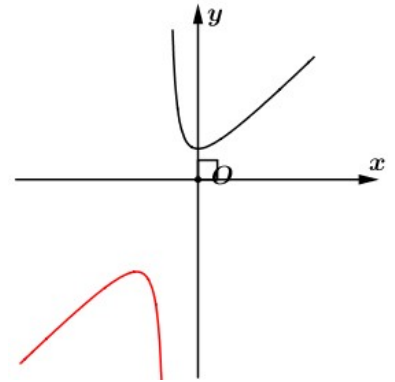
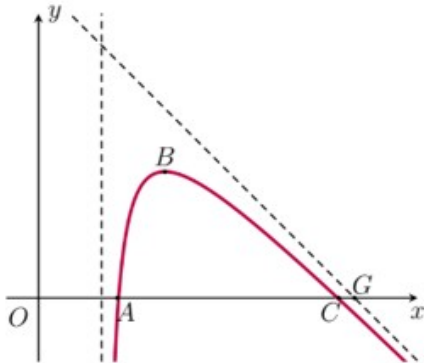


BÀI TOÁN THỰC TẾ KHẢO SÁT HÀM PHÂN THỨC HỮU TỈ

Câu 1. Trong hệ trục tọa độ (Oxy) cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ mô tả chuyển động của hai tàu đánh cá A và B (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng km). Biết quỹ đạo chuyển động của hai tàu luôn thuộc về hai nhánh khác nhau của đồ thị (C) . Tính khoảng cách ngắn nhất (đơn vị km) giữa hai tàu đánh cá A và B (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

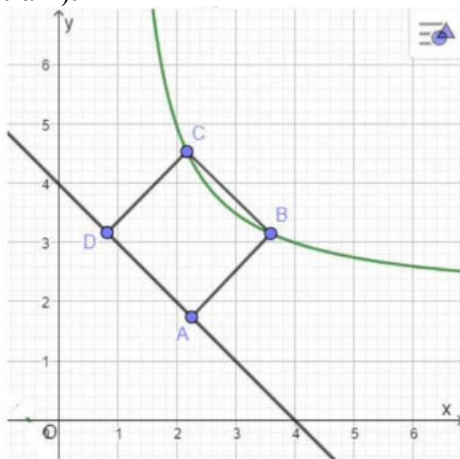


Câu 2. Một máy bay trình diễn có đường bay gần với hệ trục Oxy được mô phỏng như hình vẽ, trục Ox gần với mặt đất.



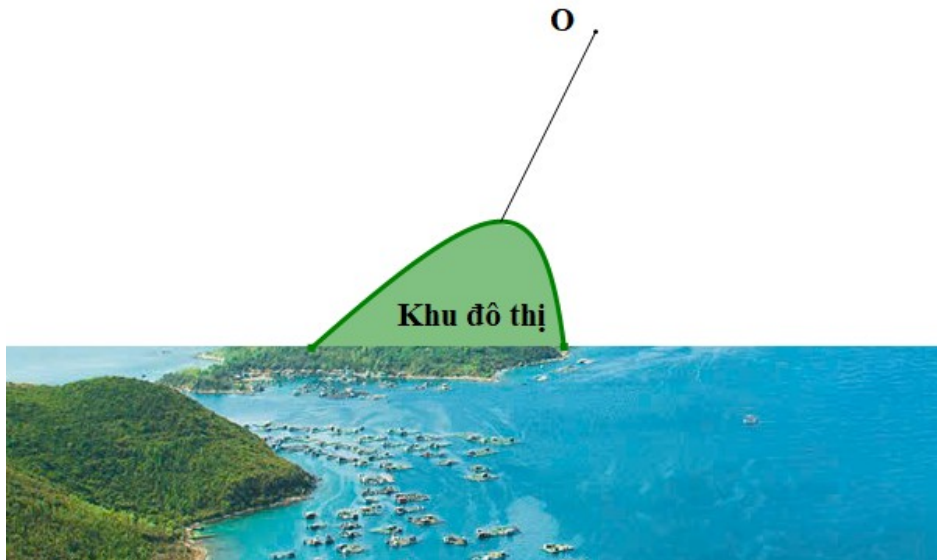
Đường bay có dạng là một phần của đồ thị hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng là $x = 2$. Điểm G là giao điểm của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục Ox được gọi là điểm giới hạn. Biết máy bay bay từ vị trí A cách tọa độ O một khoảng $2,5$ đơn vị và máy bay khi ở vị trí cao nhất cách điểm xuất phát $1,5$ đơn vị theo phương song song với trục Ox và cách mặt đất $4,5$ đơn vị. Vị trí máy bay tiếp đất cách điểm giới hạn một khoảng bằng bao nhiêu?

Câu 3. Trong một công viên có một hồ nước và một đường đi lát gạch hoa. Thiết lập hệ trục Oxy như hình vẽ dưới, kiến trúc sư thấy rằng bờ hồ có thể coi như một nhánh của đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$ và đường đi khi đó ứng với đường thẳng $(d): y = -x + 4$. Để đảm bảo ánh sáng, kiến trúc sư muốn đặt 2 cột đèn trên bờ hồ và 2 cột đèn trên đường đi sao cho 4 cột đèn này tạo thành một hình vuông. Tính khoảng cách giữa hai cột đèn trên bờ hồ (làm tròn đến hàng phần trăm).



Câu 4. Ở một vịnh biển, ngoài xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây một khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ Oxy với đơn vị đo tương ứng 1km có hòn đảo ở O thì đường bao của phần đất lấn biển có

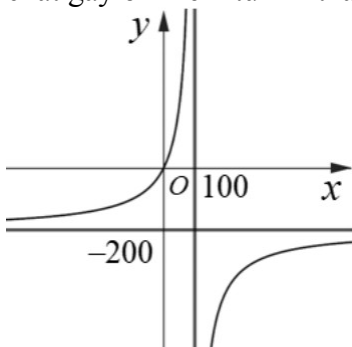
dạng là một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$. Giả sử tuyến cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị với độ dài ngắn nhất. Độ dài của tuyến cáp treo là bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Câu 5. Giả sử tỷ lệ sinh của Tỉnh A tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = \frac{200}{1 + 4e^{-t}}$; $t \geq 0, t \in \mathbb{N}$, trong đó thời gian t được tính bằng tháng. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng dân số của tỉnh A . Hỏi sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng trưởng của dân số tỉnh A là lớn nhất?

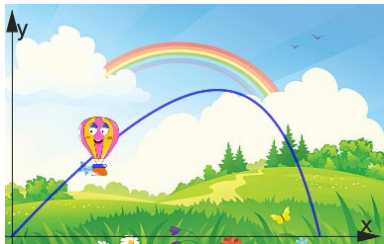
Câu 6. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}$, $t \geq 0$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành thì tốc độ bán hàng đạt lớn nhất bằng bao nhiêu?

Câu 7. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm môi trường từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí (triệu đồng) cần bỏ ra được mô hình hóa bởi hàm số có dạng $C(x) = \frac{ax + b}{-x + d}$ (như hình vẽ), ($0 \leq x < 100$). Tính chi phí chênh lệch (tỉ đồng) phải bỏ ra để loại bỏ 90% và loại bỏ 99% chất gây ô nhiễm từ khí thải của nhà máy.



$$f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$$

- Câu 8.** Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Đồ thị hàm số $y = f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y = a$. Giá trị của a là bao nhiêu?
- Câu 9.** Nồng độ C của một loại hóa chất trong máu sau t giờ tiêm vào cơ thể được cho bởi công thức $C(t) = \frac{4t}{64+t^3}$ với $t \geq 0$. Sau khoảng bao nhiêu giờ tiêm thì nồng độ của hóa chất trong máu là cao nhất? (kết quả làm tròn tới hàng phần trăm)
- Câu 10.** Đường đi của một khinh khí cầu được gắn trong hệ trục tọa độ là một đường cong bậc hai trên bậc nhất có đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ là $(1;0)$ và $(8;0)$ với đơn vị trên hệ trục tọa độ là $1(km)$. Biết rằng điểm cực đại của đồ thị hàm số là điểm $(6;5)$. Hỏi khi khinh khí cầu đi qua điểm cực đại và cách mặt đất $3875(m)$ thì khinh khí cầu cách gốc tọa độ theo phương ngang bao nhiêu? (đơn vị: km)



- Câu 11.** Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2002 được tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ (được tính bằng nghìn người). Đạo hàm của hàm số $y = f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là $0,075$ nghìn người/năm?
- Câu 12.** Một bể chứa 3000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam/lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử nồng độ muối trong nước bể sau t phút được xác định bởi một hàm số $f(t)$ trên $t \in [0; +\infty)$ (gam/lít). Khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến bao nhiêu gam/lít.
- Câu 13.** Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) vượt khoảng cách $300km$ để tới nơi sinh sản. Vận tốc dòng nước là $6km/h$. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v km/h$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ trong đó c là hằng số cho trước. E tính bằng Jun. Tính vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên, để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất?



Câu 14. Một bể chứa ban đầu có 250 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 25 lít nước, đồng thời cho vào bể 8 gam chất khử khuẩn (ClO_2) được hòa tan. Giả sử $C(t)$ là nồng độ chất khử khuẩn trong bể sau t phút (với $C(t) = \frac{m(t)}{V(t)}$, đơn vị gam/lít, trong đó $m(t)$ là khối lượng chất khử khuẩn trong bể và $V(t)$ là thể tích nước trong bể). Gọi c là số dương nhỏ nhất mà nồng độ chất khử khuẩn là $C(t)$ tăng theo thời gian t nhưng không vượt quá ngưỡng c gam/lít. Tìm c .

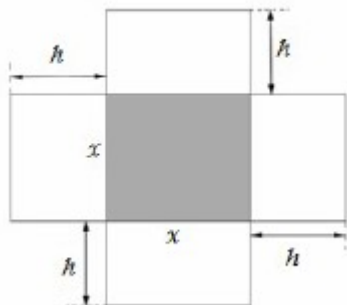
Câu 15. Biết rằng tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của một học viên lớn tuổi sau t tuần (kể từ khi chưa biết đánh máy) được cho bởi một trong hai công thức sau

$$S(t) = \frac{at^2 + b}{ct^2 + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}; ac \neq 0)$$

Ông A (một người lớn tuổi chưa biết đánh máy) sau 4 tuần đi học thì tốc độ đánh máy trung bình đạt 20 từ trên phút, sau 6 tuần đạt 30 từ trên phút. Em hãy dự đoán xem, sau khóa học 15 tuần thì tốc độ đánh máy trung bình của ông A là bao nhiêu từ trên phút.

Câu 16. Một bể ban đầu chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan). Gọi $f(t)$ (gam/lít) là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t \geq 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo thời gian t nhưng không vượt ngưỡng P gam/lít. Tìm số P (kết quả viết dưới dạng số thập phân).

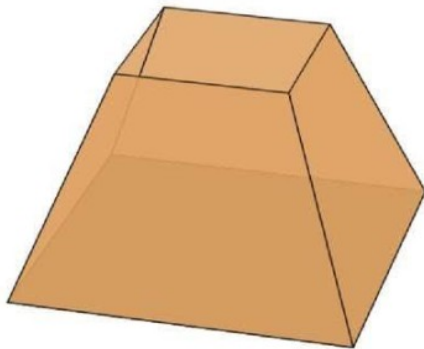
Câu 17. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh $x(\text{cm})$, chiều cao là $h(\text{cm})$ và thể tích là 4000cm^3 . Tìm $x(\text{cm})$ sao cho chiếc hộp làm ra tốn ít bìa các tông nhất.



Câu 18. Để tạo một kiện hàng dạng hình lăng trụ đứng với đáy là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, người ta dùng các thanh gỗ ghép khít đóng lại với nhau. Biết rằng, dung tích kiện hàng bằng 9m^3 và giá thành 1m^2 gỗ sử dụng là 200000 đồng. Hỏi sau khi hoàn thành kiện hàng đó, người ta cần bỏ ra ít nhất bao nhiêu triệu đồng? (diện tích các mép giữa hai mặt kề nhau không đáng kể).



- Câu 19.** Một xưởng thủ công mỹ nghệ sản xuất loại chup đèn trang trí dạng hình chóp cụt tứ giác đều. Gọi x là độ dài cạnh đáy lớn (đơn vị:dm). Tính toán cho thấy tổng chi phí vật liệu (tính bằng nghìn đồng) cho một chup đèn là $C(x) = x^2 + 108$ (nghìn đồng). Thời gian sản xuất cho một chup đèn được xác định là $T(x) = x + 6$ (giờ). Xưởng muốn xác định kích thước x để chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là thấp nhất, nhằm tối ưu hóa hiệu quả sử dụng thời gian và vật liệu. Hãy tìm giá trị của x .



- Câu 20.** Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $G(x) = x + 1000 + \frac{250000}{x}$ (đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?
- Câu 21.** Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 300 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 300$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = -2x^2 + 1312x$ (nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $G(x) = x^2 - 77x + 1000 + \frac{40000}{x}$ (nghìn đồng). Lợi nhuận thu được của doanh nghiệp (tính theo đơn vị triệu đồng) đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).
- Câu 22.** Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 400 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 400$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng). Trong đó, chi phí vận hành máy móc cho mỗi sản phẩm là $G(x) = \frac{100000x}{\frac{3}{2}x + 1}$ đồng. Tổng chi phí mua nguyên vật liệu là $H(x) = 2x^3 + 100000x - 50000$ (đồng) nhưng do doanh nghiệp mua với số lượng lớn nên được

giảm 1% cho 200 sản phẩm đầu tiên doanh nghiệp sản xuất và giảm 2% cho sản phẩm tiếp theo. Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất ?

- Câu 23.** Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

$M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường thẳng có phương trình dạng $y = ax + b$. Tính $P = 68a + 3b + 800$.

- Câu 24.** Một công ty chuyên sản xuất dụng cụ thể thao nhận được đơn đặt hàng sản xuất 9000 quả bóng rổ. Công ty có một số máy móc, mỗi máy có khả năng sản xuất 36 quả bóng rổ trong một giờ. Chi phí thiết lập mỗi máy là 250 nghìn đồng. Sau khi thiết lập, quá trình sản xuất sẽ diễn ra hoàn toàn tự động và chỉ cần có người giám sát. Chi phí trả cho người giám sát là 225 nghìn đồng mỗi giờ. Số máy móc công ty cần sử dụng để chi phí hoạt động đạt mức thấp nhất là bao nhiêu?

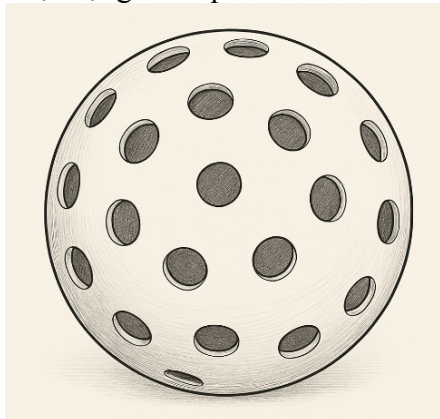
- Câu 25.** Một nhà xuất bản nhận in 4000 ấn phẩm. Nhà xuất bản có tất cả 14 máy in được cài đặt, hoạt động tự động và giám sát bởi 1 kĩ sư. Mỗi máy in có thể in được 30 ấn phẩm trong một giờ. Chi phí cài đặt máy in là 12 USD cho một máy, chi phí giám sát là 9USD một giờ. Tính số máy in nhà xuất bản nên sử dụng để chi phí in là nhỏ nhất ?

- Câu 26.** Giả sử chi phí đặt hàng và vận chuyển C (đơn vị: triệu đồng) của một linh kiện được sử dụng

trong sản xuất một sản phẩm được xác định theo công thức
$$C = \frac{19200000}{x^2} + \frac{27x}{x + 3000}, x \geq 1$$
 trong đó x là số linh kiện được đặt hàng và vận chuyển. Tìm x để chi phí đặt hàng và vận chuyển cho mỗi linh kiện trên là nhỏ nhất.

- Câu 27.** Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ có đồ thị là (C) (m là tham số thực). Tổng bình phương các giá trị của m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B sao cho $OA \perp OB$ bằng bao nhiêu?

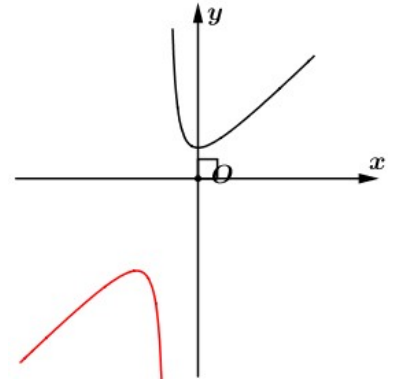
- Câu 28.** Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 300.000 quả bóng Pickleball. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất được 60 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập máy này là 125 ngàn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 90 ngàn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?



LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Trong hệ trục tọa độ (Oxy) cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ mô tả chuyển động của hai tàu đánh cá A và B (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng km). Biết quỹ đạo chuyển động của hai tàu luôn thuộc về hai nhánh khác nhau của đồ thị (C) . Tính khoảng cách ngắn nhất (đơn vị km) giữa hai tàu đánh cá A và B (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

Đáp án: 4,39.

Ta có $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = x + \frac{1}{x + 1}, (x \neq -1)$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -1$, gồm hai nhánh nằm về hai phía của đường thẳng $x = -1$.

Gọi A là điểm thuộc nhánh trái của đồ thị hàm số, khi đó $x_A < -1$.

Đặt $a = -1 - x_A > 0 \Rightarrow x_A = -1 - a$

$$\Rightarrow y_A = -1 - a + \frac{1}{-1 - a + 1} = -1 - a - \frac{1}{a} \Rightarrow A\left(-1 - a; -1 - a - \frac{1}{a}\right)$$

Gọi B là điểm thuộc nhánh phải của đồ thị hàm số, khi đó $x_B > -1$.

Đặt $b = x_B + 1 > 0 \Rightarrow x_B = b - 1$

$$\Rightarrow y_B = b - 1 + \frac{1}{b - 1 + 1} = b - 1 + \frac{1}{b} \Rightarrow B\left(b - 1; b - 1 + \frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow AB^2 = (b + a)^2 + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)^2 = (b + a)^2 + (b + a)^2 \cdot \left(\frac{1}{ab}\right)^2 = (a + b)^2 \left(2 + \frac{2}{ab} + \frac{1}{a^2 b^2}\right)$$

Với $a > 0, b > 0$ ta có
$$\begin{cases} (a + b)^2 \geq 4ab \\ 2 + \frac{1}{a^2 b^2} \geq 2\sqrt{\frac{2}{a^2 b^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{ab} \end{cases}$$

$$AB^2 \geq 4ab \cdot \left(\frac{2}{ab} + \frac{2\sqrt{2}}{ab}\right) = 8 + 8\sqrt{2} \Rightarrow AB \geq \sqrt{8 + 8\sqrt{2}} \approx 4,39$$

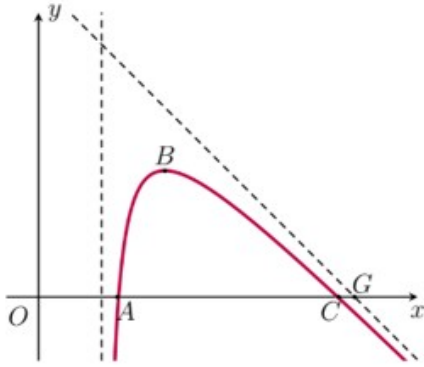
Nên

$$\text{ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 2 = \frac{1}{a^2 b^2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dấu bằng xảy

Vậy khoảng cách ngắn nhất (đơn vị km) giữa hai tàu đánh cá A và B là 4,39 (km).

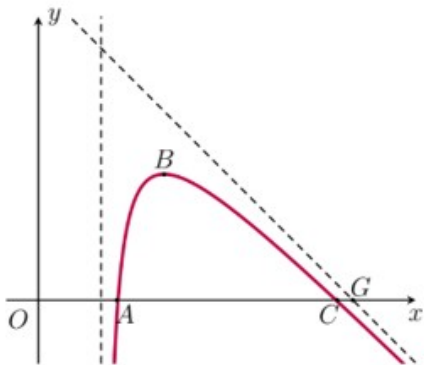
Câu 2. Một máy bay trình diễn có đường bay gắn với hệ trục Oxy được mô phỏng như hình vẽ, trục Ox gắn với mặt đất.



Đường bay có dạng là một phần của đồ thị hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng là $x = 2$. Điểm G là giao điểm của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục Ox được gọi là điểm giới hạn. Biết máy bay bay từ vị trí A cách tọa độ O một khoảng $2,5$ đơn vị và máy bay khi ở vị trí cao nhất cách điểm xuất phát $1,5$ đơn vị theo phương song song với trục Ox và cách mặt đất $4,5$ đơn vị. Vị trí máy bay tiếp đất cách điểm giới hạn một khoảng bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $0,5$.



Vì tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất) là $x = 2$.

Hàm số có dạng $y = f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} (a < 0)$.

Đồ thị hàm số qua điểm $A\left(\frac{5}{2}; 0\right)$ và nhận $B\left(4; \frac{9}{2}\right)$ làm điểm cực trị, suy ra:

$$\begin{cases} f\left(\frac{5}{2}\right) = 0 \\ f(4) = \frac{9}{2} \\ f'(4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}a + b + 2c = 0 \\ 4a + b + \frac{1}{2}c = \frac{9}{2} \\ a - \frac{1}{4}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{21}{2} \\ c = -4 \end{cases}$$

Khi đó: $f(x) = -x + \frac{21}{2} - \frac{4}{x-2}$.

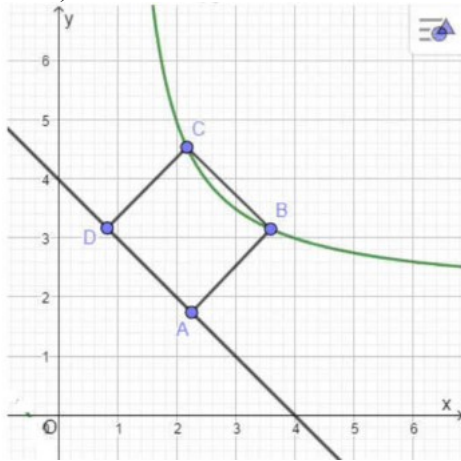
Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên: $y = -x + \frac{21}{2}$. Tọa độ điểm $G\left(\frac{21}{2}; 0\right)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục Ox là

$$-x + \frac{21}{2} - \frac{4}{x-2} = 0 \Rightarrow -x^2 + \frac{25}{2}x - 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = 10 \end{cases} \Rightarrow C(10; 0)$$

$$CG = \frac{21}{2} - 10 = \frac{1}{2}$$

Câu 3. Trong một công viên có một hồ nước và một đường đi lát gạch hoa. Thiết lập hệ trục Oxy như hình vẽ dưới, kiến trúc sư thấy rằng bờ hồ có thể coi như một nhánh của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ và đường đi khi đó ứng với đường thẳng $(d): y = -x + 4$. Để đảm bảo ánh sáng, kiến trúc sư muốn đặt 2 cột đèn trên bờ hồ và 2 cột đèn trên đường đi sao cho 4 cột đèn này tạo thành một hình vuông. Tính khoảng cách giữa hai cột đèn trên bờ hồ (làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: 1,92.

Gọi $(d_1): y = -x + m$ (với $m > 4$) song song với $(d): y = -x + 4$ và cắt $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt B, C ($x_B; x_C > 1$)

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và $(C): \frac{2x+1}{x-1} = -x + m \Leftrightarrow x^2 + (1-m)x + m+1 = 0$.

$$\Delta = m^2 - 6m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m < 3 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow m > 3 + 2\sqrt{3} \quad (\text{vì } m > 4) \quad (1)$$

Khi đó ta có:
$$\begin{cases} x_C + x_B = m - 1 \\ x_C \cdot x_B = m + 1 \end{cases}$$

Suy ra: $CB = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (-x_B + m + x_C - m)^2} = \sqrt{2(x_B - x_C)^2}$

$$\Rightarrow CB^2 = 2(x_B - x_C)^2 = 2(x_B + x_C)^2 - 8x_B \cdot x_C = 2m^2 - 12m - 6$$

Mặt khác chọn $I(0; 4) \in (d)$, ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng $(d); (d_1)$ bằng

$$AB = d(I; (d_1)) = \frac{|4 - m|}{\sqrt{2}} = \frac{m - 4}{\sqrt{2}}$$

Để $ABCD$ là hình vuông thì $AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow \frac{(m - 4)^2}{2} = 2m^2 - 12m - 6 \Leftrightarrow m = \frac{8 \pm 2\sqrt{37}}{3}$

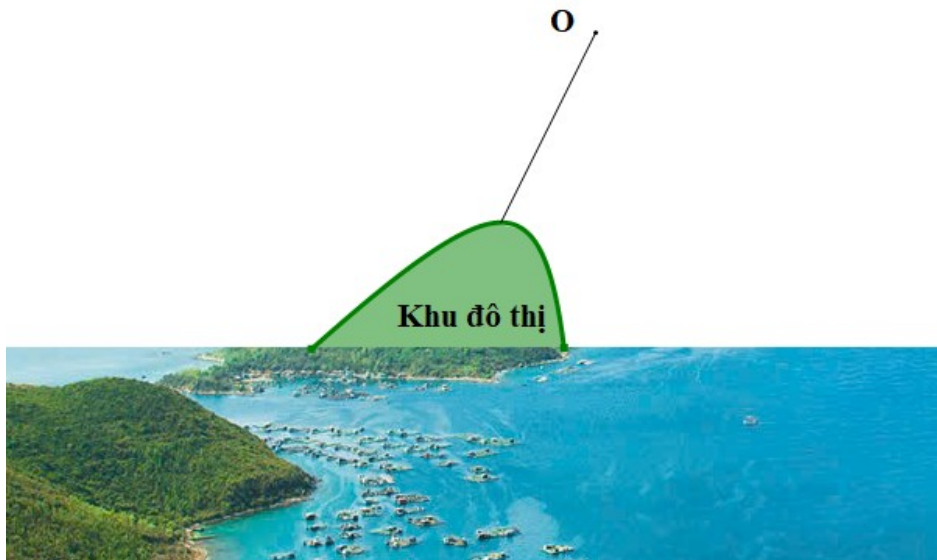
Kết hợp điều kiện (1) suy ra $m = \frac{8 + 2\sqrt{37}}{3}$

$$\frac{\frac{8 + 2\sqrt{37}}{3} - 4}{\sqrt{2}} \approx 1,92.$$

Vậy khoảng cách giữa hai cột đèn bên bờ hồ bằng

Câu 4. Ở một vịnh biển, ngoài xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây một khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ Oxy với đơn vị đo tương ứng 1km có hòn đảo ở O thì đường bao của phần đất lấn biển có

dạng là một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$. Giả sử tuyến cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị với độ dài ngắn nhất. Độ dài của tuyến cáp treo là bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Lời giải

Đáp án: 2,2 .

Độ dài ngắn nhất của tuyến cáp treo nối với đường bao của khu đô thị chính là khoảng cách từ

O tới điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$.

Xét hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ với $x \neq 0$.

Ta có $y' = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	$-\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có điểm cực đại là $A(-1; -2)$.

Khi đó $OA = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \approx 2,2$.

Vậy độ dài của tuyến cáp treo xấp xỉ $2,2$ km.

Câu 5. Giả sử tỷ lệ sinh của Tỉnh A tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = \frac{200}{1 + 4e^{-t}}; t \geq 0, t \in \mathbb{N}$, trong đó thời gian t được tính bằng tháng. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng dân số của tỉnh A. Hỏi sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng trưởng của dân số tỉnh A là lớn nhất?

Lời giải

Đáp án: 1,39.

Ta có $f(t) = \frac{200}{1 + 4e^{-t}} = \frac{200e^t}{e^t + 4}$

Khi đó $f'(t) = \frac{800e^t}{(e^t + 4)^2}$

$\Rightarrow f''(t) = \frac{800e^t(4 - e^t)}{(e^t + 4)^3}$. Khi đó $f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = \ln 4$.

Dựa vào bảng biến thiên

t	0	$\ln 4$	$+\infty$
$f''(t)$	$+$	0	$-$
$f'(t)$			

Vậy tốc độ tăng trưởng của dân số tỉnh A lớn nhất là $f'(\ln 4) = \frac{800e^{\ln 4}}{(e^{\ln 4} + 4)^2} = \frac{800 \cdot 4}{16^2} = \frac{25}{2}$ tại

thời điểm $t = \ln 4 \approx 1,39$

Câu 6. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}, t \geq 0$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành thì tốc độ bán hàng đạt lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 1250.

Ta có
$$f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}} = \frac{5000e^t}{e^t + 5}$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{5000e^t(e^t + 5) - 5000e^{2t}}{(e^t + 5)^2} = \frac{25000 \cdot e^t}{(e^t + 5)^2} > 0, \forall t \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f''(t) &= \frac{25000 \cdot e^t \cdot (e^t + 5)^2 - 50000 \cdot e^t \cdot (e^t + 5) \cdot e^t}{(e^t + 5)^4} \\ &= \frac{25000 \cdot e^t \cdot (e^t + 5) \cdot (e^t + 5 - 2e^t)}{(e^t + 5)^4} = \frac{25000 \cdot e^t \cdot (5 - e^t)}{(e^t + 5)^3} \end{aligned}$$

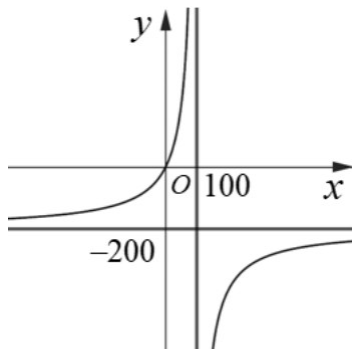
Có $f''(t) = 0 \Leftrightarrow 5 - e^t = 0 \Leftrightarrow t = \ln 5$.

Ta có bảng biến thiên

t	0	$\ln 5$	$+\infty$
$f''(t)$	+	0	-
$f'(t)$	$\frac{6250}{9}$	1250	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có tốc độ bán hàng lớn nhất là 1250.

Câu 7. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm môi trường từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí (triệu đồng) cần bỏ ra được mô hình hóa bởi hàm số có dạng $C(x) = \frac{ax + b}{-x + d}$ (như hình vẽ), ($0 \leq x < 100$). Tính chi phí chênh lệch (tỉ đồng) phải bỏ ra để loại bỏ 90% và loại bỏ 99% chất gây ô nhiễm từ khí thải của nhà máy.

**Lời giải****Đáp án:** 18.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: Đồ thị đi qua gốc tọa độ nên $b = 0$.

Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = 100 \Rightarrow d = 100$.

Đồ thị có đường tiệm cận ngang $y = -200 \Rightarrow -a = -200 \Rightarrow a = 200$.

Vậy ta có
$$C(x) = \frac{200x}{-x+100}$$

Suy ra chi phí chênh lệch (tỉ đồng) phải bỏ ra để loại bỏ 90% và loại bỏ 99% chất gây ô nhiễm từ khí thải của nhà máy là:

$$C(99) - C(90) = \frac{200 \cdot 99}{-99+100} - \frac{200 \cdot 90}{-90+100} = 18000 \quad (\text{triệu đồng}) = 18 \text{ tỉ đồng}.$$

Câu 8. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Đồ thị hàm số $y = f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y = a$. Giá trị của a là bao nhiêu?

Lời giải**Đáp án:** 26.

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{26t+10}{t+5} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{26 + \frac{10}{t}}{1 + \frac{5}{t}} = 26 \Rightarrow \text{TCN: } y = 26.$$

Ta có:

Câu 9. Nồng độ C của một loại hóa chất trong máu sau t giờ tiêm vào cơ thể được cho bởi công thức $C(t) = \frac{4t}{64+t^3}$ với $t \geq 0$. Sau khoảng bao nhiêu giờ tiêm thì nồng độ của hóa chất trong máu là cao nhất? (kết quả làm tròn tới hàng phần trăm)

Lời giải**Đáp án:** 3,17.

$$C'(t) = \frac{-8t^3 + 256}{(64+t^3)^2}$$

Ta có

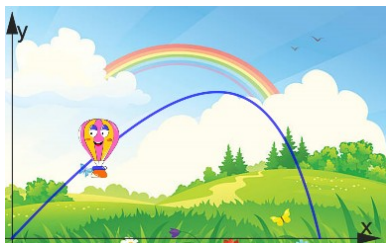
$$C'(t) = 0 \Leftrightarrow -8t^3 + 256 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{32}$$

Bảng biến thiên

t	0	$\sqrt[3]{32}$	$+\infty$
$C'(t)$	+	0	-
$C(t)$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> $\nearrow$ $C(\sqrt[3]{32})$ $\searrow$ </div> </div>		

Dựa vào bảng biến thiên thì nồng độ hóa chất trong máu cao nhất khi $t = \sqrt[3]{32} \approx 3,17$ (giờ).

Câu 10. Đường đi của một khinh khí cầu được gắn trong hệ trục tọa độ là một đường cong bậc hai trên bậc nhất có đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ là $(1;0)$ và $(8;0)$ với đơn vị trên hệ trục tọa độ là $^1(km)$. Biết rằng điểm cực đại của đồ thị hàm số là điểm $(6;5)$. Hỏi khi khinh khí cầu đi qua điểm cực đại và cách mặt đất $3875(m)$ thì khinh khí cầu cách gốc tọa độ theo phương ngang bao nhiêu? (đơn vị: km)



Lời giải

Đáp án: 7,2.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử phương trình của đường cong là $y = \frac{x^2 + bx + c}{dx + e}$

Vì đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm có tọa độ là $(1;0)$ và $(8;0)$ nên

$$x^2 + bx + c = (x-1)(x-8) = x^2 - 9x + 8$$

$$y = \frac{x^2 - 9x + 8}{dx + e} \Rightarrow y' = \frac{(2x-9)(dx+e) - d(x^2-9x+8)}{(dx+e)^2}$$

Suy ra

Vì đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(6;5)$ nên suy ra

$$\begin{cases} y'(6) = 0 \\ y(6) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(6d+e) + 10d = 0 \\ \frac{-10}{6d+e} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28d + 3e = 0 \\ 30d + 5e = -10 \end{cases} \Leftrightarrow d = \frac{3}{5}; e = -\frac{28}{5}$$

$$y = \frac{5(x^2 - 9x + 8)}{3x - 28}$$

Vậy phương trình của hàm số là: $y = \frac{5(x^2 - 9x + 8)}{3x - 28}$. Kiểm tra lại điểm cực trị của hàm số này

ta thấy điểm $(6;5)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ tìm nghiệm $x > 6$ của phương trình

$$\frac{5(x^2 - 9x + 8)}{3x - 28} = 3,875 \Leftrightarrow 5x^2 - 56,625x + 148,5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7,2 \\ x = 4,125 \text{ (L)} \end{cases}$$

Vậy khi khí cầu đi qua điểm cực đại và cách mặt đất 3875 (m) thì khí cầu cách gốc tọa độ theo phương ngang là 7,2 km.

- Câu 11.** Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2002 được tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Đạo hàm của hàm số $y = f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,075 nghìn người/năm?

Lời giải

Đáp án: 2037.

Ta có: $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$

Vì t là số năm nên $t > 0$.

Hàm số xác định với " $t > 0$ ".

$$f'(t) = \frac{120}{(t + 5)^2}.$$

$$\text{Đ } f'(t) = 0,075 \Leftrightarrow \frac{120}{(t + 5)^2} = 0,075 \Leftrightarrow (t + 5)^2 = 1600 \Leftrightarrow (t + 5)^2 = 40^2.$$

Vì $t > 0$ nên $t = 35$.

Vậy sau 35 năm kể từ năm 2002, tức là vào năm 2037 thì tốc độ tăng dân số của thị trấn đó là 0,075 nghìn người/năm.

- Câu 12.** Một bể chứa 3000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam/lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử nồng độ muối trong nước bể sau t phút được xác định bởi một hàm số $f(t)$ trên $t \in [0; +\infty)$ (gam/lít). Khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến bao nhiêu gam/lít.

Lời giải

Đáp án: 25

Sau t phút khối lượng muối trong bể là $25 \cdot 20 \cdot t = 500t$ (gam).

Thể tích của bể sau t phút là $3000 + 20 \cdot t$ (lít).

Khi đó nồng độ muối có trong nước bể là: $f(t) = \frac{500t}{3000 + 20t} = \frac{25t}{150 + t}$ (gam/lít).

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25t}{150 + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{150}{t} + 1} = 25.$$

Vậy hi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến 25 gam/lít.

- Câu 13.** Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) vượt khoảng cách 300km để tới nơi sinh sản. Vận tốc dòng nước là 6km/h . Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v\text{ km/h}$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ trong đó c là hằng số cho trước. E tính bằng Jun. Tính vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên, để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất?



Lời giải

Trả lời: 9

Theo đề bài, vận tốc của cá khi bơi trên sông là $v - 6$, khi đó thời gian để cá bơi đến nơi sinh

$$t = \frac{300}{v - 6}$$

sản là

$$E(v) = cv^3 \frac{300}{v - 6} \quad v > 6 \quad x = v - 6$$

Khi đó, với . Đặt .

Bài năng lượng tiêu hao của cá được tính bởi hàm số:

$$f(x) = 300c \frac{(x + 6)^3}{x} = 300c \left(x^2 + 18x + 108 + \frac{216}{x} \right) \quad x > 0$$

với .

$$f'(x) = 300c \left(2x + 18 - \frac{216}{x^2} \right) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 18x^2 - 216 = 0 \Rightarrow x = 3$$

Ta có:

Bảng biến thiên:

x	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(3)$	$+\infty$	

$$\min_{x \in (0, +\infty)} f(x) = f(3)$$

$$v = 9 \text{ km/h}$$

Vậy hay khi vận tốc của cá khi nước đứng yên là thì cá ít tốn năng lượng nhất.

- Câu 14.** Một bể chứa ban đầu có 250 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 25 lít nước, đồng thời cho vào bể 8 gam chất khử khuẩn (ClO_2) được hòa tan. Giả sử $C(t)$ là nồng độ chất khử khuẩn trong bể sau t phút (với $C(t) = \frac{m(t)}{V(t)}$, đơn vị gam/lít, trong đó $m(t)$ là khối lượng chất khử khuẩn trong bể và $V(t)$ là thể tích nước trong bể). Gọi c là số dương nhỏ nhất mà nồng độ chất khử khuẩn là $C(t)$ tăng theo thời gian t nhưng không vượt quá ngưỡng c gam/lít. Tìm c .

Lời giải

Nồng độ chất khử khuẩn trong bể sau t phút là $C(t) = \frac{8t}{25t + 250}, t > 0$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $C(t)$ trên khoảng xác định

$$C'(t) = \frac{2000}{(25t + 250)^2} > 0, \forall t > 0$$

Ta có:

Do đó $C(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{8t}{25t + 250} = \frac{8}{25} = 0,32$$

Ta có:

Vậy nồng độ chất khử khuẩn tăng theo thời gian và không vượt quá 0,32

Đáp án: 0,32

- Câu 15.** Biết rằng tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của một học viên lớn tuổi sau t tuần (kể từ khi chưa biết đánh máy) được cho bởi một trong hai công thức sau $S(t) = \frac{at^2 + b}{ct^2 + d}$

$$S(t) = \frac{at^2 + b}{ct + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}; ac \neq 0)$$

và

Ông A (một người lớn tuổi chưa biết đánh máy) sau 4 tuần đi học thì tốc độ đánh máy trung bình đạt 20 từ trên phút, sau 6 tuần đạt 30 từ trên phút. Em hãy dự đoán xem, sau khóa học 15 tuần thì tốc độ đánh máy trung bình của ông A là bao nhiêu từ trên phút.

Lời giải

Đáp số: 45.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{at^2 + b}{ct + d} = \pm\infty \quad \text{nên} \quad S(t) = \frac{at^2 + b}{ct + d} \text{ loại.}$$

$$\text{+) Ta có} \quad S(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow S(t) = \frac{at^2}{ct^2 + d}.$$

$$\begin{cases} S(4) = 20 \\ S(6) = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a = 20(16c + d) \\ 36a = 30(36c + d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 80c + 5d & (1) \\ 6a = 180c + 5d & (2) \end{cases}$$

+) Mặt khác có

Lấy (2) trừ (1) ta được $a = 50c$ thay vào (1) ta được $d = 24c$.

$$\text{Vậy } S(t) = \frac{50ct^2}{ct^2 + 24c} = \frac{50t^2}{t^2 + 24}.$$

$$\text{+) Do đó } S(15) = \frac{50 \cdot 15^2}{15^2 + 24} \approx 45.$$

Câu 16. Một bể ban đầu chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan). Gọi $f(t)$ (gam/lít) là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t \geq 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo thời gian t nhưng không vượt ngưỡng P gam/lít. Tìm số P (kết quả viết dưới dạng số thập phân).

Lời giải

Đáp án: 0,4.

Thể tích nước trong bể sau t phút là $150 + 50t$ (lít).

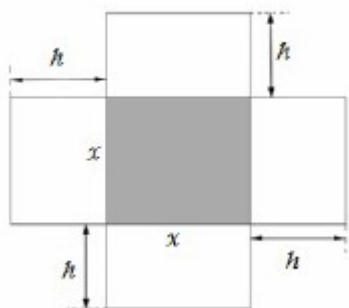
Khối lượng chất khử trùng trong bể sau t phút là $20t$ (gam).

Nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút là $f(t) = \frac{20t}{50t + 150}$ (gam/lít).

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{3000}{(50t + 150)^2} > 0, \forall t \geq 0 \quad \text{và} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20t}{50t + 150} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Vậy giá trị hàm $f(t)$ luôn tăng nhưng không vượt ngưỡng 0,4 gam/lít.

Câu 17. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x (cm), chiều cao là h (cm) và thể tích là 4000cm^3 . Tìm x (cm) sao cho chiếc hộp làm ra tốn ít bìa các tông nhất.



Lời giải

Đáp án: 20.

Điều kiện $x > 0$

Ta có thể tích của chiếc hộp là $V = x^2 \cdot h$

Theo giả thiết thể tích chiếc hộp bằng 4000 cm^3 nên ta có $x^2 \cdot h = 4000 \Leftrightarrow h = \frac{4000}{x^2}$

Ta có diện tích xung quanh và đáy của chiếc hộp là $S = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \cdot \frac{4000}{x^2} = x^2 + \frac{16000}{x}$

Ta khảo sát hàm số $f(x) = x^2 + \frac{16000}{x}$

Ta có $f'(x) = 2x - \frac{16000}{x^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 20$

x	0	20	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		1200	

Ta có $x = 20(\text{cm})$ thì chiếc hộp làm ra tốn ít bìa nhất.

Câu 18. Để tạo một kiện hàng dạng hình lăng trụ đứng với đáy là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, người ta dùng các thanh gỗ ghép khít đóng lại với nhau. Biết rằng, dung tích kiện hàng bằng 9m^3 và giá thành 1m^2 gỗ sử dụng là $200\,000$ đồng. Hỏi sau khi hoàn thành kiện hàng đó, người ta cần bỏ ra ít nhất bao nhiêu triệu đồng? (diện tích các mép giữa hai mặt kề nhau không đáng kể).



Lời giải

Đáp án: 5,4.

Gọi $x(x > 0)$ là chiều rộng của đáy bể. Khi đó chiều dài của kiện hàng là $2x$ là chiều cao của kiện hàng là $\frac{9}{2x^2}$. Khi đó diện tích của kiện hàng là $4x^2 + \frac{27}{x}$

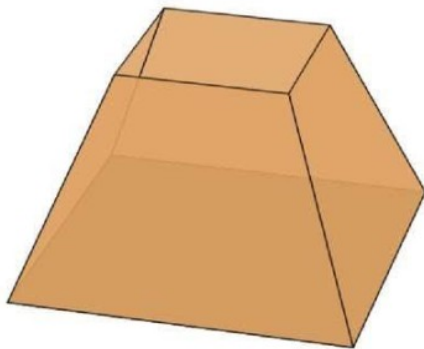
Xét hàm số $f(x) = 4x^2 + \frac{27}{x}$ có $f'(x) = 8x - \frac{27}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1,5$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	0	1,5	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	27	$+\infty$

Từ bảng biên thiên ta có $\min f(x) = f(1,5) = 27$ Vậy chi phí thấp nhất làm kiện hàng là: $200\,000 \cdot 27 = 5\,400\,000$ đồng.

- Câu 19.** Một xưởng thủ công mỹ nghệ sản xuất loại chụp đèn trang trí dạng hình chóp cụt tứ giác đều. Gọi x là độ dài cạnh đáy lớn (đơn vị:dm). Tính toán cho thấy tổng chi phí vật liệu (tính bằng nghìn đồng) cho một chụp đèn là $C(x) = x^2 + 108$ (nghìn đồng). Thời gian sản xuất cho một chụp đèn được xác định là $T(x) = x + 6$ (giờ). Xưởng muốn xác định kích thước x để chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là thấp nhất, nhằm tối ưu hóa hiệu quả sử dụng thời gian và vật liệu. Hãy tìm giá trị của x .



Lời giải

Đáp án: 6

Gọi hàm chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là $f(x) = \frac{C(x)}{T(x)} = \frac{x^2 + 108}{x + 6}, x > 0$.

Ta có
$$f'(x) = \frac{x^2 + 12x - 108}{(x + 6)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -18(L) \\ x = 6 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên :

x	0	6	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	18	12	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt GTNN bằng 12 khi $x = 6$.

Vậy để chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là thấp nhất thì $x = 6$.

Câu 20. Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $G(x) = x + 1000 + \frac{250000}{x}$ (đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Lời giải

Đáp án: 333.

Ta xét hàm lợi nhuận nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 500$) là:

$$f(x) = F(x) - xG(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000 - x\left(x + 1000 + \frac{250000}{x}\right)$$

$$= x^3 - 2000x^2 + 1000000x;$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4000x + 1000000;$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1000}{3} \approx 333,33 \in [1; 500] \\ x = 1000 \notin [1; 500] \end{cases}$$

Ta lập bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[1; 500]$

x	$-\infty$	1	$\frac{1000}{3}$	500	1000	$+\infty$
$f'(x)$			+	0	-	
$f(x)$						

Từ bảng biến thiên, ta có: $\text{Max}_{[1; 500]} f(x) = f\left(\frac{1000}{3}\right) \approx 148148148$

Vì x là số tự nhiên, nên ta tính thêm hai giá trị của x liền kề $\frac{1000}{3}$:

$$f(333) \approx 148148037; f(334) \approx 148147704.$$

Do đó doanh nghiệp lợi nhuận thu được là lớn nhất khi sản xuất 333 sản phẩm.

Câu 21. Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 300 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 300$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = -2x^2 + 1312x$ (nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $G(x) = x^2 - 77x + 1000 + \frac{40000}{x}$ (nghìn đồng). Lợi nhuận thu được của doanh nghiệp (tính theo đơn vị triệu đồng) đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp án: 38.

Chi phí sản xuất cho x sản phẩm là ${}^xG(x) = x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000$ (nghìn đồng).

Lợi nhuận thu được của doanh nghiệp:

$$h(x) = -2x^2 + 1312x - (x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000) = -x^3 + 75x^2 + 312x - 40000 \quad (\text{nghìn đồng}).$$

Ta có: $h'(x) = -3x^2 + 150x + 312$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 52 \\ x = -2 \end{cases}$$

Xét

Bảng biến thiên:

x	1	52	300
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$		38416	

Vậy lợi nhuận lớn nhất của doanh nghiệp khoảng 38 triệu đồng.

Câu 22. Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 400 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 400$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng). Trong đó, chi phí vận hành máy móc cho mỗi

$$G(x) = \frac{100000x}{\frac{3}{2}x + 1}$$

sản phẩm là đồng. Tổng chi phí mua nguyên vật liệu là $H(x) = 2x^3 + 100000x - 50000$ (đồng) nhưng do doanh nghiệp mua với số lượng lớn nên được giảm 1% cho 200 sản phẩm đầu tiên doanh nghiệp sản xuất và giảm 2% cho sản phẩm tiếp theo. Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Lời giải

Đáp án: 253

Ta có chi phí

$$H(200) = 35950000$$

$$H(x - 200) = 2(x - 200)^3 + 100000(x - 200) - 50000, \text{ với } 400 \geq x > 200$$

Ta có lợi nhuận thu được tính như sau:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000 - \frac{100000x^2}{\frac{3}{2}x + 1} - \frac{99}{100}(2x^3 + 100000x - 50000), & \text{khi } 0 \leq x \leq 200 \\ x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000 - \frac{100000x^2}{\frac{3}{2}x + 1} - \frac{99}{100}H(200) - \frac{98}{100}H(x - 200), & \text{khi } 200 < x \leq 400 \end{cases}$$

*. Xét trường hợp khi $0 \leq x \leq 200$

$$f(x) = -0,98x^3 - 1999x^2 + 902000x + 299500 - \frac{200000x^2}{3x+2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-26,46x^4 - 36017,28x^3 + 8070912,24x^2 + 10080008x + 3608000}{(3x+2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 196,98$$

BBT:

x	0	196,98	200
$f'(x)$		+	0
$f(x)$			-
		79,834.10 ⁶	

*. Xét trường hợp khi $200 < x \leq 400$

$$f(x) = -0,96x^3 - 823x^2 + 667800x - 11500 - \frac{200000x^2}{3x+2}, 200 < x \leq 400$$

$$\Rightarrow f'(x) = -2,88x^2 - 1646x + 667800 - \frac{600000x^2 + 800000x}{(3x+2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 253,11$$

BBT:

x	200	253,11	400
$f'(x)$		+	0
$f(x)$			-
		83,894.10 ⁶	

Vì số sản phẩm sản xuất được là số tự nhiên, từ BBT trên ta so sánh $f(253)$ và $f(254)$

Ta có: $f(253) \approx 83893648,05$ và $f(254) \approx 83892445,32$

Vậy doanh nghiệp cần sản xuất 253 sản phẩm thì lợi nhuận là lớn nhất

Câu 23. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

$M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường thẳng có phương trình dạng $y = ax + b$. Tính $P = 68a + 3b + 800$.

Lời giải

Đáp án: 6868.

Theo giả thiết, ta có:

$$T(x) = C(x) + 4000x = x^2 + 2000x + 10^8 \text{ (đồng)}.$$

$$M(x) = \frac{T(x)}{x} = x + \frac{10^8}{x} + 2000$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [M(x) - (x + 2000)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \frac{10^8}{x} + 2000 - (x + 2000) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{10^8}{x} \right] = 0$$

Khi đó đồ thị hàm số $M(x) = x + \frac{10^8}{x} + 2000$ có 1 tiệm cận xiên là $y = x + 2000$.

Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường thẳng $y = x + 2000$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2000 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P = 68a + 3b + 800 = 68 \cdot 1 + 3 \cdot 2000 + 800 = 6868.$$

Câu 24. Một công ty chuyên sản xuất dụng cụ thể thao nhận được đơn đặt hàng sản xuất 9000 quả bóng rổ. Công ty có một số máy móc, mỗi máy có khả năng sản xuất 36 quả bóng rổ trong một giờ. Chi phí thiết lập mỗi máy là 250 nghìn đồng. Sau khi thiết lập, quá trình sản xuất sẽ diễn ra hoàn toàn tự động và chỉ cần có người giám sát. Chi phí trả cho người giám sát là 225 nghìn đồng mỗi giờ. Số máy móc công ty cần sử dụng để chi phí hoạt động đạt mức thấp nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 15

Gọi số máy móc công ty cần sử dụng để sản xuất 9000 quả bóng rổ là: x ($x \geq 1; x \in \mathbf{Z}$).

Chi phí thiết lập mỗi máy là 250 nghìn đồng nên chi phí thiết lập x máy là $250x$ nghìn đồng.

Do mỗi máy sản xuất trong 1h được 36 quả bóng rổ nên x máy trong 1h sẽ sản xuất được $36x$ quả.

$$\text{Để sản xuất 9000 quả bóng thì cần } \frac{9000}{36x} = \frac{250}{x} \text{ (h)}.$$

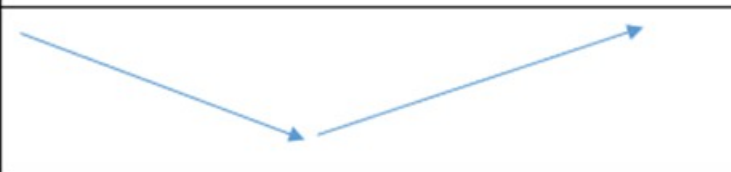
Chi phí trả cho người giám sát là 225 nghìn đồng 1h nên chi phí cần trả cho người giám sát là:
 $225 \cdot \frac{250}{x}$ nghìn đồng.

Tổng chi phí phải trả để sản xuất 9000 quả bóng là: $f(x) = 250x + \frac{225 \cdot 250}{x}$

$$f'(x) = 250 - \frac{225 \cdot 250}{x^2} = \frac{250x^2 - 225 \cdot 250}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -15 \\ x = 15 \end{cases}$$

Ta có:

BBT:

x	1	15	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Từ BBT ta có $f'(x)$ đạt giá trị bé nhất tại $x = 15$.

Vậy số máy móc công ty cần sử dụng để chi phí hoạt động đạt mức thấp nhất là 15.

Câu 25. Một nhà xuất bản nhận in 4000 ấn phẩm. Nhà xuất bản có tất cả 14 máy in được cài đặt, hoạt động tự động và giám sát bởi 1 kỹ sư. Mỗi máy in có thể in được 30 ấn phẩm trong một giờ. Chi phí cài đặt máy in là 12 USD cho một máy, chi phí giám sát là 9USD một giờ. Tính số máy in nhà xuất bản nên sử dụng để chi phí in là nhỏ nhất?

Lời giải

Đáp án: 10.

Gọi x ($0 < x \leq 14$) là số máy in cần sử dụng để in lô hàng.

Chi phí cài đặt là $12x$.

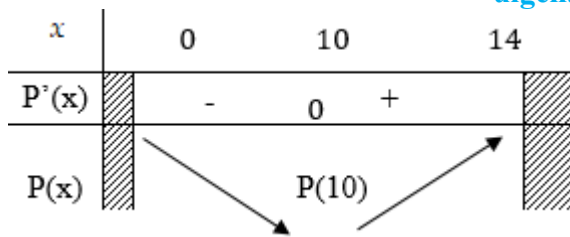
Số giờ in hết số ấn phẩm là $\frac{4000}{30x}$ (giờ), chi phí giám sát là $\frac{4000}{30x} \cdot 9 = \frac{1200}{x}$ (USD)

Tổng chi phí in là $P(x) = 12x + \frac{1200}{x}$.

$$P'(x) = 12 - \frac{1200}{x^2}$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -10 \end{cases} (L)$$

Bảng biến thiên:



Vậy để chi phí in nhỏ nhất thì số máy phải sử dụng là 10 máy.

Câu 26. Giả sử chi phí đặt hàng và vận chuyển C (đơn vị: triệu đồng) của một linh kiện được sử dụng

$$C = \frac{19200000}{x^2} + \frac{27x}{x+3000}, x \geq 1$$

trong sản xuất một sản phẩm được xác định theo công thức

Trong đó x là số linh kiện được đặt hàng và vận chuyển. Tìm x để chi phí đặt hàng và vận chuyển cho mỗi linh kiện trên là nhỏ nhất.

Lời giải

Đáp án: 2400.

Xét hàm số $C(x) = \frac{19200000}{x^2} + \frac{27x}{x+3000}, x \geq 1$

$$C'(x) = -\frac{38400000}{x^3} + \frac{81000}{(x+3000)^2}$$

Ta có

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{38400000}{x^3} = \frac{81000}{(x+3000)^2}$$

$$\Leftrightarrow 12800(x+3000)^2 = 27x^3 \Leftrightarrow x = 2400$$

Ta có bảng biến thiên

x	1	2400	$+\infty$
y'	-	0	+
y			

Vậy chi phí đặt hàng và vận chuyển cho mỗi linh kiện trên là nhỏ nhất khi $x = 2400$.

Câu 27. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ có đồ thị là (C) (m là tham số thực). Tổng bình phương các giá trị của m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B sao cho $OA \perp OB$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 3.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d là

$$\frac{x^2 + mx - 1}{x - 1} = m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 + mx - 1 = mx - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ g(x) = x^2 + m - 1 = 0 \end{cases}$$

Đường thẳng $d: y = m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - m > 0 \\ g(1) = m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}$$

phân biệt khác 1

Gọi $A(x_1; m), B(x_2; m)$. Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

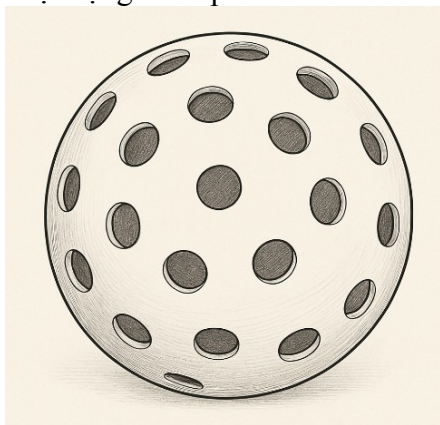
$$\text{Theo định lí Vi-et ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$$

$$OA \perp OB \Leftrightarrow x_1 x_2 + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Khi đó

$$\text{Tổng bình phương các giá trị của } m \text{ là } \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 3$$

Câu 28. Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 300.000 quả bóng Pickleball. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất được 60 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập máy này là 125 ngàn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 90 ngàn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?



Lời giải

Đáp án: 60.

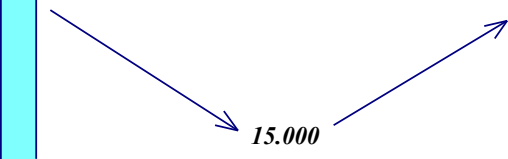
Gọi $x (x \in \mathbb{N}, x > 0)$ là số máy móc công ty sử dụng để sản xuất.

Thời gian cần để sản xuất được 300.000 quả bóng là $\frac{300.000}{60x}$

Tổng chi phí cho sản xuất là: $T(x) = \frac{300.000}{60x} \cdot 90 + 125x = \frac{450.000}{x} + 125x$

Ta có $T'(x) = -\frac{450.000}{x^2} + 125 \Rightarrow T'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 60$

x	0	60	$+\infty$
$T'(x)$		-	0
$T(x)$		-	+



Vậy nhà máy phải sử dụng 60 máy để chi phí hoạt động là thấp nhất