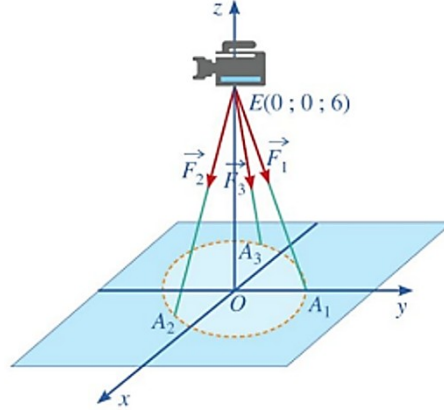


BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN VECTO VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Câu 1: Một chiếc máy được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0;0;6)$ và các điểm tiếp xúc với

$$A_1(0;1;0), A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right), A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right).$$

mặt đất của ba chân lần lượt là 300 N . Biết rằng trọng lực tổng hợp của chiếc máy là 300 N . Tìm được tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ khi đó tích vô hướng của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ bằng?



Lời giải

Trả lời: 9861

$$\vec{EA}_1 = (0;1;-6); \vec{EA}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};-6\right); \vec{EA}_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};-6\right) \Rightarrow EA_1 = EA_2 = EA_3 = \sqrt{37}$$

Ta có:

$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$ vì đèn cân bằng và trọng lực của đèn tác dụng đều lên 3 chân của giá đỡ

Do đó:

$$\vec{F}_1 = k\vec{EA}_1 = (0;k;-6k)$$

$$\vec{F}_2 = k\vec{EA}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k;-\frac{1}{2}k;-6k\right)$$

$$\vec{F}_3 = k\vec{EA}_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k;-\frac{1}{2}k;-6k\right)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (0;0;-18k)$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{P} = (0;0;-300) \Rightarrow -18k = 300 \Leftrightarrow k = \frac{50}{3}$$

Mà

$$\vec{F}_1 = \left(0;\frac{50}{3};-100\right); \vec{F}_2 = \left(\frac{25\sqrt{3}}{3};-\frac{50}{6};-100\right); \vec{F}_3 = \left(-\frac{25\sqrt{3}}{3};-\frac{50}{6};-100\right)$$

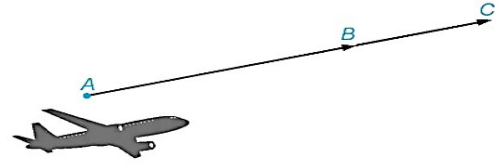
Vậy

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2 = \frac{88750}{9} \approx 9861$$

Suy ra

Câu 2: Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước, ra đã phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì cao độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là gì?

Trả lời: 8,5.



Gọi $C(x; y; z)$ là vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $AB = 2BC$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \left(\frac{940-800}{2}; \frac{550-500}{2}; \frac{8-7}{2} \right) = (70; 25; 0,5)$$

$$\text{Mặt khác, } \overrightarrow{BC} = (x-940; y-550; z-8) \text{ nên } \begin{cases} x-940=70 \\ y-550=25 \\ z-8=0,5. \end{cases}$$

$$\text{Từ đó } \begin{cases} x=1010 \\ y=575 \\ z=8,5 \end{cases} \text{ và vì vậy } C(1010; 575; 8,5).$$

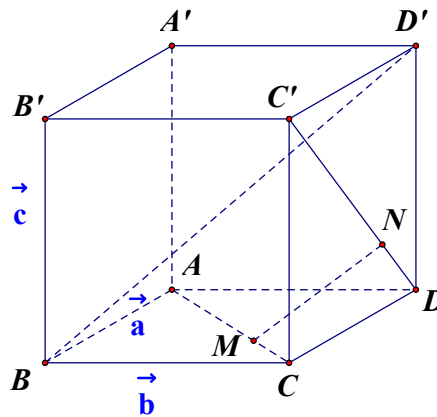
Toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(1010; 575; 8,5)$.

Vậy cao độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là 8,5.

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử điểm M thuộc AC , điểm N thuộc DC' và $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{DC'}$, đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{c}$. Có một cặp $(x; y)$ sao cho $MN \parallel BD'$, khi đó tính biểu thức $T = x + y$

Lời giải

Trả lời: 1



Ta có: $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{c}$.

Khi đó, theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM}$

Từ $\overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{DC'}$, ta có $\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BD} = y(\overrightarrow{BC'} - \overrightarrow{BD})$, suy ra:

$$\overrightarrow{BN} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = y \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\overrightarrow{BN} = (1-y) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + y \frac{1}{c}$$

$$\text{Từ } \overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AC}, \text{ suy ra } \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = x (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{BM} - \frac{1}{a} = x \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = (1-x) \frac{1}{a} + x \frac{1}{b}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = (1-y) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + y \frac{1}{c} - (1-x) \frac{1}{a} - x \frac{1}{b} \\ &= (x-y) \frac{1}{a} + (1-x) \frac{1}{b} + y \frac{1}{c} \end{aligned}$$

Điều kiện để $MN \parallel BD'$ là $\overrightarrow{MN} = k \overrightarrow{BD'}$ hay

$$(x-y) \frac{1}{a} + (1-x) \frac{1}{b} + y \frac{1}{c} = k \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

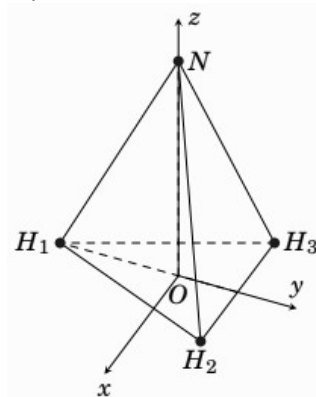
$$(x-y) \frac{1}{a} + (1-x) \frac{1}{b} + y \frac{1}{c} = k \frac{1}{a} + k \frac{1}{b} + k \frac{1}{c} \quad (*)$$

Do $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ không cùng phương nên từ (*) suy ra:

$$\begin{cases} k = x - y \\ k = 1 - x \\ k = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 1 \\ k = y \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, k) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$\text{Vậy biểu thức } T = x + y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Câu 4: Trong hóa học, cấu tạo của phân tử ammoniac (NH_3) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen (N) và đáy là tam giác $H_1H_2H_3$ với H_1, H_2, H_3 là vị trí của ba nguyên tử hydrogen (H). Góc tạo bởi liên kết $H-N-H$, có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối N với hai trong ba điểm H_1, H_2, H_3 , gọi là góc liên kết của phân tử NH_3 . Góc này xấp xỉ 107° . Trong không gian $Oxyz$, cho một phân tử NH_3 được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều $N.H_1H_2H_3$ với O là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm N thuộc trục Oz , ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí H_1, H_2, H_3 trong đó $H_1(0; -2; 0)$ và H_2H_3 song song với trục Ox như hình vẽ minh họa:



Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với nguyên tử hydrogen

Lời giải

Trả lời: 2,15

Gọi x là khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với nguyên tử hydrogen nên $NH_2 = x$

Do tam giác $H_1H_2H_3$ đều và có tâm O nên $OH_1 = \frac{H_1H_2\sqrt{3}}{3}$; $OH_1 = 2 \Rightarrow H_1H_2 = 2\sqrt{3}$.

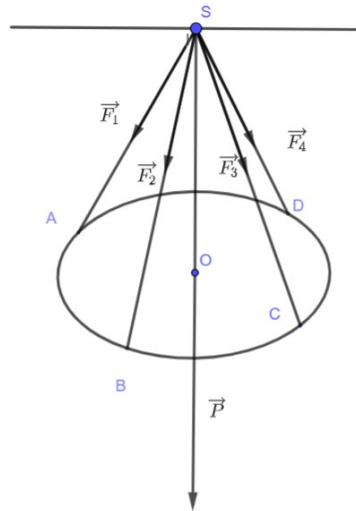
Áp dụng định lý cosin, ta có:

$$H_1H_2^2 = NH_1^2 + NH_2^2 - 2NH_1 \cdot NH_2 \cdot \cos \angle H_1NH_2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x^2 \cos 107^\circ = 12$$

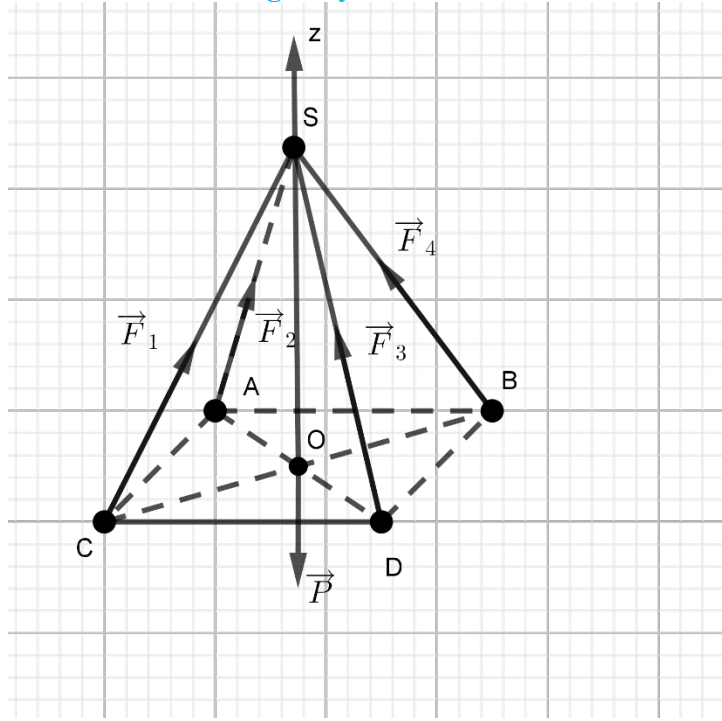
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{12}{2 - 2 \cos 107^\circ} \Leftrightarrow x \approx 2,15$$

Câu 5: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi bốn dây không dẫn xuất phát từ điểm S trên trần nhà lần lượt buộc vào bốn điểm $A; B; C; D$ trên nền tròn sao cho tứ giác $ABCD$ là hình vuông. Độ dài của bốn đoạn dây SA, SB, SC, SD đều bằng L . Trọng lượng của chiếc đèn là $32N$ và bán kính của chiếc đèn là $60cm$. Gọi F là độ lớn của các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ trên mỗi sợi dây. Khi đó, $F = F(L)$ là một hàm số với biến số là L . Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế chịu được lực căng tối đa là $12N$.



Lời giải

Trả lời: 80,5



Các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ trên mỗi sợi dây tại S cũng là các lực căng trên mỗi sợi dây tại A, B, C, D .

Gọi tâm chiếc đèn là O .

⊞ Xét theo phương Oz , vì đèn cân bằng theo phương thẳng đứng nên ta có:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = -\vec{P}$$

Chiều lên Oz :

$$F_1 \sin \angle SAO + F_2 \sin \angle SBO + F_3 \sin \angle SCO + F_4 \sin \angle SDO = 32$$

Xét tam giác vuông SOA vuông tại O : $\cos \angle SAO = \frac{r}{L} = \frac{60}{L}$.

Ta có $ABCD$ là hình vuông và $SA = SB = SC = SD = L$ suy ra $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều. $\Rightarrow \angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO$.

$$4F \cdot \sin \angle SAO = 32 \Rightarrow F = \frac{8}{\sin \angle SAO} = \frac{8}{\sqrt{1 - \cos^2 \angle SAO}} = \frac{8}{\sqrt{1 - \left(\frac{60}{L}\right)^2}} = \frac{8L}{\sqrt{L^2 - 3600}}$$

Từ ta có:

$$F = F(L) = \frac{8L}{\sqrt{L^2 - 3600}}$$

Vậy

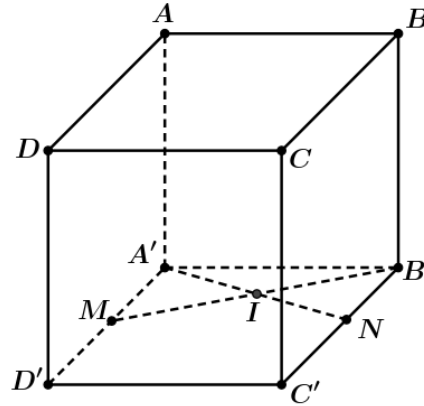
$$F = F(L) = \frac{8L}{\sqrt{L^2 - 3600}} \leq 12 \Leftrightarrow L \geq 80,5 \text{ cm}$$

Vậy chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây là $80,5 \text{ cm}$.

Câu 6: Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi N là điểm thỏa $\vec{CN} = 2\vec{NB'}$, M là trung điểm của $A'D'$, I là giao điểm của $A'N$ và $B'M$. Biết $\vec{AI} = a\vec{AA'} + b\vec{AB} + c\vec{AD}$. Tổng $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 1,8



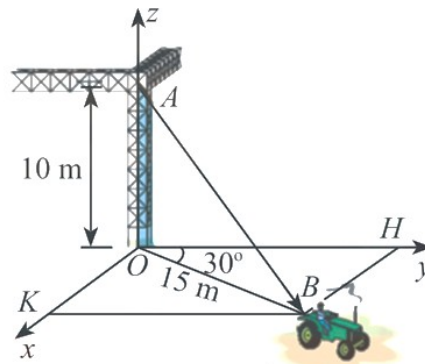
Ta có tam giác $IA'M$ đồng dạng với tam giác INB' nên suy ra:

$$\frac{IA'}{IN} = \frac{A'M}{B'N} = \frac{\frac{1}{2}A'D'}{\frac{1}{3}A'D'} = \frac{3}{2} \Rightarrow A'I = \frac{3}{5}A'N$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{AA'} + \frac{3}{5}\overrightarrow{A'N} = \overrightarrow{AA'} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'N}) = \overrightarrow{AA'} + \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right) \\ &= \overrightarrow{AA'} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AD} \quad a+b+c = \frac{9}{5} = 1,8 \end{aligned}$$

Suy ra

Câu 7: Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới với độ dài đơn vị trên các trục toạ độ bằng $1m$. Tìm được toạ độ của vector $\overrightarrow{AB} = (a; b; c)$. Khi đó tính $a + c$



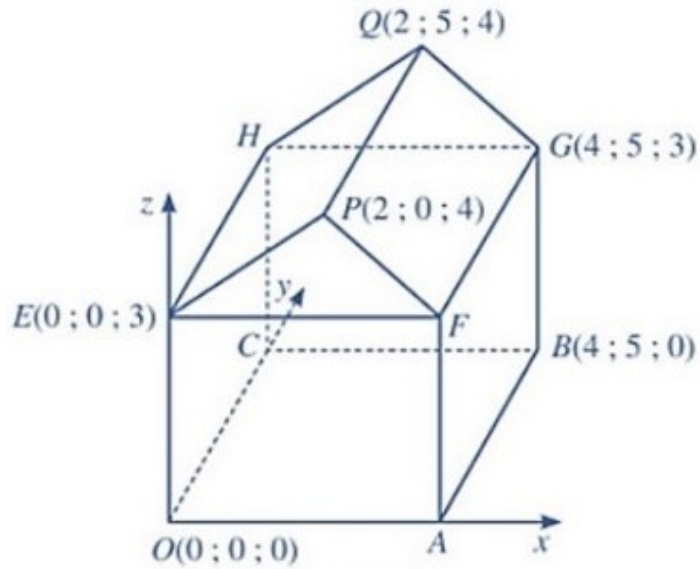
Lời giải

Trả lời: $-2,5$.

Ta có: $\overrightarrow{OA} = 10\vec{k} \Rightarrow A(0; 0; 10)$ và $OH = OB \cdot \cos 30^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{2}$; $OK = OB \cdot \cos(90^\circ - 30^\circ) = \frac{15}{2}$

$\Rightarrow B\left(\frac{15}{2}; \frac{15\sqrt{3}}{2}; 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\frac{15}{2}; \frac{15\sqrt{3}}{2}; -10\right)$. Vậy $a + c = -2,5$

Câu 8: Hình bên dưới minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật. Tính số đo góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$.

**Lời giải**

Trả lời: $26,6^\circ$.

Để tính góc dốc của mái nhà, ta tính số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$.

Do mặt phẳng (Oxz) vuông góc với hai mặt phẳng $(FGQP)$ và $(FGHE)$; $(Oxz) \cap (FGQP) = FP$; $(Oxz) \cap (FGHE) = FE$ nên $\widehat{PFE}$ là góc phẳng nhị diện cần tìm.

Tứ giác $OAFE$ là hình chữ nhật nên $x_F = x_A = 4$, $z_F = z_E = 3$

Do F nằm trên mặt phẳng (Oxz) nên tọa độ điểm $F(4;0;3)$.

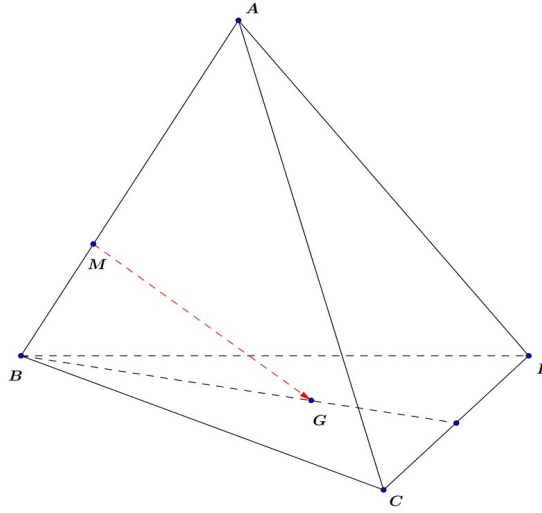
Ta có $\overrightarrow{FP} = (-2;0;1)$, $\overrightarrow{FE} = (-4;0;0)$ suy ra

$$\cos \widehat{PFE} = \cos(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FE}) = \frac{\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FE}}{|\overrightarrow{FP}| \cdot |\overrightarrow{FE}|} = \frac{(-2)(-4) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Do đó, $\widehat{PFE} \approx 26,6^\circ$. Vậy góc dốc mái nhà khoảng $26,6^\circ$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD và điểm M thuộc cạnh AB sao cho $AM = 2BM$. Khi đó $\overrightarrow{MG} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$. Tìm tổng $2x + y + z$.

Lời giải



Trả lời: 0 .

Ta có M thuộc cạnh AB và $AM = 2BM$ nên $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$.

Do G là trọng tâm tam giác BCD nên $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ hay $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Mà $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AM}$ nên $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) - \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$

$$\Rightarrow 2x + y + z = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

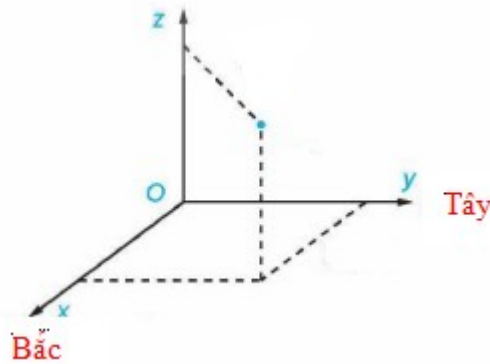
Câu 10: Hai chiếc khinh khí cầu cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $80(km)$ và về phía Nam $65(km)$, đồng thời cách mặt đất $700(m)$. Chiếc khinh khí cầu thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $50(km)$ và về phía Tây $30(km)$, đồng thời cách mặt đất $900(m)$. Xác định khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai.



Lời giải

Trả lời: 161.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc kính khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét.



Chiếc kính khí cầu thứ nhất có tọa độ $(-80; -65; 0,7)$.

Chiếc kính khí cầu thứ hai có tọa độ $(50; 30; 0,9)$.

Khoảng cách giữa chiếc kính khí cầu thứ nhất và chiếc kính khí cầu thứ hai là:

$$\sqrt{(-80-50)^2 + (-65-30)^2 + (0,7-0,9)^2} \approx 161(km)$$

Câu 11: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Tính cosin góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA .

Lời giải

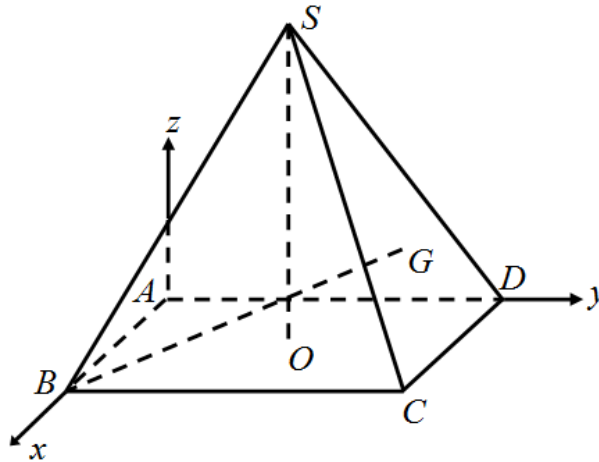
Trả lời: $0,45$.

Gọi $O = AC \cap BD$.

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Tam giác SAO vuông:

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ



Chọn $a = 1$. Ta có :

$$A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;1;0), O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), S\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right),$$

$$G\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

Vì G là trọng tâm tam giác SCD nên

$$\overrightarrow{AS} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2} \right) = \frac{1}{2}(1; 1; \sqrt{6}) \quad \overrightarrow{BG} = \left(\frac{-1}{2}; \frac{5}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6} \right) = \frac{1}{6}(-3; 5; \sqrt{6})$$

Ta có :

Góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA bằng:

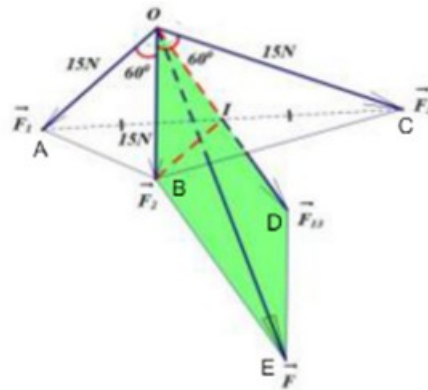
$$\cos(BG; SA) = \frac{|\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{AS}|}{|\overrightarrow{BG}| \cdot |\overrightarrow{AS}|} = \frac{|-3 + 5 + 6|}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,45$$

Câu 12: Một chậu hoa được treo như hình vẽ. Biết rằng ba sợi dây có ba lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ có độ lớn bằng $15N$. Biết sợi dây thứ hai hợp với sợi dây thứ nhất và sợi dây thứ ba đều bằng 60° , sợi dây thứ nhất hợp với sợi dây thứ ba góc 90° . Tính độ lớn của hợp lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ và $\overrightarrow{F_3}$



Lời giải

Trả lời: 33,5



♦Đặt $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{OC}$

♦Gọi I là trung điểm của đoạn AC

$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3}) + \overrightarrow{F_2} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$ với $OADC$ và $OBED$ là hình bình hành

♦ Tam giác OAC vuông tại O

$$\Rightarrow AC = 15\sqrt{2}, OI = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} 15\sqrt{2}$$

♦ Trong tam giác ABC ta có

$$\cos \hat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{15^2 + (15\sqrt{2})^2 - 15^2}{2 \cdot 15 \cdot 15\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \hat{BAC} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow BI = AB \cdot \sin 45^\circ = 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \hat{BOI} = \frac{OB^2 + OI^2 - BI^2}{2 \cdot OB \cdot OI} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \hat{BOI} = 45^\circ$$

♦ Trong tam giác BOI ta có

$$\Rightarrow |\vec{F}| = OE = \sqrt{OB^2 + BE^2 - 2OB \cdot BE \cdot \cos 135^\circ} = 15\sqrt{5} N$$

$$\text{Vậy độ lớn của lực tổng hợp là } |\vec{F}| = OE = 15\sqrt{5} \approx 33,5 N$$

Câu 13: Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(400; 100; 9)$ đến điểm $N(700; 200; 14)$ trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì sau 6 phút tiếp theo máy bay đến vị trí $Q(x; y; z)$. Tính $x + 2y + z$



Lời giải

Trả lời: 1215.

Gọi $Q(x; y; z)$ là tọa độ của máy bay sau 6 phút tiếp theo.

$$\overrightarrow{MN} = (300; 100; 5)$$

$$\overrightarrow{NQ} = (x - 700; y - 200; z - 14)$$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{NQ}$ cùng hướng.

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M \rightarrow N$ gấp 5 lần thời gian bay từ $N \rightarrow Q$ nên $MN = 5NQ$

$$\overrightarrow{MN} = 5\overrightarrow{NQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 300 = 5(x - 700) \\ 100 = 5(y - 200) \\ 5 = 5(z - 14) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 760 \\ y = 220 \\ z = 15 \end{cases} \Rightarrow Q(760; 220; 15) \Rightarrow x + 2y + z = 1215$$

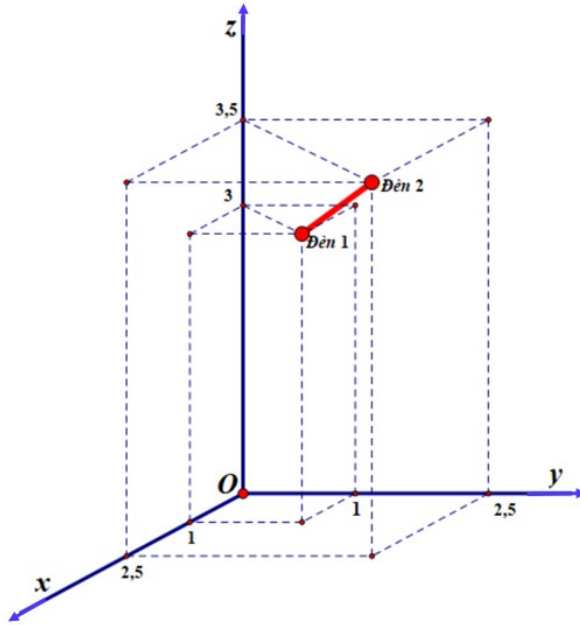
Suy ra

Câu 14: Trong một góc phòng học có treo hai chiếc đèn. Chiếc thứ nhất cách mặt đất 3 m và cách mỗi bức tường 1 m . Chiếc thứ hai cách mặt đất $3,5 \text{ m}$ và cách mỗi bức tường $2,5 \text{ m}$. Hãy lập một

hệ trục tọa độ phù hợp trong không gian để xác định vị trí của hai chiếc đèn, từ đó tính khoảng cách giữa hai chiếc đèn.

Lời giải

Trả lời: 2,18.



Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc O trùng với góc phòng, các trục Ox, Oy, Oz trùng với các mép tường như hình vẽ. Đơn vị trên không gian $Oxyz$ được lấy theo mét. Khi đó tọa độ của chiếc đèn thứ nhất là $(1; 1; 3)$ và tọa độ của chiếc đèn thứ hai là $(2,5; 2,5; 3,5)$. Vậy khoảng cách giữa hai chiếc đèn là

$$\sqrt{(2,5-1)^2 + (2,5-1)^2 + (3,5-3)^2} = \sqrt{(1,5)^2 + (1,5)^2 + (0,5)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2} \approx 2,18 \text{ (m)}$$

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$ cho hai véc tơ $\vec{a} = (-2; m; 3)$ và $\vec{b} = \left(1; -\frac{3}{2}; 3\right)$ thỏa mãn $|3\vec{a} - 2\vec{b}| = 10$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m . Khi đó tổng các phần tử của S bằng bao nhiêu.

Lời giải

Trả lời: -2.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \vec{a} = (-2; m; 3) &\Rightarrow 3\vec{a} = (-6; 3m; 9), \quad \vec{b} = \left(1; -\frac{3}{2}; 3\right) \Rightarrow 2\vec{b} = (2; -3; 6) \\ &\Rightarrow 3\vec{a} - 2\vec{b} = (-8; 3m+3; 3) \end{aligned}$$

$$\text{Bài ra ta có } |3\vec{a} - 2\vec{b}| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(-8)^2 + (3m+3)^2 + (3)^2} = 10$$

$$\Leftrightarrow (3m+3)^2 = 27 \Leftrightarrow 3m+3 = \pm 3\sqrt{3} \Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{3}$$

Tổng các phần tử của S là -2.

Câu 16: Trong không gian với hệ trục tọa độ cho trước, một vệ tinh bắt đầu từ tọa độ $A(0;0;200)$ và đang di chuyển trong không gian với vector vận tốc $\vec{v} = (2;3;-0,5)$. Sau 10 giây, vệ tinh thay đổi hướng và di chuyển theo vector mới $\vec{u} = (1;-1;0,2)$ trong 5 giây. Tọa độ cuối cùng của vệ tinh là $(a;b;c)$. Tính $a+b+c$.

Lời giải

Trả lời: 246.

Vị trí điểm $A(0;0;200)$ cũng là tọa độ của vector $\vec{OA} = (0;0;200)$.

Vị trí vệ tinh sau 10 giây là điểm B tương ứng với tọa độ $\vec{OB}$:
 $\vec{OB} = \vec{OA} + 10\vec{v} = (20;30;195)$.

Vị trí vệ tinh sau 5 giây là điểm C tương ứng với tọa độ $\vec{OC}$: $\vec{OC} = \vec{OB} + 5\vec{u} = (25;25;196)$.

Vậy $a+b+c = 25+25+196 = 246$.

Câu 17: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm khác O và không trùng với các điểm A, B, C sao cho $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 90^\circ$. Khi đó, kết quả $3a + \frac{3}{2}b - 7c$ làm tròn đến 1 chữ số thập phân là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -3,3.

$$\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 90^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0 \\ \vec{BM} \cdot \vec{CM} = 0 \\ \vec{CM} \cdot \vec{AM} = 0 \end{cases}$$

Ta có

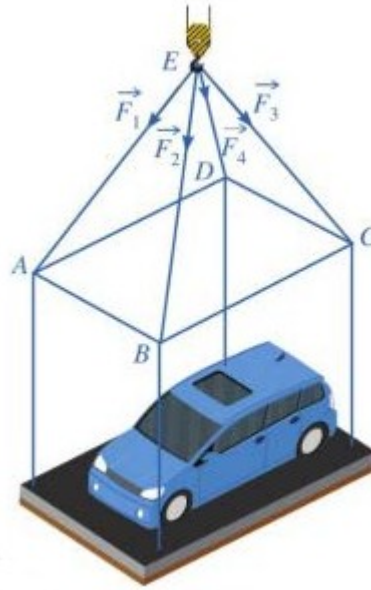
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a-2) + b(b-2) + c^2 = 0 \\ a^2 + b(b-2) + c(c-2) = 0 \\ a(a-2) + b^2 + c(c-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 2b = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 2b - 2c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 2b = 0 \\ a = c \\ b = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 4a = 0 \\ a = b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = \frac{4}{3} \\ a = b = c = 0(l) \end{cases} \Rightarrow a = b = c = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 3a + \frac{3}{2}b - 7c = 3 \cdot \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} - 7 \cdot \frac{4}{3} \approx -3,3.$$

Câu 18: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cầu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° như hình vẽ. Chiếc cần cầu

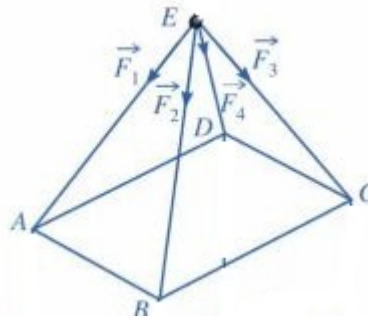
kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ $5000(N)$ và trọng lượng khung sắt là $2000(N)$. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô.



Lời giải

Trả lời: 15321

Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$, Theo bài toán thì là hình chóp $E.ABCD$ có đường cao là EO



Theo quy tắc hình bình hành: $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = 2\vec{EO}; \vec{F}_2 + \vec{F}_4 = 2\vec{EO}$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_2 + \vec{F}_4 = 4\vec{EO}$$

dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° nên:

$$\Rightarrow EO = EA \cdot \sin 60^\circ = 5000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2500\sqrt{3}$$

Vì chiếc xe ô tô ở vị trí cân bằng nên: $\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{P}_1$

$$\text{Suy ra trọng lượng của chiếc xe ô tô: } |\vec{P}| + 2000 = 4|\vec{EO}| \Rightarrow |\vec{P}| = 4 \cdot 2500\sqrt{3} - 2000 \approx 15321(N)$$

Câu 19: Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước, ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 9)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $C(x; y; z)$. Tính $x + y + z$.

Trả lời: 1954.

Vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $C(x; y; z)$.

Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $AB = 2BC$.

$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \left(\frac{940-800}{2}; \frac{550-500}{2}; \frac{9-7}{2} \right) = (70; 25; 1)$$

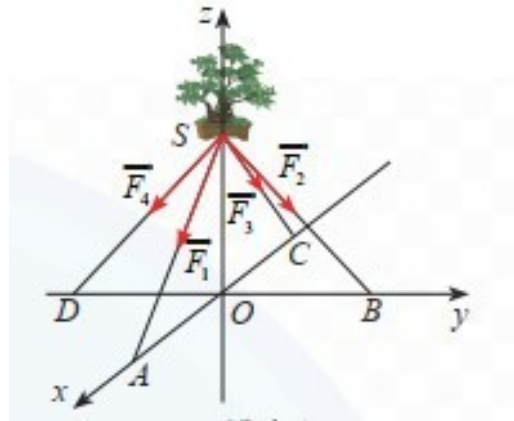
$$\text{Do đó} \quad \begin{cases} x-940=70 \\ y-550=25 \\ z-8=1 \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác, } \overrightarrow{BC} = (x-940; y-550; z-8) \text{ nên}$$

$$\begin{cases} x=1010 \\ y=575 \\ z=9 \end{cases} \Rightarrow x+y+z=1594$$

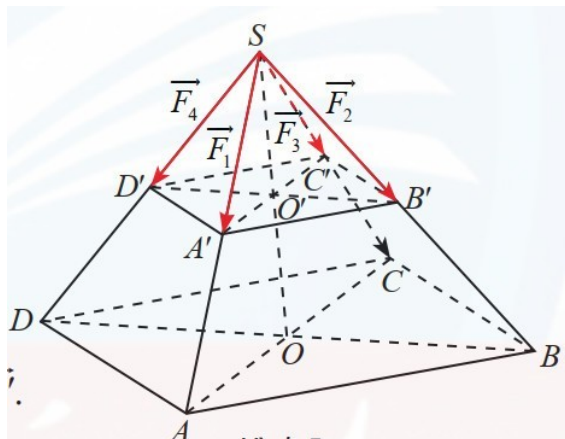
Từ đó

Câu 20: Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0; 0; 30)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(30; 0; 0), B(0; 20; 0), C(-20; 0; 0), D(0; -20; 0)$. Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn $60N$ và được phân bố thành bốn lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ có độ lớn bằng nhau như hình vẽ. Tính $|\overrightarrow{F_1} + 2\overrightarrow{F_2} + 3\overrightarrow{F_3} + 4\overrightarrow{F_4}|$



Lời giải

Trả lời: 156



Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình vuông.

Ta có: $\overrightarrow{SA} = (30; 0; -30), \overrightarrow{SB} = (0; 20; -20), \overrightarrow{SC} = (-20; 0; -20), \overrightarrow{SD} = (0; -20; -20)$

$\Rightarrow SA = SB = SC = SD = 30\sqrt{2}$. Do đó $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.

Các vectơ $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ có điểm đầu tại S và điểm cuối lần lượt là A', B', C', D' .

Ta có $\overrightarrow{SA'} = \overrightarrow{SB'} = \overrightarrow{SC'} = \overrightarrow{SD'}$ nên $S.A'B'C'D'$ cũng là hình chóp tứ giác đều.

Gọi $\overrightarrow{F}$ là trọng lực tác dụng lên chậu cây và O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$. Ta có:

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{SA'} + \overrightarrow{SB'} + \overrightarrow{SC'} + \overrightarrow{SD'} = 4\overrightarrow{SO'}$$

$$|\overrightarrow{F}| = 60 \Rightarrow |\overrightarrow{SO'}| = SO = 15$$

Ta có:

Do tam giác $SO'A'$ vuông cân nên

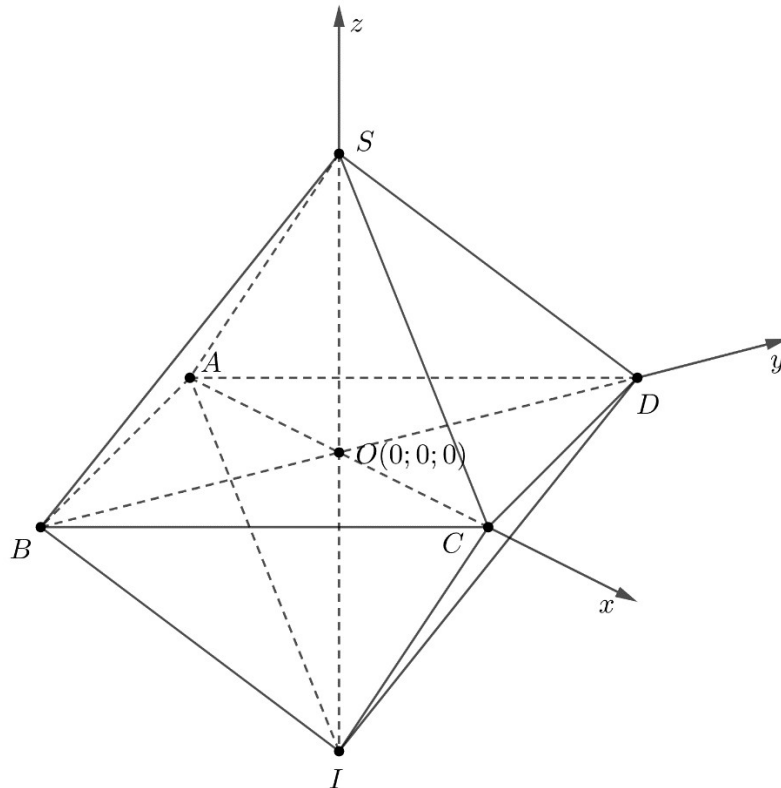
$$SA' = SO'\sqrt{2} = 15\sqrt{2} = \frac{1}{2}SA \Rightarrow \overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{SA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} = (15; 0; -15)$$

Chứng minh tương tự ta cũng có:

$$\overrightarrow{F_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} = (0; 15; -15), \overrightarrow{F_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} = (-15; 0; -15), \overrightarrow{F_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} = (0; -15; -15)$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{F_1} + 2\overrightarrow{F_2} + 3\overrightarrow{F_3} + 4\overrightarrow{F_4} = (-30; -30; -150) \Rightarrow |\overrightarrow{F_1} + 2\overrightarrow{F_2} + 3\overrightarrow{F_3} + 4\overrightarrow{F_4}| = 90\sqrt{3} \approx 156$$

Câu 21: Một chi tiết trong bộ trang sức có hình bát diện đều, được gắn hệ trục tọa độ O_{xyz} như hình vẽ. Các hình chóp $S.ABCD$ và $I.ABCD$ là các hình chóp tứ giác đều cạnh 1cm .



Tính tổng hoành độ các đỉnh S, A, B, C, D, I .

Lời giải

Trả lời: 0.

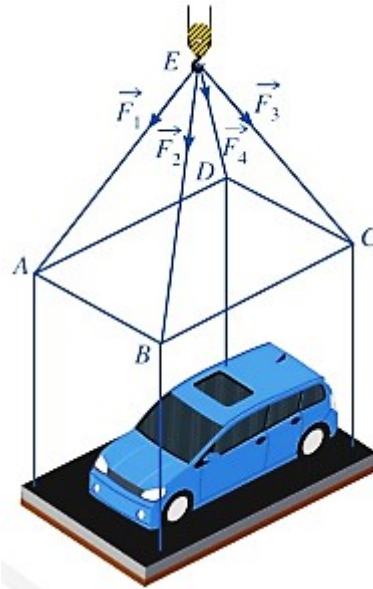
Ta có $OA = OB = OC = OD = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $A\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; 0\right), B\left(0; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right), C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; 0\right), D\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$

Ta có $OI = SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên $S\left(0; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), I\left(0; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Tổng hoành độ các đỉnh S, A, B, C, D, I là:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 + 0 = 0$$

Câu 22: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cầu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC và ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Chiếc cần cầu đang kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng.

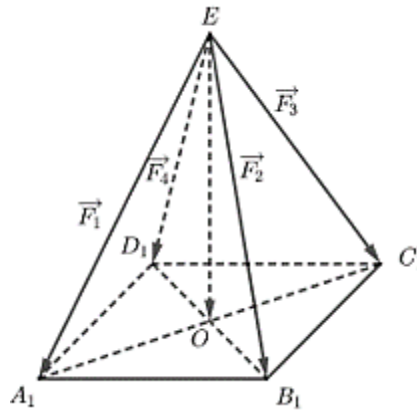


Biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là $4,7 \text{ kN}$ và trọng lượng của khung sắt là 3 kN .
 Tính trọng lượng lớn nhất của chiếc xe ô tô ?

Lời giải

Trả lời: 13,3

Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là các điểm sao cho $\vec{EA_1} = \vec{F}_1, \vec{EB_1} = \vec{F}_2, \vec{EC_1} = \vec{F}_3, \vec{ED_1} = \vec{F}_4$



Vì EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° nên EA_1, EB_1, EC_1, ED_1 bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ một góc bằng 60° .

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $A_1B_1C_1D_1$ cũng là hình chữ nhật.

Gọi O là tâm của hình chữ nhật $A_1B_1C_1D_1$.

Ta suy ra $EO \perp (A_1B_1C_1D_1)$.

Do đó, góc giữa đường thẳng EA_1 và mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ bằng góc EA_1O .

Suy ra $\angle EA_1O = 60^\circ$.

Ta có $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = |\vec{F}_4| = 4700 \text{ (N)}$ nên $EA_1 = EB_1 = EC_1 = ED_1 = 4,7$.

Tam giác EA_1O vuông tại O nên $EO = EA_1 \sin \angle EA_1O = 4,7 \sin 60^\circ = 2,35\sqrt{3}$.

Theo quy tắc ba điểm, ta có $\vec{EA_1} = \vec{EO} + \vec{OA_1}$, $\vec{EB_1} = \vec{EO} + \vec{OB_1}$, $\vec{EC_1} = \vec{EO} + \vec{OC_1}$,
 $\vec{ED_1} = \vec{EO} + \vec{OD_1}$

Vì O là trung điểm của A_1C_1 và B_1D_1 nên $\vec{OA_1} + \vec{OC_1} = \vec{0}$, $\vec{OB_1} + \vec{OD_1} = \vec{0}$

Từ đó suy ra $\vec{EA_1} + \vec{EB_1} + \vec{EC_1} + \vec{ED_1} = 4\vec{EO}$.

Do đó, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 4\vec{EO}$.

Gọi P là trọng lực của khung sắt có chứa chiếc ô tô.

Vì chiếc khung sắt chứa xe ô tô đang được kéo lên. Suy ra trọng lượng của khung sắt chứa

chiếc xe ô tô là $|\vec{P}| \leq 4|\vec{EO}| = 4 \cdot 2,35\sqrt{3} = 9,4\sqrt{3} \text{ (kN)}$.

Vì trọng lượng của khung sắt là 3 kN nên trọng lượng của chiếc xe ô tô là:
 $9,4\sqrt{3} - 3 \approx 13,3 \text{ (kN)}$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$ cho hai vec tơ $\vec{a} = (1; -2; 0)$, $\vec{b} = (1; 3; -2)$. Góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng bao nhiêu

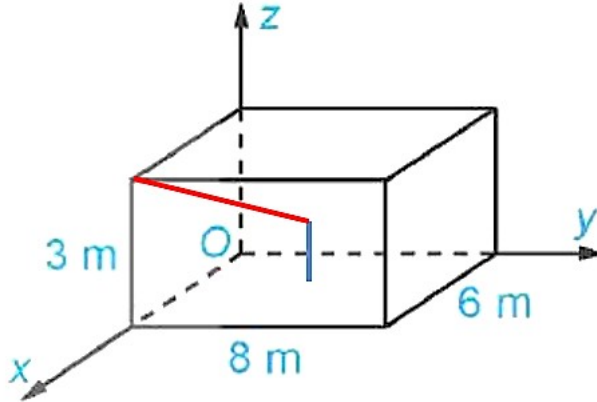
Lời giải

Trả lời: 126,7

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 - 6}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{-5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{14}}$$

Vậy $(\vec{a}, \vec{b}) \approx 126,7$

Câu 24: Trong một phòng học được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật, với chiều dài $8m$, chiều rộng $6m$ và chiều cao $3m$. Hai bạn An và Bình làm nhiệm vụ trực nhật, mạng nhện cần quét ở góc ngoài cùng trên trần nhà, An bảo không nên đứng ngay vị trí đó ở nền nhà quét vì sẽ bụi rơi xuống người mình, An lại đồ bạn Bình ‘nếu mình đứng ở giữa nhà quét thì mình phải kéo chổi quét nhà dài ra mấy mét để quét được vị trí mạng nhện, biết An cầm chổi cao $1,5m$ ’. Bình trả lời đứng vị trí đó chổi dài $5m$ cũng không tới. Hỏi Bình đã tính được bao nhiêu?



Lời giải

Trả lời: 5.22

Xét hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, ta có vị trí mạng nhện ở $A(6; 0; 3)$ vị trí cầm chổi $B(3; 4; \frac{3}{2})$,

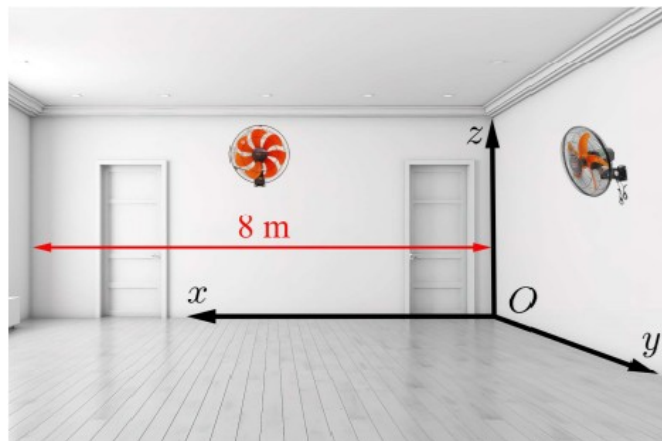
$$AB = \sqrt{(3-6)^2 + (4-0)^2 + (\frac{3}{2}-3)^2} = \frac{\sqrt{109}}{2} \approx 5.22(m)$$

Vậy chổi phải có độ dài

Câu 25: Một căn phòng dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài $8m$, rộng $6m$ và cao $4m$ có hai chiếc quạt treo tường. Chiếc quạt A treo chính giữa bức tường $8m$ và cách trần $1m$, chiếc quạt B treo chính giữa bức tường $6m$ và cách trần $1,5m$. Hỏi khoảng cách giữa hai chiếc quạt AB cách nhau bao nhiêu m

Lời giải

Trả lời: 5,025



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó ta có điểm $A(4; 0; 3)$ và điểm $B(0; 3; \frac{5}{2}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-4; 3; -\frac{1}{2})$. Do đó độ dài đoạn thẳng $AB = 5,025$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;6)$ và $B(1,1,2)$. Điểm $M(a,b,c)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $a+b+c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 5

Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Suy ra $I(2;1;4)$.

$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2.$$

$MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (Oyz) .

$$\text{Vậy } M(0;1;4) \Rightarrow a=0; b=1; c=4 \Rightarrow a+b+c=5.$$

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(6;-3;4)$, $B(a;b;c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oxz) và (Oyz) . Biết rằng M, N, P nằm trên đoạn AB sao cho $AM = MN = NP = PB$. Giá trị của tổng $a^4 + b^3 + c^2$ là

Lời giải

Trả lời: 187

Ta có: $\overline{AB} = (a-6; b+3; c-4)$.

Vì M, N, P lần lượt là giao điểm của AB với các mặt phẳng (Oxy) , (Oxz) và (Oyz) nên $M(x_M; y_M; 0)$, $N(x_N; 0; z_N)$, $P(0; y_P; z_P)$.

Vì M, N, P nằm trên đoạn AB sao cho $AM = MN = NP = PB$ nên ta có:

$$\overline{4AM} = \overline{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_M - 6) = a - 6 \\ 4(y_M + 3) = b + 3 \\ 4(0 - 4) = c - 4 \end{cases} \Rightarrow c = -12$$

$$\overline{2AN} = \overline{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_N - 6) = a - 6 \\ 2(0 + 3) = b + 3 \\ 2(z_N - 4) = c - 4 \end{cases} \Rightarrow b = 3$$

$$\frac{4}{3}\overline{AP} = \overline{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}(0 - 6) = a - 6 \\ \frac{4}{3}(y_P + 3) = b + 3 \\ \frac{4}{3}(z_P - 4) = c - 4 \end{cases} \Rightarrow a = -2$$

$$\text{Vậy } a^4 + b^3 + c^2 = (-2)^4 + 3^3 + (-12)^2 = 187.$$

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-2;-1)$, $B(1;-1;2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đoạn thẳng AB thỏa mãn $MA = 2MB$. Tính giá trị của biểu thức $T = a - b + c$?

Lời giải

Trả lời: 3.

Do điểm $M(a; b; c)$ thuộc đoạn thẳng AB thỏa mãn $MA = 2MB$ nên $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$
Ta có: $\overrightarrow{MA} = (-a; -2-b; -1-c)$ và $\overrightarrow{MB} = (1-a; -1-b; 2-c)$.

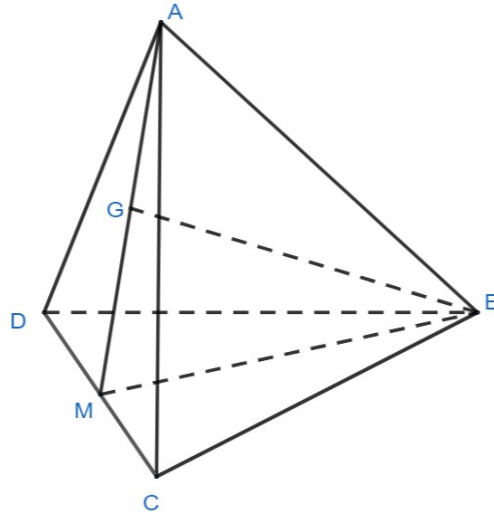
$$\begin{cases} -a = -2(1-a) \\ -2-b = -2(-1-b) \\ -1-c = -2(2-c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \\ c = 1 \end{cases} \quad \text{Vậy} \quad T = a - b + c = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 1 = 3.$$

Khi đó ta có

Câu 29: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của CD ; G là trung điểm của AM biết $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{AC} = na^2$. Giá trị của n bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -0,125



Xét tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a , ta có: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

Do M là trung điểm của CD ; G là trung điểm của AM nên ta có:

$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right)$$

$$\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}\right) \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{8} = -\frac{a^2}{8}$$

Khi đó:

Vậy $n = -0,125$.

Câu 30: Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{a} + \vec{b}| = 6$. Tính $|\vec{a} - \vec{b}|$.

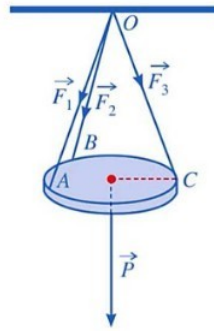
Lời giải

Trả lời: 3,74

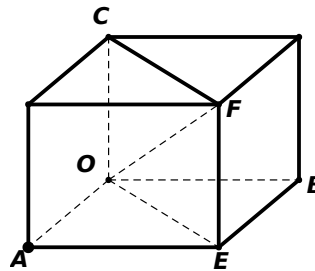
$$\text{Ta có: } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 \Rightarrow 2\vec{a}\vec{b} = |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 11$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9 - 11 + 16 = 14 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{14} \approx 3,74$$

Câu 31: Một chiếc đèn trang trí hình tròn được treo song song với mặt phẳng trần nhà nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn OA, OB, OC đôi một vuông góc. Biết lực căng dây tương ứng trên mỗi dây OA, OB, OC lần lượt là $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ thỏa mãn $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 16$. Tính trọng lượng của chiếc đèn đó.



Lời giải



Trả lời: 27,7

Ta có: $P = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3| = |\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}|$.

Về hình vuông $OAEB$, ta có $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OE}$.

Về hình chữ nhật $OCFE$, ta có $\vec{OC} + \vec{OE} = \vec{OF}$.

Suy ra: $P = |\vec{OF}| = OF$.

Xét hình vuông $OAEB$, cạnh 16, có đường chéo $OE = 16\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông OEF , vuông tại E , có

$$OF = \sqrt{OE^2 + EF^2} = \sqrt{(16\sqrt{2})^2 + 16^2} = 16\sqrt{3} \approx 27,7$$

Vậy $P \approx 27,7$.

Câu 32: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho 2 điểm $B(2; 1; 0); C(1; 4; 5)$.

Điểm $M(x; y; z)$ thuộc trục hoành sao cho $MB = MC$. Khi đó giá trị $2x + y + z$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -37

Do điểm $M \in OX$ nên ta gọi $M(x; 0; 0)$ ta có $MB = MC \Leftrightarrow MB^2 = MC^2$.

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + 1^2 + 0^2 = (x-1)^2 + 4^2 + 5^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = x^2 - 2x + 42 \Leftrightarrow x = \frac{-37}{2}.$$

$$\text{Vậy } M\left(-\frac{37}{2}; 0; 0\right) \Rightarrow 2x + y + z = -37.$$

Câu 33: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 120° . Biết rằng $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 3$, tính giá trị của biểu thức $A = |\vec{a} - \vec{b}| + |\vec{a} + \vec{b}|$

Lời giải

Trả lời: 9,69

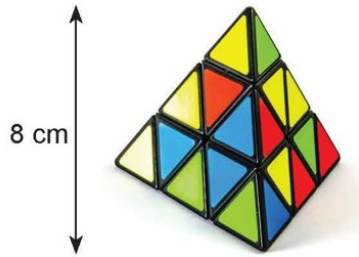
Ta có: $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 120^\circ + 9 = 37$

Tương tự $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 120^\circ + 9 = 13$

Do đó $A = |\vec{a} - \vec{b}| + |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{37} + \sqrt{13} \approx 9,69$

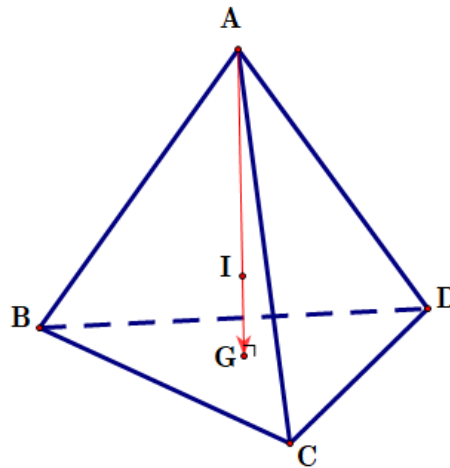
Câu 34: Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kỹ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn.

Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối rubik là 8 cm.



Lời giải

Trả lời: 2



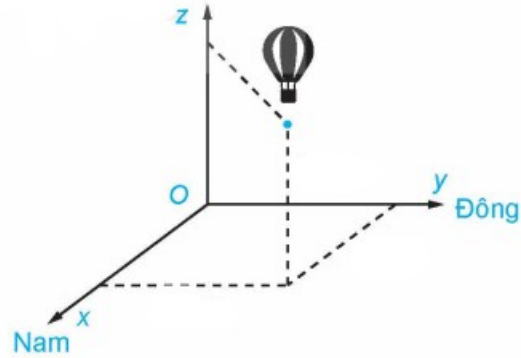
Đặt tên khối rubik là tứ diện đều $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD , I là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Do đó,

$\vec{AI} = 3\vec{IG} \Rightarrow IG = \frac{1}{4}AG$

Vì chiều cao của rubik bằng 8 cm nên $AG = 8 \text{ cm} \Rightarrow IG = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2(\text{cm})$

Vậy khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik hình tứ diện đều đến một mặt của nó bằng 2cm .

Câu 35: Một chiếc khinh khí cầu bay lên từ địa điểm cho trước. Sau khoảng thời gian bay, chiếc khinh khí cầu cách địa điểm xuất phát $2,5\text{km}$ về hướng nam và $1,7\text{km}$ về hướng đông, đồng thời cách mặt đất là $0,6\text{km}$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của chiếc khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilomet.



Tính khoảng cách từ địa điểm xuất phát đến địa điểm hiện tại của khinh khí cầu

Lời giải

Trả lời: $3,08$

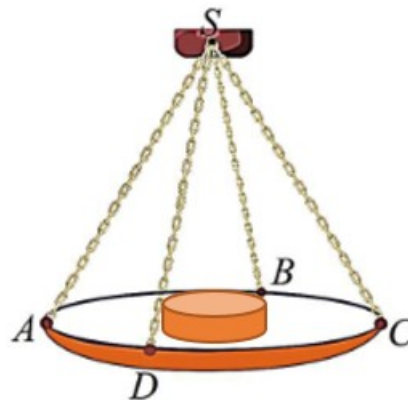
Với hệ trục tọa độ đã chọn thì vị trí hiện tại của khinh khí cầu là $A(2,5;1,7;0,6)$.

Khi đó khoảng cách từ địa điểm xuất phát đến địa điểm hiện tại của khinh khí cầu là:

$$OA = \sqrt{2,5^2 + 1,7^2 + 0,6^2} \approx 3,08(\text{km})$$

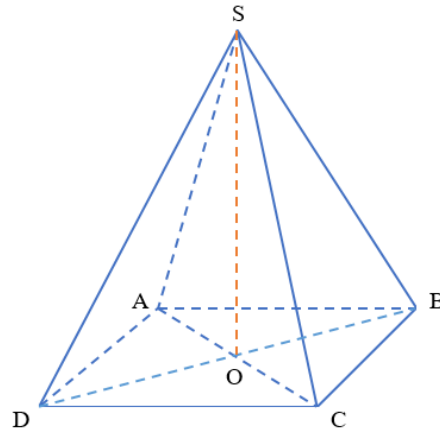
Câu 36: Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng $m = 3\text{kg}$ được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $SABCD$ là hình chóp tứ giác đều có

$\angle ASC = 90^\circ$. Biết độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích có dạng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$, khi đó giá trị của a bằng bao nhiêu?



Lời giải

Trả lời: 30 .



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SD} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} &= -4\overrightarrow{OS} = 4\overrightarrow{SO} \Rightarrow |\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}| = |4\overrightarrow{SO}| = 4SO \end{aligned}$$

Trọng lượng của vật nặng là $P = mg = 3 \cdot 10 = 30(N)$. Suy ra $4|\overrightarrow{SO}| = P = 30(N) \Rightarrow SO = \frac{15}{2}$.
Lại có tam giác ASC vuông cân tại S nên

$$SO = SA \cdot \sin \angle SAC \Rightarrow SA = \frac{SO}{\sin \angle SAC} = \frac{\frac{15}{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{15\sqrt{2}}{2} = \frac{30\sqrt{2}}{4} \Rightarrow a = 30$$

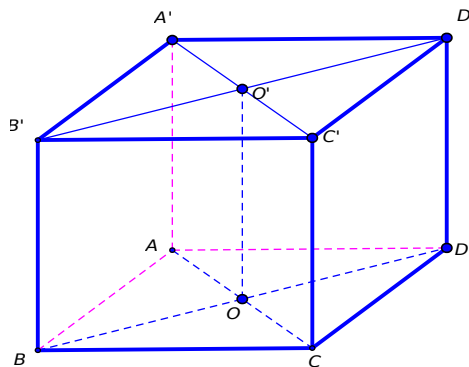
Vậy $a = 30$.

Câu 37: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có đường chéo $A'C = \frac{3}{16}$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và điểm S thỏa mãn: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$. Khi đó độ

dài của đoạn OS bằng $\frac{a\sqrt{3}}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Lời giải

Trả lời: 17



$$A'C^2 = A'A^2 + AC^2 = 3A'A^2 \Rightarrow A'A = \frac{A'C}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

Ta có:

Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$.

Lại có: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$

$$\begin{aligned}
 &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC'}) + (\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OD'}) \\
 &= 2\overrightarrow{OO'} + 2\overrightarrow{OO'} = 4\overrightarrow{OO'} \\
 \text{Suy ra } OS &= |\overrightarrow{OS}| = |4\overrightarrow{OO'}| = 4OO' = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

Khi đó $a = 1, b = 4 \Rightarrow P = a^2 + b^2 = 17$

Câu 38: Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của 4 lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học.



Hình 2.20

Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 lên 920, trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900 và 920

lần lượt biểu diễn bởi hai véc tơ $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ với $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ ($k \in \mathbb{R}; k > 0$). Tính giá trị của k .

Lời giải

Trả lời: 0,96

Vì trong quá trình máy bay tăng vận tốc từ 900 lên 900, máy bay giữ nguyên hướng bay nên hai véc tơ $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ có cùng hướng và $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ ($k > 0$).

Gọi v_1, v_2 lần lượt là vận tốc của chiếc máy bay khi đạt 900 và 920.

Suy ra $v_1 = 900, v_2 = 920$.

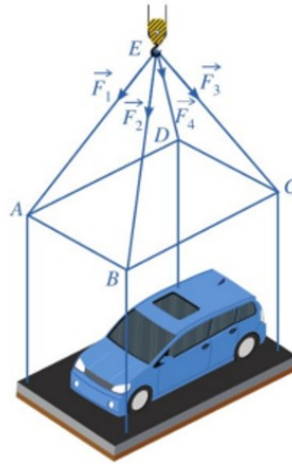
Vì lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với

$$\left| \frac{\vec{F}_1}{\vec{F}_2} \right| = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{900^2}{920^2} = \frac{2025}{2116} \Rightarrow |\vec{F}_1| = \frac{2025}{2116} |\vec{F}_2| \Rightarrow \vec{F}_1 = \frac{2025}{2116} \vec{F}_2$$

$$k = \frac{2025}{2116} \approx 0,96$$

Từ đó suy ra:

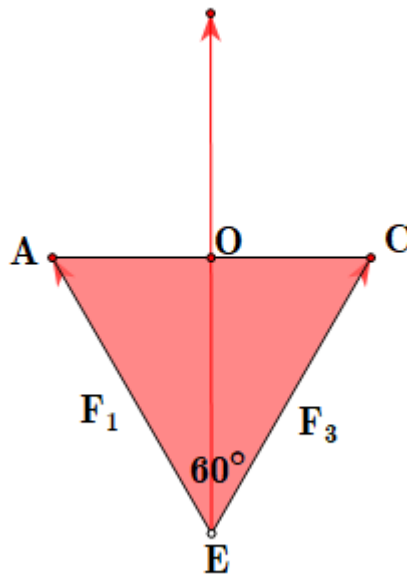
Câu 39: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cầu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Chiếc cần cầu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng.



Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô, biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N .

Lời giải

Trả lời: 13281



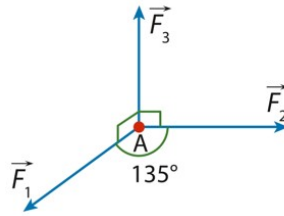
Ta có $\angle AEC = 60^\circ$

Ta có $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = 2\vec{EO} \Rightarrow |\vec{F}_1 + \vec{F}_3| = 2|\vec{EO}| \Rightarrow |\vec{F}_1|\sqrt{3} = 4700\sqrt{3}$

Tương tự ta cũng có $\vec{F}_2 + \vec{F}_4 = |\vec{F}_2|\sqrt{3} = 4700\sqrt{3}$

Vậy trọng lực ô tô là: $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4) - \approx 13281(\text{N})$

Câu 40: Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α) , chịu tác động bởi ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. Các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có giá nằm trong (α) và $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 135^\circ$, còn lực $\vec{F}_3$ có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên. Xác định hợp lực của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N , 15 N và 10 N .



Lời giải

Trả lời: 17,34

Vẽ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{F_3}$.

Dựng hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

Hợp lực tác động vào vật là $\vec{F} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác OBD , ta có

$$OD^2 = BD^2 + OB^2 - 2 \cdot BD \cdot OB \cdot \cos \angle OBD = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 135^\circ$$

Vì $OC \perp (OADB)$ nên $OC \perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó tam giác ODE vuông tại D .

$$\text{Ta có } OE^2 = OC^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 135^\circ$$

$$\text{Suy ra } OE = \sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 135^\circ}$$

$$= \sqrt{10^2 + 20^2 + 15^2 + 2 \cdot 20 \cdot 15 \cdot \cos 135^\circ} \approx 17,34$$

Vậy độ lớn của hợp lực là $F = OE \approx 17,34 \text{ N}$.

Câu 41: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(3; -7; 4)$ trên trục Oy là điểm $H(a; b; c)$. Khi đó giá trị của $a - b + c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 7

Ta có: Hình chiếu của điểm $M(3; -7; 4)$ trên trục Oy là điểm $H(0; -7; 0)$

$$\Rightarrow a = 0; b = -7; c = 0$$

$$\text{Vậy } a - b + c = 7$$

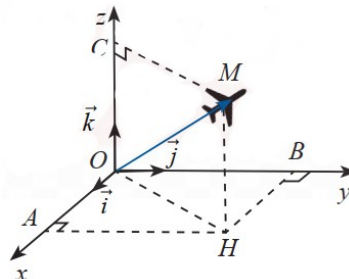
Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(0; 1; 2)$, $N(2; 0; 1)$, $P(0; 0; -1)$, $Q(2; 1; 0)$. Điểm nào trong 4 điểm đó thuộc mặt phẳng (Oxy) . Hãy tính tổng $T = 2a + 3b + 4c$

Lời giải

Trả lời: 7

Điểm $Q(2; 1; 0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) . Suy ra $T = 2a + 3b + 4c = 7$.

Câu 43: Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của $M(a;b;c)$ xuống mặt phẳng (Oxy) . Cho biết $OM = 50$, $(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = 64^\circ$, $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 48^\circ$. Tìm $S = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 81,9

Ta có: $OC = MH = OM \cdot \sin(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 50 \cdot \sin 48^\circ \approx 37,16$

$OH = OM \cdot \cos(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 50 \cdot \cos 48^\circ = 50 \cdot \cos 48^\circ \approx 33,46$

$OA = OH \cdot \cos(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = 33,46 \cdot \cos 64^\circ = 33,46 \cdot \cos 64^\circ \approx 14,67$

$OB = OH \cdot \cos(90^\circ - (\vec{i}, \overrightarrow{OH})) = 33,46 \cdot \cos(90^\circ - 64^\circ) = 33,46 \cdot \cos 26^\circ \approx 30,07$

Suy ra $M(14,67; 30,07; 37,16) \Rightarrow S = a + b + c = 14,67 + 30,07 + 37,16 = 81,9$

Câu 44: Gạch ống là một sản phẩm được tạo hình thành từ đất sét và nước, được kết hợp lại với nhau theo một công thức chung hợp lý mới có thể tạo ra hồ hợp dẻo quánh, sau đó chúng được đổ vào khuôn, rồi đem phơi hoặc sấy khô và cuối cùng là đưa vào lò nung. Một viên gạch hình hộp chữ nhật có kích thước dài $20cm$, rộng $8cm$. Bên trong có bốn lỗ hình trụ bằng nhau có đường kính $2,5cm$.



Tính thể tích đất sét để làm một viên gạch.

Lời giải

Trả lời: 887,5

Thể tích viên gạch không tính bốn lỗ hình trụ là: $V_1 = 8 \cdot 8 \cdot 20 = 1280 (cm^3)$

Thể tích bốn lỗ hình trụ là: $V_2 = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{2,5}{2}\right)^2 \cdot 20 = 392,5 (cm^3)$

Thể tích viên gạch viên gạch là: $V_1 - V_2 = 1280 - 392,5 = 887,5 (cm^3)$.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ biết $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(1;1;3)$. $H(x_0; y_0; z_0)$ là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC . Khi đó $x_0 + y_0 + z_0$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 3,09

$\overrightarrow{BC} = (1; -1; 3)$, $\overrightarrow{BH}(x_0; y_0 - 2; z_0)$

Vì B, C, H thẳng hàng nên $\overrightarrow{BH} = t \overrightarrow{BC}$, $t \in \mathbb{R}$. Ta có
$$\begin{cases} x_0 = t \\ y_0 - 2 = -t \\ z_0 = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Nên $H(t; 2-t; 3t) \in BC$

Khi đó: $\overrightarrow{AH} = (t-2; 2-t; 3t)$

Mà H là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC nên

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow t-2-2+t+9t=0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{11}$$

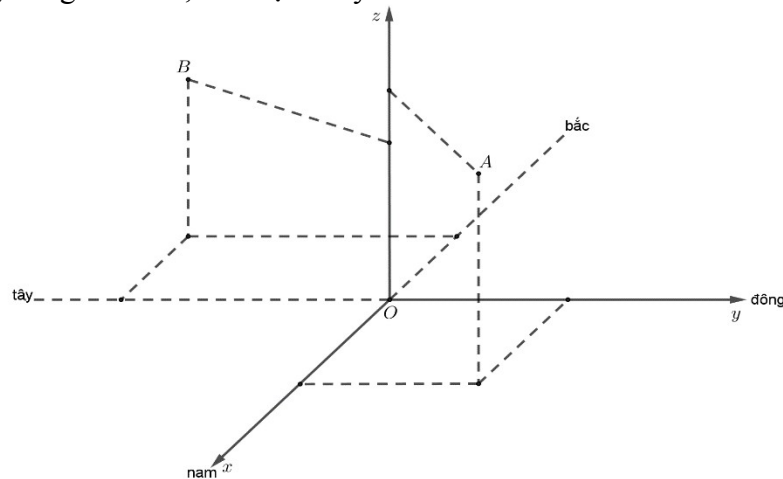
$$\Rightarrow H\left(\frac{4}{11}; \frac{18}{11}; \frac{12}{11}\right) \Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 = \frac{34}{11} \approx 3,09$$

Câu 46: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát $2,5 \text{ km}$ về phía nam và 2 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất $0,8 \text{ km}$. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát $1,5 \text{ km}$ về phía bắc và 3 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất $0,6 \text{ km}$. Người ta cần tìm một vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu cho hai khinh khí cầu sao cho tổng khoảng cách từ vị trí đó tới hai khinh khí cầu nhỏ nhất. Giả sử vị trí cần tìm cách địa điểm hai khinh khí cầu bay lên là $a \text{ km}$ theo hướng nam và $b \text{ km}$ theo hướng tây. Tính tổng $2a + 3b$.

Lời giải

Trả lời: 3

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét.



Chiếc khinh khí cầu thứ nhất và thứ hai ở vị trí A, B . Ta có $A\left(\frac{5}{2}; 2; \frac{4}{5}\right), B\left(-\frac{3}{2}; -3; \frac{3}{5}\right)$.

Gọi C là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oxy) , $C\left(\frac{5}{2}; 2; -\frac{4}{5}\right)$. Khi đó $I = BC \cap (Oxy)$.

$$\overrightarrow{BC} = \left(4; 5; -\frac{7}{5}\right) \quad I \in (Oxy) \Rightarrow I(x; y; 0) \Rightarrow \overrightarrow{BI} = \left(x + \frac{3}{2}; y + 3; -\frac{3}{5}\right)$$

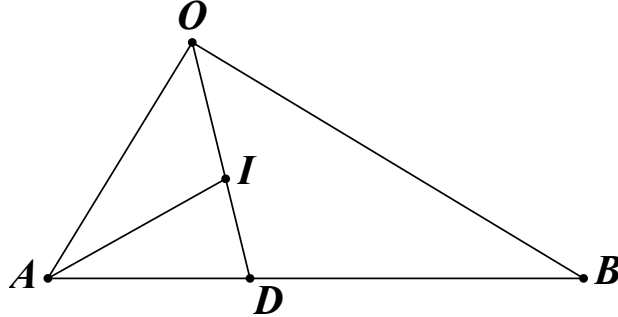
$$\frac{x + \frac{3}{2}}{4} = \frac{y + 3}{5} = \frac{3}{7} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{14} \\ y = -\frac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{14} \\ b = \frac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow 2a + 3b = 3$$

$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI}$ cùng phương nên

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -2)$ và $B\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a; b; c)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OAB . Giá trị $a - b + c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 0



Ta có $\overrightarrow{OA} = (1; 2; -2)$, $\overrightarrow{OB} = \left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$, do đó $OA = 3$, $OB = 4$.

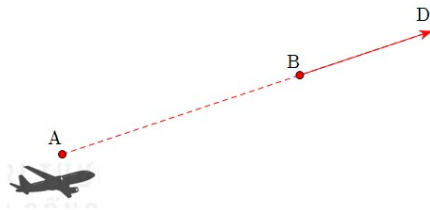
Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ O , ta có $\overrightarrow{DA} = -\frac{DA}{DB} \cdot \overrightarrow{DB} = -\frac{OA}{OB} \cdot \overrightarrow{DB}$, suy ra $\overrightarrow{DA} = -\frac{3}{4} \overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \frac{4 \cdot \overrightarrow{OA} + 3 \cdot \overrightarrow{OB}}{7}$. Do đó $D\left(\frac{12}{7}; \frac{12}{7}; 0\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AD} = \left(\frac{5}{7}; -\frac{2}{7}; 2\right) \Rightarrow AD = \frac{15}{7}$.

$\overrightarrow{ID} = -\frac{AD}{AO} \cdot \overrightarrow{IO} = -\frac{5}{7} \overrightarrow{IO} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{7}{12} \overrightarrow{OD} \Rightarrow I(1; 1; 0)$

Do đó $a - b + c = 0$.

Câu 48: Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước, ra đã phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo $D(x; y; z)$ khi đó $x + y + z = ?$



Lời giải

Trả lời: 1689

Gọi $D(x; y; z)$ là vị trí của máy bay sau 10 phút bay tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng. Do vận tốc máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B bằng thời gian bay từ B đến D nên $AB = BD$. Do đó, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} = (140; 50; 1)$.

$$\begin{cases} x - 940 = 140 \\ y - 550 = 50 \\ z - 8 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1080 \\ y = 600 \\ z = 9 \end{cases}$$

Mặt khác: $\overrightarrow{BD} = (x - 940; y - 550; z - 8)$ nên

Vậy $D(1080; 600; 9)$. Vậy tọa độ của máy bay trong 10 phút tiếp theo là $(1080; 600; 9)$.
 $x + y + z = 1689$

Câu 49: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, Tam giác ABC với $A(1; -3; 3)$, $B(2; -4; 5)$, $C(a; -2; b)$ nhận điểm $G(1; c; 3)$ làm trọng tâm của nó thì giá trị của tổng $a + b + c$ bằng.

Lời giải

Trả lời: -2

$$\begin{cases} 1 = \frac{1+2+a}{3} \\ c = \frac{-3-4-2}{3} \\ 3 = \frac{3+5+b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

Vậy $a + b + c = -2$

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 1; -2)$, $B(2; -3; 5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$, tọa độ điểm M là $(a; b; c)$. Khi đó $a + b + c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 0

Gọi $M(x; y; z)$. Vì M thuộc đoạn AB nên:

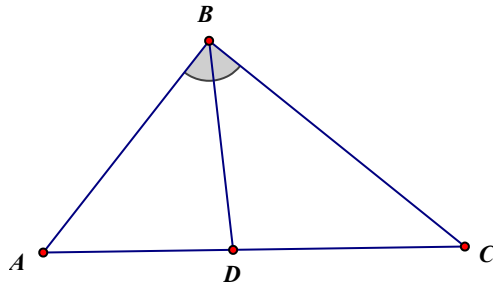
$$\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x = -2(2 - x) \\ 1 - y = -2(-3 - y) \\ -2 - z = -2(5 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{5}{3} \\ z = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Suy ra $a + 3b + c = 0$

Câu 51: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Gọi $D(a; b; c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Giá trị của $a + b + 2c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 5



Ta có $AB = \sqrt{26}$, $BC = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.

Gọi $D(x; y; z)$, theo tính chất phân giác ta có $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2}$. Suy ra $\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} (*)$.

Ta có $\overrightarrow{DA} = (1-x; 2-y; -1-z)$ và $\overrightarrow{DC} = (-4-x; 7-y; 5-z)$.

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} 1-x = -\frac{1}{2}(-4-x) \\ 2-y = -\frac{1}{2}(7-y) \\ -1-z = -\frac{1}{2}(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right) \Rightarrow a+b+2c=5$$

Do đó

Câu 52: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$. Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, tìm $a+b+c$.

Lời giải

Trả lời: 6

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 3$; $\overrightarrow{BC} = (4; 1; 1) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}$.

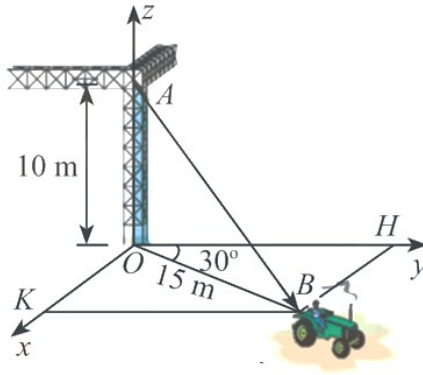
Theo giả thiết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có diện tích bằng $6\sqrt{2}$ nên $\frac{1}{2}AB(AD+BC) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (AD+3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{1}{3}BC$.

Do $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

$$\begin{cases} a-1 = \frac{4}{3} \\ b-2 = \frac{1}{3} \\ c-1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = \frac{7}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a+b+c = 6.$$

Giả sử $D(a;b;c)$ khi đó ta có

Câu 53: Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như Hình với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Tìm được tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB} = (a;b;c)$, khi đó $a+c = ?$



Lời giải

Trả lời: 2,5

$$\overrightarrow{OA} = 10\vec{k} \Rightarrow A(0; 0; 10)$$

$$\text{Ta có: } OH = OB \cdot \cos 30^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

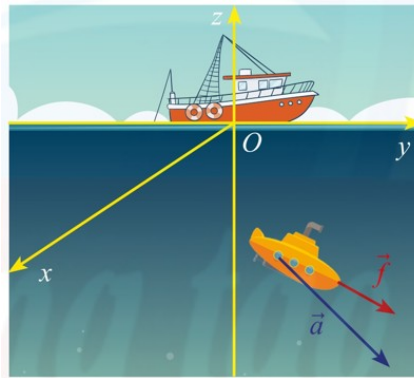
$$OK = OB \cdot \cos(90^\circ - 30^\circ) = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{15}{2}; \frac{15\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\frac{15}{2}; \frac{15\sqrt{3}}{2}; -10\right)$$

Vậy $a + c = 2,5$

Câu 54: Một thiết bị thăm dò đáy biển được đẩy bởi một lực $\vec{f} = (5; 4; -2)$ giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a} = (70; 20; -40)$. Tính công sinh bởi lực $\vec{f}$.



Lời giải

Trả lời: 510

$$\text{Công sinh bởi lực } \vec{f} \text{ là: } A = \vec{f} \cdot \vec{a} = 5 \cdot 70 + 4 \cdot 20 - 2 \cdot (-40) = 510J$$

Câu 55: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5; 1; 5)$; $B(4; 3; 2)$; $C(-3; -2; 1)$. Điểm $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $a + 2b + c$?

Lời giải

Trả lời: 3

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1; 2; -3) \\ \overrightarrow{BC} = (-7; -5; -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow$$

Ta có tam giác ABC vuông tại B .

$\Rightarrow$ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm của cạnh huyền AC .

$$\Rightarrow I\left(1; -\frac{1}{2}; 3\right). \text{ Vậy } a+2b+c=3.$$

Câu 56: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1; 1; 2)$, $\vec{v} = (-1; m; m-2)$. Khi $\left|[\vec{u}, \vec{v}]\right| = \sqrt{14}$ thì tổng tất cả các giá trị của m thỏa mãn bằng?

Lời giải

Trả lời: -2

$$[\vec{u}, \vec{v}] = (-m-2; -m; m+1) \Rightarrow \left|[\vec{u}, \vec{v}]\right| = \sqrt{(m+2)^2 + m^2 + (m+1)^2} = \sqrt{3m^2 + 6m + 5}$$

$$\left|[\vec{u}, \vec{v}]\right| = \sqrt{14} \Leftrightarrow 3m^2 + 6m + 5 = 14 \Leftrightarrow 3m^2 + 6m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$$

$$S = -2$$

Câu 57: Cho biết máy bay A đang bay với vector vận tốc $\vec{a} = (300; 200; 400)$. Máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ gấp ba lần tốc độ của máy bay A .



Tính tốc độ của máy bay B .

Lời giải

Trả lời: 1615,55

$$3\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 3.300 = x \\ 3.200 = y \\ 3.400 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 900 \\ y = 600 \\ z = 1200 \end{cases} \Rightarrow \vec{b} = (900; 600; 1200)$$

Ta có:

$$\text{Tốc độ của máy bay } B \text{ là: } |\vec{b}| = \sqrt{900^2 + 600^2 + 1200^2} \approx 1615,55 \text{ km/h}$$