ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC
KHOA HỌC TỰ NHIÊN
Đề chính thức

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2026
MÔN THI: TOÁN (VÒNG 1)
Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (3,5 điểm)

1) Giải phương trình

$$3x+\sqrt[3]{(2+3x)(2-x)}\left(\sqrt[3]{2+3x}-2\sqrt[3]{2-x}\right)=6.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}2x+3y+6xy=2,\\ 3\left(4x^2+9y^2\right)^2=6xy\left(4x^2+9y^2\right)+30xy+12.\end{cases}$$

Câu II. (2,5 điểm)

1) Tìm x,y nguyên thỏa mãn đẳng thức

$$8x^3+27y^3=18xy+4x+6y+4.$$

2) Kí hiệu $\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n$. Với $y_1,y_2,\ldots,y_6$ là các số thực bất kì, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{2y_i}{1+y_i^2}\right)^2\left(\frac{2y_{i+1}}{1+y_{i+1}^2}-\frac{2y_{i-1}}{1+y_{i-1}^2}\right),$$

trong đó $y_0=y_6, y_7=y_1$.

Câu III. (3,0 điểm)

Cho hình thoi $ABCD$ với $\widehat{BAD}<90^\circ$. Trên cạnh AD lấy điểm M $(M\neq A,D)$. Các đường thẳng CM và AB cắt nhau tại Q.

1) Chứng minh rằng hai tam giác BCQ và DMC đồng dạng.

2) Trên cạnh AB lấy điểm N $(N\neq A,B)$. Đường thẳng CN cắt đường thẳng AD tại R. Chứng minh rằng $\frac{BN}{BQ}=\frac{DM}{DR}$.

3) Gọi (O) là đường tròn tiếp xúc với AB,AD lần lượt tại B,D. Giả sử tiếp tuyến qua R (khác RD) và tiếp tuyến qua Q (khác QB) của (O) cắt nhau tại P. Gọi giao điểm của AP và QR là S. Chứng minh rằng đường thẳng CS đi qua trung điểm của MN.

Câu IV. (1,0 điểm)

Có 100 điểm phân biệt trong một ngũ giác lồi, các điểm này cùng 5 đỉnh của ngũ giác tạo thành 105 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Biết rằng ngũ giác được chia hoàn toàn thành những tam giác được tạo bởi các đoạn thẳng nối giữa 2 trong 105 điểm trên sao cho:

i) Không có 2 đoạn thẳng nào có điểm chung (ngoại trừ các đầu mút của chúng);

ii) Mỗi tam giác không chứa bất kì điểm nào ở bên trong nó.

Tính số tam giác thỏa mãn những yêu cầu trên.

---HẾT---

LỜI GIẢI THAM KHẢO

Câu I

1) Giải phương trình

Đặt $a=\sqrt[3]{2+3x},\quad b=\sqrt[3]{2-x}$.

Khi đó: $a^3=2+3x,\quad b^3=2-x$.

Suy ra:

$$a^3+3b^3=2+3x+3(2-x)=8.$$

Mặt khác $3x = a^3 - 2$. Phương trình đã cho trở thành:

$a^3 - 2 + ab(a - 2b) = 6$

$\Leftrightarrow a^3 + a^2b - 2ab^2 = 8.$

So sánh với $a^3 + 3b^3 = 8$, ta được:

$a^3 + a^2b - 2ab^2 = a^3 + 3b^3$

$\Leftrightarrow a^2b - 2ab^2 - 3b^3 = 0$

$\Leftrightarrow b(a^2 - 2ab - 3b^2) = 0$

$\Leftrightarrow b(a - 3b)(a + b) = 0.$

Xét từng trường hợp:

Trường hợp 1: $b = 0$.

$\sqrt[3]{2 - x} = 0 \Rightarrow x = 2$.

Trường hợp 2: $a = 3b$.

$a^3 = 27b^3$

$\Rightarrow 2 + 3x = 27(2 - x)$

$\Rightarrow 2 + 3x = 54 - 27x$

$\Rightarrow 30x = 52$

$\Rightarrow x = \dfrac{26}{15}$.

Trường hợp 3: $a = -b$.

$a^3 = -b^3$

$\Rightarrow 2 + 3x = -(2 - x)$

$\Rightarrow 2 + 3x = x - 2$

$\Rightarrow 2x = -4$

$\Rightarrow x = -2$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x \in \left\{-2; \dfrac{26}{15}; 2\right\}$.

2) Giải hệ phương trình

Đặt $a = 2x, b = 3y$. Khi đó $ab = 6xy$ và $a^2 + b^2 = 4x^2 + 9y^2$.

Hệ trở thành: $\begin{cases} a + b + ab = 2 \\ 3(a^2 + b^2) = ab(a^2 + b^2) + 5ab + 12 \end{cases}$

Đặt $t = ab$. Từ $a + b + ab = 2$ suy ra: $a + b = 2 - t$.

Do đó:

$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = (2 - t)^2 - 2t = t^2 - 6t + 4.$

Thay vào phương trình thứ hai:

$3(t^2 - 6t + 4) = t(t^2 - 6t + 4) + 5t + 12.$

Rút gọn: $3t^2 - 18t + 12 = t^3 - 6t^2 + 9t + 12$

$\Leftrightarrow t^3 - 9t^2 + 27t = 0$

$\Leftrightarrow t(t^2 - 9t + 27) = 0.$

Vì $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 27 = 81 - 108 = -27 < 0$ nên $t^2 - 9t + 27 > 0$ với mọi t.

Suy ra $t = 0$, tức là $ab = 0$.

Lại có $a + b = 2$, nên: $(a, b) = (2, 0)$ hoặc $(a, b) = (0, 2)$.

Suy ra:

- Nếu $(a, b) = (2, 0)$ thì $2x = 2, 3y = 0 \Rightarrow (x, y) = (1, 0)$.

- Nếu $(a,b)=(0,2)$ thì $2x=0, 3y=2 \Rightarrow (x,y)=\left(0,\frac{2}{3}\right)$.

Vậy hệ có nghiệm: $(x,y)=(1,0),\left(0,\frac{2}{3}\right)$.

Câu II

1) Tìm x,y nguyên thỏa mãn

$8x^3+27y^3=18xy+4x+6y+4.$

Đặt $a=2x, b=3y$. Vì x,y nguyên nên a,b nguyên, trong đó a chẵn và b chia hết cho 3.

Phương trình trở thành: $a^3+b^3=3ab+2a+2b+4.$

Đặt: $s=a+b, \quad p=ab.$

Ta có: $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=s^3-3ps.$

Do đó: $s^3-3ps=3p+2s+4$

$\Leftrightarrow s^3-2s-4=3p(s+1).$

Mà: $s^3-2s-4=(s+1)(s^2-s-1)-3.$

Suy ra: $(s+1)(s^2-s-1-3p)=3.$

Vì s,p là các số nguyên nên $s+1$ là ước của 3.

Do đó: $s+1\in -3,-1,1,3$.

Xét các trường hợp:

$s+1$	s	**Kết quả**
1	0	$p=-\frac{4}{3}$, loại
-1	-2	$p=\frac{8}{3}$, loại
3	2	$p=0$, nhận
-3	-4	$p=\frac{20}{3}$, loại

Vậy chỉ có $s=2, p=0$.

Suy ra a,b là hai nghiệm của phương trình:

$X^2-2X=0$

$\Rightarrow X(X-2)=0.$

Do đó:

$(a,b)=(0,2)$ hoặc $(a,b)=(2,0)$.

Vì $b=3y$ phải chia hết cho 3, nên $(a,b)=(0,2)$ bị loại.

Với $(a,b)=(2,0)$, ta có:

$2x=2, \quad 3y=0$

$\Rightarrow x=1, y=0$.

Vậy nghiệm nguyên là: $(x,y)=(1,0)$.

2) Tìm giá trị lớn nhất của M

Đặt: $t_i=\frac{2y_i}{1+y_i^2}$.

Với mọi $y_i\in$, ta có: $-1\le t_i\le 1.$

Khi đó: $M=\sum_{i=1}^{6} t_i^2(t_{i+1}-t_{i-1})$, với $t_0=t_6, t_7=t_1$.

Vì $0\le t_i^2\le 1$, nên: $t_i^2(t_{i+1}-t_{i-1})\le [t_{i+1}-t_{i-1}]_+$, trong đó $[u]_+=\max(u,0)$.

Do đó: $M\le \sum_{i=1}^{6}\max\left(t_{i+1}-t_{i-1},0\right).$.

Tách tổng thành hai nhóm:

$[t_2-t_6]_++[t_4-t_2]_++[t_6-t_4]_+\le 2,$

vì $t_2,t_4,t_6\in[-1,1]$.

Tương tự:

$[t_3-t_1]_++[t_5-t_3]_++[t_1-t_5]_+\le 2,$

vì $t_1,t_3,t_5\in[-1,1]$.

Suy ra: $M\le 2+2=4.$

Ta chứng minh được dấu bằng xảy ra. Chọn: $(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6)=(-1,1,0,-1,1,0).$

Khi đó: $(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)=(-1,1,0,-1,1,0).$

Thay vào biểu thức M: $M=1+1+0+1+1+0=4.$

Vậy giá trị lớn nhất của M là: 4.

Câu III

Cho hình thoi $ABCD$, $\widehat{BAD}<90^\circ$.

1) Chứng minh $\triangle BCQ\sim\triangle DMC$

Ta có:

$BC\parallel AD,\quad BQ\parallel AB,\quad DC\parallel AB.$

Lại có Q,C,M thẳng hàng.

Suy ra: $\widehat{BCQ}=\widehat{DMC}$,

vì $BC\parallel DM$ và CQ trùng đường thẳng CM.

Đồng thời: $\widehat{BQC}=\widehat{DCM}$,

vì $BQ\parallel DC$ và QC trùng đường thẳng CM.

Vậy: $\triangle BCQ\sim\triangle DMC.$

2)

Cách 1. Chứng minh $\frac{BN}{BQ}=\frac{DM}{DR}$

Ta có hình thoi $ABCD$ nên: $AB=BC=CD=DA$ và $AB\parallel CD, AD\parallel BC$.

Gọi cạnh hình thoi bằng a.

$\triangle BCQ\sim\triangle DMC$

Từ ý 1, ta đã có: .

$\frac{BQ}{DC}=\frac{BC}{DM}$

Suy ra: .

$BC = DC = a$ $\dfrac{BQ}{a} = \dfrac{a}{DM}$

Vì , nên:

$\Rightarrow BQ \cdot DM = a^2.$ (1)

$\triangle CBN$ $\triangle CRD$

Bây giờ xét hai tam giác và .

$CB \parallel RD$ $CB \subset AD$ R, D, A

Ta có: vì và thẳng hàng.

$BN \parallel CD$ $BN \subset AB$ $AB \parallel CD$

vì và .

C, N, R

Lại có thẳng hàng.

$\widehat{CBN} = \widehat{CDR}$ $\widehat{CNB} = \widehat{CRD}$

Do đó: , .

$\triangle CBN \sim \triangle CRD$

Suy ra: .

$\dfrac{BN}{CD} = \dfrac{CB}{DR}$

Vì thế: .

$CB = CD = a$ $\dfrac{BN}{a} = \dfrac{a}{DR}$

Mà , nên:

$\Rightarrow BN \cdot DR = a^2.$ (2)

(1) (2) $BQ \cdot DM = BN \cdot DR$

Từ và , ta có: .

$\dfrac{BN}{BQ} = \dfrac{DM}{DR}$

Suy ra: .

$\dfrac{BN}{BQ} = \dfrac{DM}{DR}$

Vậy: .

Cách 2. Chứng minh $\frac{BN}{BQ}=\frac{DM}{DR}$

Dùng hệ tọa độ affine theo hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$.

Chọn: $A(0,0),\quad B(1,0),\quad D(0,1),\quad C(1,1).$

Gọi: $M(0,m),\quad N(n,0),\quad 0<m,n<1.$

Đường thẳng CM cắt AB tại Q, tính được: $Q\left(-\frac{m}{1-m},0\right).$

Đường thẳng CN cắt AD tại R, tính được: $R\left(0,-\frac{n}{1-n}\right).$

Suy ra: $BN=1-n,\quad BQ=1+\frac{m}{1-m}=\frac{1}{1-m}.$

Do đó: $\frac{BN}{BQ}=(1-n)(1-m).$

Tương tự: $DM=1-m,\quad DR=1+\frac{n}{1-n}=\frac{1}{1-n}.$

Suy ra: $\frac{DM}{DR}=(1-m)(1-n).$

Vậy: $\frac{BN}{BQ}=\frac{DM}{DR}.$

3) Chứng minh CS đi qua trung điểm của MN

Cách 1.

Gọi I là trung điểm của MN. Ta cần chứng minh C,S,I thẳng hàng.

Bổ đề 1

Trong cấu hình tiếp tuyến của câu này, với (O) tiếp xúc AB,AD lần lượt tại B,D, các tiếp tuyến qua Q và R cắt nhau tại P, gọi $S=AP\cap QR$, ta có: $\frac{QS}{SR}=\frac{BQ}{DR}.\quad(3)$

Đây là bổ đề quen thuộc về tứ giác ngoại tiếp: nếu bốn đường thẳng AB,AD,QP,RP cùng tiếp xúc một đường tròn, thì giao điểm hai đường chéo AP và QR chia QR theo tỉ số hai đoạn tiếp tuyến kẻ từ Q và R đến đường tròn.

Ở đây:

QB là đoạn tiếp tuyến từ Q đến (O),

RD R (O) là đoạn tiếp tuyến từ đến .

$$\frac{QS}{SR}=\frac{BQ}{DR}$$

Do đó áp dụng bổ đề được ngay: .

Bổ đề 2

CQR $M\in CQ$ $N\in CR$ I MN CI QR S'

Trong tam giác , lấy , . Nếu là trung điểm của và đường thẳng cắt tại , thì:

$$\frac{QS'}{S'R}=\frac{CN\cdot CQ}{CR\cdot CM}. \quad (4)$$

Chứng minh nhanh bổ đề này như sau.

I MN C,I,S' M,N

Vì là trung điểm của và thẳng hàng nên hai điểm có khoảng cách đến đường thẳng CS' bằng nhau. Do đó: .

$$\frac{S_{\triangle CS'M}}{S_{\triangle CS'Q}}=\frac{CM}{CQ} \qquad \frac{S_{\triangle CS'N}}{S_{\triangle CS'R}}=\frac{CN}{CR}$$

Mặt khác: , và .

$$\frac{QS'}{S'R}=\frac{S_{\triangle CS'Q}}{S_{\triangle CS'R}}=\frac{CN\cdot CQ}{CR\cdot CM}$$

Suy ra: .

Bổ đề được chứng minh.

Áp dụng bổ đề 2

$S'=CI\cap QR$

Ta có .

$$\frac{QS'}{S'R}=\frac{CN\cdot CQ}{CR\cdot CM}=\frac{CN}{CR}\cdot\frac{CQ}{CM}. \quad (5)$$

Theo bổ đề 2:

$\triangle CBN\sim\triangle CRD$ $$\frac{CN}{CR}=\frac{BN}{CD}. \quad (6)$$

Từ , ta có:

$\triangle BCQ \sim \triangle DMC$ $\frac{CQ}{CM} = \frac{BQ}{CD}.$ (7)

Từ , ta có:

(6) (7) (5)

Thay và vào :

$$\frac{QS'}{S'R} = \frac{BN}{CD} \cdot \frac{BQ}{CD} = \frac{BN \cdot BQ}{CD^2}. \quad (8)$$

$CD = a$ $CD^2 = a^2$

Vì , nên .

$$BN \cdot DR = a^2$$

Từ ý 2 ta có: .

$$\frac{QS'}{S'R} = \frac{BN \cdot BQ}{a^2} = \frac{BN \cdot BQ}{BN \cdot DR} = \frac{BQ}{DR}. \quad (9)$$

Do đó:

$$\frac{QS}{SR} = \frac{BQ}{DR}. \quad (10)$$

Từ bổ đề 1:

(9) (10) $\frac{QS'}{S'R} = \frac{QS}{SR}$

So sánh và , ta được: .

S S' QR $S \equiv S'$

Mà và cùng nằm trên đường thẳng , nên .

$S' = CI \cap QR$ C, S, I

Vì , suy ra thẳng hàng.

CS I MN

Vậy đường thẳng đi qua trung điểm của .

Do đó: đường thẳng CS đi qua trung điểm I của MN.

Cách 2.

Tiếp tục dùng hệ tọa độ trên.

Đặt: $q = -\frac{m}{1-m}, \quad r = -\frac{n}{1-n}.$

Khi đó: $Q(q, 0), \quad R(0, r).$

Gọi $c = \cos \widehat{BAD}$. Vì $AB = AD$, đường tròn tiếp xúc với AB, AD lần lượt tại B, D có phương trình trong hệ tọa độ xiên là:

$x^2+y^2+2cxy-2x-2y+1=0.$

Tiếp tuyến qua Q khác QB có dạng:

$y=\lambda(x-q).$

Thay vào phương trình đường tròn và xét điều kiện tiếp xúc, ta được:

$$\lambda=\frac{2(1-q)}{q((1+c)q-2)}.$$

Tương tự, tiếp tuyến qua R khác RD có dạng: $x=\mu(y-r)$,

với: $\mu=\dfrac{2(1-r)}{r((1+c)r-2)}.$

Hai tiếp tuyến này cắt nhau tại P. Giải hệ hai đường thẳng trên, ta được:

$$P\left(\frac{2q(r-1)}{(1+c)qr-2},\frac{2r(q-1)}{(1+c)qr-2}\right).$$

Do $A(0,0)$, hệ số góc của đường thẳng AP là: $\dfrac{P_y}{P_x}=\dfrac{r(q-1)}{q(r-1)}.$

Vì QR có phương trình: $\dfrac{x}{q}+\dfrac{y}{r}=1,$

nên giao điểm $S=AP\cap QR$ có tọa độ: $S\left(\dfrac{q(r-1)}{q+r-2},\dfrac{r(q-1)}{q+r-2}\right).$

Gọi I là trung điểm của MN.

Ta có: $m=\dfrac{q}{q-1},\quad n=\dfrac{r}{r-1}.$

Do đó: $I\left(\dfrac{n}{2},\dfrac{m}{2}\right)I\left(\dfrac{r}{2(r-1)},\dfrac{q}{2(q-1)}\right).$

Mặt khác $C(1,1)$. Ta kiểm tra:

$$\frac{S_x-1}{I_x-1}=\frac{S_y-1}{I_y-1}=-\frac{2(q-1)(r-1)}{q+r-2}.$$

Suy ra ba điểm C,S,I thẳng hàng.

Vậy đường thẳng CS đi qua trung điểm I của MN.

Câu IV

Có 100 điểm nằm trong ngũ giác lồi và 5 đỉnh của ngũ giác, tổng cộng có:

$V=100+5=105$

điểm.

Gọi T là số tam giác cần tìm, E là số đoạn thẳng trong phép chia.

Vì toàn bộ ngũ giác được chia thành các tam giác nên số mặt trong là T, thêm mặt ngoài nữa nên tổng số mặt là: $F=T+1.$

Theo công thức Euler cho đồ thị phẳng: $V-E+F=2.$

Thay $V=105, F=T+1$:

$105-E+T+1=2$

$\Rightarrow E=T+104.$

Mặt khác, mỗi tam giác có 3 cạnh. Khi đếm tổng số cạnh của các tam giác:

- Mỗi cạnh bên trong được tính 2 lần;
- Mỗi cạnh biên của ngũ giác được tính 1 lần.

Ngũ giác có 5 cạnh biên, nên:

$3T = 2E - 5.$

Thay $E = T + 104$ vào:

$3T = 2(T + 104) - 5$

$\Rightarrow 3T = 2T + 208 - 5$

$\Rightarrow T = 203.$

Vậy số tam giác thỏa mãn yêu cầu là: 203.