

PHƯƠNG TRÌNH-BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

Câu 1: Biết phương trình $\sqrt{2} \cdot 2^{3x+1} = 8$ có một nghiệm là $x = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ tối giản và $b > 0$. Tính $10a + b$.

Câu 2: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-4x-7} < \frac{1}{9}$. Số phần tử của S bằng bao nhiêu?

Câu 4: Tìm nghiệm phương trình $\log_3(2x-3) = \log_3(x-2) + 1$;

Câu 5: Tìm số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $\frac{64}{2^{x-2}} \geq 4^{\frac{x}{2}}$.

Câu 6: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 3 + \log_5 x \geq 1 + \log_2 3 \cdot \log_5 x$. Số phần tử của S bằng bao nhiêu?

Câu 7: Dân số nước ta năm 2022 ước tính là 99200000 người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm của nước ta không đổi là $r = 0,93\%$. Biết rằng sau t năm, dân số Việt Nam (tính từ mốc năm 2022) ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$. Hỏi từ năm nào trở đi, dân số nước ta vượt 120 triệu người?

Câu 8: Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới, bác Thảo đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng số tiền là 500 triệu đồng với lãi suất $r < 0$ cho kỳ hạn một năm. Điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi năm trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho năm sau (theo thể thức lãi kép). Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, bác đã thanh toán hợp đồng ngân hàng với số tiền là 599823000 đồng. Hỏi bác Thảo đã vay ngân hàng với lãi suất r là bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần nghìn)?

Câu 9: Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng pin nạp được tính theo công thức mũ như sau

$Q(t) = Q_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{3t}{2}}\right)$, với t là khoảng thời gian tính bằng giờ và Q_0 là dung lượng nạp tối đa.

Hãy tính thời gian nạp pin của điện thoại tính từ lúc cạn pin cho đến khi điện thoại đạt được 80% dung lượng pin tối đa (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 10: Một người gửi tiết kiệm 10 tỉ đồng theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng với lãi suất 7% một năm và lãi hằng năm được nhập vào vốn. Sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 12 tỉ đồng?

Câu 11: Mức cường độ âm L (đơn vị: dB) được tính bởi công thức

$L = 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$, trong đó I (đơn vị: W / m^2) là cường độ âm. Hãy tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được, biết rằng tai người có thể nghe được âm với cường độ âm từ $10^{-12} W / m^2$ đến $10^1 W / m^2$.

Câu 12: Công thức tính khối lượng còn lại của một chất phóng xạ từ khối lượng ban đầu M_0 là:

$M(t) = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, trong đó t là thời gian tính từ thời điểm ban đầu; T là chu kỳ bán rã chất phóng xạ. Đồng vị phóng xạ của polonium-209 có chu kỳ bán rã là 103 ngày, biết khối lượng ban đầu $M_0 = 300 g$.

Hỏi khối lượng polonium-209 còn lại sau 515 ngày.

Câu 13: Tìm nghiệm phương trình $\ln 2x + \ln(x-1) = \ln x^2$;

Câu 14: Tìm nghiệm bất phương trình $25^x - 5^{1+x} - 6 \geq 0$.

Câu 15: Tìm nghiệm phương trình $\log(x^2 - 3x + 2) = 2 \log_{100}(2x - 4)$;

Câu 16: Dân số ở một địa phương được ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{r \cdot t}$, trong đó A không đổi là dân số của năm 2023, S là dân số sau t năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Hỏi đến năm nào thì dân số ở địa phương đó sẽ đạt gấp đôi dân số năm 2023? Biết $r = 1,13\% / \text{năm}$.

Câu 17: Số lượng của một loài vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t) = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn có sau t (phút), r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t (tính theo phút) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có 500 con và sau 6 giờ có 2000 con. Hỏi ít nhất bao nhiêu giờ, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn đạt ít nhất 120000 con?

Trả lời:.....

Câu 18: Nếu một người gửi số tiền A với lãi suất kép r mỗi kì thì sau n kì, số tiền T người ấy thu được cả vốn lẫn lãi được cho bởi công thức $T_n = A(1+r)^n$.

Một người gửi 150 triệu đồng vào một ngân hàng theo thể thức lãi suất kép với lãi suất cố định là $8,4\% / \text{năm}$. Nếu theo kì hạn là 1 năm thì sau ít nhất bao nhiêu năm, người đó thu được cả vốn và tiền lãi hơn 200 triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI

Câu 1: Biết phương trình $\sqrt{2} \cdot 2^{3x+1} = 8$ có một nghiệm là $x = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ tối giản và $b > 0$. Tính $10a + b$.

Trả lời:.....

Lời giải

$$\sqrt{2} \cdot 2^{3x+1} = 8 \Leftrightarrow 2^{3x+1} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 3x+1 = \log_2 4\sqrt{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } 10a + b = 10 \cdot 1 + 2 = 12.$$

Câu 2: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-4x-7} < \frac{1}{9}$. Số phần tử của S bằng bao nhiêu?

Trả lời:.....

Lời giải

$$3^{x^2-4x-7} < \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x^2-4x-7} < 3^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 7 < -2 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 5).$$

Do x nguyên nên $x \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

Vậy số phần tử của S bằng 5.

Câu 3: Tìm nghiệm phương trình $\log_{\frac{1}{4}}(-x+2) = -2$

Trả lời:.....

Lời giải

Điều kiện: $-x+2 > 0 \Leftrightarrow x < 2$.

$$\log_{\frac{1}{4}}(-x+2) = -2 \Leftrightarrow -x+2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \Leftrightarrow x = -14 \quad (\text{thỏa mãn điều kiện}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -14$.

Câu 4: Tìm nghiệm phương trình $\log_3(2x-3) = \log_3(x-2) + 1$;

Trả lời:.....

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x-3 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2. (*)$$

$$\log_3(2x-3) = \log_3(x-2) + 1 \Leftrightarrow \log_3(2x-3) = \log_3(x-2) + \log_3 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x-3) = \log_3 3(x-2) \Rightarrow 2x-3 = 3x-6 \Leftrightarrow x = 3 \quad (\text{thỏa mãn điều kiện})$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

Câu 5: Tìm số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $\frac{64}{2^{x-2}} \geq 4^{\frac{x}{2}}$.

Trả lời:.....

Lời giải

$$\frac{64}{2^{x-2}} \geq 4^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow 64 \geq 2^{x-2} \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^6 \geq 2^{2x-2} \Leftrightarrow 6 \geq 2x-2 \Leftrightarrow x \leq 4$$

Vậy số nghiệm nguyên dương của bất phương trình là 4.

Câu 6: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 3 + \log_5 x \geq 1 + \log_2 3 \cdot \log_5 x$. Số phần tử của S bằng bao nhiêu?

Trả lời:.....

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.(*)

$$\begin{aligned} \log_2 3 + \log_5 x \geq 1 + \log_2 3 \cdot \log_5 x &\Leftrightarrow \log_5 x \cdot (1 - \log_2 3) - (1 - \log_2 3) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - \log_2 3)(\log_5 x - 1) \geq 0. \end{aligned}$$

Khi đó, do $1 - \log_2 3 < 0$ và cơ số $5 > 1$ nên bất phương trình trở thành:

$$\log_5 x \leq 1 \Rightarrow x \leq 5.$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta được nghiệm của bất phương trình là $0 < x \leq 5$.

Vậy số phần tử của S bằng 4.

Câu 7: Dân số nước ta năm 2022 ước tính là 99200000 người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm của nước ta không đổi là $r = 0,93\%$. Biết rằng sau t năm, dân số Việt Nam (tính từ mốc năm 2022) ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$. Hỏi từ năm nào trở đi, dân số nước ta vượt 120 triệu người?

Trả lời:.....

Lời giải

Xét bất phương trình:

$$\begin{aligned} 99200000 \cdot e^{0,93\%t} > 120000000 &\Leftrightarrow e^{0,93\%t} > \frac{75}{62} \Leftrightarrow 0,93\%t > \ln\left(\frac{75}{62}\right) \\ &\Leftrightarrow t > 20,468. \end{aligned}$$

Vậy từ năm 2043 trở đi thì dân số nước ta vượt quá 120 triệu người.

Câu 8: Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới, bác Thảo đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng số tiền là 500 triệu đồng với lãi suất $r < 0$ cho kỳ hạn một năm. Điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi năm trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho năm sau (theo thể thức lãi kép). Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, bác đã thanh toán hợp đồng ngân hàng với số tiền là 599823000 đồng. Hỏi bác Thảo đã vay ngân hàng với lãi suất r là bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần nghìn)?

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có: $A = 500$ triệu đồng, lãi suất $r /$ năm, $n = 2$ năm, $T = 599823000$ đồng.

Theo công thức lãi kép, ta có:

$$T = A(1+r)^n \Leftrightarrow 599823000 = 500000000(1+r)^2$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{599823}{500000}} - 1 \approx 0,095.$$

Vậy lãi suất mà bác Thảo vay ngân hàng là xấp xỉ $9,5\%$.

Câu 9: Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng pin nạp được tính theo công thức mũ như sau

$$Q(t) = Q_o \cdot \left(1 - e^{-\frac{3t}{2}}\right),$$

với t là khoảng thời gian tính bằng giờ và Q_o là dung lượng nạp tối đa.

Hãy tính thời gian nạp pin của điện thoại tính từ lúc cạn pin cho đến khi điện thoại đạt được 80% dung lượng pin tối đa (làm tròn đến hàng phần trăm).

Trả lời:.....

Lời giải

Theo giả thiết, ta có phương trình:

$$\frac{80}{100} Q_o = Q_o \cdot \left(1 - e^{-\frac{3t}{2}}\right) \Rightarrow e^{-\frac{3t}{2}} = \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{3t}{2} = -\ln 5 \Rightarrow t \approx 1,07$$

giờ

Vậy thời gian nạp pin của điện thoại là khoảng 1,07 giờ.

Câu 10: Một người gửi tiết kiệm 10 tỉ đồng theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng với lãi suất 7% một năm và lãi hằng năm được nhập vào vốn. Sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 12 tỉ đồng?

Trả lời:.....

Lời giải

Theo công thức lãi kép: $T = A(1+r)^n$, số tiền người đó nhận được sau n năm là:

$$T = 10 \cdot 10^9 (1+7\%)^n = 10^{10} \cdot 1,07^n \text{ (đồng)}$$

Để nhận được số tiền nhiều hơn 12 tỉ đồng thì

$$T = 10^{10} \cdot 1,07^n > 12 \cdot 10^9 \Leftrightarrow 1,07^n > \frac{6}{5} \Leftrightarrow n > \log_{1,07} \left(\frac{6}{5} \right) \approx 2,695.$$

Vậy sau ít nhất 3 năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 12 tỉ đồng.

Câu 11: Mức cường độ âm L (đơn vị: dB) được tính bởi công thức

$L = 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$, trong đó I (đơn vị: W/m^2) là cường độ âm. Hãy tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được, biết rằng tai người có thể nghe được âm với cường độ âm từ $10^{-12} W/m^2$ đến $10^1 W/m^2$.

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 10^{-12} \leq I \leq 10^1 &\Leftrightarrow \frac{10^{-12}}{10^{-12}} \leq \frac{I}{10^{-12}} \leq \frac{10^1}{10^{-12}} \\ \Leftrightarrow 1 \leq \frac{I}{10^{-12}} \leq 10^{13} &\Leftrightarrow \log 1 \leq \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) \leq \log 10^{13} \\ \Leftrightarrow 0 \leq 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) &\leq 130 \text{ (do } 10 > 1) \\ \Leftrightarrow 0 \leq L \leq 130. \end{aligned}$$

Vậy mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được là từ $0dB$ đến $130dB$.

Câu 12: Công thức tính khối lượng còn lại của một chất phóng xạ từ khối lượng ban đầu M_0 là:

$M(t) = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, trong đó t là thời gian tính từ thời điểm ban đầu; T là chu kỳ bán rã chất phóng xạ. Đồng vị phóng xạ của polonium-209 có chu kỳ bán rã là 103 ngày, biết khối lượng ban đầu $M_0 = 300g$.

Hỏi khối lượng polonium-209 còn lại sau 515 ngày.

Trả lời:.....

Lời giải

Khối lượng polonium-209 còn lại sau 515 ngày là: $M(515) = 300 \cdot 2^{-\frac{515}{103}} = 9,375g$.

Câu 13: Tìm nghiệm phương trình $\ln 2x + \ln(x-1) = \ln x^2$;

Trả lời:.....

Lời giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} 2x > 0 \\ x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1. (*) \\ x^2 > 0 \end{cases}$$

$$\ln 2x + \ln(x-1) = \ln x^2 \Leftrightarrow \ln[2x(x-1)] = \ln x^2 \Rightarrow 2x(x-1) = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}, \text{ ta thấy chỉ có nghiệm } x = 2 \text{ thoả mãn điều kiện } (*).$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.

Câu 14: Tìm nghiệm bất phương trình $25^x - 5^{1+x} - 6 \geq 0$.

Trả lời:.....

Lời giải

$$25^x - 5^{1+x} - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 5 \cdot 5^x - 6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (5^x)^2 - 1 - 5 \cdot (5^x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (5^x + 1)(5^x - 6) \geq 0.$$

Vì $5^x + 1 > 0$ nên bất phương trình trở thành: $5^x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq \log_5 6$ (do $5 > 1$).

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq \log_5 6$.

Câu 15: Tìm nghiệm phương trình $\log(x^2 - 3x + 2) = 2\log_{100}(2x - 4)$;

Trả lời:.....

Lời giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ 2x - 4 > 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\log(x^2 - 3x + 2) = 2\log_{100}(2x - 4) \Leftrightarrow \log(x^2 - 3x + 2) = \log(2x - 4)$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Thay lần lượt hai giá trị này vào $(*)$, ta thấy chỉ có giá trị $x = 3$ thoả mãn.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

Câu 16: Dân số ở một địa phương được ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{r \cdot t}$, trong đó A không đổi là dân số của năm 2023, S là dân số sau t năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Hỏi đến năm nào thì dân số ở địa phương đó sẽ đạt gấp đôi dân số năm 2023? Biết $r = 1,13\% / \text{năm}$.

Trả lời:.....

Lời giải

Dân số đạt gấp đôi nghĩa là $S = 2A$, ta có:

$$2A = A \cdot e^{1,13\% \cdot t} \Leftrightarrow e^{1,13\% \cdot t} = 2 \Leftrightarrow 1,13\% \cdot t = \ln_e 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{1,13\%} \approx 61,34 \text{ (do } e > 1 \text{)}.$$

Vậy sau 62 năm tức đến năm 2085 thì dân số ở địa phương đó sẽ gấp đôi dân số năm 2023.

Câu 17: Số lượng của một loài vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t) = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn có sau t (phút), r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t (tính theo phút) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có 500 con và sau 6 giờ có 2000 con. Hỏi ít nhất bao nhiêu giờ, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn đạt ít nhất 120000 con?

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có: $A = 500, S(360) = 2000, 6 \text{ giờ} = 360 \text{ phút}$.

Sau 6 giờ số lượng vi khuẩn là 2000 con, tức là: $2000 = 500 \cdot e^{r \cdot 360}$

$$\Leftrightarrow e^{r \cdot 360} = 4 \Leftrightarrow r = \frac{\ln 4}{360} \text{ (do } e > 1 \text{)}.$$

Số lượng vi khuẩn đạt ít nhất 120000 con, nghĩa là: $500 \cdot e^{\frac{\ln 4}{360} \cdot t} \geq 120000$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{\ln 4}{360} \cdot t} \geq 240 \Leftrightarrow \frac{\ln 4}{360} \cdot t \geq \ln 240 \Leftrightarrow t \geq \frac{360 \cdot \ln 240}{\ln 4} \approx 1423,24 \text{ (phút)}.$$

Vậy sau ít nhất 24 (giờ) thì số lượng vi khuẩn đạt ít nhất 120000 con.

Câu 18: Nếu một người gửi số tiền A với lãi suất kép r mỗi kì thì sau n kì, số tiền T người ấy thu được cả vốn lẫn lãi được cho bởi công thức $T_n = A(1+r)^n$.

Một người gửi 150 triệu đồng vào một ngân hàng theo thể thức lãi suất kép với lãi suất cố định là $8,4\% / \text{năm}$. Nếu theo kì hạn là 1 năm thì sau ít nhất bao nhiêu năm, người đó thu được cả vốn và tiền lãi hơn 200 triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có: $A = 150$ (triệu đồng), $r = 8,4\%$

Vốn và tiền lãi hơn 200 triệu đồng nghĩa là $T_n > 200$ (triệu đồng)

Ta có: $150(1 + 8,4\%)^n > 200 \Leftrightarrow (1 + 8,4\%)^n > \frac{4}{3} \Leftrightarrow n > \log_{1+8,4\%} \frac{4}{3} \approx 3,6$

Vậy thực tế thì sau ít nhất 4 năm người đó thu được cả vốn và tiền lãi hơn 200 triệu đồng.