CHUYÊN ĐỀ 16. THỰC TẾ ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0 \in (a;b)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là *đạo hàm của hàm số* $y=f(x)$ tại x_0 và được kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc y'_{x_0}.

- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó.

2. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa

Để tính đạo hàm $f'(x_0)$ của hàm số $y=f(x)$ tại x_0 ta lần lượt thực hiện ba bước sau:

Bước 1. Xét $\Delta x = x - x_0$ là số gia của biến số tại điểm x_0.

Tính $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Bước 2. Rút gọn tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3. Tính $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Kết luận: Nếu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a$ thì $f'(x_0)=a$.

3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

- Đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$.

- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ là $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

4. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

Giả sử $f=f(x), g=g(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có:

$(f+g)'=f'+g';$ $(f-g)'=f'-g';$

$(fg)'=f'g+fg';$ $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}(g=g(x)\neq 0)$

5. Đạo hàm của hàm hợp

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u.u'_x$.

6. Bảng đạo hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản và hàm hợp

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản thường gặp là	Đạo hàm của hàm hợp (ở đây $u = u(x)$)
$(x^n)' = n.x^{n-1}$	$(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'.e^u$
$(a^x)' = a^x.\ln a$	$(a^u)' = u'.a^u.\ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

7. Định nghĩa đạo hàm cấp 2

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ tại mọi điểm $x \in (a;b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ tiếp tục có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' tại x là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x, kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

8. Ý nghĩa cơ học

Đạo hàm cấp hai $s''(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Giả sử chi phí C (USD) để sản xuất Q máy vô tuyến là $C(Q)=Q^2+80Q+3500$.

a) Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q+1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$. Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(90)$ và giải thích ý nghĩa kết quả tìm được.

c) Hãy tính chi phí sản xuất máy vô tuyến thứ 100.

Lời giải

a) Chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q+1$ sản phẩm. Chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$

$$=> C'(Q)=\lim_{Q\to Q+1}\frac{\left(Q^2+80Q+3500\right)-\left((Q+1)^2+80(Q+1)+3500\right)}{Q-Q-1}$$

$$C'(Q)=\lim_{Q\to Q+1}\frac{\left(Q^2+80Q+3500\right)-\left(Q^2+2Q+1+80Q+80+3500\right)}{-1}$$

$$C'(Q)=\lim_{Q\to Q+1}(2Q+80)$$

$$C'(90)=2.90+80=260(USD)$$

b)

=> Ý nghĩa: Chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ 89 sản phẩm lên 90 sản phẩm là 260 (USD)

c) Chi phí sản xuất 101 máy vô tuyến là:

$$C(101)=101^2+80.101+3500=21781(USD)$$

Chi phí sản xuất 100 máy vô tuyến là:

$$C(100)=100^2+80.100+3500=21500(USD)$$

Chi phí sản xuất máy vô tuyến thứ 100 là

$$C(101)-C(100)=281(USD)$$

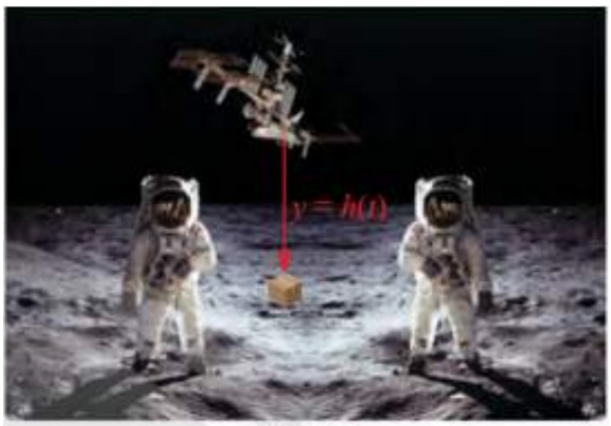
Câu 2: Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t)=4t^3+6t+2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại $t=2$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của chuyển động là: $v(t)=s'(t)=12t^2+6$

Khi $t=2,\ v(2)=12.2^2+6=54$

Câu 3: Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $h(t)=0,81t^2$, với t được tính bằng giây và h tính bằng mét. Hãy tính vận tốc tức thời của vật được thả rơi tự do trên Mặt Trăng tại thời điểm $t=2$.



Hình 4

(Nguồn: https:/www.britannica.complace/Moon)

Lời giải

Vận tốc tức thời của vật là: $v(t)=h'(t)=1,62t$

Tại thời điểm $t=2$ thì $v(2)=1,62.2=3,24$

Câu 4: Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $19,6\ m/s$ thì độ cao h của nó (tính bằng m) sau t giây được cho bởi công thức $h=19,6t-4,9t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

Lời giải

$$0=19,6t-4,9t^2 \Leftrightarrow 0=t(19,6-4,9t) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=4 \end{array}\right.$$

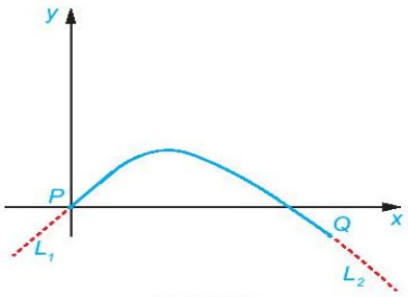
Tại thời điểm mà vật đạt độ cao bằng 0, ta có:

Khi $t=4$ (thời điểm vật chạm đất), ta có: $19,6-9,8(4)=-19,6$.

Vậy vận tốc của vật khi nó chạm đất là 19,6 m/s.

Câu 5: Một kĩ sư thiết kế một đường ray tàu lượn, mà mặt cắt của nó gồm một đường cong có dạng parabol (H.9.6a), đoạn dốc lên L_1 và đoạn dốc xuống L_2 là phần đường thẳng có hệ số góc lần lượt là $0,5$ và $-0,75$. Để tàu lượn chạy êm và không bị đổi hướng đột ngột, L_1 và L_2 phải có những tiếp tuyến của cung parabol tại các điểm chuyển tiếp P và Q (H.9.6b). Giả sử gốc tọa độ đặt tại P và phương trình của parabol là $y=ax^2+bx+c$, trong đó x tính bằng mét.

Hình 9.6a



Hình 9.6b

a. Tìm c

b. Tính $y'(0)$ và tìm b.

c. Giả sử khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là $40\ m$. Tìm a.

d. Tìm độ chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp P và Q.

Lời giải

a) Ta có $y' = 2ax + b$

Ta lại có phương trình của tiếp tuyến là: $y - y_p = y'(x_p)(x - x_p)$

Thay các giá trị này vào phương trình tiếp tuyến, ta có: $0 = 2ap + b$

Vậy $b = -2ap$.

Thay $x = 0$ vào phương trình đường cong ta có $y = a(0)^2 + c(0) + c = c \Rightarrow c = yp$

b) $y' = 2ax + b = c$ khi $x = 0 \Rightarrow y'(0) = b$

c) Ta có $y'(P) = 2aP + b = 0,5,\ \ y'(P) = 2aP + b = 0,75$

Trừ hai phương trình, ta có: $2a(Q - P) = -1,25 \Leftrightarrow Q - P = 20 \Rightarrow a = \dfrac{-1,25}{40}$

Câu 6: Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình $s = t^3 - 4t^2 + 4t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ giây và $t = 5$ giây.

Lời giải

Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ giây là $v(3) = s'(3) = 7m/s$. Tương tự, $v(5) = 39m/s$.

Câu 7: Giả sử chi phí $C(\text{USD})$ để sản xuất Q máy vô tuyến là $C(Q) = Q^2 + 80Q + 3500$.

a) Tính $\dfrac{\Delta C}{\Delta Q}$.

b) Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q+1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$. Tìm hàm chi phí biên.

c) Tìm $C'(90)$ và giải thích ý nghĩa kết quả tìm được.

Lời giải

a) Xét ΔQ là số gia của biến số tại điểm Q.

Ta có: $\Delta C = C(Q+\Delta Q) - C(Q) = (Q+\Delta Q)^2 + 80(Q+\Delta Q) + 3500 - Q^2 - 80Q - 3500$

$= 2Q\Delta Q + (\Delta Q)^2 + 80\Delta Q$.

b) Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta Q \to 0} \dfrac{\Delta C}{\Delta Q} = \lim\limits_{\Delta Q \to 0} (2Q + \Delta Q + 80) = 2Q + 80$.

Vậy hàm chi phí biên là: $C'(Q) = 2Q + 80$.

c) Ta có: $C'(90) = 2.90 + 80 = 260$. Dựa vào kết quả đó, ta thấy chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ 90 sản phẩm lên 91 sản phẩm là 260 USD.

Câu 8: Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $s(t) = \dfrac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8 m/s^2$.

a) Tìm vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 3(s)$.

b) Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của vật tại thời điểm đó bằng $39,2(m/s)$.

Lời giải

Xét Δt là số gia của biến số tại điểm t.

Ta có: $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t) = \dfrac{1}{2}.9,8.(t+\Delta t)^2 - \dfrac{1}{2}.9,8.t^2 = 4,9.\left[2t\Delta t + (\Delta t)^2\right]$

Suy ra: $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{4,9.\left[2t\Delta t + (\Delta t)^2\right]}{\Delta t} = 9,8t + 4,9\Delta t$.

Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} (9,8t + 4,9\Delta t) = 9,8t$. Vậy $v(t) = s'(t) = 9,8t$.

a) Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 3(s)$ là: $v(3) = 9,8.3 = 29,4(m/s)$.

b) Theo đề Câu, ta có: $v(t) = 9,8t = 39,2 \Leftrightarrow t = 4$.

Vậy vận tốc tức thời của vật đạt $39,2(m/s)$ tại thời điểm $t = 4(s)$.

Câu 9: Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^2 + 16t + 15$, trong đó s tsinh bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 3$.

Lời giải

Ta có $s'(t) = \left(-2t^2 + 16t + 15\right)' = (-2.3t + 16) = -4t + 16$.

Vận tốc tức thời tại thời điểm $t=3$ là $s'(3)=-1.3=16=4(m/s)$.

5. Một vật chuyển động có quãng đường được xác định bởi phương trình $s(t)=2t^2+5t+2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t=4$.

Lời giải

Ta có $s'(t)=4t+5, s'(4)=21m/s$

Câu 10: Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0=196\,\mathrm{m/s}$ (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét (lấy $g=9,8\,\mathrm{m/s^2}$)?

Lời giải

Ta lần lượt có:

- Phương trình của viên đạn đi theo phương thẳng đứng được cho bởi:

$$y=-\frac{1}{2}gt^2-v_0t <=> y=-4,9t^2+196t$$

- Vận tốc viên đạn tại thời điểm t là:

$$v=y'=-9,8t+196$$

Từ đó, ta nhận thấy:

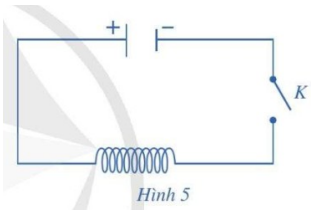
- Thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0 được cho bởi:

$$-9,8t+196=0 \Leftrightarrow t=20s$$

- Khi đó viên đạn cách mặt đất một khoảng cho bởi:

$$y=-4,9.20^2+196.20=1960m$$

Câu 11: Cho mạch điện như *Hình 5*. Lúc đầu tụ điện có điện tích Q_0. Khi đóng k điện qua cuộn dây; điện tích q của tụ điện phụ thuộc vào thời gi $q(t)=Q_0\sin\omega t$, trong đó ω là tốc độ góc. Biết rằng cường độ $I(t)$ của c t được tính theo công thức $I(t)=q'(t)$. Cho biết $Q_0=10^{-8}(\mathrm{C})$ và α cường độ của dòng điện tại thời điểm $t=6(\mathrm{s})$ (tính chính xác đến 10^{-5}(n



Hình 5

Lời giải

Cường độ của dòng điện tại t là:

$$I(t)=q'(t)=Q_0.\omega.\cos\omega t$$

Khi $Q_0=10^{-8}(\mathrm{C})$ và $\omega=10^6\pi(\mathrm{rad/s})$ thì cường độ của dòng điện tại thời điểm $t=6(\mathrm{s})$ là:

$$I(6)=q'(6)=10^{-8}.\pi.\cos\left(10^6.\pi.6\right)=\frac{\pi}{10}(A)$$
$$\approx 31,41593(mA)$$

Câu 12: Cân nặng trung bình của một bé gái trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t)=0,000758t^3-0,0596t^2+1,82t+8,15$, trong đó t được tính bằng tháng và w

được tính bằng pound (*nguồn:* https://www.cde.gov/growthcharts/data/who/GrChrt_Boys). Tính tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái đó tại thời điểm 10 tháng tuổi.

Lời giải

Tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái là: $w'(t) = 0,002274t^2 - 0,1192t + 1,82$

Khi $t = 10$, ta có: $w'(10) = 0,002274.10^2 - 0,1192.10 + 1,82 = 0,8554$

Câu 13: Một công ty xác định rằng tổng chi phí của họ, tính theo nghìn đô-la, để sản xuất x mặt hàng là $C(x) = \sqrt{5x^2 + 60}$ và công ty lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tháng kể từ nay theo hàm số $x(t) = 20t + 40$. Chi phí sẽ tăng nhanh thế nào sau 4 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch đó?

Lời giải

Tốc độ tăng của chi phí theo thời gian là

$$C'(t) = C'(x).x'(t) = \left(\sqrt{5x^2 + 60}\right)(20t + 40)' = (5x^2 + 60)'.\frac{1}{2\sqrt{5x^2 + 60}}.20 = 10x.\frac{1}{2\sqrt{5x^2 + 60}}.20$$

$$= 100x.\frac{1}{2\sqrt{5x^2 + 60}} = 100(20t + 40).\frac{1}{\sqrt{5(20t + 40)^2 + 60}}$$

Khi $t = 4$ thì $C'(4) = 100(20.4 + 40).\frac{1}{\sqrt{5(20.4 + 40)^2 + 60}} = 44,7$

Câu 14: Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $s(t) = 0,81t^2$, trong đó t là thời gian được tính bằng giây và s tính bằng mét. Một vật được thả rơi từ độ cao $200\,\text{m}$ phía trên Mặt Trăng. Tại thời điểm $t = 2$ sau khi thả vật đó, tính:

a) Quãng đường vật đã rơi;

b) Gia tốc của vật.

Lời giải

a) Khi $t = 2$ thì $s(t) = 0,81.2^2 = 3,24(m)$

b) Ta có: $v(t) = s'(t) = 1,62t$

Gia tốc của vật là: $v'(t) = 1,62$

Câu 15: Một vật chuyển động rơi tự do có phương trình $h(t) = 100 - 4,9t^2$, ở đó độ cao h so với mặt đất tính bằng mét và thời gian t tính bằng giây. Tính vận tốc của vật:

a) Tại thời điểm $t = 5$ giây; b) Khi vật chạm đất.

Lời giải

a) Để tính vận tốc của vật tại thời điểm t, ta cần tính đạo hàm của hàm số $h(t)$ tại thời điểm đó:

$$v(t) = h'(t) = \frac{d}{dt}\left(100 - 4,9t^2\right) = -9,8t$$

Vậy vận tốc của vật tại thời điểm $t=5$ giây là: $v(5)=-9.8.5=49(\mathrm{m/s})$.

b) Vật chạm đất khi $h(t)=0$, tức là:

$$100-4.9t^2=0 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{100}{4,9}}$$

$$v_f=\sqrt{2gh_0}=\sqrt{2.9,8.100}=\sqrt{1960}=44,3\,\mathrm{m/s}$$

Câu 16: Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi $s(t)=12+0,5\sin(4\pi t)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu?

Lời giải

Đạo hàm của hàm $s(t)$ theo thời gian t:

$$v(t)=\frac{ds}{dt}=2\pi\cos(4\pi t)4$$

Ta thấy rằng hàm $v(t)$ là một hàm cosin với biên độ bằng 2π, do đó giá trị lớn nhất của hàm này là 2π. Vậy vận tốc cực đại của hạt là $2\pi\mathrm{cm/s}$.

Câu 17: Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $v_0(m/s)$(bỏ qua sức cản của không khí) thì độ cao h của vật (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi công thức $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$ (g là gia tốc trọng trường). Tìm vận tốc của vật khi chạm đất.

Lời giải

Tại thời điểm vật chạm đất: $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2=0(t>0)$. Giải phương trình ta được $t=\frac{2v_0}{g}$.

Vận tốc của vật khi chạm đất là $v=h'\left(\frac{2v_0}{g}\right)=-v_0$.

Câu 18: Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi công thức $s(t)=10+\sqrt{2}\sin\left(4\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến chữ số thập thứ nhất).

Lời giải

Vận tốc của hạt sau t giây là: $v(t)=s'(t)=4\pi\sqrt{2}\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$.

Vận tốc cực đại của hạt là: $v_{\max}=4\pi\sqrt{2}\approx 17,8m/s$, đạt được khi $\left|\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{6}\right)\right|=1$ hay $t=\frac{5}{24}+\frac{k}{4},k\in\mathbb{Z}$.

Câu 19: Một chất điểm chuyển động của phương trình $s(t)=\frac{1}{3}t^3-2t^2+4t+1$ trong đó $t>0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=3(s)$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(s)$ là: $v(t)=s'(t)=t^2-4t+4$.

Vậy vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=3(s)$ là: $v(3)=3^2-4.3+4=1(m/s)$

Câu 20: Một chất điểm chuyển động của phương trình $s(t)=6\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$ trong đó $t>0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=\frac{\pi}{6}(s)$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(s)$ là: $v(t)=s'(t)=18\cos\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=\frac{\pi}{6}(s)$ là:
$v\left(\frac{\pi}{6}\right)=18\cos\left(3.\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=-9\sqrt{2}\,(cm/s)$

Câu 21: Một viên đạn được bắn lên cao theo phương thẳng đứng có phương trình chuyển động $s(t)=2+196t-4,9t^2$, trong đó $t\geq 0$, $t(s)$ là thời gian chuyển động, $s(m)$ là độ cao so với mặt đất.

a) Sau bao lâu kể từ khi bắn thì viên đạn đạt được độ cao $1962m$?

b) Tính vận tốc tức thời của viên đạn khi viên đạn đạt được độ cao $1962m$.

c) Tại thời điểm viên đạn đạt vận tốc tức thời bằng $98\ m/s$ thì viên đạn đang ở độ cao bao nhiêu mét so với mặt đất?

Lời giải

a) Khi viên đạn đạt được độ cao $1962m$, ta có phương trình: $1962=2+196t-4,9t^2\Leftrightarrow t=20$

Vậy sau $20s$ kể từ khi bắn thì viên đạn đạt được độ cao $1962m$.

b) Vận tốc tức thời của viên đạn tại thời điểm t là: $v(t)=s'(t)=196-9,8t$

Viên đạn đạt được độ cao $1962m$ vào thời điểm $t=20(s)$ kể từ lúc bắn, khi đó vận tốc tức thời của viên đạn là: $v(20)=196-9,8.20=0(m/s)$.

c) Viên đạn đạt vận tốc tức thời bằng $98\ \mathrm{m}/s$ ta có phương trình:
$v(t)=196-9,8t=98\Leftrightarrow t=10$

Khi đó viên đạn đang ở độ cao là: $s(10)=2+196.10-4,9.10^2=1472(m)$.

Câu 22: Năm 2001, dân số Việt Nam khoảng 78 690 000 người. Nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm luôn là 1,7% thì ước tính số dân Việt Nam sau x năm kể từ năm 2001 được tính theo hàm số sau: $f(x)=7,869e^{0,017x}$ (chục triệu người). Tốc độ gia tăng dân số (chục triệu người) sau x năm kể từ năm 2001 được xác định bởi hàm số $f'(x)$.
a) Tìm hàm số thể hiện tốc độ gia tăng dân số sau x năm kể từ năm 2001.

b) Tính tốc độ gia tăng dân số Việt Nam theo đơn vị chục triệu người/ năm vào năm 2023 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười), nêu ý nghĩa của kết quả đó.

Lời giải

a) Ta có: $f'(x)=7,869.(0,017x)'.e^{0,017x}=7,869.0,017.e^{0,017x}=0,133773e^{0,017x}$

Vậy hàm số thể hiện tốc độ gia tăng dân số sau x năm kể từ năm 2001 là:
$f'(x)=0,133773e^{0,017x}$

b) Ta có: $x=2023-2001=22$.

Tốc độ gia tăng dân số Việt Nam vào năm 2023 là: $f'(22)=0,133773e^{0,017.22}\approx 0,2$ (chục triệu người/ năm0.

Theo kết quả trên thì dân số nước ta tăng thêm khoảng 2triệu người trong năm 2023.

Câu 23: Trong thuyết động học phân tử chất khí, với một khối khí lí tưởng, các đại lượng áp suất $p(Pa)$, thể tích $V(m^3)$, nhiệt độ $T(K)$, số mol $n(mol)$ liên hệ với nhau theo phương trình: $pV=nRT$, trong đó $R=8,31(J/mol.K)$ là hằng số.

Nguồn: James Stewart, Calculus)

Một bóng thám không chứa 8 mol khí hydrogen ở trạng thái lí tưởng có áp suất không đổi $p=10^5Pa$. Tính tốc độ thay đổi thể tích theo nhiệt độ của khối khí trong bóng thám không.

Lời giải

Thay $p=10^5, n=8, R=8,31$ vào phương trình trên ta có: $10^5V=8.8,31T\Leftrightarrow V=6,648.10^{-4}T$

Khi đó $V(t)=6,648.10^{-4}$. Vậy tốc độ thay đổi thể tích của khối khí lúc có nhiệt độ T là: $6,648.10^{-4}(m^3/K)$.

Câu 24: Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^2 + 15t + 3$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$.

Lời giải

Ta có: $s'(t) = -2.2t + 15 = -4t + 15$, suy ra $s''(t) = -4$.

Vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ lần lượt là $s'(2) = 7m/s$ và $s''(2t) = -4m/s^2$.

Câu 25: Nếu số lượng sản phẩm được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -200x^2 + 12800x - 74000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1200 sản phẩm.

Lời giải

Ta có $P'(x) = -2.200x + 12800 = -400x + 12800$

Tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1200 sản phẩm là
$P'(12) = -400.12 + 12800 = 8000$

Câu 26: Một vật rơi tự do theo phương thẳng đứng có phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó g là gia tốc rơi tự do, $g \approx 9,8\,\mathrm{m/s^2}$.

a) Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0 = 2(\mathrm{s})$.

b) Tính gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0 = 2(\mathrm{s})$.

Lời giải

a) $v(t) = s'(t) = gt$

Vận tốc tức thời $v(t)$ tại thời điểm $t_0 = 2\ (\mathrm{s})$.
$v(2) = 9,8.2 = 19,6(m/s)$

b) $a(t) = v'(t) = g$

Gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0 = 2(\mathrm{s})$.
$a(2) = g = 9,8\left(m/s^2\right)$

Câu 27: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 1$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tìm vận tốc tức thời, gia tốc tức thời của chất điểm:

a) Tại thời điểm $t = 3(\mathrm{s})$;

b) Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được $7\,(\mathrm{m})$.

Lời giải

$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 8$

$a(t)=v'(t)=6t-6$

a) vận tốc tức thời tại thời điểm $t=3(\text{s})$ là:

$v(3)=s'(3)=3.3^2-6.3+8=17(m/s)$

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=3(\text{s})$ là:

$a(3)=6.3-6=12(m/s^2)$

b) Chất điểm di chuyển được $7(\text{m})$

$\Rightarrow s(t)=t^3-3t^2+8t+1=7$

$\Leftrightarrow t=1(s)$

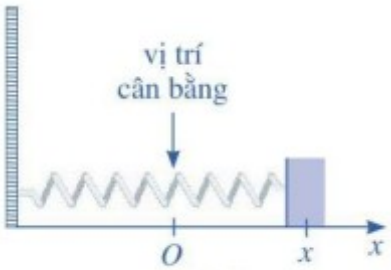
vận tốc tức thời tại thời điểm $t=1(\text{s})$ là:

$v(1)=3.1^2-6.1+8=5(m/s)$

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=1(\text{s})$ là:

$a(1)=6.1-6=0(m/s^2)$

Câu 28: Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như Hình 7, có phương trình chuyển động $x=4\sin t$, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng centimét.



Hình 7

a) Tìm vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t(\text{s})$.

b) Tìm vị trí, vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t=\frac{2\pi}{3}(\text{s})$. Tại thời điểm đó, con lắc di chuyển theo hướng nào?

Lời giải

a) Vận tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t(\text{s})$ là:

$v(t)=x'=4\cos t$

Gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t(\text{s})$ là:

$a(t)=v'(t)=-4\sin t$

b) Tại thời điểm $t=\frac{2\pi}{3}(\mathrm{s})$

$$x\left(\frac{2\pi}{3}\right)=4.\sin\frac{2\pi}{3}=2\sqrt{3}(cm)$$

$$v(\frac{2\pi}{3})=4\cos\frac{2\pi}{3}=-2(cm/s)$$

$$a(\frac{2\pi}{3})=-4\sin\frac{2\pi}{3}=-2\sqrt{3}\left(cm/s^2\right)$$

Câu 29: Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi $s(t)=10+0,5\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{5}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm $t=5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Đạo hàm của $s(t)$ theo t: $\frac{ds}{dt}=0,5.2\pi.\cos\left(2pit+\frac{\pi}{5}\right)=\pi\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{5}\right)$

Đạo hàm cấp hai của $s(t)$ theo t: $\frac{d^2s}{dt^2}=-\pi^2\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{5}\right)$

Tại $t=5$ giây: $\frac{d^2s}{dt^2}=-\pi^2\sin\left(2\pi 5+\frac{\pi}{5}\right)\approx-24.5\mathrm{cm}/\mathrm{s}^2$

Câu 30: Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi công thức $s(t)=15+\sqrt{2}\sin\left(4\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm $t=3$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Gia tốc của hạt tại thời điểm t là: $a(t)=s''(t)=-16\pi^2\sqrt{2}\sin\left(4\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$.

Tại thời điểm $t=3$ giây, gia tốc của hạt là: $a=-16\pi^2\sqrt{2}\sin\left(12\pi+\frac{\pi}{6}\right)\approx-111,7m/s^2$.

Câu 31: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t+4$, trong đó $t>0,t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=3(\mathrm{s})$.

Lời giải

Ta có: $s'(t)=t^2-6t+5$.

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t (s) là: $s''(t)=2t-6$

Vậy gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=3(\text{ s})$ là: $s''(3)=2\cdot 3-6=0(\text{ m/s}^2)$

Câu 32: Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t)=6\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$, trong đó $t>0,t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=\frac{\pi}{6}(\text{ s})$.

Lời giải

Ta có: $s'(t)=18\cos\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$.

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(\text{ s})$ là: $s''(t)=-54\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=\frac{\pi}{6}(\text{ s})$ là:

$$s''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-54\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=-27\sqrt{2}(\text{ cm/s}^2).$$

Câu 33: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t+2$, trong đó $t>0,t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm:

a) Tại thời điểm $t=5(\text{ s})$.

b) Tại thời điểm mà vận tốc tức thời của chất điểm bằng -1 m/s.

Lời giải

Ta có: $s'(t)=t^2-6t+8, s''(t)=2t-6$.

a) Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=5(\text{ s})$ là: $s''(5)=4(\text{ m/s}^2)$.

b) Theo giả thiết, $s'(t)=t^2-6t+8=-1\Leftrightarrow t=3$ (s).

$t = 3(\text{ s})$ $s''(3) = 0(\text{ m/s}^2)$

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm là: .

Câu 34: Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 2t + t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng m/s. Tìm gia tốc tức thời của chất điểm:

a) Tại thời điểm $t = 3\ (s)$;

b) Tại thời điểm mà vận tốc chất điểm bằng $8\ m/s$.

Lời giải

$a(t) = v'(t) = 2t + 2$

a) Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3\ (s)$ là:

$a(3) = 2.3 + 2 = 8(m/s^2)$

b) Vận tốc chất điểm bằng $8\ m/s$

$v(t) = 2t + t^2 = 8$

$\Leftrightarrow t = 2(s)$

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 2\ (s)$ là:

$a(2) = 2.2 + 2 = 6(m/s^2)$

Câu 35: Một con lắc lò xo dao động điều hòa theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 4\cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 3$, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng centimet.

a) Tìm vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con xắc lò xo tại thời điểm $t = 3\ (s)$.

b) Tìm thời điểm mà vận tốc của con lắc bằng 0.

Lời giải

$v = x' = -4\pi\sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$

$a = v' = -4\pi^2\cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$

a) Vận tốc tức thời của con xắc lò xo tại thời điểm $t = 3\ (s)$ là:

$v = -4\pi\sin\left(\pi.3 - \frac{2\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3}\pi(cm/s)$

Gia tốc tức thời của con xắc lò xo tại thời điểm $t = 3\ (s)$ là:

$a = -4\pi^2\cos\left(3\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -2\pi^2(cm/s^2)$

b) vận tốc của con lắc bằng 0 => $v=-4\pi\sin\left(\pi t-\frac{2\pi}{3}\right)=0\Rightarrow t=\frac{2\pi}{3}s$

Câu 36: Một viên sỏi rơi từ độ cao $44,1\,\text{m}$ thì quãng đường rơi được biểu diễn bởi công thức $s(t)=4,9t^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính:

a) Vận tốc rơi của viên sỏi lúc $t=2$;

b) Vận tốc của viên sỏi khi chạm đất.

Lời giải

$$v(t)=s'(t)=9,8t$$

Vận tốc rơi của viên sỏi là:

a) Khi $t=2$ thì v(2) =9,8.2 = 19,6 (m/s)

b) Khi viên sỏi chạm đất thì $s(t)=44,1$ Hay $4,9t^2=44,1\Leftrightarrow t=3$

Ta có: $v(3)=9,8.3=29,4(\text{ m/s})$

Câu 37: Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t)=2t^3+4t+1$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc và gia tốc của vật khi $t=1$.

Lời giải

$$v(t)=s'(t)=6t^2+4$$

Vận tốc của vật là:

$$v'(t)=12t$$

Gia tốc của vật là

Khi $t=1$ thì $v(1)=6.1^2+4=10;v'(1)=12.1=12$

Câu 38: Dân số P (tính theo nghìn người) của một thành phố nhỏ được cho bởi công thức $P(t)=\frac{500t}{t^2+9}$, trong đó t là thời gian được tính bằng năm. Tìm tốc độ tăng dân số tại thời điểm $t=12$.

Lời giải

Tốc độ tăng trưởng dân số là:

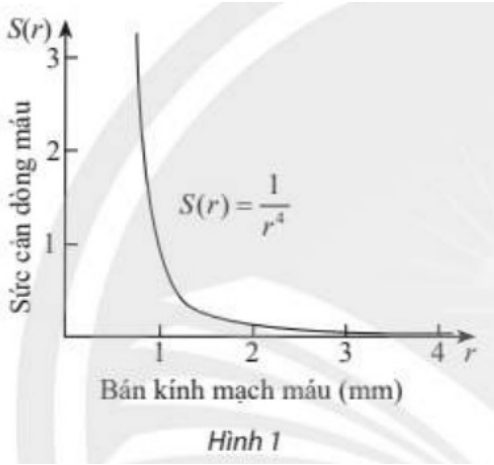
$$P'(t)=\frac{(500t)'\left(t^2+9\right)-500t\left(t^2+9\right)'}{\left(t^2+9\right)^2}$$

$$P'(t)=\frac{500.\left(t^2+9\right)-500t.2t}{\left(t^2+9\right)^2}$$

$$P'(t)=\frac{4500-500t^2}{\left(t^2+9\right)^2}$$

Khi t = 12 thì $P'(12)=\frac{4500-500.12^2}{\left(12^2+9\right)^2}=-2,88$

Câu 39: Hàm số $S(r)=\frac{1}{r^4}$ có thể được sử dụng để xác định sức cản S của dòng máu trong mạch máu có bán kính r (tính theo milimét) (theo Bách khoa toàn thư Y học "Harrison's internal medicine 21st edition"). Tìm tốc độ thay đổi của S theo r khi $r=0,8$.



Hình 1

Lời giải

Tốc độ thay đổi của S là

$$S'(r)=\left(r^4\right)'\cdot\frac{-1}{\left(r^4\right)^2}=4r^3\cdot\frac{-1}{r^8}=\frac{-4}{r^5}$$

Khi r = 0,8 thì $S'(0,8)=\frac{-4}{0,8^5}=-12.2$

Câu 40: Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức

$T(t)=-0,1t^2+1,2t+98,6$

trong đó T là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo nhiệt độ Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ ở thời điểm $t=1,5$.

(Nguồn: https://www.algebra.com/algebra/homework/ Trigonometry-basics/Trigonometry-basics.faq.question. 1111985.html)

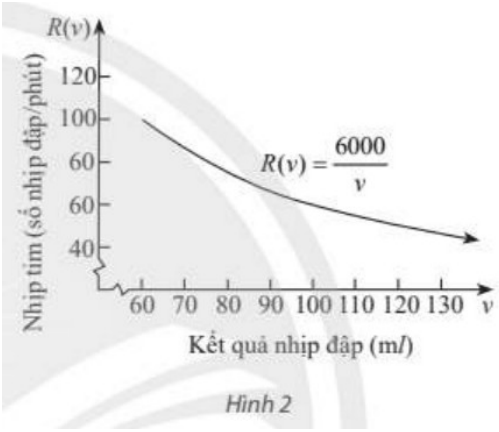
Lời giải

$T'(t) = -0,2t + 1,2$ t = 1,5

Tốc độ thay đổi của nhiệt độ là: Khi thì

$T'(1,5) = -0,2 \cdot 1,5 + 1,2 = 0,9$

Câu 41: Hàm số $R(v) = \frac{6000}{v}$ có thể được sử dụng để xác định nhịp tim R của một người mà tim của người đó có thể đẩy đi được $6000\,ml$ máu trên mỗi phút và $v\ ml$ máu trên mỗi nhịp đập (theo Bách khoa toàn thư Y học "Harrison's internal medicine 21st edition"). Tìm tốc độ thay đổi của nhịp tim khi lượng máu tim đẩy đi ở một nhịp là $v = 80$.



Hình 2

Lời giải

$R'(v) = 6000.\left(-\frac{1}{v^2}\right) = -\frac{6000}{v^2}$

Ta có: .

Tốc độ thay đổi của nhịp tim khi lượng máu tim đẩy đi ở một nhịp là $v = 80$ là:

$R'(80) = -\frac{6000}{80^2} = -0,9375$

.

Câu 42: Đồ thị của hàm số $y = \frac{a}{x}$ (a là hằng số dương) là một đường hypebol. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại một điểm bất kì của đường hypebol đó tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích không đổi.

Lời giải

$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{a^2}$

Phương trình của đường tiếp tuyến tại điểm (x_0, y_0) là: $y - y_0 = -\frac{a}{x^2}(x - x_0)$.

Đường tiếp tuyến cắt trục hoành tại điểm $(x_0, 0)$ và cắt trục tung tại điểm $\left(0, y_0 + \frac{a}{x_0}\right)$.

Diện tích tam giác tạo bởi đường tiếp tuyến và trục hoành là: $S_1 = \frac{1}{2}(x_0 - 0).(0 - y_0) = \frac{1}{2}x_0 y_0$

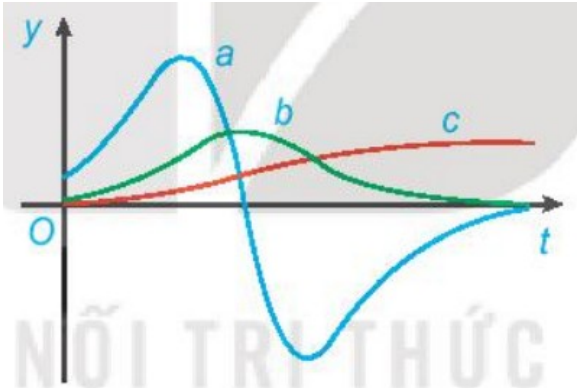
Diện tích tam giác tạo bởi đường tiếp tuyến và trục tung là:

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{a}{x_0} - y_0\right)(0 - x_0) = \frac{1}{2}a$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}(x_0 y_0 + a) = \frac{1}{2}(2a) = a$$

Vì vậy, ta đã chứng minh được rằng diện tích của tam giác tạo bởi đường tiếp tuyến và các trục toạ độ là không đổi và bằng a, với a là hằng số dương của đường hyperbol.

Câu 43: Hình 9.10 biểu diễn đồ thị của ba hàm số. Hàm số thứ nhất là hàm vị trí của một chiếc ô tô, hàm số thứ hai biểu thị vận tốc và hàm số thứ ba biểu thị gia tốc của ô tô đó. Hãy xác định đồ thị của mỗi hàm số này và giải thích.



Hình 9.10

Lời giải

• Hàm số thứ nhất là hàm vị trí của chiếc ô tô, nó biểu thị khoảng cách mà chiếc ô tô đã di chuyển từ điểm xuất phát. Đồ thị của hàm số này là một đường cong mượt mà (nếu không có phần bị gián đoạn) và có độ dốc dương (nếu chiếc ô tô di chuyển theo phương dương) hoặc âm (nếu chiếc ô tô di chuyển theo phương âm).

• Hàm số thứ hai là hàm vận tốc của chiếc ô tô, nó biểu thị tốc độ của chiếc ô tô tại mỗi thời điểm. Đồ thị của hàm số này cũng là một đường cong mượt mà (nếu không có phần bị gián đoạn) và có độ dốc dương (nếu chiếc ô tô tăng tốc) hoặc âm (nếu chiếc ô tô giảm tốc).

• Hàm số thứ ba là hàm gia tốc của chiếc ô tô, nó biểu thị tốc độ thay đổi của chiếc ô tô tại mỗi thời điểm. Đồ thị của hàm số này có thể là một đường cong mượt mà hoặc bị gián đoạn (nếu chiếc ô tô tăng tốc/giảm tốc đột ngột). Nếu đồ thị của hàm số này là một đường thẳng thì nghĩa là gia tốc của chiếc ô tô là hằng số và chiếc ô tô đang di chuyển với chuyển động đều (chuyển động đều là chuyển động mà vận tốc của vật không đổi).

Câu 44: Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình: $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

a) Tính vận tốc của vật tại các thời điểm $t = 2$ giây và $t = 4$ giây.

b) Tại những thời điểm nào vật đứng yên?

c) Tìm gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây.

d) Tính tổng quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên.

e) Trong 5 giây đầu tiên, khi nào vật tăng tốc, khi nào vật giảm tốc?

Lời giải

$a) s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$

$\Rightarrow v = s' = f'(t) = 3t^2 - 12t + 9$

Tại t =2 giây => $v = 3.(2)^2 - 12.2 + 9 = -3(m/s)$

Tại t=4 giây => $v = 3.(4)^2 - 12.4 + 9 = 9(m/s)$

b) Vật đứng yên khi v=0

$v = 3t^2 - 12t + 9 = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1s \\ t = 3s \end{array}\right.$

Vậy tại thời điểm t=1s, t=3s thì vật đứng yên.

c) $a = v' = 6t - 12$

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây là:

$a = 6.4 - 12 = 12(m/s^2)$

d) Tổng quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên là:

$s = 5^3 - 6.5^2 + 9.5 = 20(m)$

e) Do t=1s và t=3s thì v=0m/s

$t = 2 \Rightarrow v = -3m/s$

$t = 4s \Rightarrow v = 9m/s$

$t = 5 \Rightarrow v = 24m/s$

Trong 5 giây đầu tiên, khi vật tăng tốc sau giây thứ 2, khi nào vật giảm tốc sau giây thứ 1

Câu 45: Xét xem các dãy số với công thức tổng quát sau có phải là cấp số cộng/cấp số nhân hay không. Tìm số hạng đầu tiên và công sai/công bội nếu có.

a) $u_n = 5n - 7$; b) $u_n = 9 \cdot 2^n$; c) $u_n = n^2 - n + 1$.

Lời giải

a) Ta có $u_{n+1} = 5(n+1) - 7 = 5n - 2$, suy ra $u_{n+1} - u_n = 5n - 2 - (5n - 7) = 5 \forall n.$

Vậy (u_n) là cấp số cộng và $u_1 = -2, d = 5$. Lại có $\frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{-2} \neq \frac{u_3}{u_2} = \frac{8}{3}$ nên (u_n) không là cấp số nhân.

$u_{n+1}=9\cdot 2^{n+1}=18\cdot 2^n$ $u_{n+1}:u_n=2\forall n$ (u_n) $u_1=18, q=2$

b) Ta có , suy ra . Vậy là cấp số nhân và

.

$u_2-u_1=36-18\neq u_3-u_2=72-36$ (u_n)

Lại có nên không là cấp số cộng.

$\frac{u_2}{u_1}=\frac{3}{1}\neq\frac{u_3}{u_2}=\frac{7}{3}$ (u_n) $u_2-u_1=3-1\neq u_3-u_2=7-3$

c) Ta có nên không là cấp số nhân. Lại có

(u_n)

nên không là cấp số cộng.

Câu 46: Cho phương trình dao động $x(t)=10\cos\left(\frac{2\pi}{5}t+\frac{\pi}{3}\right)$, ở đây li độ x tính bằng centimét và thời gian t tính

bằng giây.

a) Tìm thời điểm đầu tiên để vật có li độ lớn nhất.

b) Tìm thời điểm đầu tiên để vật có vận tốc bằng 0.

c) Tìm thời điểm đầu tiên để vật có gia tốc bằng 0.

Lời giải

$$10\cos\left(\frac{2\pi}{5}t+\frac{\pi}{3}\right)=10\Leftrightarrow t=\frac{-5}{6}+5k, k\in\mathbb{Z}$$

a) Vật có li độ lớn nhất khi . Do $t\geq 0$ nên thời điểm

đầu tiên vật có li độ lớn nhất tương ứng với $k=1$, tức là tại thời điểm $t=\frac{-5}{6}+5=\frac{25}{6}$ (giây).

$$v(t)=x'(t)=-4\pi\sin\left(\frac{2\pi}{5}t+\frac{\pi}{3}\right)$$

b) Ta có vận tốc .

$$-4\pi\sin\left(\frac{2\pi}{5}t+\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow t=-\frac{5}{6}+\frac{5}{2}k, k\in\mathbb{Z}$$

Vận tốc bằng 0 tức là . Do $t\geq 0$ nên thời điểm

đầu tiên vật có vận tốc bằng 0 tương ứng với $k=1$, tức là tại thời điểm $t=\frac{-5}{6}+\frac{5}{2}=\frac{5}{3}$ (giây).

$$a(t)=x''(t)=-\frac{8\pi^2}{5}\cos\left(\frac{2\pi}{5}t+\frac{\pi}{3}\right)$$

c) Ta có gia tốc .

$$-\frac{8\pi^2}{5}\cos\left(\frac{2\pi}{5}t+\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{12}+\frac{5}{2}k,k\in\mathbb{Z}$$

Gia tốc bằng 0 tức là $t\geq 0$. Do nên thời điểm $t=\frac{5}{12}+\frac{5}{2}=\frac{35}{12}$ đầu tiên vật có gia tốc bằng 0 tương ứng với $k=1$, tức là tại thời điểm (giây).

Câu 47: Kính viễn vọng không gian Hubble được triển khai vào ngày 24 tháng 4 năm 1990, bởi tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong nhiệm vụ này từ khi xuất phát tại $t=0$ (s) cho đến khi tên lửa đẩy nhiên liệu rắn bị loại bỏ ở $t=126$ (s) được xác định theo phương trình sau: $v(t)=0,001302t^3-0,09029t^2+23,61t-3,083(\text{f}/\text{s})$.

(Nguồn: James Stewan, Calculus)

Tính gia tốc tức thời của tàu con thoi trên tại thời điểm $t=100$ (s) (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Lời giải

Gia tốc tức thời của tàu con thoi tại thời điểm t (s) là:

$$a(t)=v'(t)=0,003906t^2-0,18058t+23,61(\text{ft}/\text{s}^2).$$

Gia tốc tức thời của tàu con thoi tại thời điểm $t=100$ (s) là:

$$a(100)=0,003906\cdot 100^2-0,18058\cdot 100+23,61=44,612(\text{ft}/\text{s}^2).$$

Câu 48: Sau khi uống đồ uống có cồn, nồng độ cồn trong máu tăng lên rồi giảm dần được xác định bằng hàm số $C(t)=1,35te^{-2,902t}$, trong đó $C(\text{mg}/\text{ml})$ là nồng độ cồn, $t(\text{h})$ là thời điểm đo tính từ ngay sau khi uống 15ml đồ uống có cồn.
(Nguồn: P. Wilkinson et al., Pharmacokinetics of Ethanol after Ora' Administration in the Fasting State, 1977)

Giả sử một người uống hết nhanh 15ml đồ uống có cồn. Tính tốc độ chuyển hoá nồng độ cồn trong máu của người đó tại thời điểm $t=3$ (h) (làm tròn kết quả đến hàng phần triệu).

Lời giải

Ta có: $C'(t)=1,35e^{-2,802t}-3,7827te^{-2,802t}$.

Vậy tốc độ chuyển hoá nồng độ cồn tức thời trong máu của người đó tại thời điểm $t=3$ (h) là:

$$C'(3) = 1,35e^{-2,802.3} - 3,7827 \cdot 3e^{-2,802.3} \approx -0,002235\left(\frac{\text{mg / ml}}{\text{h}}\right).$$

Câu 49: Vị trí chuyển động của một vật trên đường thẳng được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 3t^3 + 5t + 2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc và gia tốc của vật đó khi $t = 1$.

Lời giải

Ta có $s'(t) = 9t^2 + 5$, vận tốc $s'(1) = 14$.

Gia tốc $s''(t) = 18t$, gia tốc $s''(1) = 18$.