

PHẦN I. Trắc nghiệm (thí sinh làm từ câu 1 đến câu 12)

Câu 1: Nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ là

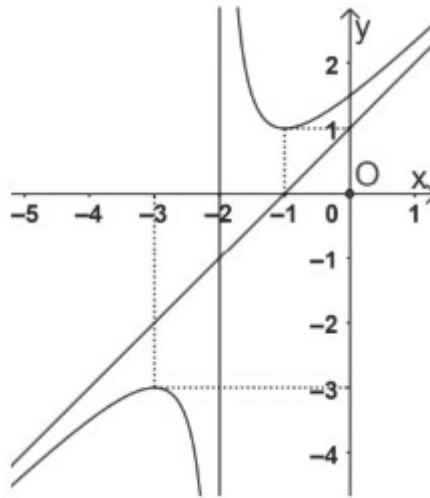
A. $x = \frac{-2\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

B. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{-\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là

A. $M(-3; -3)$

B. $x = -1$

C. $x = -3$

D. $N(-1; 1)$

Câu 3: Kết quả điều tra tổng thu nhập trong năm 2024 của một số hộ gia đình ở thành phố Vinh được ghi lại ở bảng sau:

Tổng thu nhập (triệu đồng)	[200; 250)	[250; 300)	[300; 350)	[350; 400)	[400; 450)
Số hộ gia đình	24	62	34	21	9

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là

A. 260

B. 200

C. 250

D. 150

Câu 4: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\cos x}$, hai đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.

A. 2π

B. 1

C. 2

D. π

Câu 5: Cho Một nhóm có 5 học sinh, trong đó có 3 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh để tham gia 1 cuộc khảo sát. Tính xác suất để 2 học sinh được chọn đều là học sinh nữ

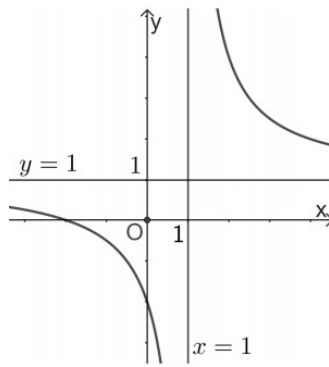
A. $\frac{3}{11}$

B. $\frac{3}{10}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{3}{20}$

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0, ad-bc \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ:



Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

- A. $y = 1$ B. $y = -1$ C. $x = 1$ D. $x = -1$

Câu 7: Cho Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$.

- A. $\int f(x)dx = 2^x + C$ B. $\int f(x)dx = \frac{2^x}{x+1} + C$
 C. $\int f(x)dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ D. $\int f(x)dx = 2^x \cdot \ln 2 + C$

Câu 8: Cho Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; -4; 0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là

- A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 9$ B. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 3$
 C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 9$ D. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 3$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{3}$ đi qua điểm nào trong các điểm sau đây?

- A. $B(0; -6; -6)$ B. $C(4; 0; 3)$ C. $A(-2; -2; 0)$ D. $D(3; 0; 3)$

Câu 10: Tập nghiệm của bất phương trình $4^x < 1$ là

- A. $(0; +\infty)$ B. $(0; 1)$ C. $(-\infty; 1)$ D. $(-\infty; 0)$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Tính số đo góc nhị diện $[B, SA, D]$

- A. 60° B. 90° C. 30° D. 45°

Câu 12: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 2$ và công sai $d = 3$. Số hạng u_6 của cấp số cộng là

- A. 18 B. 14 C. 17 D. 13

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong dây chuyền sản xuất sữa chua hiện đại của một nhà máy thực phẩm, từng giọt sữa đang âm thầm chuyển mình dưới tác động của hàng triệu vi khuẩn Lactic, những "nghệ nhân tí hon" kiến tạo vị chua thanh đặc trưng. Mật độ vi khuẩn (số triệu tế bào trên mỗi ml sữa chua) tại

thời điểm t (giờ) được ký hiệu là $N(t)$. Ban đầu ($t=0$ giờ), mật độ vi khuẩn đo được là $N(0)=10$ triệu tế bào/ml. Do sự thay đổi về nguồn dinh dưỡng (đường lactose giảm) và độ pH (axit lactic tăng) nên tốc độ thay đổi mật độ vi khuẩn $N'(t)$ (đơn vị: triệu tế bào/ml mỗi giờ) được mô hình hóa bởi công thức:

$$N'(t) = 22t - 3t^2 \quad (\text{triệu tế bào/ml/giờ}) \quad \text{với } t \text{ là thời gian tính bằng giờ } (0 \leq t \leq 10).$$

- a) $N'(1) = 19$ triệu tế bào/ml/giờ.
- b) $\int N'(t) dt = 11t - t^3$.
- c) So với lúc ban đầu ($t=0$), mật độ vi khuẩn đã tăng thêm 35 triệu tế bào/ml khi đến thời điểm $t=5$ giờ.
- d) Tại thời điểm $t=10$ giờ, mật độ vi khuẩn trong 1 ml sữa chua là 100 triệu tế bào/ml.

Câu 2: Trong một phòng thí nghiệm có máy đo nồng độ khí CO_2 cho thấy: nồng độ khí CO_2 trong phòng thay đổi theo thời gian t (tính bằng giờ) và được thể hiện qua hàm số:

$$f(t) = 400 + \frac{2000t}{t^2 + 5} \quad (\text{ppm}), \quad \text{với } t \geq 0. \quad (\text{Khi nói nồng độ khí } CO_2 \text{ trong không khí là } 400 \text{ ppm, điều đó có nghĩa là: Trong một triệu phần thể tích của không khí, có } 400 \text{ phần thể tích là khí } CO_2).$$

- a) Nồng độ khí CO_2 trong phòng tại thời điểm $t=0$ là 400 (ppm).

b)
$$f'(t) = \frac{-2000t^2 - 10000}{(t^2 + 5)^2} \quad \text{với } t \geq 0.$$

- c) Nghiệm của phương trình $f'(t) = 0$ là $t = 2$.

- d) Nồng độ khí CO_2 cao nhất đo được trong phòng thí nghiệm (làm tròn đến hàng đơn vị) là 947 (ppm).

Câu 3: Một công ty tổ chức chương trình bốc thăm trúng thưởng nhân dịp nghỉ lễ 30/4 và 1/5 cho 100 nhân viên. Trong hộp có 100 vé, trong đó có 4 vé trúng thưởng tour du lịch miễn phí ở Thái Lan, 10 vé trúng thưởng tour du lịch miễn phí ở Đà Nẵng và 20 vé trúng thưởng tour du lịch miễn phí tại Cửa Lò (Nghệ An), các vé còn lại trúng thưởng năm triệu đồng. Lần lượt từng nhân viên lên bốc ngẫu nhiên một vé (không hoàn lại).

- a) Xác suất để người bốc thăm thứ nhất bốc được vé trúng thưởng năm triệu đồng là $\frac{33}{50}$.

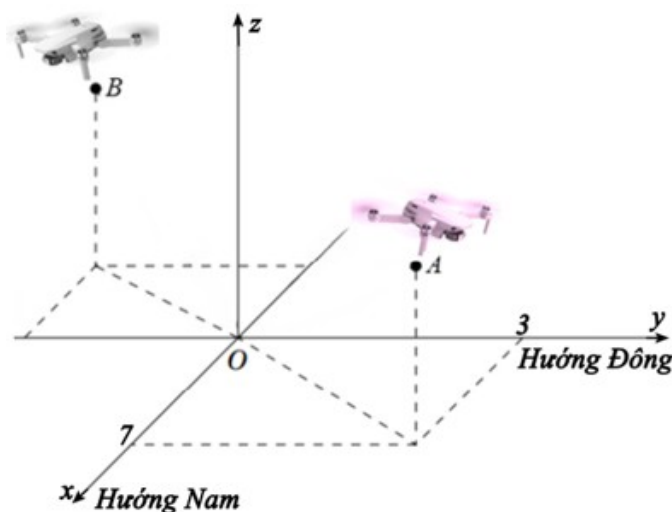
- b) Xác suất để người bốc thăm thứ hai bốc được vé trúng thưởng năm triệu đồng là $\frac{13}{20}$, biết rằng người bốc thăm thứ nhất bốc được vé trúng năm triệu đồng.

- c) Xác suất để người bốc thăm thứ hai bốc được vé trúng thưởng năm triệu đồng là $\frac{33}{50}$.

- d) Để tạo bất ngờ cho người bốc thăm tiếp theo, sau khi người thứ nhất bốc thăm, người dẫn chương trình giữ lại vé và không công bố kết quả. Người bốc thăm thứ hai bốc được vé trúng

năm triệu đồng. Xác suất để người bốc thăm thứ nhất bốc được vé trúng thưởng trúng năm triệu đồng là $\frac{65}{99}$.

Câu 4: Hai chiếc flycam được điều khiển cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất bay đến vị trí điểm A cách mặt đất $12m$, cách điểm xuất phát $7m$ về phía nam và $3m$ về phía đông. Chiếc flycam thứ hai bay đến điểm B cách mặt đất $10m$, cách điểm xuất phát $5m$ về phía bắc và $2m$ về phía tây. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là mét). Khi đó:



a) Tọa độ của điểm $A(7;3;12)$.

b) Phương trình đường thẳng đi qua vị trí của hai chiếc flycam tại A và B là:

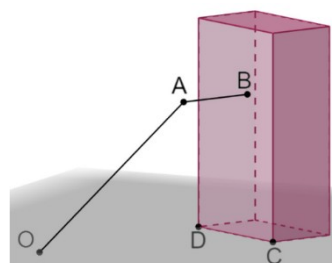
$$\begin{cases} x = 7 + 12t \\ y = 3 + 5t \\ z = 12 + 2t \end{cases}$$

c) Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua $M(2;3;1)$.

d) Trên mặt đất người ta đặt một thiết bị phá sóng flycam sao cho nó có thể phá sóng hai chiếc flycam tại hai vị trí A, B cùng một lúc. Tổng khoảng cách ngắn nhất từ thiết bị đó đến hai chiếc flycam tại hai vị trí A và B (làm tròn đến hàng phần trăm) bằng 25,55 (m).

PHẦN III. Trả lời ngắn.

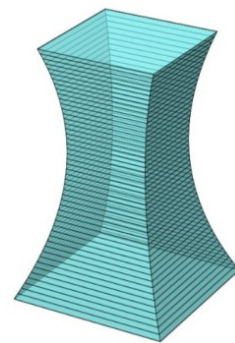
Câu 1: Một công ty logistics đang thử nghiệm hệ thống giao hàng tự động bằng máy bay không người lái (drone). Trong không gian $Oxyz$, mỗi đơn vị trên các trục tương ứng với 1 mét trên thực tế. Mặt ngoài của một tòa nhà cao tầng được xem là một phần của mặt phẳng (P) thẳng đứng, đi qua hai điểm $C(-50;-45;0)$ và $D(-20;-60;0)$. Vị trí giao hàng là điểm B nằm trên mặt phẳng



(P) . Drone bắt đầu bay từ kho hàng tại gốc tọa độ $O(0;0;0)$. Ban đầu, nó bay theo một đường thẳng đến vị trí $A(-30;-30;40)$. Từ vị trí A , drone thay đổi đường bay, di chuyển theo

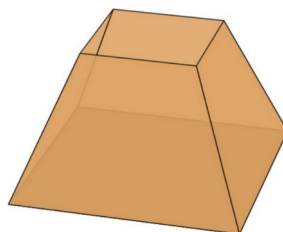
phương vuông góc với mặt phẳng (P) đến vị trí giao hàng B . Tính khoảng cách từ O đến B (làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 2: Một kiến trúc sư chịu trách nhiệm thiết kế một tòa nhà cao 40 m. Mặt cắt ngang tại mọi độ cao, vuông góc với trục thẳng đứng, luôn là một hình vuông. Mặt đáy tòa nhà là hình vuông có cạnh $L_0 = 18$ m, mặt đỉnh là hình vuông có cạnh $L_{40} = 18$ m. Mặt cắt ngang tại vị trí hẹp nhất của tòa nhà: Hình vuông có cạnh $L_{\min} = 13$ m. Mặt cắt của tòa nhà theo mặt phẳng đứng chứa đường chéo đáy có dạng là hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong parabol đối xứng nhau qua trục thẳng đứng đi qua tâm đáy của tòa nhà. Tính thể tích của tòa nhà đó (làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị tính: mét khối).



Câu 3: Một nhà đầu tư có số vốn là 3 tỷ đồng (3000 triệu đồng) và dự định phân bổ vào quỹ cổ phiếu A và quỹ trái phiếu B . Các thông tin và điều kiện đầu tư như sau: Quỹ cổ phiếu A có tỷ suất sinh lời là 15%/năm. Quỹ trái phiếu B có tỷ suất sinh lời là 7%/năm. Tổng số tiền đầu tư không vượt quá 3000 triệu đồng. Phải đầu tư ít nhất 400 triệu đồng vào quỹ trái phiếu B . Không đầu tư quá 2200 triệu đồng vào quỹ cổ phiếu A . Với các điều kiện trên thì nhà đầu tư có thể đạt được tổng lợi nhuận hàng năm lớn nhất là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Câu 4: Một xưởng thủ công mỹ nghệ sản xuất loại chụp đèn trang trí dạng hình chóp cụt tứ giác đều. Gọi x là độ dài cạnh đáy lớn (đơn vị: dm). Tính toán cho thấy tổng chi phí vật liệu (tính bằng nghìn đồng) cho một chụp đèn là: $C(x) = x^2 + 27$ (nghìn đồng). Thời gian sản xuất cho một chụp đèn được xác định là: $T(x) = x + 3$ (giờ).



Xưởng muốn xác định kích thước x để chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là thấp nhất, nhằm tối ưu hóa hiệu quả sử dụng thời gian và vật liệu. Hãy tìm giá trị của x .

Câu 5: Một nhà máy sản xuất sản phẩm A có tỷ lệ sản phẩm bị lỗi là 1,5%. Nhà máy sử dụng hai hệ thống kiểm tra chất lượng độc lập để phát hiện lỗi:

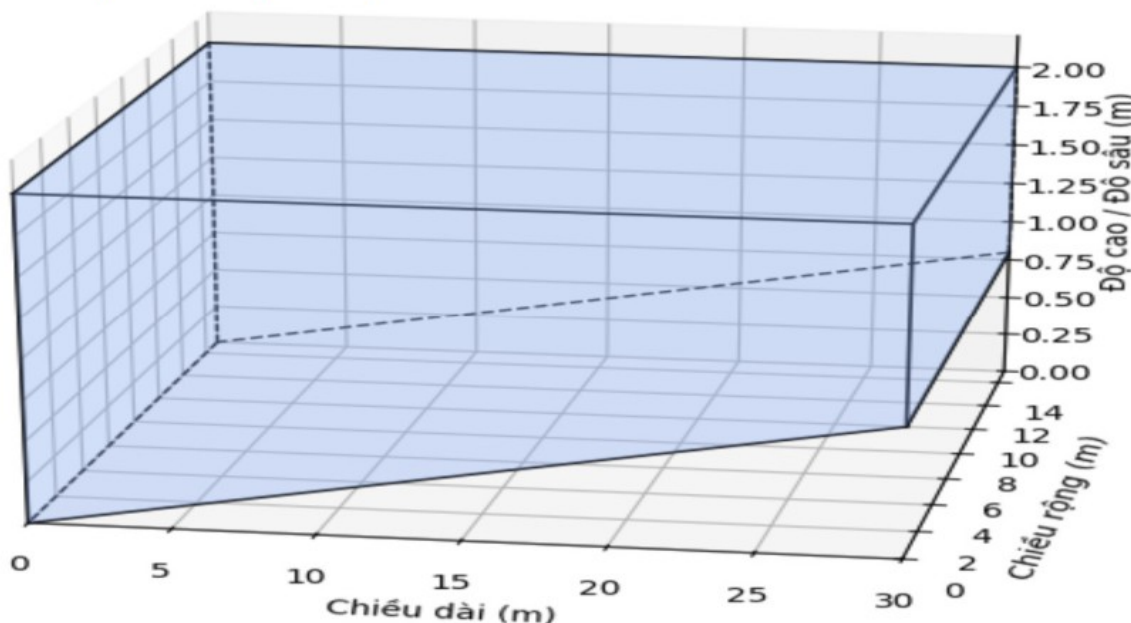
Hệ thống 1: Xác suất phát hiện chính xác sản phẩm lỗi là 95%. Xác suất báo lỗi nhầm trên một sản phẩm không lỗi là 1%.

Hệ thống 2: Xác suất phát hiện chính xác sản phẩm lỗi là 90%. Xác suất báo lỗi nhầm trên một sản phẩm không lỗi là 5%.

Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm. Biết rằng sản phẩm này bị cả hai hệ thống kiểm tra đều báo lỗi. Tính xác suất để sản phẩm này thực tế không bị lỗi. Kết quả xác suất này sau khi đã làm tròn đến hàng phần nghìn là số có dạng $0,0ab$

(ví dụ nếu kết quả là 0,024 thì $a = 2, b = 4$). Tính giá trị của $10a + b$.

Câu 6: Một bể bơi với mặt nước khi đầy có dạng hình chữ nhật với chiều rộng 15 m và chiều dài 30 m. Các thành bể xung quanh thẳng đứng và đáy là một mặt phẳng nghiêng. Chiều sâu tại một đầu bể là $1,2\text{ m}$ và tăng dần đều đến $2,0\text{ m}$ ở đầu kia của bể (xem hình vẽ). Ban đầu bể không chứa nước. Người ta sử dụng một máy bơm công suất lớn để bơm nước vào bể với tốc độ không đổi là $60\text{ m}^3 / \text{giờ}$. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì máy bơm bơm đầy bể nước?



----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. trắc nghiệm (thí sinh làm từ câu 1 đến câu 12)

Câu 1: Nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ là

A. $x = \frac{-2\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

B. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

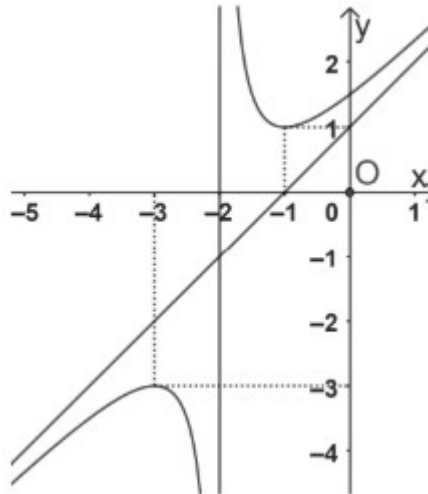
D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{-\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

Chọn B

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là

- A.** $M(-3; -3)$ **B.** $x = -1$ **C.** $x = -3$ **D.** $N(-1; 1)$

Lời giải

Chọn A

Câu 3: Kết quả điều tra tổng thu nhập trong năm 2024 của một số hộ gia đình ở thành phố Vinh được ghi lại ở bảng sau:

Tổng thu nhập (triệu đồng)	[200; 250)	[250; 300)	[300; 350)	[350; 400)	[400; 450)
Số hộ gia đình	24	62	34	21	9

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là

- A.** 260 **B.** 200 **C.** 250 **D.** 150

Lời giải

Chọn C

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $450 - 200 = 250$

Câu 4: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\cos x}$, hai đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.

- A.** 2π **B.** 1 **C.** 2 **D.** π

Lời giải

Chọn D

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\cos x} \right)^2 dx = \pi$$

Thể tích khối tròn xoay là:

Câu 5: Cho Một nhóm có 5 học sinh, trong đó có 3 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh để tham gia 1 cuộc khảo sát. Tính xác suất để 2 học sinh được chọn đều là học sinh nữ

- A.** $\frac{3}{11}$ **B.** $\frac{3}{10}$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $\frac{3}{20}$

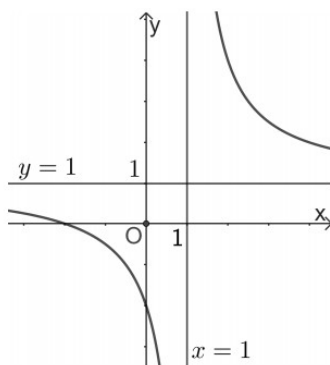
Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu Ω : “Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh” $\Rightarrow n(\Omega) = C_5^2$.

Biến cố A : “Hai học sinh được chọn đều là nữ” $\Rightarrow n(A) = C_3^2 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{10}$

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0, ad-bc \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ:



Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

A. $y = 1$

B. $y = -1$

C. $x = 1$

D. $x = -1$

Lời giải

Chọn A

Câu 7: Cho Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$.

A. $\int f(x)dx = 2^x + C$

B. $\int f(x)dx = \frac{2^x}{x+1} + C$

C. $\int f(x)dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

D. $\int f(x)dx = 2^x \cdot \ln 2 + C$

Lời giải

Chọn C

Câu 8: Cho Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; -4; 0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là

A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 9$

B. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 3$

C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 9$

D. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 3$

Lời giải

Chọn C

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{3}$ đi qua điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $B(0; -6; -6)$

B. $C(4; 0; 3)$

C. $A(-2; -2; 0)$

D. $D(3; 0; 3)$

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d đi qua điểm $A(-2; -2; 0)$

Câu 10: Tập nghiệm của bất phương trình $4^x < 1$ là

A. $(0; +\infty)$

B. $(0; 1)$

C. $(-\infty; 1)$

D. $(-\infty; 0)$

Lời giải

Chọn D

$$4^x < 1 \Leftrightarrow 4^x < 4^0 \Leftrightarrow x < 0$$

Tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-\infty; 0)$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Tính số đo góc nhị diện $[B, SA, D]$

A. 60°

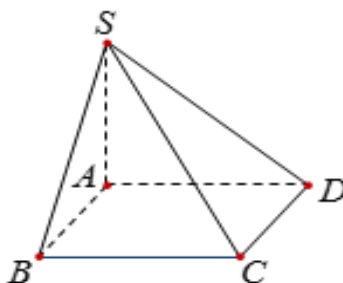
B. 90°

C. 30°

D. 45°

Lời giải

Chọn B



$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB, SA \perp AD, AB \cap AD = A \in SA$$

Do đó góc nhị diện $[B, SA, D]$ là góc $\widehat{BAD}$ bằng 90° .

Câu 12: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 2$ và công sai $d = 3$. Số hạng u_6 của cấp số cộng là

A. 18

B. 14

C. 17

D. 13

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } u_6 = u_1 + 5d = (u_2 - d) + 5d = 2 - 3 + 5 \cdot 3 = 14$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong dây chuyền sản xuất sữa chua hiện đại của một nhà máy thực phẩm, từng giọt sữa đang âm thầm chuyển mình dưới tác động của hàng triệu vi khuẩn Lactic, những "nghệ nhân tí hon" kiến tạo vị chua thanh đặc trưng. Mật độ vi khuẩn (số triệu tế bào trên mỗi ml sữa chua) tại thời điểm t (giờ) được ký hiệu là $N(t)$. Ban đầu ($t = 0$ giờ), mật độ vi khuẩn đo được là $N(0) = 10$ triệu tế bào/ml. Do sự thay đổi về nguồn dinh dưỡng (đường lactose giảm) và độ pH (axit lactic tăng) nên tốc độ thay đổi mật độ vi khuẩn $N'(t)$ (đơn vị: triệu tế bào/ml mỗi giờ) được mô hình hóa bởi công thức:

$$N'(t) = 22t - 3t^2 \quad (\text{triệu tế bào/ml/giờ}) \quad \text{với } t \text{ là thời gian tính bằng giờ } (0 \leq t \leq 10).$$

- a) $N'(1) = 19$ triệu tế bào/ml/giờ.
- b) $\int N'(t) dt = 11t - t^3$.
- c) So với lúc ban đầu ($t = 0$), mật độ vi khuẩn đã tăng thêm 35 triệu tế bào/ml khi đến thời điểm $t = 5$ giờ.
- d) Tại thời điểm $t = 10$ giờ, mật độ vi khuẩn trong 1 ml sữa chua là 100 triệu tế bào/ml.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

(a) Đúng.

Ta có công thức tốc độ thay đổi mật độ vi khuẩn:

$$N'(t) = 22t - 3t^2$$

Thay $t = 1$ vào công thức trên:

$$N'(1) = 22 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2 = 19 \text{ (triệu tế bào/ml/giờ)}.$$

(b) Sai.

$$\int N'(t) dt = \int (22t - 3t^2) dt = 11t^2 - t^3 + C$$

(c) Sai.

Tính sự thay đổi mật độ vi khuẩn từ $t = 0$ đến $t = 5$:

$$\int_0^5 N'(t) dt = \int_0^5 (22t - 3t^2) dt = \left(11t^2 - t^3 \right) \Big|_0^5 = 150$$

(d) Sai.

Tính mật độ vi khuẩn tại $t = 10$:

$$N(t) = \int N'(t) dt = \int (22t - 3t^2) dt = 11t^2 - t^3 + C$$

Theo đề ta có $N(0) = 10 \Rightarrow N(t) = 11t^2 - t^3 + 10$

Khi đó $N(10) = 11 \cdot 10^2 - 10^3 + 10 = 110$

Câu 2: Trong một phòng thí nghiệm có máy đo nồng độ khí CO_2 cho thấy: nồng độ khí CO_2 trong phòng thay đổi theo thời gian t (tính bằng giờ) và được thể hiện qua hàm số:

$f(t) = 400 + \frac{2000t}{t^2 + 5}$ (ppm), với $t \geq 0$. (Khi nói nồng độ khí CO_2 trong không khí là 400 ppm, điều đó có nghĩa là: Trong một triệu phần thể tích của không khí, có 400 phần thể tích là khí CO_2).

a) Nồng độ khí CO_2 trong phòng tại thời điểm $t = 0$ là 400 (ppm).

b) $f'(t) = \frac{-2000t^2 - 10000}{(t^2 + 5)^2}$ với $t \geq 0$.

c) Nghiệm của phương trình $f'(t) = 0$ là $t = 2$.

d) Nồng độ khí CO_2 cao nhất đo được trong phòng thí nghiệm (làm tròn đến hàng đơn vị) là 947 (ppm).

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) Đúng.

$$f(0) = 400 + \frac{2000 \cdot 0}{0^2 + 5} = 400 \text{ (ppm)}$$

b) Sai

Tính đạo hàm $f'(t)$:

$$f'(t) = 0 + \frac{2000 \cdot (t^2 + 5) - 2000t \cdot 2t}{(t^2 + 5)^2} = \frac{-2000t^2 + 10000}{(t^2 + 5)^2}$$

c) Sai

Giải phương trình $f'(t) = 0$:

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2000t^2 + 10000}{(t^2 + 5)^2} = 0 \Leftrightarrow -2000t^2 + 10000 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{5}$$

d) Sai.

Xét hàm số $y = f(t)$ với $t \in (0; +\infty)$

$$f'(t) = \frac{-2000t^2 + 10000}{(t^2 + 5)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2000t^2 + 10000}{(t^2 + 5)^2} = 0 \Leftrightarrow -2000t^2 + 10000 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{5}$$

Bảng biến thiên

t	0	$\sqrt{5}$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	400	847,2	400

Suy ra nồng độ khí CO_2 cao nhất đo được trong phòng thí nghiệm (làm tròn đến hàng đơn vị) là 847 (ppm).

Câu 3: Một công ty tổ chức chương trình bốc thăm trúng thưởng nhân dịp nghỉ lễ 30/4 và 1/5 cho 100 nhân viên. Trong hộp có 100 vé, trong đó có 4 vé trúng thưởng tour du lịch miễn phí ở Thái Lan, 10 vé trúng thưởng tour du lịch miễn phí ở Đà Nẵng và 20 vé trúng thưởng tour du lịch miễn phí tại Cửa Lò (Nghệ An), các vé còn lại trúng thưởng năm triệu đồng. Lần lượt từng nhân viên lên bốc ngẫu nhiên một vé (không hoàn lại).

a) Xác suất để người bốc thăm thứ nhất bốc được vé trúng thưởng năm triệu đồng là $\frac{33}{50}$.

b) Xác suất để người bốc thăm thứ hai bốc được vé trúng thưởng năm triệu đồng là $\frac{13}{20}$, biết rằng người bốc thăm thứ nhất bốc được vé trúng năm triệu đồng.

c) Xác suất để người bốc thăm thứ hai bốc được vé trúng thưởng năm triệu đồng là $\frac{33}{50}$.

d) Để tạo bất ngờ cho người bốc thăm tiếp theo, sau khi người thứ nhất bốc thăm, người dẫn chương trình giữ lại vé và không công bố kết quả. Người bốc thăm thứ hai bốc được vé trúng năm triệu đồng. Xác suất để người bốc thăm thứ nhất bốc được vé trúng thưởng trúng năm triệu đồng là $\frac{65}{99}$.

Lời giải

Trong 100 vé, có 4 vé trúng thưởng tour du lịch miễn phí ở Thái Lan, 10 vé trúng thưởng tour du lịch miễn phí ở Đà Nẵng và 20 vé trúng thưởng tour du lịch miễn phí tại Cửa Lò (Nghệ An), các vé còn lại trúng thưởng năm triệu đồng. Lần lượt từng nhân viên lên bốc ngẫu nhiên một vé (không hoàn lại).

Gọi A : "Người đầu tiên bốc được vé đi Thái Lan",

B : "Người đầu tiên bốc được vé đi Đà Nẵng",

C : "Người đầu tiên bốc được vé đi Cửa Lò",

D : "Người đầu tiên bốc được vé năm triệu",

$$P(A) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}; \quad P(B) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}; \quad P(C) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}; \quad P(D) = \frac{100-4-10-20}{100} = \frac{66}{100} = \frac{33}{50}.$$

a) Xác suất để người bốc thăm thứ nhất bốc được vé trúng thưởng năm triệu đồng là $\frac{33}{50}$.

Đúng

D : "Người đầu tiên bốc được vé năm triệu".

$$P(D) = \frac{100-4-10-20}{100} = \frac{66}{100} = \frac{33}{50}.$$

b) Xác suất để người bốc thăm thứ hai bốc được vé trúng thưởng năm triệu đồng là $\frac{13}{20}$, biết rằng người bốc thăm thứ nhất bốc được vé trúng năm triệu đồng.

Sai

E : "Người thứ hai bốc được vé năm triệu".

$$P(E|D) = \frac{66 \cdot 65}{100 \cdot 99} = \frac{13}{30}.$$

c) Xác suất để người bốc thăm thứ hai bốc được vé trúng thưởng năm triệu đồng là $\frac{33}{50}$.

Đúng

$$P(E) = P(A) \cdot P(E|A) + P(B) \cdot P(E|B) + P(C) \cdot P(E|C) + P(D) \cdot P(E|D)$$

$$= \frac{4}{100} \cdot \frac{66}{99} + \frac{10}{100} \cdot \frac{66}{99} + \frac{20}{100} \cdot \frac{66}{99} + \frac{66}{100} \cdot \frac{65}{99} = \frac{33}{50}$$

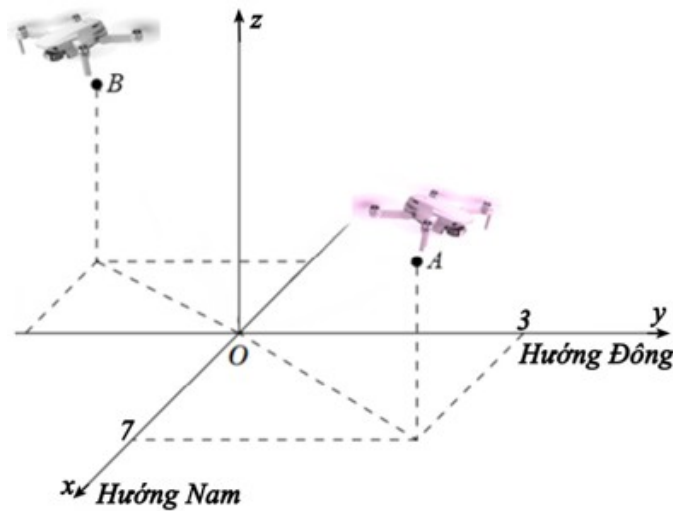
d) Để tạo bất ngờ cho người bốc thăm tiếp theo, sau khi người thứ nhất bốc thăm, người dẫn chương trình giữ lại vé và không công bố kết quả. Người bốc thăm thứ hai bốc được vé trúng năm triệu đồng. Xác suất để người bốc thăm thứ nhất bốc được vé trúng thưởng trúng năm triệu

đồng là $\frac{65}{99}$.

Đúng

$$P(D|E) = \frac{P(D) \cdot P(E|D)}{P(E)} = \frac{\frac{66}{100} \cdot \frac{65}{99}}{\frac{33}{50}} = \frac{65}{99}$$

Câu 4: Hai chiếc flycam được điều khiển cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất bay đến vị trí điểm A cách mặt đất $12m$, cách điểm xuất phát $7m$ về phía nam và $3m$ về phía đông. Chiếc flycam thứ hai bay đến điểm B cách mặt đất $10m$, cách điểm xuất phát $5m$ về phía bắc và $2m$ về phía tây. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là mét). Khi đó:



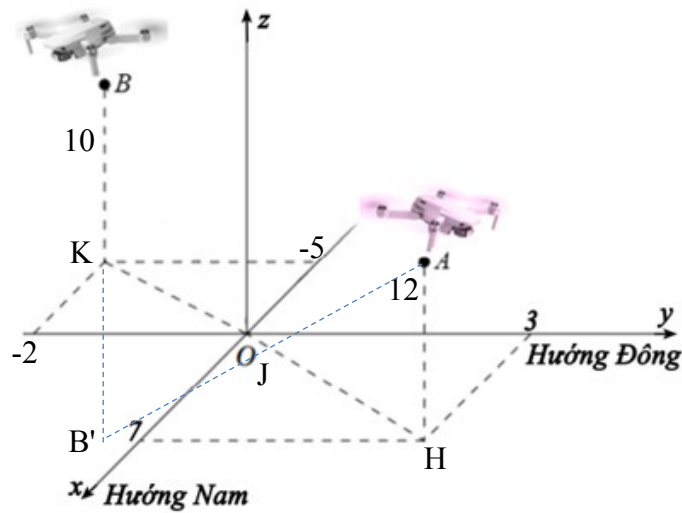
a) Tọa độ của điểm $A(7;3;12)$.

b) Phương trình đường thẳng đi qua vị trí của hai chiếc flycam tại A và B là:
$$\begin{cases} x = 7 + 12t \\ y = 3 + 5t \\ z = 12 + 2t \end{cases}$$

c) Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua $M(2;3;1)$.

d) Trên mặt đất người ta đặt một thiết bị phá sóng flycam sao cho nó có thể phá sóng hai chiếc flycam tại hai vị trí A, B cùng một lúc. Tổng khoảng cách ngắn nhất từ thiết bị đó đến hai chiếc flycam tại hai vị trí A và B (làm tròn đến hàng phần trăm) bằng 25,55 (m).

Lời giải



a) Tọa độ của điểm $A(7; 3; 12)$.

Đúng

b) Phương trình đường thẳng đi qua vị trí của hai chiếc flycam tại A và B là:

$$\begin{cases} x = 7 + 12t \\ y = 3 + 5t \\ z = 12 + 2t \end{cases}$$

Đúng

$A(7; 3; 12)$ và $B(-5; -2; 10)$.

$\overrightarrow{AB}(-12; -5; -2) \Rightarrow \vec{u}(12; 5; 2)$ là 1 VTCP của đường thẳng qua A và B .

Đường thẳng đi qua vị trí của hai chiếc flycam tại A và B có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 7 + 12t \\ y = 3 + 5t \\ z = 12 + 2t \end{cases}$$

c) Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua $M(2; 3; 1)$.

Sai

$A(7; 3; 12)$ và $B(-5; -2; 10)$ nên $I\left(1; \frac{1}{2}; 11\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Mặt phẳng trung trực của AB đi qua $I\left(1; \frac{1}{2}; 11\right)$ và có 1 VTPT là $\overrightarrow{AB}(-12; -5; -2)$.

$\overrightarrow{IM}\left(1; \frac{3}{2}; -10\right)$; $\overrightarrow{AB}(-12; -5; -2)$.

$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \cdot (-12) + \frac{3}{2} \cdot (-5) - 10 \cdot (-2) = -12 - \frac{15}{2} + 20 = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{IM}$ và $\overrightarrow{AB}$ không vuông góc.

Vậy, mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB không đi qua $M(2; 3; 1)$.

d) Trên mặt đất người ta đặt một thiết bị phá sóng flycam sao cho nó có thể phá sóng hai chiếc flycam tại hai vị trí A, B cùng một lúc. Tổng khoảng cách ngắn nhất từ thiết bị đó đến hai chiếc flycam tại hai vị trí A và B (làm tròn đến hàng phần trăm) bằng 25,55 (m).

Đúng

$$A(7;3;12) \text{ và } B(-5;-2;10).$$

Gọi B' là điểm đối xứng của $B(-5;-2;10)$ qua $(Oxy) \Rightarrow B'(-5;-2;-10)$.

Gọi $J = AB' \cap (Oxy) \Rightarrow J(x; y; 0)$ và $\overrightarrow{B'J}, \overrightarrow{B'A}$ cùng phương.

$$\overrightarrow{B'J}(x+5; y+2; 10), \overrightarrow{B'A}(12; 5; 22) \text{ cùng phương}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+5}{12} = \frac{y+2}{5} = \frac{10}{22} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{11} \\ y = \frac{3}{11} \end{cases} \Rightarrow J\left(\frac{5}{11}; \frac{3}{11}; 0\right)$$

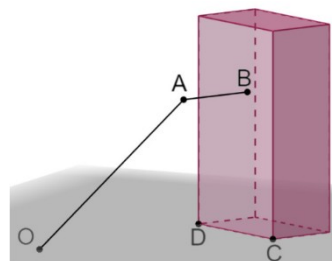
là điểm có tổng khoảng cách tới A, B nhỏ

nhất. Khi đó:

$$JA + JB = \sqrt{\left(\frac{5}{11} - 7\right)^2 + \left(\frac{3}{11} - 3\right)^2 + (0 - 12)^2} + \sqrt{\left(\frac{5}{11} + 5\right)^2 + \left(\frac{3}{11} + 2\right)^2 + (0 - 10)^2} \approx 25,55.$$

PHẦN III. Trả lời ngắn.

Câu 1: Một công ty logistics đang thử nghiệm hệ thống giao hàng tự động bằng máy bay không người lái (drone). Trong không gian $Oxyz$, mỗi đơn vị trên các trục tương ứng với 1 mét trên thực tế. Mặt ngoài của một tòa nhà cao tầng được xem là một phần của mặt phẳng (P) thẳng đứng, đi qua hai điểm $C(-50; -45; 0)$ và $D(-20; -60; 0)$. Vị trí giao hàng là điểm B nằm trên mặt phẳng (P) .



Drone bắt đầu bay từ kho hàng tại gốc tọa độ $O(0;0;0)$. Ban đầu, nó bay theo một đường thẳng đến vị trí $A(-30; -30; 40)$. Từ vị trí A , drone thay đổi đường bay, di chuyển theo phương vuông góc với mặt phẳng (P) đến vị trí giao hàng B . Tính khoảng cách từ O đến B (làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{CD} = (30; -15; 0)$ nên $\vec{n}_{(P)} = [\overrightarrow{CD}, \vec{k}] = -15(1; 2; 0)$.

Suy ra $(P): x + 2y + 140 = 0$.

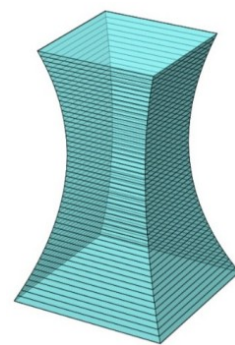
Đường thẳng AB vuông góc với (P) nên

$$AB: \begin{cases} x = -30 + t \\ y = -30 + 2t \\ z = 40. \end{cases}$$

Ta có $AB \cap (P) \Rightarrow t = -10$ nên $B(-40; -50; 40)$.

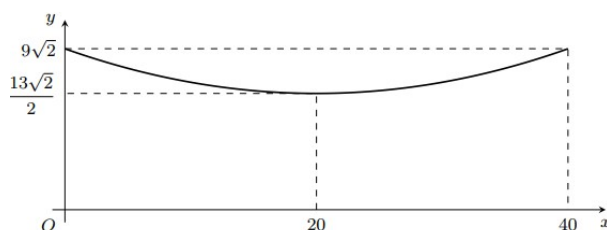
Vậy $OB = 10\sqrt{57} \approx 75,5$.

Câu 2: Một kiến trúc sư chịu trách nhiệm thiết kế một tòa nhà cao 40 m. Mặt cắt ngang tại mọi độ cao, vuông góc với trục thẳng đứng, luôn là một hình vuông. Mặt đáy tòa nhà là hình vuông có cạnh $L_0 = 18$ m, mặt đỉnh là hình vuông có cạnh $L_{40} = 18$ m. Mặt cắt ngang tại vị trí hẹp nhất của tòa nhà: Hình vuông có cạnh $L_{\min} = 13$ m. Mặt cắt của tòa nhà theo mặt phẳng đứng chứa đường chéo đáy có dạng là hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong parabol đối xứng nhau qua trục thẳng đứng đi qua tâm đáy của tòa nhà. Tính thể tích của tòa nhà đó (làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị tính: mét khối).



Lời giải

Đặt mặt Oxy trùng với mặt cắt của tòa nhà theo mặt phẳng đứng chứa đường chéo đáy sao cho đường cong parabol như hình vẽ.



Gọi y_i là nửa độ dài đường chéo hình vuông cạnh L_i .

Ta có $y_0 = 9\sqrt{2}$, $y_{40} = 9\sqrt{2}$, $y_{\min} = \frac{13\sqrt{2}}{2}$.

Vì $y_0 = y_{40}$ nên (P) nhận $x = 20$ làm trục đối xứng.

Suy ra $(P): y = \frac{\sqrt{2}}{160}(x-20)^2 + \frac{13\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó $L_i(x) = y\sqrt{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{160}(x-20)^2 + \frac{13\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{2}$ suy ra $S(x) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{160}(x-20)^2 + \frac{13\sqrt{2}}{2} \right)^2$.

Thể tích của tòa nhà là $V = \int_0^{40} S(x) dx = 2 \int_0^{40} \left(\frac{\sqrt{2}}{160}(x-20)^2 + \frac{13\sqrt{2}}{2} \right)^2 dx = \frac{26080}{3} \approx 8693 \text{ (m}^3\text{)}$.

Câu 3: Một nhà đầu tư có số vốn là 3 tỷ đồng (3000 triệu đồng) và dự định phân bổ vào quỹ cổ phiếu A và quỹ trái phiếu B . Các thông tin và điều kiện đầu tư như sau: Quỹ cổ phiếu A có tỷ suất sinh lời là 15%/năm. Quỹ trái phiếu B có tỷ suất sinh lời là 7%/năm. Tổng số tiền đầu tư không vượt quá 3000 triệu đồng. Phải đầu tư ít nhất 400 triệu đồng vào quỹ trái phiếu B . Không đầu tư quá 2200 triệu đồng vào quỹ cổ phiếu A . Với các điều kiện trên thì nhà đầu tư có thể đạt được tổng lợi nhuận hàng năm lớn nhất là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

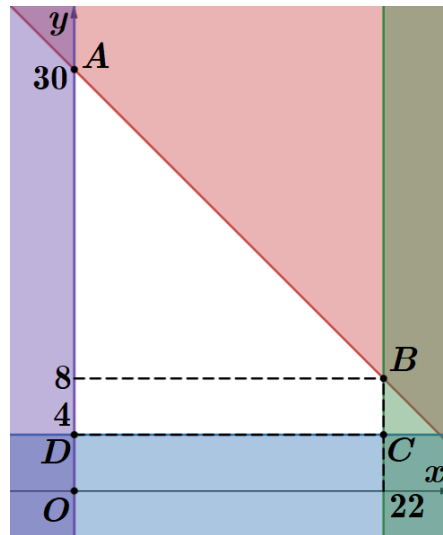
Đáp số: 386.

Gọi số tiền nhà đầu tư đầu tư vào quỹ cổ phiếu A và quỹ trái phiếu B lần lượt là x, y (trăm triệu đồng; $x, y \geq 0$).

$$\begin{cases} x + y \leq 30 \\ y \geq 4 \\ 0 \leq x \leq 22 \end{cases}$$

Theo đề bài, ta có:

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên mặt phẳng tọa độ:



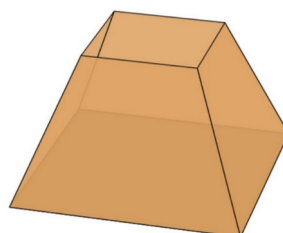
Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền trong (kể cả bờ) của tứ giác $ABCD$ trong đó $A(0; 30)$, $B(22; 8)$, $C(22; 4)$ và $D(0; 4)$.

Ta có tổng số tiền nhà đầu tư sẽ nhận được là: $F(x; y) = 1,15x + 1,07y$.

Ta có: $F(0; 30) = 32,1$, $F(22; 8) = 33,86$, $F(22; 4) = 29,58$ và $F(0; 4) = 4,28$.

Vậy nhà đầu tư có thể đạt được lợi nhuận lớn nhất là 386 triệu đồng khi đầu tư 2200 triệu vào quỹ cổ phiếu A và 800 triệu vào quỹ trái phiếu B .

Câu 4: Một xưởng thủ công mỹ nghệ sản xuất loại chụp đèn trang trí dạng hình chóp cụt tứ giác đều. Gọi x là độ dài cạnh đáy lớn (đơn vị: dm). Tính toán cho thấy tổng chi phí vật liệu (tính bằng nghìn đồng) cho một chụp đèn là: $C(x) = x^2 + 27$ (nghìn đồng). Thời gian sản xuất cho một chụp đèn được xác định là: $T(x) = x + 3$ (giờ).



Xưởng muốn xác định kích thước x để chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là thấp nhất, nhằm tối ưu hóa hiệu quả sử dụng thời gian và vật liệu. Hãy tìm giá trị của x .

Lời giải

Đáp số: ^{1} .

Theo đề bài, ta có chi phí trung bình trên một giờ sản xuất một sản phẩm là:

$$f(x) = \frac{C(x)}{T(x)} = \frac{x^2 + 7}{x + 3}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 7}{x + 3}$ trên $(0; +\infty)$.

$$f(x) = \frac{x^2 + 6x - 7}{(x + 3)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (n) \\ x = -7 & (l) \end{cases}$$

Ta có:

Bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$\frac{7}{3}$	2	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy được thời gian sản xuất trung bình thấp nhất cho ^{1} sản phẩm là ^{2} giờ khi $x = 1$.

Câu 5: Một nhà máy sản xuất sản phẩm A có tỷ lệ sản phẩm bị lỗi là $1,5\%$. Nhà máy sử dụng hai hệ thống kiểm tra chất lượng độc lập để phát hiện lỗi:

Hệ thống 1: Xác suất phát hiện chính xác sản phẩm lỗi là 95% . Xác suất báo lỗi nhầm trên một sản phẩm không lỗi là 1% .

Hệ thống 2: Xác suất phát hiện chính xác sản phẩm lỗi là 90% . Xác suất báo lỗi nhầm trên một sản phẩm không lỗi là 5% .

Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm. Biết rằng sản phẩm này bị cả hai hệ thống kiểm tra đều báo lỗi. Tính xác suất để sản phẩm này thực tế không bị lỗi. Kết quả xác suất này sau khi đã làm tròn đến hàng phần nghìn là số có dạng $0,0ab$

(ví dụ nếu kết quả là $0,024$ thì $a = 2, b = 4$). Tính giá trị của $10a + b$.

Lời giải

Đáp số: 37

Gọi A là biến cố sản phẩm bị lỗi, $P(A) = 0.15$.

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,985.$$

0.9. Gọi B_1 là biến cố hệ thống 1 báo lỗi, và B_2 là biến cố hệ thống 2 báo lỗi.

Xác suất hệ thống 1 báo lỗi khi sản phẩm bị lỗi là $P(B_1 | A) = 0.95$. Xác suất hệ thống 2 báo lỗi khi sản phẩm bị lỗi là $P(B_2 | A) = 0.9$. Vì hai hệ thống độc lập, xác suất cả hai hệ thống cùng báo lỗi khi sản phẩm bị lỗi là $P(B_1 B_2 | A) = P(B_1 | A) \cdot P(B_2 | A) = 0,95 \cdot 0,9 = 0,855$

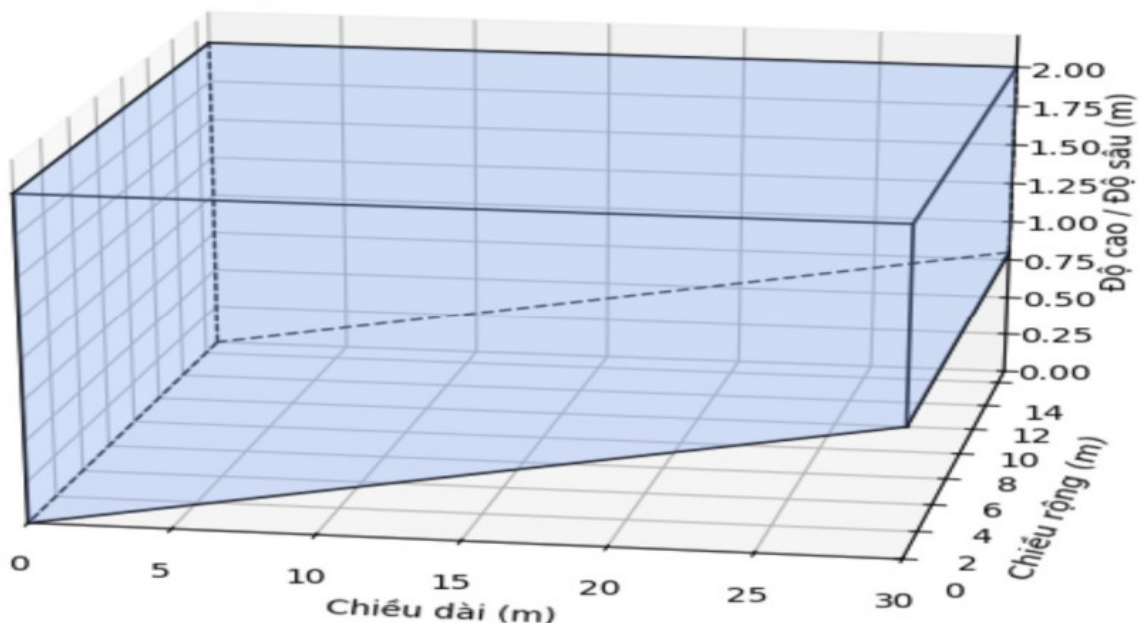
Xác suất hệ thống 1 báo lỗi khi sản phẩm không bị lỗi là $P(B_1 | \bar{A}) = 0.01$. Xác suất hệ thống 2 báo lỗi khi sản phẩm không bị lỗi là $P(B_2 | \bar{A}) = 0.05$. Vì hai hệ thống độc lập, xác suất cả hai hệ thống cùng báo lỗi khi sản phẩm không bị lỗi là $P(B_1 B_2 | \bar{A}) = P(B_1 | \bar{A}) \cdot P(B_2 | \bar{A}) = 0,01 \cdot 0,05 = 0,0005$

$$P(B_1 B_2) = P(B_1 B_2 | A) \cdot P(A) + P(B_1 B_2 | \bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0,855 \cdot 0,015 + 0,0005 \cdot 0,985 = 0,0133175.$$

Sử dụng công thức Bayes, xác suất sản phẩm không bị lỗi khi cả hai hệ thống báo lỗi là

$$P(\bar{A} | B_1 B_2) = \frac{P(B_1 B_2 | \bar{A}) P(\bar{A})}{P(B_1 B_2)} = \frac{0,0005 \cdot 0,985}{0,0133175} \approx 0,037 \Rightarrow a = 3; b = 7 \Rightarrow 10a + b = 37.$$

Câu 6: Một bể bơi với mặt nước khi đầy có dạng hình chữ nhật với chiều rộng 15 m và chiều dài 30 m. Các thành bể xung quanh thẳng đứng và đáy là một mặt phẳng nghiêng. Chiều sâu tại một đầu bể là 1,2 m và tăng dần đều đến 2,0 m ở đầu kia của bể (xem hình vẽ). Ban đầu bể không chứa nước. Người ta sử dụng một máy bơm công suất lớn để bơm nước vào bể với tốc độ không đổi là $60 \text{ m}^3 / \text{giờ}$. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì máy bơm bơm đầy bể nước?



Lời giải

Đáp số: 12

Thể tích bể bơi $V = \frac{1,2 + 2}{2} \cdot 30 \cdot 15 = 720 \text{ (m}^3\text{)}.$

Thời gian để bơm đầy bể $t = \frac{V}{v} = \frac{720}{60} = 12 \text{ (giờ)}.$