sqrt{1+x^2} + C$

C. $x^2\sqrt{1+x^2} + C$

D. $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} + C$

Câu 15: Nguyên hàm $\int \frac{dx}{2 \tan x + 1}$ bằng

A. $\frac{x}{5} + \frac{2}{5} \ln|2 \sin x + \cos x| + C$

B. $\frac{2x}{5} - \frac{1}{5} \ln|2 \sin x + \cos x| + C$

C. $\frac{x}{5} - \frac{1}{5} \ln|2 \sin x + \cos x| + C$

D. $\frac{x}{5} + \frac{1}{5} \ln|2 \sin x + \cos x| + C$

Câu 16: Nguyên hàm $\int \frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}} dx$ bằng

- A. $\frac{-1}{11} \cdot \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11} + C$ B. $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11} + C$
 C. $\frac{1}{11} \cdot \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11} + C$ D. $\frac{1}{33} \cdot \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11} + C$

Câu 17: Nguyên hàm $\int \frac{\sin 4x}{\sin x + \cos x} dx$ bằng

- A. $-\frac{\sqrt{2}}{3} \cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$
 B. $-\frac{\sqrt{2}}{3} \sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$
 C. $-\frac{\sqrt{2}}{3} \sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$
 D. $-\frac{\sqrt{2}}{3} \sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$

Câu 18: Nguyên hàm $\int \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} dx$ bằng

- A. $\ln\left|x - \frac{1}{x^2}\right| + C$ B. $\ln\left|x - \frac{1}{x}\right| + C$
 C. $\ln\left|x + \frac{1}{x}\right| + C$ D. $\ln\left|x^2 - \frac{1}{x}\right| + C$

Câu 19: Nguyên hàm $\int \frac{2x^3 + 1}{x(x^3 - 1)} dx$ bằng

- A. $\ln\left|x^2 - \frac{1}{x}\right| + C$ B. $\ln\left|x^2 + \frac{1}{x}\right| + C$
 C. $\ln\left|x - \frac{1}{x^2}\right| + C$ D. $\ln\left|x + \frac{1}{x^2}\right| + C$

Câu 20: Nguyên hàm $\int \frac{x^2 \sin x}{\cos^3 x} dx$ bằng

- A. $\frac{x^2}{2 \cos^2 x} - x \tan x + \ln|\cos x| + C$

B. $\frac{x^2}{2 \cos^2 x} + x \tan x - \ln|\cos x| + C$

C. $\frac{x^2}{2 \cos^2 x} - x \tan x - \ln|\cos x| + C$

D. $\frac{x^2}{2 \cos^2 x} + x \tan x + \ln|\cos x| + C$

Câu 21: Cho $f(x)$ là một hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-2}^2 f(x) dx = 2$. Tính $\int_0^1 f(2x) dx$.

- A. $\int_0^1 f(2x) dx = 2$ B. $\int_0^1 f(2x) dx = 4$
 C. $\int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2}$ D. $\int_0^1 f(2x) dx = 1$

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-1; 4]$, $f(4) = 2017$, $\int_{-1}^4 f'(x) dx = 2016$. Tính $f(-1)$.

- A. $f(-1) = 3$ B. $f(-1) = 1$
 C. $f(-1) = -1$ D. $f(-1) = 2$

Câu 23: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ và $F(0) = \pi$. Tìm $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

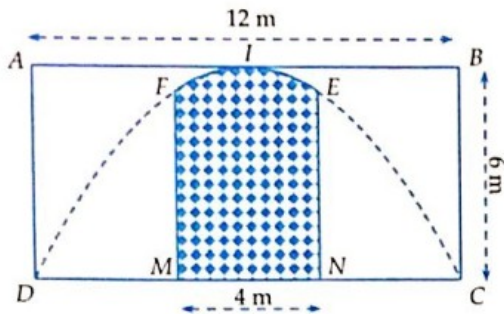
- A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$ B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi$
 C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi$ D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

Câu 24: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$

- A. $\int f(x) dx = 2e^{2x} + C$
 B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$
 C. $\int f(x) dx = e^{2x} + C$

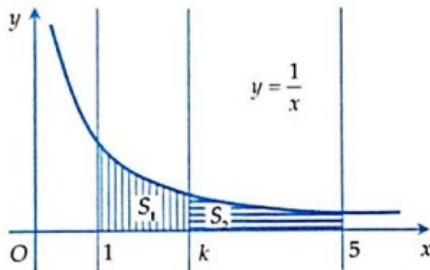
D. $\int f(x)dx = e^{2x} \ln 2 + C$

Câu 25: Một công ty quảng cáo X muốn làm một bức tranh trang trí hình $MNEIF$ ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có chiều cao $BC = 6\text{ m}$, chiều dài $CD = 12\text{ m}$ (hình vẽ bên). Cho biết $MNEF$ là hình chữ nhật có $MN = 4\text{ m}$; cung EIF có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D . Kinh phí làm bức tranh là $900.000\text{ đồng} / \text{m}^2$. Hỏi công ty X cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó?



- A. 20.400.000 đồng B. 20.600.000 đồng
C. 20.800.000 đồng D. 21.200.000 đồng

Câu 26: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$. Đường thẳng $x = k$ ($1 < k < 5$) chia (H) thành hai phần là (S_1) và (S_2) (hình vẽ bên). Cho hai hình (S_1) và (S_2) quay quanh trục Ox ta thu được hai khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1 và V_2 . Xác định k để $V_1 = 2V_2$.



- A. $k = \frac{15}{7}$ B. $k = \frac{5}{3}$
C. $k = \sqrt[3]{25}$ D. $k = \ln 5$

$\int_1^2 \ln(x+1)dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c$

Câu 27: Biết rằng với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

- A. $S = 0$ B. $S = 1$
C. $S = 2$ D. $S = -2$

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, biết $\int_0^9 f(x)dx = 9$ và $F(0) = 3$. Tính $F(9)$.

- A. $F(9) = -6$ B. $F(9) = 6$
C. $F(9) = 12$ D. $F(9) = -12$

Câu 29: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$

- A. $\int f(x)dx = 2xe^{2x-1}$
B. $\int f(x)dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$
C. $\int f(x)dx = \frac{e^{2x+1}}{2x+1} + C$
D. $\int f(x)dx = 2e^{2x} + C$

Câu 30: Tìm các hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2}$

- A. $f(x) = \frac{\sin x}{(2 + \sin x)^2} + C$
B. $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x} + C$
C. $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x} + C$
D. $f(x) = -\frac{1}{2 + \sin x} + C$

Câu 31: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$.

A. $\int f(x)dx = x.2^{x-1} + C$

B. $\int f(x)dx = 2^x \ln 2 + C$

C. $\int f(x)dx = \frac{2^{x+1}}{x+1} + C$

D. $\int f(x)dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

Câu 32: Với mỗi số tự nhiên n , ta đặt: $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$

. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $I_n = 2e - (n-1)I_{n-1}$ B. $I_n = e + nI_{n-1}$

C. $I_n = 2 - nI_{n-1}$ D. $I_n = -e + (n+1)I_{n-1}$

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và là

hàm số chẵn. Biết rằng $\int_0^3 f(x)dx = 3$,

$\int_{-4}^0 f(y)dx = 7$. Tính giá trị của tích phân

$I = \int_3^4 f(t)dt$

A. $I = 10$ B. $I = 4$

C. $I = \frac{7}{3}$ D. $I = 21$

Câu 34: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$

A. $I = \ln \frac{3}{2}$ B. $I = \frac{1}{3} \ln \frac{3}{2}$

C. $I = -\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$ D. $I = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$

Câu 35: Viết công thức tính diện tích S của hình phẳng D giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$.

A. $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

B. $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$

C. $S = \int_a^b (|f(x)| - |g(x)|)dx$

D. $S = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \right|$

Câu 36: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các

đường $y = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$, $x = 3$ và các trục tọa độ?

A. $\frac{8}{3}$ B. 3 C. $\frac{10}{3}$ D. $\frac{7}{3}$

Câu 37: Cho hàm số $G(x) = \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt$. Đạo hàm của hàm số $G(x)$ là

A. $G'(x) = 2x \cos |x|$ B. $G'(x) = 2x \cos x$

C. $G'(x) = x \cos x$ D. $G'(x) = 2x \sin x$

Câu 38: Cho các hàm số $f(x), g(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó

A. $\int_a^b f(x).g'(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)dx$

B. $\int_a^b f(x).g'(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b + \int_a^b f'(x).g(x)dx$

C. $\int_a^b f(x).g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)dx$

D. $\int_a^b f(x).g'(x)dx$

$= [f(x).g(x)]_a^b + \int_a^b f(x).g'(x)dx$

Câu 39: Tính nguyên hàm $\int (2x-1)e^{3x} dx$

A. $\int (2x-1)e^{3x} dx = \frac{(2x-1)e^{3x}}{3} - \frac{2e^{3x}}{9} + C$

B. $\int (2x-1)e^{3x} dx = \frac{(2x-1)e^{3x}}{3} - \frac{2e^{3x}}{3} + C$

C. $\int (2x-1)e^{3x} dx = \frac{1}{3}(x^2 - x)e^{3x} + C$

D. $\int (2x-1)e^{3x} dx = (x^2 - x)e^{3x} + C$

Câu 40: Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian được tính bởi công thức $v(t) = 3t + 2$, thời gian tính theo đơn vị giây, quãng đường vật đi được tính theo đơn vị m. Biết tại thời điểm $t = 2s$ thì vật đi được quãng đường là $10m$. Hỏi tại thời điểm $t = 30s$ thì vật đi được quãng đường là bao nhiêu?

A. 1410 m B. 1140 m C. 300 m D. 240 m

Câu 41: Tìm nguyên hàm của $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sqrt{3x+4}$, biết $F(0) = 8$.

A. $F(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3x+4} + \frac{38}{3}$

B. $F(x) = \frac{2}{3}(3x+4)\sqrt{3x+4} + \frac{16}{3}$

C. $F(x) = \frac{2}{9}(3x+4)\sqrt{3x+4} + \frac{56}{9}$

D. $F(x) = \frac{2}{3}(3x+4)\sqrt{3x+4} + \frac{8}{3}$

Câu 42: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2 - x^2$ và $y = x$.

A. 5 B. 7 C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{11}{2}$

Câu 43: Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và $y = 0$. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng đó khi nó quay quanh trục Ox .

A. $\frac{17\pi}{15}$ B. $\frac{16\pi}{15}$ C. $\frac{18\pi}{15}$ D. $\frac{19\pi}{15}$

Câu 44: Parabol $y = \frac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính $2\sqrt{2}$ thành 2 phần, tỉ số diện tích của chúng thuộc khoảng nào?

A. $(0, 7; 0, 8)$ B. $(0, 5; 0, 6)$
C. $(0, 6; 0, 7)$ D. $(0, 4; 0, 5)$

Câu 45: Nếu $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cdot \cos x dx = \frac{1}{64}$ ($n \in \mathbb{N}$) thì n bằng

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 46: Nguyên hàm của hàm số $y = \cos^2 x \cdot \sin x$ là

A. $\frac{1}{3}\cos^3 x + C$ B. $-\cos^3 x + C$
C. $-\frac{1}{3}\cos^3 x + C$ D. $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$

Câu 47: Cho $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 7; \int_2^6 f(x) dx = 3$. Khi đó giá trị của

biểu thức $P = \int_0^2 f(x) dx + \int_0^{10} f(x) dx$ là
A. 10 B. 4 C. 3 D. -4

Câu 48: Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$.

Giá trị của $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x) \sin x dx$ bằng
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{4}$

Câu 49: Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên miền $D = [a; b]$ có đồ thị là một đường cong C . Gọi S là phần giới hạn bởi C và các đường thẳng $x = a; x = b$. Người ta chứng minh được rằng diện tích mặt cong tròn xoay tạo thành khi xoay S quanh Ox bằng

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Theo kết quả trên, tổng diện tích bề mặt của khối tròn xoay tạo thành khi xoay phần hình phẳng giới

hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - \ln x}{4}$ và các đường thẳng $x = 1; x = e$ quanh Ox là

A. $\frac{2e^2 - 1}{8} \pi$

B. $\frac{4e^4 - 9}{64} \pi$

C. $\frac{4e^4 + 16e^2 + 7}{16} \pi$

D. $\frac{4e^4 - 9}{16} \pi$

Câu 50: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y = x^2 \sqrt{x^2 + 1}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$ bằng $\frac{a\sqrt{b} - \ln(1 + \sqrt{b})}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của $a + b + c$ là

A. 11

B. 12

C. 13

D. 1

