

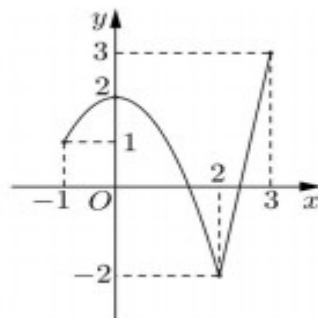
TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN NGUYÊN HÀM

- Câu 1:** Nguyên hàm $I = \int \frac{1}{2 \tan x + 1} dx = \frac{x}{5} + \frac{a}{b} \ln |2 \sin x + \cos x| + C$, với $a, b \in \mathbb{Q}^*$; $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $P = a + 2b$ bằng?
- Câu 2:** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có $f'(x) = 3x^2 + 2x - m + 1$, $f(2) = 1$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $M(1; -3)$. Tính $f(-1)$
- Câu 3:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x^4 + 2x^3 + x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $F(1) = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2021)$ viết dưới dạng $a + \frac{1}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{Z}$). Tổng $a + b$ bằng?
- Câu 4:** Cho hàm số $f(x) = \cos x \cdot \sin^2 x$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2025$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (làm tròn đến hàng đơn vị).
- Câu 5:** Cho hàm số $f(x) = x(2x-1)^{2025}$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Tính $F(0)$ (làm tròn đến hàng đơn vị).
- Câu 6:** Cho biết $I = \int \frac{1}{x^2(x+1)^2} dx = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} - c \ln|x| + d \ln|x+1| + C$, với a, b, c, d là số nguyên. Tính $S = a + b - c + d$.
- Câu 7:** Xác định nguyên hàm: $I = \int (\sin^4 x + \cos^4 x) \sin 2x dx$? ta thu được kết quả có dạng $-\frac{\cos 2x}{a} - \frac{\cos^3 2x}{b} + C$. Khi đó $a^2 + b = ?$.
- Câu 8:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$. Giá trị của $f(2)$ bằng.
- Câu 9:** Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Tính tổng bình phương các nghiệm của phương trình $F(x) = x[1 + \log(x^2+1)]$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần 10)
- Câu 10:** Một xe ô tô đang chuyển động đều thì người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường. Sau 1 giây thì người lái xe bắt đầu đạp phanh. Ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -5m/s^2$. Biết rằng kể từ lúc nhìn thấy chướng ngại vật cho đến khi dừng hẳn thì xe đi thêm được quãng đường 41,6 mét. Vận tốc của xe khi người lái xe bắt đầu phanh là bao nhiêu m/s ?
- Câu 11:** Giả sử hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x}$, với mọi $x > 0$. Tính $f(5)$? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Câu 12: Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15 m/s thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó 50 m , người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15\text{ (m/s)}$, trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô đi chuyển được bao nhiêu mét?

Câu 13: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc thời gian t (s) là $a(t) = 2t - 7\text{ (m/s}^2\text{)}$. Biết vận tốc đầu bằng 10 (m/s) , hỏi sau bao lâu thì chất điểm đạt vận tốc 18 (m/s) ?

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$, có đồ thị là một phần của parabol và một phần là đoạn thẳng như trong hình bên dưới. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ và $F(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ thỏa mãn $F(-1) = -\frac{5}{3}$. Giá trị của $F(0) + F(3)$ bằng bao nhiêu? (kết quả lấy đến chữ số thập phân thứ nhất sau dấu phẩy).



Câu 15: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t phút. Biết $h'(t) = 3at^2 + bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 phút thì thể tích nước trong bể là 150 dm^3 , sau 10 phút thì thể tích nước trong bể là 1100 dm^3 . Thể tích của nước trong bể sau khi bơm được 20 phút là bao nhiêu dm^3 ?

Câu 16: Một hòn đá được ném lên theo phương thẳng đứng, bỏ qua lực cản của không khí, với vận tốc ban đầu là 10 (m/s) , lấy $g = 10\text{ (m/s}^2\text{)}$. Khi lên đến điểm cao nhất hòn đá rơi thẳng đứng đến khi chạm đất. Tính thời gian viên đá bay từ lúc ném lên đến khi chạm đất.

Câu 17: Biết rằng hàm số $F(x) = x + 2024$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$; hàm số $G(x) = \frac{x^2}{4} + 2025$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$. Gọi $H(x) = \int f(x) \cdot g(x) dx$, biết $H(4) = 4$. Tính $H(1)$.

Câu 18: Một hồ bơi có dạng hình hộp chữ nhật có chiều cao $3,0\text{ (m)}$ đang không chứa nước. Người ta cần thay nước mới cho hồ bơi nên dùng máy bơm để bơm nước vào hồ, giả sử $h(t)\text{ (m)}$ là chiều cao của mực nước đã được bơm vào tại thời điểm t giờ. Biết rằng tốc độ tăng chiều cao của mực nước tại giờ thứ t kể từ lúc bắt đầu bơm nước vào hồ là $h'(t) = \frac{\sqrt[3]{t+3}}{5}$. Hỏi sau

bao nhiêu giờ kể từ lúc bắt đầu bơm thì hồ đạt được độ sâu $2,1(m)$ (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Trả lời : 6 .

$$* \quad h(t) = \int h'(t) dt = \frac{1}{5} \int (t+3)^{\frac{1}{3}} dt = \frac{3}{20} (t+3)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$* \quad h(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{9\sqrt[3]{3}}{20} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{9\sqrt[3]{3}}{20} \rightarrow h(t) = \frac{3}{20} (t+3)^{\frac{4}{3}} - \frac{9\sqrt[3]{3}}{20}$$

$$* \quad h(t) = 2,1 \Leftrightarrow \frac{3}{20} (t+3)^{\frac{4}{3}} - \frac{9\sqrt[3]{3}}{20} = 2,1 \Leftrightarrow (t+3)^{\frac{4}{3}} \approx 18,33 \rightarrow t \approx 6$$

Vậy sau khi bơm khoảng 6 giờ thì độ sâu của mực nước trong hồ là 2,1 (m).

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI

Câu 1: Nguyên hàm $I = \int \frac{1}{2 \tan x + 1} dx = \frac{x}{5} + \frac{a}{b} \ln |2 \sin x + \cos x| + C$, với $a; b \in \mathbb{Z}^*$; $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $P = a + 2b$ bằng?

Lời giải

Đáp án : 12

Ta có
$$I = \int \frac{1}{2 \tan x + 1} dx = \int \frac{\cos x}{2 \sin x + \cos x} dx$$

Đặt
$$J = \int \frac{\sin x}{2 \sin x + \cos x} dx$$

Khi đó
$$2J + I = \int \frac{2 \sin x}{2 \sin x + \cos x} dx + \int \frac{\cos x}{2 \sin x + \cos x} dx = \int \frac{2 \sin x + \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx = \int dx = x + C_1$$

(1)

Mặt khác ta lại có :
$$2I - J = \int \frac{2 \cos x - \sin x}{2 \sin x + \cos x} dx = \ln |2 \sin x + \cos x| + C_2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2)
$$\Rightarrow I = \frac{x}{5} + \frac{2}{5} \ln |2 \sin x + \cos x| + C$$

Vậy
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a + 2b = 12$$

Câu 2: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có $f'(x) = 3x^2 + 2x - m + 1$, $f(2) = 1$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $M(1; -3)$. Tính $f(-1)$

Lời giải

Đáp án 7 .

Ta có
$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 + 2x - m + 1) dx = x^3 + x^2 + (1 - m)x + C$$

Theo giả thiết
$$\begin{cases} f(2) = 1 \\ f(1) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^3 + 2^2 + (1 - m) \cdot 2 + C = 1 \\ 1 + 1 + (1 - m) + C = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + C = -13 \\ -m + C = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ C = 1 \end{cases}$$

Suy ra $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 1$. Vậy $f(-1) = 7$.

Câu 3: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x^4 + 2x^3 + x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $F(1) = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2021)$ viết dưới dạng $a + \frac{1}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}$). Tổng $a+b$ bằng?

Lời giải

Xét trên khoảng $(0; +\infty)$:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^4 + 2x^3 + x^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$$

Ta có

Khi đó

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{(2x+1)}{(x^2+x)^2} dt = \int \frac{1}{(x^2+x)^2} d(x^2+x) = -\frac{1}{x^2+x} + C = -\frac{1}{x(x+1)} + C$$

Mặt khác, $F(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1$.

$$F(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + 1 = -\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right] + 1$$

Vậy

Suy ra

$$\begin{aligned} S &= F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2021) = -\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2021.2022}\right) + 2021 \\ &= -\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022}\right) + 2021 = -\left(1 - \frac{1}{2022}\right) + 2021 \\ &= 2020 + \frac{1}{2022} = a + \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 2020; b = 2022$.

Vậy tổng $a+b = 2020 + 2022 = 4042$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \cos x \cdot \sin^2 x$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2025$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp số: 2025.

$$\begin{aligned} +) \quad & \text{Ta có} \quad f(x) = \cos x \cdot \sin^2 x = \cos x \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) = \frac{1}{2} (\cos x - \cos x \cos 2x) \\ &= \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{4} (\cos 3x + \cos x) = \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{4} \cos 3x \end{aligned}$$

$$+) \quad F(x) = \int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{4} \cos 3x \right) dx = \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{12} \sin 3x + C$$

Lại có: $F(0) = 2025 \Rightarrow C = 2025 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{12} \sin 3x + 2025$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{12} \sin \frac{3\pi}{2} + 2025 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + 2025 = \frac{6076}{3} \approx 2025$$

Vậy $F\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 2025$

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = x(2x-1)^{2025}$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Tính $F(0)$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp số: 1.

$$f(x) = x(2x-1)^{2025} = \frac{1}{2}(2x-1+1)(2x-1)^{2025} = \frac{1}{2}(2x-1)^{2026} + \frac{1}{2}(2x-1)^{2025}$$

+) Ta có

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{2}(2x-1)^{2026} + \frac{1}{2}(2x-1)^{2025} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(2x-1)^{2027}}{2027} + \frac{1}{4} \frac{(2x-1)^{2026}}{2026} + C = \frac{(2x-1)^{2027}}{8108} + \frac{(2x-1)^{2026}}{8104} + C$$

Lại có: $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{(2x-1)^{2027}}{8108} + \frac{(2x-1)^{2026}}{8104} + 1$

$$\Rightarrow F(0) = \frac{(-1)^{2027}}{8108} + \frac{(-1)^{2026}}{8104} + 1 \approx 1$$

Vậy $F(0) \approx 1$

Câu 6: Cho biết $I = \int \frac{1}{x^2(x+1)^2} dx = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} - c \ln|x| + d \ln|x+1| + C$, với a, b, c, d là số nguyên. Tính $S = a + b - c + d$.

Lời giải

Trả lời: $S = -2$

Ta có

$$I = \int \frac{1}{x^2(x+1)^2} dx = \int \left[\frac{1}{x(x+1)} \right]^2 dx = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right]^2 dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x(x+1)} \right] dx = \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} \right] dx$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - 2 \ln|x| + 2 \ln|x+1| + C$$

Đổi chiếu yêu cầu bài toán ta có $a = -1; b = -1; c = 2; d = 2$, suy ra $S = a + b - c + d = -2$.

Chú ý: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int \frac{(ax+b)'}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$

$$\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \int \frac{(ax+b)'}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$$

Câu 7: Xác định nguyên hàm: $I = \int (\sin^4 x + \cos^4 x) \sin 2x dx$? ta thu được kết quả có dạng $-\frac{\cos 2x}{a} - \frac{\cos^3 2x}{b} + C$. Khi đó $a^2 + b = ?$.

Lời giải

Trả lời: 28

Ta có: $(\sin^4 x + \cos^4 x) \sin 2x = ((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x) \sin 2x$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right) \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow (\sin^4 x + \cos^4 x) \sin 2x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x\right) \sin 2x$$

Suy ra: $I = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x\right) \sin 2x dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x\right) \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x\right) d(\cos 2x) = -\frac{1}{4} \int (1 + \cos^2 2x) d(\cos 2x) \\ &= -\frac{1}{4} \int d(\cos 2x) - \frac{1}{4} \int \cos^2 2x d(\cos 2x) = -\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos^3 2x}{12} + C \end{aligned}$$

Khi đó $a = 4, b = 12 \Rightarrow a^2 + b = 28$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$. Giá trị của $f(2)$ bằng.

Lời giải

Trả lời: 20

Ta có: $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 2x^3 + 3x^2 = x^2(2x + 3)$

$$\Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2x + 3 \Leftrightarrow \int \left(\frac{f(x)}{x}\right)' dx = \int (2x + 3) dx \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = x^2 + 3x + C$$

Do $f(1) = 4 \Rightarrow 4 = 1 + 3 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow f(2) = 20$.

Câu 9: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Tính tổng bình phương các nghiệm của phương trình $F(x) = x[1 + \log(x^2 + 1)]$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần 10)

Lời giải

Kết quả: 5,3

Ta có
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} = 1 + \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = 1 + [\ln(x^2 + 1)]'$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \int 1 dx + \int [\ln(x^2 + 1)]' dx = x + \ln(x^2 + 1) + C \Rightarrow F(x) = x + \ln(x^2 + 1) + C$$

$$F(0) = 0 \Leftrightarrow 0 + \ln(0^2 + 1) + C = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = x + \ln(x^2 + 1)$$

Xét phương trình
$$F(x) = x[1 + \log(x^2 + 1)]$$

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$

Phương trình
$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = x \log(x^2 + 1) \Leftrightarrow \ln 10 \cdot \log(x^2 + 1) - x \log(x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log(x^2 + 1) \cdot (\ln 10 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log(x^2 + 1) = 0 \\ \ln 10 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 1 \\ x = \ln 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \ln 10 \end{cases}$$

Vậy tổng bình phương các nghiệm của phương trình là
$$T = 0^2 + (\ln 10)^2 \approx 5,3$$

Câu 10: Một xe ô tô đang chuyển động đều thì người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường. Sau 1 giây thì người lái xe bắt đầu đạp phanh. Ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -5 \text{ m/s}^2$. Biết rằng kể từ lúc nhìn thấy chướng ngại vật cho đến khi dừng hẳn thì xe đi thêm được quãng đường 41,6 mét. Vận tốc của xe khi người lái xe bắt đầu phanh là bao nhiêu m/s ?

Lời giải

Kết quả: 16

Gọi vận tốc của xe khi bắt đầu phanh là $v_0 \text{ (m/s)}$

Vận tốc tại thời điểm t kể từ lúc bắt đầu phanh là:
$$v(t) = \int (-5) dt = -5t + C$$

Vận tốc của vật tại thời điểm bắt đầu phanh xe là $v_0 \text{ (m/s)}$ nên ta có
$$v(0) = v_0 \Rightarrow C = v_0 \Rightarrow v(t) = -5t + v_0$$

Quãng đường vật đi được tại thời điểm t kể từ khi bắt đầu đạp phanh là
$$S(t) = \int v(t) dt = \int (-5t + v_0) dt = -\frac{5}{2}t^2 + v_0t + C$$

Ta có
$$S(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow S(t) = -\frac{5}{2}t^2 + v_0t$$

Khi xe dừng hẳn ta có
$$v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + v_0 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{5}$$

Quãng đường xe đi được từ khi bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là

$$S = S\left(\frac{v_0}{5}\right) = -\frac{5}{2}\left(\frac{v_0}{5}\right)^2 + \frac{v_0^2}{5} = \frac{v_0^2}{10} \text{ (m)}$$

Quãng đường người lái xe đi từ khi nhìn thấy chướng ngại vật đến khi đạp phanh là $v_0 \text{ (m)}$.

Theo bài ra ta có phương trình
$$\frac{v_0^2}{10} + v_0 = 41,6$$

Giải phương trình ta được $\begin{cases} v_0 = 16 \\ v_0 = -26 \end{cases}$.

Vậy vận tốc khi người lái xe bắt đầu phanh là 16 (m/s) .

Câu 11: Giả sử hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f'(x) = f(x) \cdot \sqrt{3x}$, với mọi $x > 0$. Tính $f(5)$? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Ta có :

$$f'(x) = f(x) \cdot \sqrt{3x}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x}}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x} + C$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x} + C}$$

$$f(1) = 1 \text{ nên } 1 = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} + C} \Rightarrow C = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Mà

$$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$\text{Suy ra } f(5) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{3}}} = e^{\frac{2\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}} \approx 4,2$$

Câu 12: Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15 m/s thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó 50 m , người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15 \text{ (m/s)}$, trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô đi chuyển được bao nhiêu mét?

Lời giải

Quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) là một nguyên hàm của $v(t)$ nên:

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (-3t + 15) dt = -\frac{3t^2}{2} + 15t + C$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{3t^2}{2} + 15t + C$$

$$t = 0 \Rightarrow s(0) = 0$$

Cho

$$\Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{3t^2}{2} + 15t$$

Khi xe dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow -3t + 15 = 0 \Rightarrow t = 5$.

Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây.

Sau khi đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe đi được quãng đường:

$$s(5) = -\frac{3 \cdot 5^2}{2} + 15 \cdot 5 = 37,5(m)$$

Câu 13: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc thời gian t (s) là $a(t) = 2t - 7$ (m/s²). Biết vận tốc đầu bằng 10 (m/s), hỏi sau bao lâu thì chất điểm đạt vận tốc 18 (m/s)?

Lời giải

Đáp án : 8.

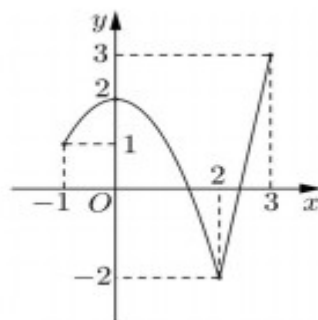
Ta có $v(t) = \int a(t) dt = \int (2t - 7) dt = t^2 - 7t + C$, mặt khác $v(0) = 10$ nên $C = v(0) = 10$.
 $\Rightarrow v(t) = t^2 - 7t + 10$

$$v(t) = 18 \Leftrightarrow t^2 - 7t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 \text{ (nhận)} \\ t = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Để chất điểm đạt vận tốc 18 (m/s) thì

Vậy tại thời điểm $t = 8$ (s) thì chất điểm đạt vận tốc 18 (m/s).

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$, có đồ thị là một phần của parabol và một phần là đoạn thẳng như trong hình bên dưới. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ và $F(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ thỏa mãn $F(-1) = -\frac{5}{3}$. Giá trị của $F(0) + F(3)$ bằng bao nhiêu? (kết quả lấy đến chữ số thập phân thứ nhất sau dấu phẩy).



Lời giải

Đáp án : 1,8.

+) Trên $[-1; 2]$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ là một phần của parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua các điểm $(-1; 1), (0; 2), (2; -2)$ nên

$$\begin{cases} a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 1 \\ c = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow (P): y = -x^2 + 2.$$

+) Trên $[2; 3]$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đoạn thẳng $(d): y = mx + n$ đi qua các điểm $(2; -2), (3; 3)$ nên $\begin{cases} 2m + n = -2 \\ 3m + n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = -12 \end{cases} \Rightarrow (d): y = 5x - 12.$

Vậy
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{khi } -1 \leq x \leq 2 \\ 5x - 12 & \text{khi } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{-x^3}{3} + 2x + C_1 & \text{khi } -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{5x^2}{2} - 12x + C_2 & \text{khi } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

+) Từ đó

Do $F(-1) = -\frac{5}{3} \Rightarrow C_1 = 0.$

Ta có $F(x)$ liên tục tại $x = 2$ nên $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{-x^3}{3} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{5x^2}{2} - 12x + C_2 \right) \Rightarrow C_2 = \frac{46}{3}.$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{-x^3}{3} + 2x & \text{khi } -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{5x^2}{2} - 12x + \frac{46}{3} & \text{khi } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

Khi đó :

Vậy $F(0) + F(3) = \frac{11}{6} \approx 1,8.$

Câu 15: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t phút. Biết $h'(t) = 3at^2 + bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 phút thì thể tích nước trong bể là $150 dm^3$, sau 10 phút thì thể tích nước trong bể là $1100 dm^3$. Thể tích của nước trong bể sau khi bơm được 20 phút là bao nhiêu dm^3 ?

Lời giải

Đáp án: 8400.

Ta có: $h(t) = \int h'(t) dt = \int (3at^2 + bt) dt = at^3 + b \frac{t^2}{2} + C.$

Do ban đầu bể không có nước nên $h(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow h(t) = at^3 + b \frac{t^2}{2}.$

Lúc 5 phút: $h(5) = a \cdot 5^3 + b \cdot \frac{5^2}{2} = 150 \quad (1).$

Lúc 10 phút: $h(10) = a \cdot 10^3 + b \cdot \frac{10^2}{2} = 1100 \text{ (2)}.$

Từ (1) và (2) suy ra $a = 1, b = 2 \Rightarrow h(t) = t^3 + t^2 \Rightarrow h(20) = 20^3 + 20^2 = 8400 \text{ dm}^3.$

Câu 16: Một hòn đá được ném lên theo phương thẳng đứng, bỏ qua lực cản của không khí, với vận tốc ban đầu là 10 (m/s) , lấy $g = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Khi lên đến điểm cao nhất hòn đá rơi thẳng đứng đến khi chạm đất. Tính thời gian viên đá bay từ lúc ném lên đến khi chạm đất.

Lời giải

Trả lời: $2 \text{ (s)}.$

+ Vận tốc khi viên đá bay lên là $v_1(t) = \int -g dt = \int -10 dt = -10t + C$

+ Theo giả thiết ta có $v_1(0) = 10 \Rightarrow C = 10 \Rightarrow v_1(t) = -10t + 10$

+ Đến vị trí cao nhất thì viên đá dừng, ta có.

+ Quãng đường từ lúc ném đến khi viên đá đạt độ cao nhất là:

$$S_1(t) = \int v_1(t) dt = \int (-10t + 10) dt = -5t^2 + 10t + C_1$$

+ Ta có $S_1(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow S_1(t) = -5t^2 + 10t$

+ Sau 1 (s) viên đá đạt độ cao $\Rightarrow S_1(1) = 5 \text{ (m)}$

+ Vận tốc khi viên đá rơi xuống là $v_2(t) = \int g dt = \int 10 dt = 10t + C_2$

+ Lúc bắt đầu rơi $v_2(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow v_2(t) = 10t$

+ Quãng đường viên đá rơi xuống là: $S_2(t) = \int v_2(t) dt = \int 10t dt = 5t^2 + C_3$

+ Ta có $S_2(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \Rightarrow S_2(t) = 5t^2$

Do đó $5t^2 = 5 \Rightarrow t = 1 \text{ (s)}$, suy ra thời gian viên đá rơi đến khi chạm đất là $1 \text{ (s)}.$

Vậy tổng thời gian viên đá từ lúc ném lên đến khi rơi xuống là $2 \text{ (s)}.$

Câu 17: Biết rằng hàm số $F(x) = x + 2024$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$; hàm số $G(x) = \frac{x^2}{4} + 2025$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$. Gọi $H(x) = \int f(x) \cdot g(x) dx$, biết $H(4) = 4$. Tính $H(1)$.

Lời giải

Trả lời: $\frac{1}{4} = 0,25$

* $f(x) = F'(x) = 1; g(x) = G'(x) = \frac{x}{2}$

* $H(x) = \int f(x) \cdot g(x) dx = \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} + C$

* $H(4) = 4$ nên suy ra $C = 0$. Do đó $H(x) = \frac{x^2}{4}$

$$* \quad H(1) = \frac{1}{4} = 0,25$$

Câu 18: Một hồ bơi có dạng hình hộp chữ nhật có chiều cao $3,0(\text{m})$ đang không chứa nước. Người ta cần thay nước mới cho hồ bơi nên dùng máy bơm để bơm nước vào hồ, giả sử $h(t)(\text{m})$ là chiều cao của mực nước đã được bơm vào tại thời điểm t giờ. Biết rằng tốc độ tăng chiều cao của mực nước tại giờ thứ t kể từ lúc bắt đầu bơm nước vào hồ là $h'(t) = \frac{\sqrt[3]{t+3}}{5}$. Hỏi sau bao nhiêu giờ kể từ lúc bắt đầu bơm thì hồ đạt được độ sâu $2,1(\text{m})$ (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Trả lời : 6 .

$$* \quad h(t) = \int h'(t) dt = \frac{1}{5} \int (t+3)^{\frac{1}{3}} dt = \frac{3}{20} (t+3)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$* \quad h(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{9\sqrt[3]{3}}{20} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{9\sqrt[3]{3}}{20} \rightarrow h(t) = \frac{3}{20} (t+3)^{\frac{4}{3}} - \frac{9\sqrt[3]{3}}{20}$$

$$* \quad h(t) = 2,1 \Leftrightarrow \frac{3}{20} (t+3)^{\frac{4}{3}} - \frac{9\sqrt[3]{3}}{20} = 2,1 \Leftrightarrow (t+3)^{\frac{4}{3}} \approx 18,33 \rightarrow t \approx 6$$

Vậy sau khi bơm khoảng 6 giờ thì độ sâu của mực nước trong hồ là 2,1 (m).