

(Đề thi có 04 trang)

Họ và
tên:

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d . Tổng n số hạng đầu tiên S_n tính bởi

A. $S_n = nu_1 + \frac{n(n+1)}{2}d$

B. $S_n = \frac{2u_1 + (n-1)d}{2}$

C. $S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$

D. $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2n}$

Câu 2. Phương trình lượng giác cơ bản $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ có tập nghiệm là

A. $\left\{ \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

B. $\left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

C. $\left\{ \pm \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

D. $\left\{ \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Câu 3. Khẳng định nào sau đây đúng về dãy số $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$?

A. Dãy số giảm và bị chặn dưới bởi 0.

B. Dãy số tăng và không bị chặn.

C. Dãy số tăng và bị chặn trên bởi 2.

D. Dãy số giảm và bị chặn trên bởi 1.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy hình thang đáy lớn AB . Giao tuyến của (SAD) và (SBC) là đường thẳng qua S và

A. Trung điểm của cạnh AB .

B. Tâm O của đáy $ABCD$.

C. Giao điểm của hai đường thẳng AD và BC .

D. Song song với đường thẳng AB .

Câu 5. Cho góc lượng giác α thỏa mãn $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan \alpha < 0, \sin \alpha < 0$

B. $\cot \alpha < 0, \cos \alpha < 0$

C. $\tan \alpha > 0, \cos \alpha > 0$

D. $\tan \alpha > 0, \sin \alpha < 0$

Câu 6. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng với mọi góc x ?

A. $\cos 2x = 2\sin^2 x - 1$

B. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

C. $\sin 2x = \sin x \cos x$

D. $\cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Câu 7. Cho dãy số (u_n) có $u_n = 2^n - 1$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số lần lượt là

A. 0, 3, 7.

B. 1, 2, 3.

C. 1, 3, 7.

D. 2, 4, 8.

Câu 8. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt tạo thành từ 3 điểm?

A. 3 mặt phẳng.

B. 4 mặt phẳng.

C. 6 mặt phẳng.

D. 12 mặt phẳng.

Câu 9. Góc lượng giác có số đo $\alpha = \frac{3\pi}{5}$ rad có số đo theo đơn vị độ là

A. 108° .

B. 216° .

C. 72° .

D. 54° .

Câu 10. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn trên tập xác định của nó?

A. $y = \cot 2x$

B. $y = \tan x$

C. $y = \sin 2x$

D. $y = \cos 3x$

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$ và công sai $d = 3$. Giá trị của u_{10} bằng

A. 30.

B. 28.

C. 25.

D. -29.

Câu 12. Tập xác định của hàm số lượng giác $y = \cot x$ là

- A. $\mathbb{R}$.
 B. $\mathbb{R}, \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
 C. $\mathbb{R}, \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 D. $\mathbb{R}, \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho góc lượng giác α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

- a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin^2 x - \sin 2x - 1 + \sin \alpha$ bằng $\frac{14}{13}$.
 b) Phương trình $\sin x = \sin \alpha$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; 2\pi)$.
 c) Giá trị $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) > 0$.
 d) Giá trị của $\sin \alpha$ bằng $-\frac{12}{13}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy hình bình hành tâm O . Gọi E, F, P lần lượt là trung điểm SB, SC, AB .

- a) Mặt phẳng (OEF) cắt CD tại Q. Khi đó tứ giác EFQP là hình bình hành.
 b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng qua S song song với AB.
 c) Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (OEF) tại P.
 d) Đường thẳng EF song song với AD.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

Câu 1. Cho $\tan x = 2$ và $A = \frac{2\sin x - 3\cos x}{4\sin x + 5\cos x}$. Tính $10A$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, Q lần lượt là trung điểm SA và AC , N là điểm trên cạnh SB sao cho $SB = 4NB$. Mặt phẳng (MNQ) cắt BC tại P . Tính tỉ số $\frac{PC}{PB}$.

Câu 3. Một rạp hát có 25 hàng ghế, hàng thứ nhất có 15 ghế, mỗi hàng phía sau có nhiều hơn hàng ngay trước đó 3 ghế. Hỏi rạp hát có tất cả bao nhiêu ghế?

Câu 4. Tính tổng số nghiệm của phương trình $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ trên đoạn $[0; \pi]$.

PHẦN IV. Câu tự luận

Thí sinh trình bày tự luận từ câu 1 đến câu 3.

Câu 1. Giải phương trình và bài toán thực tế sau:

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin 3x$$

- a) Giải phương trình
 b) Một vận động viên bắn súng nằm trên mặt đất để ngắm bắn các mục tiêu khác nhau trên một bức tường thẳng đứng. Vận động viên bắn trúng một mục tiêu cách mặt đất 25(m) tại một góc ngắm (góc hợp bởi phương ngắm với phương ngang). Nếu giảm góc ngắm đi một nửa thì vận động viên bắn trúng mục tiêu cách mặt đất 10(m). Tính khoảng cách từ vận động viên đến bức tường?

Câu 2. Anh Bình mua trả góp xe máy giá 40 triệu đồng. Anh Bình trả ngay 10 triệu, 30 triệu còn lại trả góp 20 tháng. Tháng thứ 1 trả 1,8 triệu, từ tháng thứ 2 mỗi tháng trả ít hơn tháng trước 0,05 triệu đồng.

- a) Tính số tiền anh Bình phải trả ở tháng thứ 20.
 b) Tính tổng số tiền anh Bình đã trả góp sau 20 tháng. Tổng tiền mua xe cao hơn hay thấp hơn giá gốc bao nhiêu triệu đồng?

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SM = 2MD$, P là trung điểm cạnh AD .

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

b) Mặt phẳng (BPM) cắt SC tại Q . Tính $\frac{SQ}{SC}$.

----- HẾT -----

BẢNG ĐÁP ÁN

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM NHIỀU LỰA CHỌN

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	C	A	C	C	D	B
Câu	7	8	9	10	11	12
Đáp án	C	B	A	D	C	B

PHẦN II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG – SAI

Câu	Ý a	Ý b	Ý c	Ý d
1	Sai	Đúng	Sai	Đúng
2	Sai	Sai	Đúng	Đúng

PHẦN III. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu	1	2	3	4
Đáp án	0,77	3	1275	4

LỜI GIẢI THAM KHẢO

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN

Câu 1.

Với cấp số cộng có số hạng đầu và công sai đã biết, số hạng thứ n là: $u_n = u_1 + (n-1)d$

Tổng n số hạng đầu của cấp số cộng là: $S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d]$

Kết luận: Chọn C.

Câu 2.

Ta có $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Cos âm ở góc phần tư II và III, với góc tham chiếu $\frac{\pi}{4}$.
 $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Kết luận: Chọn A.

Câu 3.

Ta biến đổi dãy số: $u_n = \frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1}$

Khi n tăng thì phân số $3/(n+1)$ giảm, nên dãy tăng. Đồng thời $3/(n+1) > 0$ nên mọi số hạng đều nhỏ hơn 2.

Kết luận: Dãy số tăng và bị chặn trên bởi 2. Chọn C.

Câu 4.

Vì $AB \square CD$ nên hai cạnh bên AD và BC không song song. Gọi $I = AD \cap BC$.

I thuộc mặt phẳng (SAD) và cũng thuộc (SBC) . Hai mặt phẳng còn cùng chứa S .

Vậy giao tuyến là đường thẳng SI.

Kết luận: Chọn C.

Câu 5.

Điều kiện $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ cho biết α thuộc góc phần tư III.

$$\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0, \tan \alpha > 0, \cot \alpha > 0$$

Kết luận: Mệnh đề đúng là $\tan \alpha > 0$ và $\sin \alpha < 0$. Chọn D.

Câu 6.

Công thức góc nhân đôi chuẩn là:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

Kết luận: Chọn B.

Câu 7.

Với $u_n = 2^n - 1$, ta tính:

$$u_1 = 2 - 1 = 1$$

$$u_2 = 4 - 1 = 3$$

$$u_3 = 8 - 1 = 7$$

Kết luận: Ba số hạng đầu là 1, 3, 7. Chọn C.

Câu 8.

Mỗi mặt phẳng được xác định bởi 3 trong 4 điểm. Vì bốn điểm không đồng phẳng nên các mặt phẳng tạo được là khác nhau.

$$C_4^3 = 4$$

Kết luận: Có 4 mặt phẳng. Chọn B.

Câu 9.

Đổi từ radian sang độ:

$$\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 108^\circ$$

Kết luận: Chọn A.

Câu 10.

Hàm cos là hàm chẵn vì $\cos(-t) = \cos t$. Do đó $y = \cos 3x$ là hàm chẵn.
 Các hàm tan x, cot 2x, sin 2x đều là hàm lẻ trên tập xác định của chúng.

Kết luận: Chọn D.

Câu 11.

Cấp số cộng có $u_1 = -2, d = 3$.
 $u_{10} = u_1 + 9d = -2 + 9 \cdot 3 = 25$

Kết luận: Chọn C.

Câu 12.

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ xác định khi $\sin x \neq 0$.
 $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Kết luận: Tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Chọn B.

PHẦN II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG – SAI

Câu 1.

Cho $\cos \alpha = -\frac{5}{13}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Vì α thuộc góc phần tư III nên $\sin \alpha < 0$.
 $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$

a) Xét giá trị nhỏ nhất của hàm số.

$$y = 2\sin x^2 - \sin 2x - 1 + \sin \alpha$$

$$2\sin x^2 - 1 = -\cos 2x$$

$$y = -\cos 2x - \sin 2x - \frac{12}{13}$$

Vì $-\cos 2x - \sin 2x$ có giá trị nhỏ nhất là $-\sqrt{2}$, nên:

$$y_{\min} = -\sqrt{2} - \frac{12}{13}$$

Kết luận: a) Sai.

b) Xét phương trình $\sin x = \sin \alpha$.

Trong một chu kì $(0; 2\pi)$, với $\sin \alpha < 0$ và α không nằm trên trục tọa độ, đường thẳng $y = \sin \alpha$ cắt đồ thị $y = \sin x$ tại đúng hai điểm.

Kết luận: b) Đúng.

c) Xét biểu thức $\cos(2\alpha + \pi/3)$.

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{25 - 144}{169} = -\frac{119}{169}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{120}{169}$$

$$\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{119}{169} \cdot \frac{1}{2} - \frac{120}{169} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

Kết luận: c) Sai.

d) Từ trên đã có $\sin \alpha = -12/13$.

Kết luận: d) Đúng.

Câu 2.

Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành tâm O; E, F, P lần lượt là trung điểm SB, SC, AB.

a) Xét mặt phẳng (OEF).

Trong tam giác SBC , E và F là trung điểm nên $EF \parallel BC$. Mà $BC \parallel AD$, suy ra $EF \parallel AD$.

Qua O trong mặt phẳng đáy, đường thẳng song song AD cắt AB tại P và cắt CD tại Q. Do đó $EF \parallel PQ$. Tuy nhiên $EF = AD/2$ còn $PQ = AD$, nên tứ giác EFQP không phải hình bình hành.

Kết luận: a) Sai.

b) Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) cùng đi qua S. Vì $AD \parallel BC$, giao tuyến của chúng là đường thẳng qua S song song với AD và BC, không song song với AB.

Kết luận: b) Sai.

c) Từ phần a), P nằm trên đường qua O song song AD thuộc mặt phẳng (OEF), đồng thời P thuộc AB.

Kết luận: c) Đúng.

d) Trong tam giác SBC, E và F là trung điểm nên $EF \parallel BC$. Vì ABCD là hình bình hành nên $BC \parallel AD$.

Kết luận: d) Đúng.

PHẦN III. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1.

Ta có $\tan x = 2$ và $A = \frac{2 \sin x - 3 \cos x}{4 \sin x + 5 \cos x}$

Chia cả tử và mẫu cho $\cos x$:

$$A = \frac{2 \tan x - 3}{4 \tan x + 5} = \frac{4 - 3}{8 + 5} = \frac{1}{13}$$

$$10A = \frac{10}{13} \approx 0,77$$

Kết luận: Đáp án: 0,77.

Câu 2.

Đặt hệ tọa độ affine thuận tiện: $A(0,0,0), B(1,0,0), C(0,1,0), S(0,0,1)$

Khi đó: $M\left(0,0,\frac{1}{2}\right), Q\left(0,\frac{1}{2},0\right), N\left(\frac{3}{4},0,\frac{1}{4}\right)$

Phương trình mặt phẳng (MNQ): $x + 3y + 3z = \frac{3}{2}$

Gọi $P \in BC$ và đặt $P = (1-t, t, 0)$, khi đó $t = PB/BC$.

$$(1-t) + 3t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$$

Suy ra $PB = \frac{BC}{4}$ và $PC = \frac{3BC}{4}$.

$$\frac{PC}{PB} = 3$$

Kết luận: Đáp án: 3.

Câu 3.

Số ghế mỗi hàng tạo thành cấp số cộng với $a_1 = 15, d = 3, n = 25$.

$$S_{25} = \frac{25}{2} [2 \cdot 15 + 24 \cdot 3] = \frac{25}{2} \cdot 102 = 1275$$

Kết luận: Rạp có 1275 ghế.

Câu 4.

Giải phương trình:

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ta có hai họ nghiệm:

$$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$$

Trên đoạn $[0; \pi]$, các nghiệm là $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi$.

Kết luận: Có 4 nghiệm.

PHẦN IV. TỰ LUẬN

Câu 1a.

Giải phương trình:

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin 3x \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 3x = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

Dùng công thức biến đổi tổng thành tích:

Do đó xảy ra một trong hai trường hợp:

$$\sin\left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{5} - \frac{\pi}{20}$$

$$\cos\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = \frac{2k\pi}{5} - \frac{\pi}{20} \quad \text{hoặc} \quad x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Kết luận: Nghiệm:

Câu 1b.

Gọi d là khoảng cách từ vận động viên đến bức tường và α là góc ngắm ban đầu.

$$\tan \alpha = \frac{25}{d}$$

Mục tiêu thứ nhất cao 25 m:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{10}{d}$$

Khi giảm góc ngắm còn một nửa, mục tiêu cao 10 m:

Đặt $t = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{10}{d}$. Dùng công thức: $\tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2}$

$$\frac{25}{d} = \frac{20/d}{1-100/d^2}$$

$$25 = \frac{20}{1-100/d^2}$$

$$25 - \frac{2500}{d^2} = 20$$

$$d^2 = 500 \Rightarrow d = 10\sqrt{5}$$

Kết luận: $d = 10\sqrt{5}$ m, xấp xỉ 22,36 m.

Câu 2a.

Số tiền trả mỗi tháng tạo thành cấp số cộng với $a_1 = 1,8; d = -0,05$.

$$a_{20} = 1,8 + 19(-0,05) = 0,85$$

Kết luận: Tháng thứ 20, anh Bình trả 0,85 triệu đồng.

Câu 2b.

Tổng tiền trả góp trong 20 tháng: $S_{20} = \frac{20}{2}(1,8 + 0,85) = 26,5$

Cộng với 10 triệu đồng trả ngay ban đầu: $10 + 26,5 = 36,5$

So với giá gốc 40 triệu đồng: $40 - 36,5 = 3,5$

Kết luận: Theo đúng dãy số liệu của đề, tổng tiền thực trả là 36,5 triệu đồng, thấp hơn giá gốc 3,5 triệu đồng.

Lưu ý: dữ kiện “30 triệu còn lại trả góp” không khớp với tổng 20 khoản trả mà đề đã cho (26,5 triệu). Kết quả trên được tính đúng theo dãy tiền trả từng tháng trong đề.

Câu 3a.

Vì đáy $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$.

Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) đều đi qua S . Do đó giao tuyến là đường thẳng qua S song song với AB và CD .

Kết luận: $(SAB) \cap (SCD)$ là đường thẳng qua S , song song với AB và CD .

Câu 3b.

Dùng hệ tọa độ affine để tính tỉ số trên một đường thẳng.

$$A(0,0,0), B(1,0,0), D(0,1,0), C(1,1,0), S(0,0,1)$$

P là trung điểm AD nên $P\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Do $SM = 2MD$ nên $M\left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Mặt phẳng (BPM) có phương trình: $x + 2y - z = 1$

Điểm Q thuộc SC . Đặt $t = \frac{SQ}{SC}$. Khi đó: $Q = S + t(C - S) = (t, t, 1 - t)$

Thế vào phương trình mặt phẳng (BPM): $t + 2t - (1 - t) = 1$

$$\Rightarrow 4t - 1 = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

Kết luận: $\frac{SQ}{SC} = \frac{1}{2}$