

PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Vấn đề cần nắm:

1. Khái niệm phương trình
2. Phương trình bậc nhất và quy về bậc nhất
3. Phương trình bậc nhất và quy về bậc hai
4. Hệ phương trình

Qua chủ đề này ta hình thành cho học sinh khái niệm phương trình một cách chính xác theo quan điểm của mệnh đề chứa biến, rèn luyện cho học sinh cách giải và biện luận phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, phương trình và hệ phương trình bậc hai.

Kiến thức trong chủ đề này bổ sung và hoàn chỉnh những kiến thức ở THCS, do đó yêu cầu đối với học sinh gồm mấy điểm:

1. Biết giải và biện luận phương trình, hệ phương trình trong trường hợp có tham số.
2. Biết giải một số hệ phương trình bậc hai đặc biệt và các hệ đối xứng loại 1, loại 2 và hệ đẳng cấp.



§1. Khái niệm phương trình

A. Lý thuyết

I. Phương trình một ẩn

1. Điều kiện xác định của phương trình là những điều kiện của ẩn để các biểu thức trong phương trình đều có nghĩa.
2. Hai phương trình gọi là tương đương nếu chúng có cùng một tập nghiệm. Hai phương trình vô nghiệm là tương đương.
3. Nếu mọi nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ đều là nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ thì phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ được gọi là phương trình hệ quả của phương trình $f(x) = g(x)$. Ta viết: $f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x)$.

Phương trình hệ quả có thể có thêm nghiệm không phải là nghiệm của phương trình ban đầu ta gọi đó là nghiệm ngoại lai.

II. Các phép biến đổi phương trình

1. Nếu hàm $h(x)$ xác định với mọi giá trị của x mà tại đó $f(x)$ và $g(x)$ đều có nghĩa thì: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$.

2. Nếu hàm $h(x)$ xác định với mọi giá trị của x mà tại đó $f(x)$ và $g(x)$ đều có nghĩa và $h(x) \neq 0, \forall x$ thì: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$.

3. Đối với bất kỳ các hàm $f(x)$ và $g(x)$ và n là số tự nhiên ta có:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow [f(x)]^n = [g(x)]^n$$

Đặc biệt:

+ Nếu n là số tự nhiên lẻ thì: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^n = [g(x)]^n$

+ $f(x) \geq 0; g(x) \geq 0$ thì: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2$

+ $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$

B. Các dạng toán điển hình

Tìm điều kiện của phương trình

Ví dụ 1: Tìm điều kiện của phương trình sau: $\frac{x^2 + 1}{x - 2} = \sqrt{3x}$.

A. $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

B. $x \neq 2$

C. $x \geq 0$

D. $x \geq 2$

Lời giải

Để phương trình có nghĩa ta phải có: $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$.

STUDY TIP

+ Điều kiện để $\sqrt{A}$ có nghĩa là $A \geq 0$

$f(x)$

Đáp án A.

Ví dụ 2: Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-2} + \frac{x^2+1}{\sqrt{7-x}}$ là:

- A. $x < 7$ B. $2 \leq x \leq 7$ C. $2 \leq x < 7$ D. $x \geq 2$

Lời giải

Phương trình xác định khi: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 7-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 7 \end{cases}$.

Đáp án C.

Ví dụ 3: Tìm điều kiện xác định của phương trình: $\frac{\sqrt{x}-1}{|x|-4} = 0$.

- A. $x \geq 0$ B. $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x \leq 0 \\ x \neq -4 \end{cases}$ D. $x \leq 0$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ |x|-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ |x| \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq \pm 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$.

Đáp án B.

Ví dụ 4: Tìm m để phương trình $\frac{x^2-1}{x-m+2} = 0$ xác định trên $[-1;1)$.

- A. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m > 1 \\ m \geq 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m < 1 \\ m \geq 3 \end{cases}$ D. $1 < m \leq 3$

Lời giải

Phương trình xác định khi: $x \neq m-2$.

Khi đó để phương trình xác định trên $[-1;1)$ thì:

$$m-2 \notin [-1;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 < -1 \\ m-2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \geq 3 \end{cases}$$

Đáp án C.

Ví dụ 5: Cho phương trình: $\sqrt{-x+2m-1} - \frac{1}{\sqrt{x-m+2}} = 0$. Tìm m để phương trình xác định trên $(0;1]$.

A. $1 < m \leq 2$ B. $1 \leq m \leq 2$ C. $1 \leq m < 2$ D. $1 < m < 2$

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình là:

$$\begin{cases} -x+2m-1 \geq 0 \\ x-m+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2m-1 \\ x > m-2 \end{cases} \Leftrightarrow m-2 < x \leq 2m-1$$

Hay phương trình xác định trên $(m-2; 2m-1]$ do đó điều kiện để phương trình xác định trên $(0;1]$ là: $(0;1] \subset (m-2; 2m-1]$

$$\Leftrightarrow m-2 \leq 0 < 1 \leq 2m-1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m \geq 1 \end{cases} \text{ hay } 1 \leq m \leq 2.$$

Đáp án B.

Dạ
ng

Phương trình tương đương, phương trình hệ quả

Ví dụ 1: Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình: $x^2 - 4 = 0$?

- A. $(2+x)(-x^2+2x+1)=0$ B. $(x-2)(x^2+3x+2)=0$
- C. $\sqrt{x^2-3}=1$ D. $x^2-4x+4=0$

Lời giải

Ta có phương trình: $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$ do đó tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S_0 = \{-2; 2\}$. Xét các đáp án:

- Đáp án A: Giải phương trình: $(2+x)(-x^2+2x+1)=0$

STUDY TIP

Điều kiện ở biểu thức thứ 2 chỉ là: $x-m+2 > 0$ vì căn thức nằm ở mẫu.

STUDY TIP

Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ -x^2+2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

Do đó tập nghiệm của phương trình là: $S_1 = \{-2; 1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\} \neq S_0$

$$(x-2)(x^2+3x+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \\ x=-2 \end{cases}$$

- Đáp án B: Giải phương trình:

Do đó tập nghiệm của phương trình là: $S_2 = \{-2; -1; 2\} \neq S_0$.

- Đáp án C: Giải phương trình: $\sqrt{x^2-3}=1 \Leftrightarrow x^2-3=1 \Leftrightarrow x=\pm 2$

Do đó tập nghiệm $S_3 = S_0$ nên chọn đáp án C.

- Đáp án D: Có $S_4 = \{2\} \neq S_0$.

Đáp án C.

Ví dụ 2: Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình: $x^2-3x=0$?

A. $x^2 + \sqrt{x-2} + 3x + \sqrt{x-2}$

B. $x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3}$

C. $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3}$

D. $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1}$

Lời giải

Giải phương trình đã cho: $x^2-3x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow$ Tập nghiệm là $S_0 = \{0; 3\}$.

Xét các đáp án:

- Đáp án A:

$$x^2 + \sqrt{x-2} = 3x + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3x \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow S_1 = \{3\} \neq S_0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

- Đáp án B:

$$x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3x \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow S_2 = \{0\} \neq S_0 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

- Đáp án C:

$$x^2 \sqrt{x-3} = 3x \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3x \\ \sqrt{x-3} = 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow S_3 = \{3\} \neq S_0 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

- Đáp án D:

$$x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow S_4 = \{0; 3\} = S_0$$

Đáp án D.

Ví dụ 3: Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $3x + \sqrt{x-2} = x^2 \Leftrightarrow 3x = x^2 - \sqrt{x-2}$

B. $3x + \sqrt{x-2} = x^2 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow 3x = x^2$

C. $\sqrt{x+2} = 3x \Leftrightarrow x+2 = 9x^2$

D. $\frac{2x-3}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow 2x-3 = (x-1)^2$

Đáp án A.

Ví dụ 4: Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\sqrt{x-1} = 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x-1 = 0$ **B.** $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = 0$

C. $|x-2| = |x+1| \Leftrightarrow (x-2)^2 = (x+1)^2$ **D.** $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Lời giải

Chọn đáp án D vì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Còn các khẳng định khác đều đúng.

Đáp án D.

Ví dụ 5: Chọn cặp phương trình tương đương trong các cặp phương trình sau:

A. $2x + \sqrt{x-3} = 1 + \sqrt{x-3}$ và $2x = 1$

B. $\frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = 0$ và $x = 0$

C. $\sqrt{x+1} = 2-x$ và $x+1 = (2-x)^2$

D. $x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2}$ và $x = 1$

Lời giải

Xét các đáp án:

- Đáp án A: + Phương trình $2x + \sqrt{x-3} = 1 + \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$

+ Phương trình $2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Do đó cặp phương trình ở đáp án A không tương đương vì không cùng tập nghiệm.

- Đáp án B: + Phương trình $\frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

+ Phương trình $x = 0$

Vậy chọn đáp án B.

- Đáp án C: + Phương trình $\sqrt{x+1} = 2-x \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = (2-x)^2 \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 3 = 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$

STUDY TIP

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B^2 \\ B \geq 0 \end{cases}$$

$$x+1=(2-x)^2 \Leftrightarrow x^2-5x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$$

+ Phương trình

Do đó hai phương trình trong đáp án C không tương đương.

$$x+\sqrt{x-2}=1+\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow$$

- Đáp án D: Tập nghiệm rỗng.

Do đó phương trình $x+\sqrt{x-2}=1+\sqrt{x-2}$ và $x=1$ không phải là hai phương trình tương đương.

Đáp án B.

Ví dụ 6: Xác định m để hai phương trình sau tương đương:

$$x^2+x+2=0 \quad (1) \text{ và } x^2-2(m+1)x+m^2+m-2=0 \quad (2)$$

A. $m < -3$

B. $m \leq -3$

C. $m \leq -6$

D. $m \geq -6$

Lời giải

Để thấy phương trình (1) vô nghiệm.

Để hai phương trình tương đương thì phương trình (2) cũng phải vô nghiệm, tức là: $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2+m-2) < 0 \Leftrightarrow m+3 < 0 \Leftrightarrow m < -3$.

Đáp án A.

STUDY TIP

Hai phương trình vô nghiệm thì tương đương với nhau.

Ví dụ 7: Hai phương trình nào sau đây không tương đương với nhau:

A. $\sqrt{x-1}=x$ và $(2x+1)\sqrt{x-1}=x(2x+1)$

B. $\sqrt{(x+1)(2-x)}=0$ và $\sqrt{1+x}\sqrt{2-x}=0$

C. $\frac{2x}{(x+1)^2}=\frac{x^2}{x+1}$ và $\frac{2x}{x+1}=x^2$

D. $\sqrt{x^2(x-2)}=0$ và $|x|\sqrt{x-2}=0$

Lời giải

Ta xét các đáp án:

- Đáp án A: Điều kiện của hai phương trình là $x \geq 1$

Khi đó $2x+1 > 0$ nên ta có thể chia 2 vế của phương trình thứ hai cho $2x+1$ nên hai phương trình tương đương.

- Đáp án B: Hai phương trình có cùng tập nghiệm là $\{-1; 2\}$ nên tương đương.

- Đáp án C: Điều kiện của hai phương trình là $x \neq -1$ nên ta có thể nhân phương trình thứ nhất với $x+1 \neq 0$ ta được phương trình thứ hai.

Vậy hai phương trình tương đương.

- Đáp án D: Phương trình $\sqrt{x^2(x-2)} = 0$ có 2 nghiệm $x=2$ và $x=0$ thỏa mãn

điều kiện $\begin{cases} x=0 \\ x \geq 2 \end{cases}$.

Còn phương trình $|x|\sqrt{x-2} = 0$ chỉ có nghiệm $x=2$ vì $x=0$ không thỏa mãn điều kiện $x \geq 2$.

Vậy hai phương trình không cùng tập nghiệm nên không tương đương.

Đáp án D.

Ví dụ 8: Tìm m để hai phương trình sau tương đương:

$$2x^2 + mx - 2 = 0 \text{ và } 2x^3 + (m+4)x^2 + 2(m-1)x - 4 = 0 \quad (2)$$

A. $m=2$

B. $m=3$

C. $m=-2$

D. $m=-3$

Lời giải

Ta có: Phương trình (2) $\Leftrightarrow (x+2)(2x^2 + mx - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ 2x^2 + mx - 2 = 0 \end{cases}$

Do hai phương trình tương đương nên $x = -2$ cũng là nghiệm của phương trình (1), thay vào ta có $m=3$. Khi $m=3$ hai phương trình đã cho có cùng tập nghiệm nên tương đương.

Đáp án B.

Ví dụ 9: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hai phương trình sau tương đương:

$$mx^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0 \quad (1) \text{ và } (m-2)x^2 - 3x + m^2 - 15 = 0 \quad (2)$$

A. $m = -5$

B. $m = -5; m = 4$

C. $m = 4$

D. $m = 5$

Lời giải

$$\Leftrightarrow (x-1)(mx-m+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ mx-m+2=0 \end{cases}$$

Phương trình (1)

Do 2 phương trình tương đương nên $x=1$ cũng phải là nghiệm của (2) nên thay $x=1$ vào phương trình (2) ta có:

$$m-2-3+m^2-15=0 \Leftrightarrow m^2+m-20=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=4 \\ m=-5 \end{cases}$$

+ Với $m=4$:

$$4x^2-6x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \left\{1; \frac{1}{2}\right\}$$

Phương trình (1) trở thành:

$$2x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S_2 = \left\{1; \frac{1}{2}\right\} = S_1$$

Phương trình (2) trở thành

Vậy hai phương trình tương đương.

+ Với $m=-5$:

$$-5x^2+12x-7=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{5} \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow T_1 = \left\{\frac{7}{5}; 1\right\}$$

Phương trình (1) trở thành:

$$-7x^2-3x+10=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-10}{7} \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow T_2 = \left\{\frac{-10}{7}; 1\right\}$$

Phương trình (2) trở thành:

STUDY TIP

Với câu hỏi trắc nghiệm ta có thể thử từng đáp án.

Vậy $T_1 \neq T_2 \Rightarrow$ Hai phương trình không tương đương.

Vậy $m = 4$ thỏa mãn đề bài.

Đáp án C.

Ví dụ 10: Cho phương trình $2x^2 - x = 0$. Trong các phương trình sau đây phương trình nào không phải là phương trình hệ quả của phương trình đã cho:

A. $2x - \frac{x}{1-x} = 0$

B. $4x^3 - x = 0$

C. $(2x^2 - x)^2 + (x - 5)^2 = 0$

D. $2x^3 + x^2 - x = 0$

STUDY TIP

Phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1) nếu tập nghiệm của phương trình (2) chứa tập nghiệm của phương trình (1).

Lời giải

Giải phương trình $2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$ Tập nghiệm $S_0 = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$

Ta xét các đáp án:

$$2x - \frac{x}{1-x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \neq 0 \\ 2x(1-x) - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Đáp án A:

$$S_1 = \left\{0; \frac{1}{2}\right\} \supset S_0$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

Vậy phương trình ở đáp án A là phương trình hệ quả của phương trình đã cho.

$$4x^3 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S_2 = \left\{0; \frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow S_2 \supset S_0$$

- Đáp án B:

Vậy phương trình ở đáp án B là phương trình hệ quả của phương trình đã cho.

$$(2x^2 - x)^2 + (x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x = 0 \\ x = 5 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

- Đáp án C:

STUDY TIP

Phương trình

$$f^2(x) + g^2(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_3 = \emptyset \Rightarrow S_2 \not\subset S_0$$

Vậy phương trình ở đáp án C không là phương trình hệ quả của phương trình đã cho.

$$S_4 = \left\{ -1; 0; \frac{1}{2} \right\} \supset S_0$$

- Đáp án D: Giải phương trình ta có:

Đáp án C.

Dạ
ng

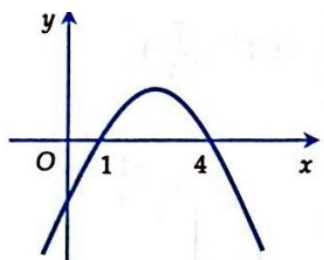
Tìm điều kiện của phương trình liên quan đến đồ thị hàm số

- Kiến thức cần nhớ

+ $f(x) > 0 \Rightarrow$ Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nằm phía trên trục hoành.

+ $f(x) < 0 \Leftrightarrow$ Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nằm phía dưới trục hoành.

+ $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm trên đồ thị hàm số: $y = g(x)$.



Ví dụ 1: Cho parabol $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $\sqrt{f(x)} = 3$ có điều kiện xác định là:

A. $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 4 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 4 \end{cases}$

C. $1 \leq x \leq 4$

D. $\forall x \in \mathbb{R}$

Lời giải

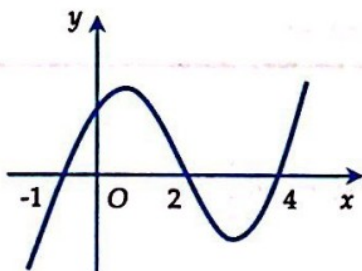
Điều kiện: $f(x) \geq 0$ nhìn đồ thị ta thấy: $1 \leq x \leq 4$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành hay hàm cho $f(x) \geq 0$.

Đáp án C.

STUDY TIP

Đồ thị $y = f(x)$ mà $f(x) \geq 0$ là những giá trị x làm cho đồ thị nằm phía trên trục hoành.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Phương trình $\sqrt{f(x)} = 0$ xác định trên khoảng $(-1; 4)$.

B. Phương trình $\sqrt{f(x)} = 0$ xác định trên đoạn $[2; 4]$.

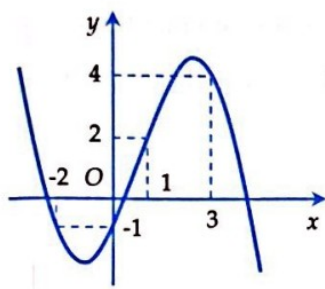
C. Phương trình $\frac{1}{\sqrt{f(x)}} = 0$ xác định trên khoảng $(-1; 2)$.

D. Phương trình $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ xác định trên khoảng $(0; 4)$.

Lời giải

Nhìn đồ thị ta thấy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 2)$

Đáp án C.



Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó phương trình $\sqrt{f(x) - (x+1)} = 0$ xác định trên tập nào sau đây?

A. $[1; 3]$

B. $[-2; 1]$

C. $[-2; 3]$

D. $[0; +\infty)$

Lời giải

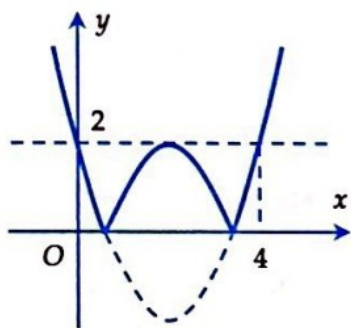
Ta thấy đường thẳng: $y = x + 1$ đi qua các điểm $(-2; -1)$; $(1; 2)$ và $(3; 4)$.

Từ điều kiện của phương trình là: $f(x) \geq x + 1$ ta thấy trên đoạn $[1; 3]$.

Đồ thị $y = f(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y = x + 1$ nên với $x \in [1; 3]$ thì $f(x) \geq x + 1$.

Đáp án A.

Ví dụ 4: Cho parabol $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó điều kiện xác định



của phương trình $\sqrt{2-|f(x)|} = 0$ là:

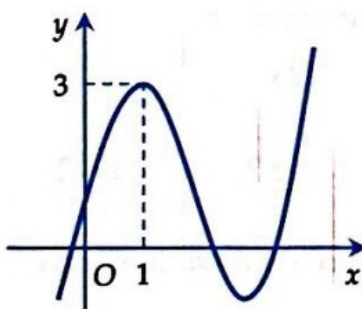
- A. $x \in [0; 4] \setminus \{2\}$ B. $x \in [0; 4]$ C. $x = [-2; 2]$ D. $x \in [0; 2]$

Lời giải

Đồ thị $y = |f(x)|$ như hình bên.

Khi đó điều kiện: $2 - |f(x)| \geq 0 \Leftrightarrow |f(x)| \leq 2 \Rightarrow x \in [0; 4]$.

Đáp án B.

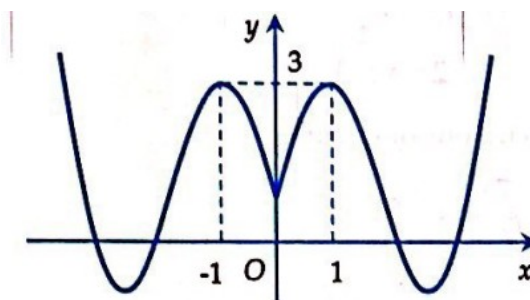


Ví dụ 5: Cho hàm $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của m để phương trình $\sqrt{m - f(|x|)} = 0$ xác định trên $[-1; 1]$.

- A. 5 B. 1 C. 3 D. 4

Lời giải

Đồ thị $y = f(|x|)$ như hình vẽ:



$\Rightarrow m \geq f(|x|) \forall x \in [-1; 1] \Leftrightarrow m \geq 3 \Rightarrow m = 3$.

Đáp án C.

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Xem đáp án chi tiết tại trang 82

Câu 1: Điều kiện xác định của phương trình:

$$\frac{2x}{x^2+1} = 1 - \frac{3}{x^2+1} \text{ là:}$$

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ D. $D = \mathbb{R}$

Câu 2: Điều kiện xác định của phương trình:

$$\frac{1}{x+2} - \frac{3}{x-2} = \frac{4}{x^2-4} \text{ là:}$$

- A. $(2; +\infty)$ B. $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
 C. $(-\infty; 2)$ D. $(-2; 2)$

Câu 3: Điều kiện xác định của phương trình:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{3}{x-1} = \frac{4}{x+2} \text{ là}$$

- A. $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1; -2\}$ B. $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1; 2\}$
 C. $(-1; +\infty)$ D. $(-2; +\infty)$

Câu 4: Điều kiện xác định của phương trình:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x^2-1} = 0 \text{ là:}$$

- A. $x \geq 0$ B. $x > 0$ và $x^2-1 \geq 0$
 C. $x > 0$ D. $x \geq 0$ và $x^2-1 \geq 0$

Câu 5: Điều kiện xác định của phương trình

$$\sqrt{2x-1} = 4x+4 \text{ thuộc tập nào sau đây?}$$

A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

C. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ D. $[-1; +\infty)$

Câu 6: Điều kiện xác định của phương trình:

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{6-2x} = 0 \text{ là:}$$

- A. $[2; +\infty)$ B. $(-\infty; 2]$
 C. $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ D. $2 \leq x \leq 3$

Câu 7: Điều kiện xác định của phương trình:

$$\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4x+3} - \frac{7x^2}{\sqrt{7-2x}} = 5x \text{ là:}$$

- A. $\left[2; \frac{7}{2}\right] \setminus \{3\}$ B. $\mathbb{R} \setminus \left\{1; 3; \frac{7}{2}\right\}$
 C. $\left[2; \frac{7}{2}\right)$ D. $\left[2; \frac{7}{2}\right) \setminus \{3\}$

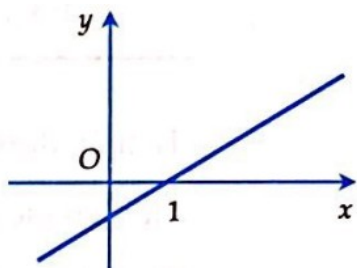
Câu 8: Điều kiện xác định của phương trình

$$\sqrt{x-2} + \frac{x^2+5}{\sqrt{7-x}} = 0 \text{ là:}$$

- A. $(2; +\infty)$ B. $[7; +\infty)$
 C. $[2; 7)$ D. $[2; 7]$

Câu 9: Cho đường thẳng $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó điều kiện xác định của

phương trình $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ là:



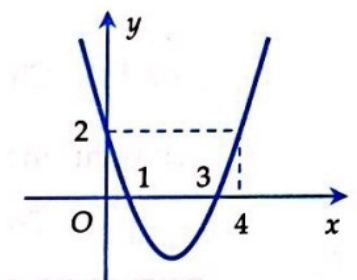
A. $x \geq 1$

B. $x \neq 0$

C. $x \geq 0$

D. $x \neq 1$

Câu 10: Cho parabol $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Phương trình $\sqrt{f(x)} = 0$ có điều kiện là:

A. $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$

B. $1 \leq x \leq 3$

C. $x \geq 0$

D. $x \geq 2$

Câu 11: Cho parabol $y = f(x)$ như hình vẽ câu 10. Khi đó điều kiện xác định của phương trình:

$\sqrt{f(x)} - 2 = 0$ là:

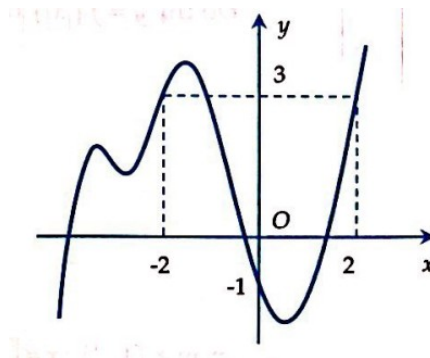
A. $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$

C. $x \geq 2$

D. $x \leq 2$

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Khi đó phương trình $\frac{1}{\sqrt{f(x) - x^2 + 1}} = 2$ xác định trên tập nào sau đây?

A. $(-\infty; -2)$

B. $(-2; 0)$

C. $(0; 2)$

D. $(-1; 2]$

§2. Phương trình bậc nhất và quy về bậc nhất

A. Lý thuyết

Giải biện luận phương trình $ax + b = 0$:

- + Nếu $a \neq 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{-b}{a}$.
- + Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- + Nếu $a = 0$ và $b = 0$ thì phương trình có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$.

B. Các dạng toán điển hình

Dạng

Giải biện luận phương trình

Ví dụ 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình: $m^2(x-1) = 2(mx-2)$ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

STUDY TIP

Phương trình $ax + b = 0$ có nghiệm duy nhất khi $a \neq 0$

Lời giải

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow (m^2 - 2m)x = m^2 - 4 \Leftrightarrow m(m-2)x = (m-2)(m+2)$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất khi $m \neq 0$ và $m \neq 2$

$$\text{Khi đó nghiệm duy nhất là: } x = \frac{m+2}{m} = 1 + \frac{2}{m} \text{ là nghiệm nguyên} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Có 4 giá trị của m .

Đáp án D.

STUDY TIP

Phương trình $ax + b = 0$ hay phương trình $ax = b$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

Ví dụ 2: Tìm các giá trị của p để phương trình sau đây vô nghiệm.

$$(4p^2 - 2)x = 1 + 2p - x$$

A. $p = -2$ B. $p = \frac{1}{2}$ C. $p = 1$ D. $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với $(4p^2 - 1)x = 1 + 2p$

$$\Leftrightarrow (2p - 1)(2p + 1)x = 2p + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2p - 1)(2p + 1) = 0 \\ 2p + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{2} \\ p = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \\ p \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Phương trình vô nghiệm

Đáp án B.

Ví dụ 3: Cho phương trình $m^2x + 6 = 4x + 3m$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm.

A. $m \neq -2$ B. $m \neq 2$ C. $m = 2$ D. $m = -2$

Lời giải

Viết lại phương trình: $(m^2 - 4)x = 3m - 6$

Phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 3m - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \Leftrightarrow m = -2 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi $m \neq -2$.

Đáp án A.

Ví dụ 4: Cho hai hàm số: $y = (m+1)^2 x - 2$ và $y = (3m+7)x + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hai đường thẳng đã cho cắt nhau.

A. $m \neq -2$

B. $m \neq -2$ và $m \neq 3$

C. $m \neq -3$

D. $m = -2$ và $m = 3$

Lời giải

Hai đường thẳng đã cho cắt nhau khi và chỉ khi phương trình:

$$(m+1)^2 x - 2 = (3m+7)x + m \text{ có nghiệm duy nhất}$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - m - 6)x = m + 2 \text{ có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow m^2 - m - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m \neq -2 \end{cases}$$

Đáp án B.

Ví dụ 5: Cho hai hàm số $y = (m+1)x + 1$ và $y = (3m^2 - 1)x + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hai đường thẳng trên trùng nhau.

A. $m = 1, m = \frac{-2}{3}$

B. $m \neq 1$ và $m \neq \frac{2}{3}$

C. $m = 1$

D. $m = \frac{-2}{3}$

Lời giải

Hai đường thẳng trùng nhau khi và chỉ khi phương trình:

$$(m+1)x + 1 = (3m^2 - 1)x + m \text{ có vô số nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow (3m^2 - m - 2)x = 1 - m \text{ vô số nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - m - 2 = 0 \\ 1 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Đáp án C.

STUDY TIP

Phương trình

$ax + b = 0$ có vô số

nghiệm $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

Dạ
ng

Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Phương pháp:

Dùng tính chất:

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$$

+

$$|A| = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$$

+

Ví dụ 1: Giải và biện luận phương trình $|2x - m| = 2 - x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m \leq 4$ phương trình đã cho có nghiệm.

$m > 4$ phương trình đã cho vô nghiệm.

B. Phương trình đã cho luôn có nghiệm $\forall m$.

C. Phương trình đã cho vô nghiệm $\forall m$.

D. $m \geq 4$ phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải

STUDY TIP

$$|A| = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 2x - m = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = \frac{m+2}{3} \end{cases}$$

Phương trình đã cho

$$+) \frac{m+2}{3} \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 4$$

$$+) m - 2 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 4$$

$$\text{Vậy } m \leq 4 \text{ phương trình có 2 nghiệm } \begin{cases} x = \frac{m+2}{3} \\ x = m+2 \end{cases}.$$

$m > 4$ phương trình vô nghiệm.

Đáp án A.

Ví dụ 2: Giải biện luận phương trình: $|mx - 2| = |2x + m|$. Khi đó kết luận nào sau đây là đúng?

A. $m \neq \pm 3$ phương trình có 2 nghiệm $x_1 = \frac{m+2}{m-3}; x_2 = \frac{2-m}{3+m}$.

$m = \pm 3$ phương trình đều có nghiệm $x = 0$.

B. $m = \pm 2$ phương trình có 2 nghiệm $x_1 = \frac{m-2}{m+2}; x_2 = \frac{2+m}{2-m}$.

$m = \pm 2$ phương trình vô nghiệm.

C. $m \neq 2$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{m+2}{m-2}$.

$m = 2$ phương trình vô nghiệm.

D. $\begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 2 \end{cases}$ phương trình có 2 nghiệm $x_1 = \frac{m+2}{m-2}; x_2 = \frac{2-m}{2+m}$.

$m = -2$ phương trình có nghiệm $x = 0$.

$m = 2$ phương trình có nghiệm $x = 0$.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} mx - 2 = 2x + m & (1) \\ mx - 2 = -2x - m & (2) \end{cases}$

- Giải (1): $(1) \Leftrightarrow (m-2)x = m+2$

+ Với $m \neq 2$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{m+2}{m-2}$.

+ Với $m = 2$ ta có phương trình $0x = 4$, phương trình vô nghiệm.

- Giải (2): $(2) \Leftrightarrow (m+2)x = 2-m$

+ Với $m \neq -2$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{2-m}{m+2}$.

+ Với $m = -2$ phương trình $0x = 4$, phương trình vô nghiệm.

Kết luận:

+ $\begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$ phương trình đã cho có 2 nghiệm $x_1 = \frac{m+2}{m-2}, x_2 = \frac{2-m}{2+m}$.

+ $m = 2$ phương trình (1) vô nghiệm nhưng phương trình (2) có nghiệm $x = 0$.

+ $m = -2$ phương trình (2) vô nghiệm nhưng phương trình (1) có nghiệm $x = 0$.

Đáp án D.

Ví dụ 3: Xác định m để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $|x| + |1-x| = m$ (1).

A. $m < 1$

B. $m \geq 1$

C. $\forall m \in \mathbb{R}$

D. không tồn tại m

Lời giải

Cách 1:

Ta thấy nếu x_0 là nghiệm thì $1-x_0$ cũng là nghiệm do đó điều kiện cần để

phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $x_0 = 1-x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$

Thay $x_0 = \frac{1}{2}$ vào phương trình (1) ta được $m = 1$.

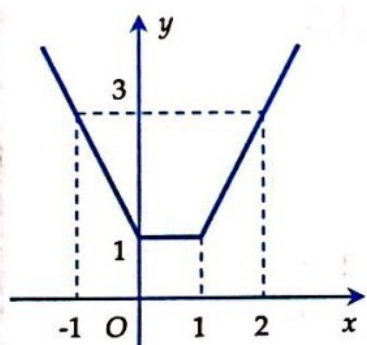
- Với $m = 1$ phương trình (1) trở thành: $|x| + |1-x| = 1$

Ta thấy phương trình có ít nhất 3 nghiệm $x = 0, x = 1, x = \frac{1}{2}$.

Vậy không tồn tại m để (1) có nghiệm duy nhất.

Cách 2:

Ta vẽ đồ thị $y = |x| + |1-x|$ ta có bảng xét dấu:



x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$ x $	$-x$	0	x	x
$ 1-x $	$1-x$	$1-x$	0	$x-1$
y	$1-2x$	1	$2x-1$	

$$y = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 1 & \text{khi } 0 < x < 1 \\ 1-2x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$$

Ta có đồ thị như hình bên ta thấy $\forall m$ thì đường thẳng $y = m$ không thể cắt đồ thị tại một điểm duy nhất nên phương trình (1) không có nghiệm duy nhất.

Đáp án D.

Dạng

Phương trình chứa ẩn ở mẫu

Ví dụ: Tìm m để phương trình: $\frac{mx-m-3}{x+1} = 1$ (1) có nghiệm.

A. $m \neq 1$

B. $m \neq 1$ và $m \neq \frac{-3}{2}$

C. $m \neq \frac{-3}{2}$

D. $m = 1$ hoặc $m = \frac{-3}{2}$

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình: $x \neq -1$.

Khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow mx - m - 3 = x + 1 \Leftrightarrow (m - 1)x = m + 4$ (2)

- Với $m \neq 1$ phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x_1 = \frac{m+4}{m-1}$ nó là nghiệm của (1).

Khi $\frac{m+4}{m-1} \neq -1 \Leftrightarrow m+4 \neq -m+1 \Leftrightarrow 2m \neq -3 \Leftrightarrow m \neq \frac{-3}{2}$

- Với $m = 1$ phương trình (2) vô nghiệm $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình (1) có nghiệm khi $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases}$

Đáp án B.

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Xem đáp án chi tiết tại trang 129

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình: $(m^2 - 4)x = 3m + 6$ vô nghiệm.

- A. $m = 1$ B. $m = 2$
C. $m = \pm 2$ D. $m = -2$

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình: $mx - m = 0$ vô nghiệm.

- A. $m \in \emptyset$ B. $m = \{0\}$
C. $m \in \mathbb{R}^+$ D. $m \in \mathbb{R}$

Câu 3: Tìm m để phương trình:

$$(m^2 - 5m + 6)x = m^2 - 2m \text{ vô nghiệm.}$$

- A. $m = 1$ B. $m = 2$
C. $m = 3$ D. $m = 6$

Câu 4: Tìm a để phương trình:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x-3}} = \frac{a}{\sqrt{x-3}} \text{ có nghiệm.}$$

- A. $a \leq 2$ B. $a > 2$
C. $\forall a \in \mathbb{R}$ D. $a > -1$

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị của m để phương

trình $\frac{(m+1)x + m - 2}{x+3} = m$ có nghiệm.

- A. $m \neq -1$ B. $m = -1$

- C. $m \neq \frac{-5}{2}$ D. $m = \frac{-5}{2}$

Câu 6: Cho phương trình $|x - m| = |x + 1|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $m = -1$ phương trình có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$.
 $m \neq -1$ phương trình có 1 nghiệm $x = \frac{m-1}{2}$.
B. $m \neq -1$ phương trình đã cho có tập nghiệm $\emptyset$.
 $m = -1$ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.
C. $m = -1$ vô nghiệm.

- $m \neq -1$ phương trình có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$.
D. $m = -1$ phương trình vô nghiệm.
 $m \neq -1$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{m-1}{2}$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để

phương trình: $\left| \frac{1}{2}x - 1 \right| + \frac{1}{2}|x| = x + m$ có nghiệm.

- A. $m \geq 1$ B. $m < 1$ C. $m \geq -1$ D. $m < -1$

Câu 8: Biểu diễn hình học tập nghiệm của

phương trình $|x| + |y| = 1$ là:

- A. Hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}$
B. Đường tròn tâm O bán kính bằng 1
C. Hai đường thẳng $y = \pm x + 1$

D. Hình vuông cạnh bằng 1

§3. Phương trình bậc hai và quy về bậc hai

A. Lý thuyết

1. Giải biện luận phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac$.

+ $\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm.

+ $\Delta = 0$: phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$.

+ $\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

2. Định lý Vi-et

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Nếu hai số x, y mà $\begin{cases} x + y = S \\ x \cdot y = P \end{cases}$ thì x, y là nghiệm của phương trình $t^2 - St + P = 0$ (với $S^2 \geq 4P$).

3. Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0$

$$0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

4. Phương trình có 2 nghiệm dương

STUDY TIP

Trong trường hợp phương trình có 2 nghiệm trái dấu ta không cần điều kiện

$\Delta > 0$ vì $\frac{c}{a} < 0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm.

$$x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

5. Phương trình có 2 nghiệm âm

B. Các dạng toán điển hình

Dạng

Xác định tham số biến luận số nghiệm của phương trình bậc hai

Ví dụ 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình $x^2 - x + m = 0$ vô nghiệm?

A. 9

B. 10

C. 11

D. 20

Lời giải

Phương trình đã cho vô nghiệm khi $\Delta = 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$

Vì $m \in [-10;10], m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$, có 10 phần tử thỏa mãn.

Đáp án B.

Ví dụ 2: Phương trình $(m-2)x^2 + 2x - 1 = 0$ có nghiệm kép thì:

A. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$

B. $m = 1$

C. $m = 2$

D. $m = -1$

Lời giải

Phương trình đã cho có nghiệm kép khi: $\begin{cases} m-2 \neq 0 \\ \Delta' = m-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

Đáp án B.

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình $mx^2 + 6 = 4x + 3m$ có nghiệm duy nhất.

A. $m \in \emptyset$

B. $m = 0$

C. $m \in \mathbb{Z}$

D. $m \neq 0$

Lời giải

STUDY TIP

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm duy nhất xảy ra ở 1 trong 2 trường hợp sau:

+ TH1: $a = 0$, phương trình $bx + c = 0$ có nghiệm duy nhất.

+ TH2: $a \neq 0, \Delta = 0$, $\Delta' = 0$

Viết lại phương trình: $mx^2 - 4x + (6 - 3m) = 0$

- Với $m = 0$: Khi đó phương trình có dạng $-4x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ là nghiệm.

- Với $m \neq 0$: Ta có $\Delta' = (-2)^2 - m(6 - 3m) = 3m^2 - 6m + 4 = 3(m - 1)^2 + 1 > 0 \forall m$.

Khi đó phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt khi $m \neq 0$.

Vậy $m = 0$ thỏa mãn.

Đáp án B.

Ví dụ 4: Phương trình $(m - 1)x^2 + 6x - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi:

A. $m > -8$

B. $m > -\frac{5}{4}$

C. $m > -8$ và $m \neq 1$

D. $m > -\frac{5}{4}$ và $m \neq 1$

Lời giải

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi:

$$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -8 \end{cases}$$

Đáp án C.

Dạ
ng

Dấu của nghiệm phương trình bậc hai

Ví dụ 1: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phân biệt cùng dấu khi và chỉ khi:

A. $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

Lời giải

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0$.

STUDY TIP

ĐK để phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

Khi đó, gọi hai nghiệm của phương trình là x_1, x_2 .

Do x_1, x_2 cùng dấu nên $x_1 \cdot x_2 > 0$ hay $P > 0$.

Đáp án B.

Ví dụ 2: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi:

- A. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

Lời giải

Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

Đáp án C.

Ví dụ 3: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi:

- A. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ C. $P < 0$ D. $P > 0$

Lời giải

Giả sử phương trình có 2 nghiệm trái dấu thì $x_1 \cdot x_2 < 0 \Rightarrow P < 0$.

Khi đó $P = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow a, c$ trái dấu nên phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Đáp án C.

STUDY TIP

ĐK để phương trình có 2 nghiệm âm phân biệt:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

STUDY TIP

ĐK để phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

Ví dụ 4: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2; 6]$ để phương trình $x^2 + 4mx + m^2 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng:

- A. -3 B. 2 C. 18 D. 21

Lời giải

Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt khi:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 0 \\ -4m > 0 \\ m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow S = \{-2; -1\}$$

Vậy tổng các phần tử của S là -3 .

Đáp án A.

Ví dụ 5: Phương trình $(m-1)x^2 + 3x - 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi:

- A. $m > 1$ B. $m < 1$ C. $m \geq 1$ D. $m \leq 1$

Lời giải

Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \frac{-1}{m-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Đáp án A.

Ví dụ 6: Tìm điều kiện của m để phương trình $x^2 - (2m-1)x + m^2 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 > x_2 > 1$.

- A. $m > 2$ B. $m > \frac{3}{2}$ C. $m < 1$ D. $m \geq 1$

Lời giải

Trước hết phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi:

$$\Delta = (2m-1)^2 - 4(m^2 - m) > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 4m > 0 \Leftrightarrow 1 > 0 \text{ luôn đúng}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lí Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1 x_2 = m^2 - m \end{cases}$$

Để x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 > x_2 > 1 \Rightarrow x_1 - 1 > x_2 - 1 > 0$

$$\Rightarrow \text{Điều kiện: } \begin{cases} (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \\ (x_1 - 1) + (x_2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \\ x_1 + x_2 - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - (2m - 1) + 1 > 0 \\ 2m - 1 - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ m > \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m-2) > 0 \\ m > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ m-2 > 0 \\ m > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

Đáp án A.

Ví dụ 7: Tìm điều kiện của m để phương trình $x^2 - (2m-1)x + m^2 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 2 < x_2$.

- A. $m < 2$ B. $m > 3$ C. $2 < m < 3$ D. $\begin{cases} m < 2 \\ m > 3 \end{cases}$

Lời giải

STUDY TIP

Việc so sánh x_1, x_2 với 2 số ta đưa về so

$$x_2 - 2$$

Chủ đề 3: Phương trình - Hệ phương trình

uigeli.xyz

Trước hết phương trình đã cho phải có 2 nghiệm $\Rightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$ thỏa mãn $\forall m$.

Để x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 2 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < 0 < x_2 - 2$ ta đi so sánh hai số $(x_1 - 2)$ và $(x_2 - 2)$ với số 0.

Vậy điều kiện là: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 < 0$

Theo định lí Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - m \end{cases}$$

$$\Rightarrow m^2 - m - 2(2m - 1) + 4 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)(m - 3) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 < 0 \\ m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 > 0 \\ m - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < 3$$

Đáp án C.

Dạ
ng

Định lí Vi-et và những bài toán về phương trình bậc hai

Ví dụ 1: Giả sử phương trình $x^2 - 3x - m = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm là x_1, x_2 . Tính giá trị của biểu thức $P = x_1^2(1 - x_2) + x_2^2(1 - x_1)$ theo m .

- A. $P = -m + 9$ B. $P = 5m + 9$ C. $P = m + 9$ D. $P = -5m + 9$

Lời giải

Ta có: $P = x_1^2(1 - x_2) + x_2^2(1 - x_1)$

$$= x_1^2 - x_1^2 x_2 + x_2^2 - x_1 x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

Theo định lí Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \end{cases}$$
 thay vào P ta được:

$$P = 3^2 - 2(-m) - (-m) \cdot 3 = 5m + 9$$

Đáp án B.

STUDY TIP

$$x_1^2 + x_2^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

Ví dụ 2: Giả sử phương trình $2x^2 - 4ax - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị của biểu thức $T = |x_1 - x_2|$.

A. $T = \frac{4a^2 + 2}{3}$ B. $T = \sqrt{4a^2 + 2}$ C. $T = \frac{\sqrt{a^2 + 8}}{2}$ D. $T = \frac{\sqrt{a^2 + 8}}{4}$

Lời giải

Vì a và c trái dấu nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo định lý Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-1}{2} \end{cases} \quad \text{và} \quad T^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4a^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 4a^2 + 2 > 0$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{4a^2 + 2} > 0$$

Đáp án B.

Ví dụ 3: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$.

Tìm giá trị nguyên của m sao cho biểu thức $P = \frac{x_1x_2}{x_1 + x_2}$ có giá trị nguyên.

A. $m = -2$ B. $m = -1$ C. $m = 1$ D. $m = 2$

Lời giải

Ta có $\Delta = (2m+1)^2 - 4m^2 - 4 = 4m - 3$

Để phương trình có hai nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{4}$

Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1x_2 = m^2 + 1 \end{cases}$

Khi đó $P = \frac{x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{m^2 + 1}{2m + 1} = \frac{2m - 1}{4} + \frac{5}{4(2m + 1)} = \frac{1}{4} \left(2m - 1 + \frac{5}{2m + 1} \right) \quad (1)$

STUDY TIP

$$(x_1 - x_2)^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

STUDY TIP

Trong lời giải bên ta nhân 2 vế của P ở đẳng thức (1) với 4 để $(2m-1)$ luôn là số nguyên với m nguyên.

$$\Rightarrow 4P = 2m - 1 + \frac{5}{2m+1}; m \geq \frac{3}{4} \Rightarrow 2m+1 \geq \frac{5}{2}$$

$$P \in \mathbb{Q} \text{ thì } 2m+1 \text{ là ước của } 5 \Rightarrow 2m+1 = 5 \Rightarrow m = 2$$

Thử lại với $m = 2 \Rightarrow P = 1$ thỏa mãn.

Đáp án D.

Ví dụ 4: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = |2x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4|$.

A. $P_{\max} = \frac{1}{2}$

B. $P_{\max} = 2$

C. $P_{\max} = \frac{25}{4}$

D. $P_{\max} = \frac{9}{4}$

Lời giải

Ta có: $\Delta' = m^2 - 2(m^2 - 2) = -m^2 + 4$

Phương trình có hai nghiệm khi và chỉ khi:

$$\Delta' = 4 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$$

Theo định lý Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = \frac{m^2 - 2}{2} \end{cases}$$

Khi đó: $P = |2x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4| = |m^2 - 2 + (-m) - 4|$

$$= |m^2 - m - 6| = |(m-2)(m-3)| = -(m-2)(m-3)$$

$$= -m^2 + m + 6 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \leq \frac{25}{4}$$

Do $-2 \leq m \leq 2 \Rightarrow P_{\max} = \frac{25}{4}$ khi $m = \frac{1}{2} \in [-2; 2]$.

Đáp án C.

Ví dụ 5: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$. Tìm m để

STUDY TIP

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

biểu thức $P = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $m = \frac{1}{2}$

B. $m = 1$

C. $m = 2$

D. $m = \frac{5}{2}$

Lời giải

Ta có $\Delta = (m-2)^2 \geq 0 \forall m$.

Do đó phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm.

$$\Rightarrow P = \frac{2x_1x_2 + 3}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1x_2 + 1)} = \frac{2m+1}{m^2+2} \quad (1)$$

$$\Rightarrow P-1 = \frac{2m+1}{m^2+2} - 1 = \frac{2m+1-m^2-2}{m^2+2} = \frac{-(m-1)^2}{m^2+2} \leq 0 \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow P \leq 1$$

Vậy $P_{\max} = 1$ khi $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$.

Đáp án B.

Dạ
ng

Tìm điều kiện để các nghiệm của phương trình bậc hai thỏa mãn điều kiện cho trước

Ví dụ 1: Giả sử phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Khi đó hệ thức nào sau đây là điều kiện để phương trình có một nghiệm bằng k lần nghiệm còn lại?

A. $(k+1)^2 ac + kb^2 = 0$

B. $(k+1)^2 ac - kb^2 = 0$

C. $(k-1)^2 ac - kb^2 = 0$

D. $(k-1)^2 ac + kb^2 = 0$

Lời giải

STUDY TIP

Phương trình bậc hai có nghiệm này bằng k lần nghiệm kia thì

$$\begin{cases} x_1 = kx_2 \\ x_2 = kx_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Theo định lý Vi-et ta có:

$$\text{Khi đó: } P = (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1) = x_1 x_2 - k(x_1^2 + x_2^2) + k^2 x_1 x_2$$

$$= x_1 x_2 - k \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \right] + k^2 x_1 x_2 = \frac{c}{a} - k \left[\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} \right] + k^2 \frac{c}{a} = \frac{(k+1)^2 ac - kb^2}{a^2}$$

Nếu $(k+1)^2 ac - kb^2 = 0$ thì một trong hai thừa số của P là $\begin{cases} x_1 - kx_2 = 0 \\ x_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$ hay nghiệm này bằng k lần nghiệm kia.

Đáp án B.

STUDY TIP

PT: $ax^2 + bx + c = 0$

$(a \neq 0)$ có 2 nghiệm

x_1, x_2 thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Ví dụ 2: Cho phương trình: $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $4(x_1 + x_2) = 7x_1 x_2$.

A. $m = -6$

B. $m = 1$

C. $m = 2$

D. $m < 5$

Lời giải

Phương trình có 2 nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - (m+1)(m-2) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ 3-m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \neq m \leq 3$$

Khi đó phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+1} \\ x_1 x_2 = \frac{m-2}{m+1} \end{cases}$

$$\Rightarrow 4(x_1 + x_2) = 7x_1 x_2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{2(m-1)}{m+1} = 7 \cdot \frac{m-2}{m+1} \Leftrightarrow 8m - 8 = 7m - 14 \Leftrightarrow m = -6$$

Đáp án A.

Ví dụ 3: Cho hai phương trình $x^2 + ax + bc = 0$ (1) và $x^2 + bx + ca = 0$ (2). Giả sử a, b, c là ba số khác nhau từng đôi một và $c \neq 0$ nếu phương trình (1) và phương trình (2) có đúng một nghiệm chung thì nghiệm khác của hai phương trình trên là nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $x^2 + cx - ab = 0$

B. $x^2 + cx + ab = 0$

C. $x^2 - cx + ab = 0$

D. $x^2 - cx - ab = 0$

Lời giải

Giả sử hai phương trình có nghiệm chung x_0 khi đó:
$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + bc = 0 \\ x_0^2 + bx_0 + ca = 0 \end{cases}$$

Trừ vế theo vế hai đẳng thức trên ta có: $(a-b)(x_0 - c) = 0 \Leftrightarrow x_0 = c$ (vì $a \neq b$)

Phương trình (1) có nghiệm x_1, x_0 nên ta có:
$$\begin{cases} x_0 + x_1 = -a \\ x_0 x_1 = bc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b; x_0 = c \\ c = -a - b \end{cases}$$

Phương trình (2) có nghiệm x_0, x_2 nên ta có:
$$\begin{cases} x_0 + x_2 = -b \\ x_0 x_2 = ca \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = a; x_0 = c \\ c = -a - b \end{cases}$$

Vậy ta được
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a + b = -c \\ x_1 x_2 = ab \end{cases}$$

Vậy x_1, x_2 là nghiệm của phương trình: $x^2 + cx + ab = 0$ (3)

Và phương trình (3) có $\Delta = c^2 - 4ab = (-a - b)^2 - 4ab \Leftrightarrow (a - b)^2 > 0 \forall a \neq b$

Đáp án B.

Dạ
ng

Các phương trình quy về bậc hai

Phương pháp:

1. $ax^2 + bx^2 + c = 0$: Đặt $t = x^2, t \geq 0$.

2. $a[P(x)]^2 + b.P(x) + c = 0$: Đặt $t = P(x)$.

STUDY TIP

Phương trình:

$$(x+a)^4 + (x+b)^4 + c = 0$$

nếu đặt $t = x + \frac{a+b}{2}$

3. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=e, a+d=b+c$: Đặt $t=(x+a)(x+d)$.

4. $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$: Chia cho $x^2 \neq 0$, đặt $t=x+\frac{1}{x}$.

5. $(x+a)^4+(x+b)^4+c=0$: Đặt $t=x+\frac{a+b}{2}$.

6. $a.f(x)+b\sqrt{f(x)}+c=0$: Đặt $t=\sqrt{f(x)}$.

7. $a.f(x)+b.g(x)=c\sqrt{f(x).g(x)}$

+ Xét $g(x)=0$.

+ Với $g(x) \neq 0$, chia hai vế cho $g(x)$ ta có phương trình:

$a.\frac{f(x)}{g(x)}+b=\pm c\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$. Đặt $\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}=t$.

Ví dụ 1: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình: $(x-1)^4+(x+3)^4=256$.

A. -2

B. 1

C. 2

D. 0

Lời giải

Đặt $y=\frac{-1+3}{2}+x$ hay $y=x+1 \Rightarrow x=y-1$, ta có phương trình:

$(y-2)^4+(y+2)^4=256 \Leftrightarrow 2y^4+48y^2-224=0$

Đặt $y^2=t \geq 0$, phương trình trở thành: $2t^2+48t-224=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=4 \\ t=-28(l) \end{cases}$

Với $t=4 \Rightarrow y^2=4 \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow$ Tổng các nghiệm là $-3+1=-2$.

Đáp án A.

Ví dụ 2: Cho phương trình $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$. Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ ta được phương trình nào sau đây?

A. $t^2 + 3t + 2 = 0$

B. $t^2 - 3t + 2 = 0$

C. $t^2 - 3t - 2 = 0$

D. $t^2 - t + 2 = 0$

Lời giải

Với $x = 0$ không là nghiệm.

$x \neq 0$ chia 2 vế cho x^2 ta được phương trình:

$$x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ ta có phương trình:

$$t^2 - 2 - 3t + 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$$

Đáp án B.

Ví dụ 3: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình:

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 3$$

A. $\frac{-5}{2}$

B. 5

C. -5

D. $\frac{5}{2}$

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) = 3 \Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 3$

Đặt: $x^2 + 5x = y$ ta có phương trình:

$$(y+4)(y+6) = 3 \Leftrightarrow y^2 + 10y + 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ y = -7 \end{cases}$$

STUDY TIP

$$t = x + \frac{1}{x}$$

thì

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

STUDY TIP

Trong phương trình ta

nhóm $(x+1)(x+4)$

và $(x+2)(x+3)$ để

sau khi nhân ra ta được những biểu thức giống nhau là

$$(x^2 + 5x)$$

$$y = -3 \Rightarrow x^2 + 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \\ x_2 = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

+ Với

$$+ \text{ Với } y = -7 \Rightarrow x^2 + 5x + 7 = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{Vậy tổng } x_1 + x_2 = -5.$$

Đáp án C.

Ví dụ 4: Phương trình $x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải

Đặt $\sqrt{x^2 + 11} = t, t \geq 0$ ta có phương trình:

$$x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} - 11 - 31 = 0 \text{ trở thành } t^2 + t - 42 = 0 \text{ có nghiệm } t = 6$$

$$\sqrt{x^2 + 11} = 6 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Đáp án B.

Ví dụ 5: Tính tổng các nghiệm của phương trình: $(x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2 + 3x}$.

A. 3

B. -3

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{-3}{2}$

Lời giải

ĐKXD: $\begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 0 \end{cases}$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với:

$$-x^2 - 3x + 10 - 3\sqrt{x^2 + 3x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 3\sqrt{x^2 + 3x} - 10 = 0$$

Đặt $\sqrt{x^2 + 3x} = t, t \geq 0$ ta có phương trình:

$$t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5(l) \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm bằng -3 .

Đáp án B.

Ví dụ 6: Số nghiệm của phương trình: $\frac{x}{x+1} - 2\sqrt{\frac{x+1}{x}} = 3$ là:

A. vô nghiệm

B. 1

C. 2

D. 4

Lời giải

ĐKXĐ: $x < -1$ hoặc $x > 0$

Đặt $\sqrt{\frac{x+1}{x}} = t, t > 0$ ta có phương trình:

$$\frac{1}{t^2} - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow -2t^3 - 3t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(2t^2 + t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(l) \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x+4=x \Leftrightarrow 3x=-4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$

(TMĐK)

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Đáp án B.

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

Ví dụ 7: Cho phương trình: $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$. Đặt $t = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}}; t \geq 0$ ta có phương trình nào sau đây?

A. $t^2 - 5t + 2 = 0$

B. $t^2 + 5t + 2 = 0$

C. $2t^2 - 5t + 2 = 0$

D. $2t^2 - 5t - 2 = 0$

Lời giải

Đề ý $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ nên ta tách: $2(x^2 + 2) = a(x+1) + b(x^2 - x + 1)$

bằng cách đồng nhất hệ số và ta được: $2(x^2 + 2) = 2(x+1) + 2(x^2 - x + 1)$

Điều kiện: $x \geq -1$

Ta có: $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1} \Leftrightarrow 2(x+1) + 2(x^2 - x + 1) = 5\sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)}$

Chia hai vế cho $x^2 - x + 1 > 0$ ta được: $2 \cdot \frac{x+1}{x^2 - x + 1} + 2 = 5\sqrt{\frac{x+1}{x^2 - x + 1}}$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x+1}{x^2 - x + 1}}$ ta có phương trình: $2t^2 - 5t + 2 = 0$.

Đáp án C.

Ví dụ 8: Cho phương trình: $\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(x+3)(6-x)} = 3$

Đặt $t = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$ ta được phương trình nào sau đây?

A. $t^2 - 2t - 1 = 0$

B. $t^2 - 2t + 3 = 0$

C. $2t^2 - t - 1 = 0$

D. $t^2 - 2t - 3 = 0$

Lời giải

ĐKXĐ: $-3 \leq x \leq 6$

Đặt $t = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} \Rightarrow t^2 = 9 + 2\sqrt{(x+3)(6-x)}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(6-x)} = \frac{t^2-9}{2} \text{ thay vào phương trình đã cho ta có:}$$

$$t - \frac{t^2-9}{2} = 3 \Leftrightarrow 2t - t^2 + 9 = 6 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$$

Đáp án D.

Ví dụ 9: Cho phương trình: $\sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} + 2\sqrt{49x^2+7x-42} = 181-14x$ và $t = \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6}$, khi đó t nhận giá trị nào sau đây?

A. 19

B. 13

C. 11

D. 27

Lời giải

$$\text{ĐKXĐ: } x \geq \frac{6}{7}$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{49x^2+7x-42} = \sqrt{(7x+7)(7x-6)}$$

$$\text{Khi đó: } t^2 = 14x+1+2\sqrt{49x^2+7x-42} \Rightarrow t^2-1 = 14x+2\sqrt{49x^2+7x-42}$$

Thay vào phương trình đã cho ta có:

$$t+t^2-1=181 \Leftrightarrow t^2+t-182=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-14(l) \\ t=13 \end{cases}$$

Đáp án B.

Ví dụ 10: Cho phương trình: $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} - \sqrt{(x+1)(3-x)} = n$. Tìm tất cả các giá trị của n để phương trình đã cho có nghiệm.

A. $n \in [2\sqrt{2}-2; 2]$

B. $n \geq 2$

C. $n \leq 2$

D. $n \leq 2\sqrt{2}-2$

Lời giải

$$\text{ĐKXĐ: } -1 \leq x \leq 3.$$

STUDY TIP

Phương trình:

$$t^2 - 2t + 2n - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 4 = -2n$$

$$g(t) = t^2 - 2t - 4$$

Chủ đề 3: Phương trình - Hệ phương trình

uigeli.xyz

Đặt: $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{-x^2 + 2x + 3}$

Xét $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ trên $[-1; 3] \Rightarrow 2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$

Khi đó: $\sqrt{(x+1)(3-x)} = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} = \frac{t^2 - 4}{2}$ phương trình đã cho trở thành:

$$t - \frac{t^2 - 4}{2} = n$$

$$\Leftrightarrow 2t - t^2 + 4 = 2n \Leftrightarrow t^2 - 2t + 2n - 4 = 0 \text{ có } \Delta' = 5 - 2n.$$

Nếu $\Delta' = 5 - 2n \geq 0 \Rightarrow n \leq \frac{5}{2}$ thì phương trình có 2 nghiệm $\begin{cases} t_1 = 1 + \sqrt{5 - 2n} \\ t_2 = 1 - \sqrt{5 - 2n} \end{cases}$

- Với $t_2 = 1 - \sqrt{5 - 2n}$ (không thỏa mãn).

- Với $t_1 = 1 + \sqrt{5 - 2n}$ (thỏa mãn) thì: $\leq 1 + \sqrt{5 - 2n} \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2 \leq n \leq 2$

Đáp án A.

Ví dụ 11: Cho phương trình: $mx^4 - 2(m-3)x^2 + 4m = 0$ (1). Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

A. $-3 < m < 1$ B. $\begin{cases} -3 < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$ C. $-3 < m < 0$ D. $m > 0$

Lời giải

Đặt $x^2 = t, t \geq 0$ ta có phương trình: $mt^2 - 2(m-3)t + 4m = 0$ (2)

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có 2 nghiệm dương

phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-3)^2 - 4m^2 > 0 \\ \frac{2(m-3)}{m} > 0 \\ 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -3(m-1)(m+3) > 0 \\ \begin{cases} m < 0 \\ m > 3 \end{cases} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -3 < m < 1 \Leftrightarrow -3 < m < 0 \\ \begin{cases} m < 0 \\ m > 3 \end{cases} \end{cases}$$

Đáp án C.

Ví dụ 12: Tìm m để phương trình: $2x^2 - 2mx + 1 = 3\sqrt{2x^3 + x}$ có hai nghiệm thực phân biệt. Khi đó có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [0; 20]$ thỏa mãn.

A. 10

B. 11

C. 21

D. 20

Lời giải

ĐKXD: $x \geq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow 2mx = 2x^2 + 1 - 3\sqrt{2x^3 + x}$

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm.

Với $x \neq 0$, phương trình $\Leftrightarrow 2m = 2x + \frac{1}{x} - 3\sqrt{2x + \frac{1}{x}}$

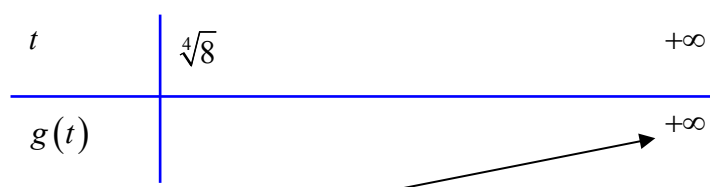
Đặt $t = \sqrt{2x + \frac{1}{x}}, t \geq \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{8}$ ta có phương trình: $m = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t$

Vì mỗi $t > \sqrt[4]{8}$ thì có 2 nghiệm x nên bài toán trở thành tìm m để phương trình

$m = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t$ có một nghiệm lớn hơn $\sqrt[4]{8}$.

Xét hàm số $g(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t$

Bảng biến thiên:

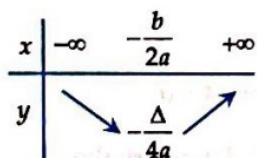


STUDY TIP

Bảng biến thiên của hàm số

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$(a > 0)$$



$$\left| \frac{1}{2}(\sqrt{8} - 3\sqrt[4]{8}) \right|$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2}(\sqrt{8} - 3\sqrt[4]{8}) \approx -1,1 \text{ nên } m \in \{-1; 0; 1; 2; \dots\}$$

$$\text{Vì } m \in [0; 20] \text{ nên có 21 giá trị của } m \text{ thỏa mãn.}$$

Đáp án C.

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Xem đáp án chi tiết tại trang 130

Câu 1: Phương trình $(m+1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ vô nghiệm khi:

- A. $m \leq -2$ B. $m < -2$
C. $m > 2$ D. $m \geq 2$

Câu 2: Số nguyên k nhỏ nhất thỏa mãn phương trình $2x(kx - 4) - x^2 + 6 = 0$ vô nghiệm là:

- A. $k = -1$ B. $k = 1$ C. $k = 2$ D. $k = 3$

Câu 3: Phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất khi:

- A. $m = 0$ B. $m = -1$
C. $\begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$ D. $m = 1$

Câu 4: Phương trình $(m+1)x^2 - 6(m+1)x + 2m + 3 = 0$ có nghiệm kép khi:

- A. $m = -1$ B. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{6}{7} \end{cases}$
C. $m = -\frac{6}{7}$ D. $m = \frac{6}{7}$

Câu 5: Phương trình $2(x^2 - 1) = x(mx + 1)$ có nghiệm duy nhất khi:

- A. $m = \frac{17}{8}$ B. $m = 2$

- C. $\begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{17}{8} \end{cases}$ D. $m = -1$

Câu 6: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:

- A. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
C. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5; 5]$ để phương trình $x^2 + 4mx + m^2 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

- A. 5 B. 6 C. 10 D. 11

Câu 8: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt là:

- A. $m \in (-1; 1)$ B. $m \in (1; +\infty)$
C. $m \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ D. $m \in (-\infty; -1)$

Câu 9: Cho phương trình $x^2 + px + q = 0$ trong đó $p > 0$, $q > 0$. Nếu hiệu các nghiệm của phương trình bằng 1, khi đó p bằng:

- A. $\sqrt{4q+1}$ B. $\sqrt{4q-1}$
C. $-\sqrt{4q+1}$ D. $q+1$

Câu 10: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$. Tìm m để biểu thức $P = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) - 6$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $m = \frac{1}{2}$ B. $m = 1$
C. $m = 2$ D. $m = -1$

Câu 11: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$P_{\min}$ của biểu thức $P = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$.

- A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. 1

Câu 12: Giả sử các nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ là lập phương các nghiệm của phương trình $x^2 + mx + n = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $p + q = m^3$ B. $p = m^3 + 3mn$
C. $p = m^3 - 3mn$ D. $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = \frac{p}{q}$

Câu 13: Cho phương trình:

$$x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m + 4 = 0$$

Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.

- A. $m = 2$ B. $m = 3$
C. $\begin{cases} m = 5 \\ m = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m = 4 \\ m = 7 \end{cases}$

Câu 14: Cho phương trình;

$$x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m + 4 = 0$$

Xác định m để biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $m = 3$ B. $m = 4$
C. $m = 7$ D. $m = 2$

Câu 15: Giả sử phương trình $x^2 + px + q = 0$ ($p < 0$, $q > 0$) có các nghiệm x_1, x_2 . Lập phương trình bậc hai có các nghiệm của nó là $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}$.

- A. $x^2 + \sqrt{-p+2\sqrt{q}}.x + \sqrt{q} = 0$
B. $x^2 - \sqrt{-p+2\sqrt{q}}.x + \sqrt{q} = 0$
C. $x^2 - \sqrt{-p+2\sqrt{q}}.x - \sqrt{q} = 0$
D. $x^2 - \sqrt{-p-2\sqrt{q}}.x + \sqrt{q} = 0$

Câu 16: Xác định các giá trị của m để phương trình $(x-2)[x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5] = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

- A. $m \leq 2$ B. $m = 2$ C. $m < 2$ D. $m > 2$

Câu 17: Cho phương trình:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + (1-3m)\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3m = 0$$

Tìm m để phương trình có nghiệm $x \neq 0$.

- A. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq \frac{3}{4} \end{cases}$ B. $\begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{4}{3} \end{cases}$

- C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq \frac{4}{3} \end{cases}$ D. $m \geq 0$

Câu 18: Tìm m để phương trình:

$$mx^4 - 2(m-3)x^2 + 4m = 0$$
 có đúng 3 nghiệm.

- A. không tồn tại m B. $m = 0$
C. $m > 0$ D. $m \leq 0$

Câu 19*: Cho phương trình:

$$3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

- A. $m \leq -1$ B. $m \geq \frac{1}{3}$
C. $m > -1$ D. $-1 < m \leq \frac{1}{3}$

Câu 20*: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m}$ có nghiệm.

- A. $9 \leq m \leq 10$ B. $-\frac{9}{4} \leq m \leq 10$
C. $m \geq 10$ D. $-\frac{9}{4} \leq m \leq 9$

§4. Hệ phương trình

A. Các dạng toán điển hình

Dạ
ng

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

- Tính các định thức:

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

- Biện luận:

- + Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases}$$
- + Nếu $D = 0$ và $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.
- + Nếu $D = D_x = D_y = 0$ thì hệ có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm. (Khi đó thay tham số vào hệ ta sẽ kết luận cụ thể).

Ví dụ 1: Tìm m để hệ phương trình:
$$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất. Khi đó tính $x + y$?

A. $m \neq \pm 1; x + y = \frac{m+3}{m+1}$

B. $m \neq \pm 1; x + y = \frac{m+2}{m+1}$

C. $m = -1; x + y = 1$

D. $m = 1; x + y = 0$

STUDY TIP

Phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0$$

($a \neq 0$) có 2 nghiệm

thì: $ax^2 + bx + c$

$$= a(x - x_1)(x - x_2)$$

Lời giải

Ta có: $D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m+1)(m-1)$

$$D_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 2 = (m-1)(m+2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2m - m - 1 = m - 1$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{(m-1)(m+2)}{(m+1)(m-1)} = \frac{m+2}{m+1} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{m-1}{(m+1)(m-1)} = \frac{1}{m+1} \end{cases} \Rightarrow x + y = \frac{m+3}{m+1}$$

và nghiệm

Đáp án A.

Ví dụ 2: Cho hai đường thẳng: $d_1: (m-1)x + y = 5$ và $d_2: 2x + my = 10$. Tìm m để hai đường thẳng d_1 và d_2 song song.

A. $m = 1$

B. $m = -1$

C. $m = 2$

D. $m = -2$

Lời giải

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} (m-1)x + y = 5 \\ 2x + my = 10 \end{cases} \quad (*)$$

$$D = \begin{vmatrix} m-1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 - m - 2 = (m+1)(m-2)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 10 & m \end{vmatrix} = 5(m-2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m-1 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 10(m-2)$$

$$d_1 // d_2 \Rightarrow \text{Hệ phương trình (*) vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D_x \neq 0 \Leftrightarrow m = -1 \\ D_y \neq 0 \end{cases}$$

Đáp án B.

Ví dụ 3: Cho ba đường thẳng $d_1 : 2x + 3y = -4$ (1)

$$d_2 : 3x + y = 1 \quad (2)$$

$$d_3 : 2mx + 5y = m \quad (3)$$

Giá trị m thuộc khoảng nào sau đây để d_1, d_2, d_3 đồng quy tại một điểm?

- A.** $m \in (-\infty; 1)$ **B.** $m \in (1; 9)$ **C.** $m \in [9; 20)$ **D.** $m \geq 20$

Lời giải

STUDY TIP

d_1, d_2, d_3 đồng quy
 $\Leftrightarrow d_3$ đi qua giao
điểm của d_1 và d_2

d_1, d_2, d_3 đồng quy khi và chỉ khi hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + 3y = -4 & (1) \\ 3x + y = 1 & (2) \\ 2mx + 5y = m & (3) \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Giải hệ phương trình (1) và (2) ta được: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ thay vào (3) ta tìm được $m = 10$

Đáp án C.

Hệ đối xứng loại I

1. Định nghĩa

Hệ đối xứng loại I là hệ chứa hai ẩn x, y mà khi ta thay đổi vai trò x, y cho nhau thì từng phương trình trong hệ không thay đổi.

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \text{ trong đó: } \begin{cases} f(x, y) = f(y, x) \\ g(x, y) = g(y, x) \end{cases}$$

2. Phương pháp giải tổng quát

- **Bước 1:** Đặt điều kiện nếu có.

- **Bước 2:** Đặt $x + y = S; xy = P$ ($S^2 \geq 4P$)

+ Đưa hệ về hệ mới chứa ẩn S, P

+ Giải hệ tìm S, P . Chọn S, P thỏa mãn $S^2 \geq 4P$.

- **Bước 3:** Với S, P tìm thấy thì x, y là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0$$

Ví dụ 1: Biết (x_0, y_0) là nghiệm duy nhất của hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ xy(x + y) = 2 \end{cases}$.

Khi đó $x_0 + y_0$ bằng:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

STUDY TIP

$$x^2 + y^2 = S^2 - 2P$$

$$x^3 + y^3 = S^3 - 3PS$$

Lời giải

Đặt $x + y = S, xy = P$ ta có: $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = S^3 - 3PS$

$$\text{Khi đó ta có hệ: } \begin{cases} S^3 - 3PS = 2 \\ PS = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3 = 8 \\ PS = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases}$$

x, y là nghiệm của phương trình: $X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 - 2X + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow X = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_0 + y_0 = 2$$

Đáp án C.

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + xy + y = a + 1 \\ x^2 y + xy^2 = a \end{cases}$$

Xác định a để hệ có ít nhất một nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x > 0$ và $y > 0$.

A. $\begin{cases} 0 < a \leq \frac{1}{4} \\ a \geq 2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a \geq 2 \\ a \leq -2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a \leq \frac{1}{4} \\ a > 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a \leq -2 \\ a \geq 0 \end{cases}$

Lời giải

Đặt $x + y = S; x \cdot y = P$ ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} S + P = a + 1 \\ S \cdot P = a \end{cases}$$

Khi đó S, P là nghiệm phương trình:

$$X^2 - (a+1)X + a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = a \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} S = a \\ P = 1 \end{cases}$$

STUDY TIP

Phương trình:

$ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm khi và chỉ

khi:
$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

Để hệ đã cho có ít nhất một nghiệm thỏa mãn $x > 0, y > 0$ thì
$$\begin{cases} S^2 \geq 4P \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

TH1: $S = 1, P = a$ thì:
$$\begin{cases} 1 \geq 4a \\ 1 > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a \leq \frac{1}{4}$$

TH2: $S = a, P = 1$ thì:
$$\begin{cases} a^2 \geq 4 \\ 1 > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 2 \\ a \leq -2 \Leftrightarrow a \geq 2 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} 0 < a \leq \frac{1}{4} \\ a \geq 2 \end{cases}.$$

Đáp án A.

Dạ
ng

Hệ đối xứng loại II

1. Định nghĩa

Hệ phương trình đối xứng loại II là hệ chứa hai ẩn x, y mà khi thay đổi x bởi y và y bởi x thì phương trình này trở thành phương trình kia của hệ.

Chú ý: Nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hệ.

2. Phương pháp giải

- Trừ vế với vế hai phương trình và biến đổi phương trình nhận được về phương trình tích số.
- Kết hợp một phương trình tích với một phương trình của hệ để tìm nghiệm.

Ví dụ 1: Hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 = 2x + y & (1) \\ y^3 = 2y + x & (2) \end{cases}$$
 có bao nhiêu nghiệm?

A. 2 B. 3 C. 5 D. Vô nghiệm

Lời giải

Trừ vế theo vế của hai phương trình (1) và (2) ta được:

$$x^3 - y^3 = x - y \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2 + xy - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \end{cases}$$

$$- \text{TH1: Với } x = y \text{ thế vào (1) ta có phương trình: } x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm là $(0; 0), (\sqrt{3}; \sqrt{3}), (-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.

STUDY TIP

Khi cộng vế với vế của 2 phương trình trong hệ đối xứng loại II ta luôn được một phương trình đối xứng.

- TH2: Với $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$. Kết hợp với tổng của hai phương trình (1) và (2) ta có hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \\ x^3 + y^3 = 3(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - xy - 1 = 0 \\ (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 3(x + y) \end{cases} \text{ (là hệ đối xứng loại I)}$$

Đặt $x + y = S, x.y = P$ ta có hệ:
$$\begin{cases} S^2 - P - 1 = 0 & (3) \\ S^3 - 3PS - 3S = 0 & (4) \end{cases}$$

Từ (3) ta có: $P = S^2 - 1$ thế vào (4) ta được:

$$S^3 - 3(S^2 - 1).S - 3S = 0 \Leftrightarrow -2S^3 = 0 \Leftrightarrow S = 0 \Rightarrow P = -1 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x.y = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow X = \pm 1$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm $(x; y)$ là $(1; -1), (-1; 1)$.

Kết luận: Vậy hệ phương trình đã cho có 5 nghiệm.

Đáp án C.

Ví dụ 2: Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2 = y^3 - 4y^2 + ay & (1) \\ y^2 = x^3 - 4x^2 + ax & (2) \end{cases}$$

- A. Không có giá trị nào của a B. $a > \frac{25}{4}$
C. $a = \frac{25}{4}$ D. $a \leq 0$

Lời giải

Do tính đối xứng nên: Nếu hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì cũng có nghiệm $(y_0; x_0)$.

$\Rightarrow$ Một điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $x_0 = y_0$ thế vào (1) ta được:

STUDY TIP

Nếu $(x_0; y_0)$ là một nghiệm và $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm để hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần $x_0 = y_0$

$$x_0^2 = x_0^3 - 4x_0^2 + ax_0 \Leftrightarrow x_0(x_0^2 - 5x_0 + a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0^2 - 5x_0 + a = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Để hệ có nghiệm duy nhất thì phương trình (3) phải vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$.

$$\Leftrightarrow \Delta = 25 - 4a < 0 \Leftrightarrow a > \frac{25}{4}$$

- TH1: (3) vô nghiệm

$$x = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow a = \frac{25}{4}$$

- TH2: (3) có nghiệm kép

Khi đó $x = 0$ không phải nghiệm kép.

Thử lại với $a > \frac{25}{4}$ giải hệ thấy có nghiệm duy nhất.

Đáp án B.

Dạ
ng

Hệ đồng bậc

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}$$

Gọi (x_0, y_0) là nghiệm của hệ. Khi đó tất cả các tỉ số $\frac{x_0}{y_0}$ thuộc tập nào sau đây?

A. $\frac{x_0}{y_0} \in \left\{-1; 1; \frac{1}{2}\right\}$

B. $\frac{x_0}{y_0} \in \left\{1; \frac{1}{2}\right\}$

C. $\frac{x_0}{y_0} \in \{-1; 1\}$

D. $\frac{x_0}{y_0} \in \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$

Lời giải

Nhận xét ta thấy vế trái của hai phương trình đã cho đều bậc 3 với x và y còn vế phải là bậc 0 (hay hằng số) nên ta nhân chéo để đưa về phương trình đồng bậc.

Hệ phương trình
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 & (2) \\ 2(x^3 + y^3) = x^2y + 2xy^2 + y^3 & (3) \end{cases}$$

STUDY TIP

Phương trình (3) trong lời giải là phương trình đẳng cấp bậc 3 (là phương trình mà tất cả các đơn thức của nó đều

Với $y = 0 \Rightarrow x = 0$ không là nghiệm.

Với $y \neq 0$ chia hai vế của (3) cho y^3 ta được: $2\left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right) + 1 = 0$

Giải phương trình bậc ba ta có: $\frac{x}{y} \in \left\{-1; 1; \frac{1}{2}\right\}$

+ Với $\frac{x}{y} = -1 \Rightarrow x = -y$ thay vào (2) ta có: $-y^3 + y^3 = 1$ vô nghiệm.

+ Với $\frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x = y$ thay vào (2) ta có: $2x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

+ Với $\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2x$ thay vào (2) ta có: $(2x)^3 + x^3 = 1 \Rightarrow 9x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

Tóm lại chỉ có: $\begin{cases} \frac{x}{y} = 1 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \end{cases}$ thỏa mãn.

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + 3y = x^2 + 3xy + y^2 & (1) \\ x^2 + 2y^2 = x + 2y & (2) \end{cases}$. Giả sử hệ có

nghiệm $(x_0; y_0)$, $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ thì tỷ số: $\frac{x_0}{y_0}$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $t^3 - 2t^2 - 3t + 4 = 0$

B. $4t^3 - 3t^2 - 2t + 1 = 0$

C. $4t^2 - 3t + 1 = 0$

D. $4t^2 - 3t - 1 = 0$

Lời giải

Nhận xét: Ta nói mỗi phương trình đều có một vế bậc nhất vế còn lại là bậc hai với x, y nên khi nhân vế với vế của hai phương trình ta được phương trình đồng bậc:

STUDY TIP

Phương trình (1) có vế trái bậc 1, vế phải bậc 2.

Phương trình (2) có vế trái bậc 2, vế phải

$$(2x + 3y)(x^2 + 2y^2) = (x^2 + 3xy + y^2)(x + 2y) \Leftrightarrow x^3 - 2x^2y - 3xy^2 + 4y^3 = 0$$

Vì $x \neq 0, y \neq 0$ ta chia 2 vế cho y^3 ta được phương trình:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\frac{x}{y} + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x_0}{y_0} \text{ là nghiệm của phương trình: } t^3 - 2t^2 - 3t + 4 = 0$$

Đáp án A.

Dạ
ng

Giải hệ bằng phương pháp thế

Ví dụ 1: Biết cặp $(x_0; y_0)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$$

Khi đó tổng $x_0 + y_0$ là:

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{25}{4}$

C. $\frac{-1}{4}$

D. $\frac{1}{4}$

Lời giải

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + xy)^2 = 2x + 9 \quad (1) \\ xy = \frac{1}{2}(6x + 6 - x^2) \quad (2) \end{cases}$$

Hệ phương trình

Thế xy ở phương trình (2) vào phương trình (1) ta được:

$$\left[x^2 + \frac{1}{2}(6x + 6 - x^2)\right]^2 = 2x + 9 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(6x + 6 + x^2)^2 = 2x + 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

+ Với $x = 0$ không thỏa mãn hệ.

+ Với $x = -4$ thay vào (2) ta có:

$$-4y = \frac{1}{2}(-24 + 6 - 16) \Rightarrow y = \frac{17}{4} \Rightarrow x_0 = -4, y_0 = \frac{17}{4} \Rightarrow x_0 + y_0 = \frac{1}{4}$$

STUDY TIP

$$x^4 + 2x^3y + x^2y^2$$

$$= (x^2 + xy)^2$$

Đáp án D.

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 - 8x + 4y + 15 = 0 & (1) \\ x^2 + 2y^2 - 2xy = 5 & (2) \end{cases}$$

Hệ phương trình này có bao nhiêu nghiệm?

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

Lời giải

Trong phương trình (1) ta coi x là ẩn và giải phương trình bậc hai:

$$x^2 - 8x - 4y^2 + 4y + 15 = 0$$

Có
$$\Delta' = 16 - (-4y^2 + 4y + 15) = 4y^2 - 4y + 1 = (2y - 1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ x = 3 + 2y \end{cases}$$

- Với $x = 5 - 2y$ thế vào phương trình (2) ta được phương trình:

$$10y^2 - 30y + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 3 \\ y = 2 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \text{ . Khi đó hệ có nghiệm là } (3;1), (1;2) \text{ .}$$

- Với $x = 3 + 2y$ thế vào phương trình (2) ta được phương trình:

$$(3 + 2y)^2 + 2y^2 - 2(3 + 2y).y = 5 \Leftrightarrow 9 + 12y + 4y^2 + 2y^2 - 6y - 4y^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + 6y + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \Rightarrow x = 1 \\ y = -2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm $(x; y)$ là $(1; -1), (-1; -2), (3; 1), (1; 2)$.

Đáp án C.

Dạ
ng

Giải hệ bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases}$$

Biết hệ có 2 nghiệm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$. Tính tổng $(x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$.

A. -6

B. 6

C. 7

D. -2

STUDY TIP

Hệ đã cho ta thấy có những biểu thức giống

nhau là $(x^2 + 1)$ và $(x + y)$

Lời giải

Dễ thấy $y = 0$ không phải là nghiệm của hệ.

Với $y \neq 0$ chia hai vế của các phương trình trong hệ cho y ta được hệ:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} + x + y = 4 \\ (x + y)^2 - 2 \cdot \frac{x^2 + 1}{y} = 7 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u = \frac{x^2 + 1}{y} \\ v = x + y \end{cases}$ ta có hệ: $\begin{cases} u + v = 4 \\ v^2 - 2u = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 - v \\ v^2 + 2v - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 3 \Rightarrow u_1 = 1 \\ v_2 = -5 \Rightarrow u_2 = 9 \end{cases}$

- TH1: $u = 1, v = 3$ ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = y \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$$

- TH2: $v = -5, u = 9$ ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} = 9 \\ x + y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 9y \\ y = -5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 9x + 46 = 0 \\ y = -5 - x \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y)$ là $(1; 2)$ và $(-2; 5) \Rightarrow x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 6$.

Đáp án B.

$$\begin{cases} 2 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x-2y} & (1) \\ \sqrt{x + \sqrt{x-2y}} = x + 3y - 2 & (2) \end{cases}$$

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình:

Gọi $(x; y)$ là nghiệm của hệ mà $x, y \in \mathbb{Q}$. Khi đó $x + y$ là:

A. 5

B. -12

C. -2

D. 10

Lời giải

Điều kiện: $y \neq 0, x - 2y \geq 0; x + \sqrt{x-2y} \geq 0$

Phương trình $(1) \Leftrightarrow \frac{x}{y} - 2 - \sqrt{x-2y} - 6y = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2y}{y^2} - \frac{\sqrt{x-2y}}{y} - 6 = 0$

Giải phương trình bậc hai ta được:
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x-2y}}{y} = 3 \\ \frac{\sqrt{x-2y}}{y} = -2 \end{cases}$$

- Với $\frac{\sqrt{x-2y}}{y} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x = 9y^2 + 2y \end{cases}$ thế vào (2) ta được nghiệm $\left(\frac{24}{9}; \frac{4}{9}\right)$ không thỏa mãn $x, y \in \mathbb{Q}$.

- Với $\frac{\sqrt{x-2y}}{y} = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} y < 0 \\ x = 4y^2 + 2y \end{cases}$ thế vào (2) ta được nghiệm $(12; -2)$.

Đáp án D.

Dạ
ng

Hệ phương trình 3 ẩn

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 3z \\ x^2 + y^2 = 5z \\ x^3 + y^3 = 9z \end{cases}$$

Số nghiệm của hệ phương trình trên là:

A. 1

B. 2

C. 4

D. 5

Lời giải

Ta coi z như là tham số thì hệ đã cho là hệ đối xứng với x và y nên:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3z \\ (x + y)^2 - 2xy = 5z \\ (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 9z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3z \\ 9z^2 - 5z = 2xy \\ 27z^3 - 9z \cdot \frac{9z^2 - 5z}{2} = 9z \end{cases}$$

Hệ phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3z \\ 2xy = 9z^2 - 5z \\ 3z^3 - 5z^2 + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3z \\ 2xy = 9z^2 - 5z \\ z = 0 \vee z = 1 \vee z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

- Với $z = 0$ ta có:
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ xy = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $(0; 0; 0)$.

- Với $z = 1$ ta có:
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Giải hệ ta có nghiệm $(1; 2; 1), (2; 1; 1)$.

STUDY TIP

Trong Ví dụ 1, ta cũng có thể dùng phương pháp thế để giải.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = \frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

- Với $z = \frac{2}{3}$ ta có:

Giải hệ ta có 2 nghiệm $\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}; \frac{3+\sqrt{6}}{3}; \frac{2}{3}\right)$ và $\left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}; \frac{3-\sqrt{6}}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Vậy hệ đã cho có 5 nghiệm.

Đáp án D.

$$\begin{cases} xy = 12 \quad (1) \\ yz = 20 \quad (2) \\ zx = 15 \quad (3) \end{cases}$$

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình:

Giả sử $(x_1; y_1; z_1), (x_2; y_2; z_2)$ là các nghiệm của hệ. Tính $x_1 + x_2 + y_1 + y_2$.

A. 0

B. 3

C. 6

D. 9

Lời giải

Nhân vế với vế 3 phương trình trên ta được: $(xyz)^2 = 3600 \Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 60 \\ xyz = -60 \end{cases}$

$$\begin{cases} xy = 12 \quad (1) \\ yz = 20 \quad (2) \\ zx = 15 \quad (3) \\ xyz = 60 \quad (4) \end{cases}$$

- Với $xyz = 60$ ta có hệ:

Thay (1) vào (4) ta được $z = 5$

Thay (2) vào (4) ta được $x = 3$

Thay (3) vào (4) ta được $y = 4$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm là $(x; y; z)$ là $(3; 4; 5)$

- Tương tự với $xyz = -60$ ta giải được nghiệm là $(-3; -4; -5)$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 3 - 3 + 4 - 4 = 0$$

Đáp án A.

B. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Xem đáp án chi tiết tại trang 132

Câu 1: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx + (m+2)y = 2 \\ x + my = m \end{cases}$$

. Khi hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thì tổng $x + y$ là:

- A. $\frac{2}{m^2 - m - 2}$ B. $\frac{-2}{m^2 - m - 2}$
C. $\frac{2m^2 - 2}{m^2 - 2m - 2}$ D. $\frac{2m^2 + 2}{m^2 - 2m - 2}$

Câu 2: Xác định m để hệ phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} 2m^2x + 3(m-1)y = 3 \\ m(x+y) - 2y = 2 \end{cases}$$

- A. $m = 3$ hoặc $m = \frac{1}{2}$ B. $m = 0$
C. $m = 0$ hoặc $m = \frac{3}{4}$ D. $m \neq 0$ hoặc $m \neq \frac{3}{4}$

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hệ

phương trình: $\begin{cases} (m+1)x - 2y = m-1 \\ m^2x - y = m^2 + 2m \end{cases}$ có nghiệm

nguyên (tức là $x, y \in \mathbb{Z}$)?

- A. 2 B. 3 C. 4 D. Vô số

Câu 4: Biết hệ phương trình:

$$\begin{cases} y + x^2 = 4x & (1) \\ 2x + y - 5 = 0 & (2) \end{cases}$$
 có hai nghiệm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$. Khi đó $(x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$ bằng:

- A. 14 B. 0 C. 3 D. 4

Câu 5: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 5 \end{cases}$$

. Gọi $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ là các nghiệm của hệ. Tính $x_1 + x_2$.

- A. 3 B. 2 C. 0 D. 1

Câu 6: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ xy(x+y) = 2 \end{cases}$.

Đặt $S = x + y, P = x \cdot y$, tính $S + P$?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 6

Câu 7: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt{x-4} + \sqrt{y-1} = 4 \\ x + y = 3m \end{cases}$$

- A. $m \leq \frac{13}{3}$ B. $m \geq 7$
C. $m > \frac{5}{3}$ D. $\frac{13}{3} \leq m \leq 7$

Câu 8: Cho $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $Q = x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$. Khi đó các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất theo thứ tự là:

- A. $0; \frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{4}; 1$ C. $1; 4$ D. $0; 4$

Câu 9: Số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 3x = 2y \\ y^2 - 3y = 2x \end{cases} \text{ là:}$$

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Câu 10: Tìm số nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^3 = 2x + y & (1) \\ y^3 = 2y + x & (2) \end{cases}$$

- A. 4 B. 2 C. 3 D. 5

Câu 11: Gọi $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ là các nghiệm

của hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^2 - 3xy = 4 & (1) \\ x^2 - 4xy + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Hãy tính $(x_1 + y_1 + x_2 + y_2)$.

- A. 0 B. 8 C. 10 D. 5

Câu 12*: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$$

Xác định a để hệ có tích $x.y$ nhỏ nhất.

- A. $a = 1$ B. $a = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

- C. $a = 2 + \frac{2}{\sqrt{2}}$ D. $a = \sqrt{2}$

Câu 13*: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = \frac{-5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = \frac{-5}{4} \end{cases}$$

Biết rằng hệ đã cho có 2 nghiệm là $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$. Khi đó tổng $x_1^3 + x_2^3$ là:

- A. $\frac{-9}{4}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{-5}{4}$

Câu 14*: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x - y + 4} - \sqrt{4x + y + 1} + x - 1 = 0 \\ x^2 + 3(y - 6x) = 5(\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x + 3} - 7) \end{cases}$$

Biết hệ phương trình có hai nghiệm là $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$. Tìm $(x_1 + x_2)$.

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

BAI KIỂM TRA CHỦ ĐỀ III

Xem đáp án chi tiết tại trang 134

Câu 1: Cặp $(x; y) = (1; 2)$ là nghiệm của phương trình:

- A. $3x + 2y = 7$ B. $x - 2y = 5$
C. $0.x + 3y = 4$ D. $3x + 0.y = 2$

Câu 2: Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 . Hãy xác định mệnh đề đúng.

- A. $x_1 + x_2 = \frac{c}{a}; x_1 \cdot x_2 = \frac{-b}{2a}$
B. $x_1 + x_2 = \frac{-b}{2a}; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
C. $x_1 + x_2 = \frac{c}{a}; x_1 \cdot x_2 = \frac{-b}{a}$
D. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Câu 3: Hệ phương trình nào sau đây không phải là hệ 3 phương trình bậc nhất 3 ẩn?

A.
$$\begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \\ 2y^2 = 0 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x = 2 \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ z = 2 \\ 2x = 1 \end{cases}$$

Câu 4: Cho phương trình $ax + b = 0$. Hãy chọn mệnh đề **đúng**?

- A. Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a \neq 0$
B. Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $b \neq 0$
C. Phương trình nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi $a = 0, b \neq 0$
D. Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $a = 0, b = 0$

Câu 5: Điều kiện xác định của phương trình:

$$\frac{2x}{x^2 + 1} - 5 = \frac{3}{x - 1} \text{ là:}$$

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
C. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ D. $D = \mathbb{R}$

Câu 6: Phương trình $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$ có:

- A. Hai nghiệm trái dấu B. Hai nghiệm dương
C. Hai nghiệm âm D. Vô nghiệm

Câu 7: Tìm điều kiện xác định của phương trình

$$\sqrt{x-1} - \frac{3x+1}{\sqrt{15-3x}} = 0$$

- A. $1 \leq x < 5$ B. $x > 5$
C. $x \geq 1$ D. $1 \leq x \leq 5$

Câu 8: Chọn cả phương trình không tương đương trong các cặp phương trình sau:

- A. $x+1 = x^2 - 2x$ và $x+2 = (x-1)^2$
B. $3x\sqrt{x+1} = 8\sqrt{3-x}$ và $6x\sqrt{x+1} = 16\sqrt{3-x}$
C. $x\sqrt{3-2x} + x^2 = x^2 + x$ và $x\sqrt{3-2x} = x$
D. $\sqrt{x+2} = 2x$ và $x+2 = 4x^2$

Câu 9: Cho các phương trình sau:

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x-3}} = \frac{x+2}{\sqrt{x-3}} \quad (1)$$

$$(x-3)^2 = -\frac{x}{\sqrt{x-2}} \quad (2);$$

$$\sqrt{x+1} + x = 3 + \sqrt{x+1} \quad (3);$$

$$\frac{3x+1}{\sqrt{-x+2}} = \sqrt{x-3} \quad (4).$$

Số phương trình vô nghiệm là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 10: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$$|2x^2 - 3x - 2| = |x+2|$$

- A. 3 B. 2 C. 1 D. $\frac{3}{2}$

Câu 11: Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$. Trong các phương trình sau đây, phương trình nào chỉ có hai nghiệm là

$$\frac{x_1}{x_2+1} \quad \text{và} \quad \frac{x_2}{x_1+1} ?$$

- A. $8x^2 - 6x + 1 = 0$ B. $3x^2 - 4x + 1 = 0$
C. $3x^2 - x + 3 = 0$ D. $3x^3 - 4x^2 + x = 0$

Câu 12: Nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{2}{x-y} + 3 = 0 \\ \frac{x}{x-y} - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{là } (x_0; y_0). \text{ Tính } x_0 - y_0 \text{ bằng:}$$

- A. 2 B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

Câu 13: Một công ty Taxi có 85 xe chở khách gồm 2 loại, xe chở được 4 khách và xe chở được 7 khách. Dùng tất cả xe đó, tối đa mỗi lần công ty chở một lần được 445 khách. Hỏi công ty đó có mấy xe mỗi loại?

- A. 50 xe 4 chỗ; 35 xe 7 chỗ
B. 35 xe 7 chỗ; 50 xe 4 chỗ
C. 45 xe 4 chỗ; 40 xe 7 chỗ
D. 40 xe 4 chỗ; 45 xe 7 chỗ

Câu 14: Cho phương trình $\sqrt{10x-9} = 2x-1$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt. Hãy tính $A = x_1^2 + x_2^2$.

A. $A = \frac{29}{4}$

B. $A = 39$

C. $A = 0$

D. $A = \frac{25}{4}$

Câu 15: Tìm số nghiệm của phương trình

$$|x-3| = 5-2x$$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

Câu 16: Cho phương trình

$$-x^2 + 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 1} = 0.$$

Đặt

$t = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$, $t \geq 0$. Khi đó, phương trình đã cho trở thành phương trình nào sau đây?

A. $t^2 + t - 1 = 0$

B. $-t^2 + t + 1 = 0$

C. $t^2 + t = 0$

D. $t^2 + t + 1 = 0$

Câu 17: Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$. Hãy tính S .

A. $S = 1$

B. $S = -3$

C. $S = 3$

D. $S = 0$

Câu 18: Phương trình $x + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 19: Cho phương trình $2x^2 - x = 0$. Trong các phương trình sau đây, phương trình nào không phải là hệ quả của phương trình đã cho?

A. $2x - \frac{x}{1-x} = 0$

B. $4x^3 - x = 0$

C. $(2x^2 - x)^2 + (x-5)^2 = 0$

D. $2x^3 + x^2 - x = 0$

Câu 20: Tìm giá trị thực của tham số m để hệ

phương trình
$$\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \\ 2mx + 5y - m = 0 \end{cases}$$
 có duy nhất một nghiệm. Khi đó m thuộc khoảng nào sau đây

A. $(-\infty; 4)$

B. $(2; 9)$

C. $(0; 3)$

D. $(8; 12)$

Câu 21: Phương trình $(m^2 - 4m + 3)x = m^2 - 3m + 2$ có nghiệm duy nhất khi:

A. $m \neq 1$

B. $m \neq 3$

C. $m \neq 3$ và $m \neq 1$

D. $m = 3$ hay $m = 1$

Câu 22: Với điều kiện nào của m thì phương trình $(m-2)^2 x - 4 = 4x - m$ có nghiệm âm?

A. $0 < m$

B. $m > 4$

C. $0 < m < 4$

D. $0 < m$ và $m \neq 4$

Câu 23: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = 1 \end{cases} \quad (I),$$
 m là tham số. Mệnh đề nào **sai**?

A. Hệ (I) có vô số nghiệm.

B. Khi $m = 1$ thì hệ (I) có vô số nghiệm.

C. Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\forall m \neq \pm 1$.

D. Khi $m = -1$ thì hệ (I) vô nghiệm.

Câu 24: Số nghiệm của phương trình

$$x^7 - 14x^5 + 49x^3 - 36x = 0 \text{ là:}$$

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

Câu 25: Một lớp học có 36 học sinh được phân thành 3 nhóm A, B, C để thảo luận trong giờ học toán. Biết nhóm A ít hơn nhóm B 2 học sinh, tổng số học sinh nhóm A và C gấp đôi số học sinh nhóm B. Hỏi số lượng học sinh từng nhóm A, B, C lần lượt là bao nhiêu?

- A. 12, 14, 16 B. 12, 10, 14
C. 14, 12, 10 D. 10, 12, 14

Câu 26: Giả sử phương trình:

$$x^2 + 5x + 4 - 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} = 0$$

có các nghiệm là x_1, x_2 . Tính $T = x_1^2 + x_2^2$

- A. $T = 16$ B. $T = 81$ C. $T = 9$ D. $T = 97$

Câu 27: Tổng các nghiệm của phương trình

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0 \text{ là:}$$

- A. 6 B. -8 C. -6 D. 7

Câu 28: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2; 20]$ để phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 4m + 1 = 0$ vô nghiệm.

- A. 4 B. 3 C. 19 D. 20

Câu 29: Phương trình $x^2 - 2mx + m^2 + m + 1 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt khi?

- A. $m < -1$ B. $m < 0$
C. $m \in \mathbb{Q}$ D. $-1 < m < 0$

Câu 30: Cho phương trình:

$$x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 2m + 2 = 0$$

Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có 2 nghiệm sao cho tổng bình phương hai nghiệm đó bằng 5?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 31: Thảo và Châu đi xe đạp cùng xuất phát một lúc đi từ A đến B dài 30km, vận tốc trung bình của Châu nhanh hơn vận tốc trung bình của Thảo 3km/h nên Châu đến B sớm hơn Thảo 30 phút. Tính vận tốc trung bình của mỗi người.

- A. Vận tốc trung bình của Châu là 15km/h, của Thảo là 12km/h
B. Vận tốc trung bình của Châu là 12km/h, của Thảo là 15km/h
C. Vận tốc trung bình của Châu là 15km/h, của Thảo là 17km/h
D. Vận tốc trung bình của Châu là 11km/h, của Thảo là 8km/h

Câu 32: Có bao nhiêu tam giác cân có một góc gấp đôi góc kia?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. Vô số

Câu 33: Cho phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1) ($a \neq 0$). Đặt:

$\Delta = b^2 - 4ac$, $S = \frac{-b}{a}$, $P = \frac{c}{a}$. Ta có (1) vô nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $\Delta < 0$ B. $\Delta < 0$ hoặc $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

Câu 34: Số nghiệm của phương trình $|2x-1|-|x+3|=4$ là:

- A. 1 B. 4 C. 2 D. 3

Câu 35: Số nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1+x}} + \frac{1}{\frac{1}{x}} + \frac{1}{\frac{1-x}{x}} + \frac{3}{2x} = 0$$

là:

- A. 2 B. 1 C. 4 D. 5

Câu 36: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để

phương trình $\frac{x^2+mx+2}{x^2-1}=1$ vô nghiệm?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 37: Cho $\frac{x^2-2(m+1)x+6m-2}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}$

(1). Có bao nhiêu giá trị nguyên m trên đoạn $[-2;2]$ để phương trình (1) có nghiệm duy nhất

- A. 2 B. 5 C. 3 D. 4

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình:

$$2(x^2+2x)^2 - (4m-3)(x^2+2x) + 1 - 2m = 0$$

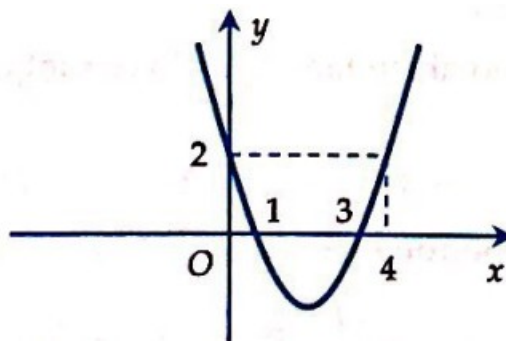
có đúng 3 nghiệm thuộc $[-3;0]$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 39: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m^2 - 3m + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = |x_1 + x_2 + x_1x_2|$.

- A. $P_{\max} = \frac{1}{4}$ B. $P_{\max} = 1$
- C. $P_{\max} = \frac{9}{8}$ D. $P_{\max} = \frac{9}{16}$

Câu 40: Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm các giá trị nguyên của m trên đoạn $[-5;5]$ để phương trình $\sqrt{m-f(|x|)} = 0$ xác định trên $[-4;4]$.



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 41: Cho hệ phương trình $\begin{cases} (2m-3)x - my = 3m-2 \\ 5x - (2m+3)y = 5 \end{cases}$. Có bao nhiêu giá trị m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $2x + 3y = -27$.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 42: Cho a, b, c, d là các số thực khác 0. Biết c và d là hai nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$ và a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 + cx + d = 0$. Tính giá trị của biểu thức $S = a + b + c + d$.

- A. $S = -2$ B. $S = 0$
C. $S = 1$ D. $S = -1$

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5; 5]$ để phương trình $|mx + 2x - 1| = |x - 1|$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

Câu 44: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 + \frac{2x^2}{x-1} + m = 0$ có đúng bốn nghiệm?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. Vô số

Câu 45: Nghiệm của phương trình $\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x} = 1$ thuộc khoảng nào sau đây:

- A. $(-\infty; -2)$ B. $(-5; 1)$
C. $(-2; 3)$ D. $(2; +\infty)$

Câu 46: Nghiệm của phương trình $\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{4+x} = 2$ có dạng $\frac{a+b\sqrt{21}}{c}$ với a, b, c tối giản. Tính $T = a + b + c$

- A. 11 B. 43 C. 61 D. 29

Câu 47: Phương trình:

$$\sqrt{(x-3)^2(5-3x)} + 2x = \sqrt{3x-5} + 4$$

có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 48: Tìm số nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 5(x^2 + y^2) = y - 2x \\ 3(x^2 - y^2) + 2x = y + 8xy \end{cases}$$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 49: Tìm số nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{3}{x^2} = 2x + y \\ \frac{3}{y^2} = 2y + x \end{cases}$$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 50: Tìm số nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} y(1 + 2x^3y) = 3x^6 \\ 1 + 4x^6y^2 = 5x^6 \end{cases}$$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT CHỦ ĐỀ 3

I. KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH

Câu 1: Đáp án D.

$$\text{ĐKXĐ: } x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

Câu 2: Đáp án B.

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x+2 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}.$$

Câu 3: Đáp án A.

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; -2\}.$$

Câu 4: Đáp án B.

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Câu 5: Đáp án C.

$$\text{ĐKXĐ: } 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty \right)$$

Câu 6: Đáp án D.

ĐKXĐ:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 6-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$$

Câu 7: Đáp án D.

ĐKXD:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \neq 0 \\ 7 - 2x > 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 3 \\ x < \frac{7}{2} \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x < \frac{7}{2} \\ x \neq 3 \end{cases}$$

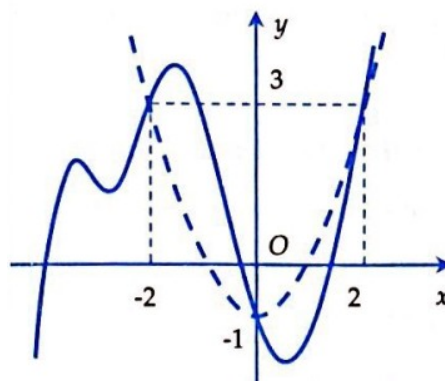
Câu 8: Đáp án C.

ĐKXD:

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 7 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 7$$

Câu 9: Đáp án D.Nhìn đồ thị ta thấy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ Điều kiện: $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.**Câu 10: Đáp án A.**Nhìn đồ thị ta thấy $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$ **Câu 11: Đáp án B.**Từ đồ thị ta thấy $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$.**Câu 12: Đáp án B.**

Vẽ lại hình:



Ta thấy: Parabol $y = x^2 - 1$ đi qua các điểm $(-2; 3)$, $(0; -1)$, $(2; 3)$

nên $\forall x \in (-2; 0)$ thì $f(x) > x^2 - 1$.

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

Câu 1: Đáp án B.

Phương trình đã cho vô nghiệm khi:

$$\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 3m + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Câu 2: Đáp án A.

Phương trình đã cho vô nghiệm khi:

$$\begin{cases} m = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Câu 3: Đáp án C.

Phương trình đã cho vô nghiệm khi:

$$\begin{cases} m^2 - 5m + 6 = 0 \\ m^2 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

Câu 4: Đáp án B.

ĐKXĐ: $x > 3$

Công Phá Toán - Lớp 10

Phương trình tương đương với $x-1=a \Leftrightarrow x=a+1$ là nghiệm khi $a+1>3$
 $\Leftrightarrow a>2$

Câu 5: Đáp án C.

ĐKXD: $x \neq -3$.

Phương trình tương đương với $(m+1)x+m-2=mx+3m$

$\Leftrightarrow x=2m+2$ là nghiệm của phương trình đã cho khi

$$2m+2 \neq -3 \Leftrightarrow m \neq \frac{-5}{2}$$

Câu 6: Đáp án A.

Phương trình $|x-m|=|x+1|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-m=x+1 \\ x-m=-x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x=m+1 & (1) \\ x=\frac{m-1}{2} & (2) \end{cases}$$

- Với $m=-1$: (1) nghiệm đúng $\forall x$; (2) có nghiệm $x=-1$

- Với $m \neq -1$: (1) vô nghiệm, (2) có nghiệm $x=\frac{m-1}{2}$

Câu 7: Đáp án C.

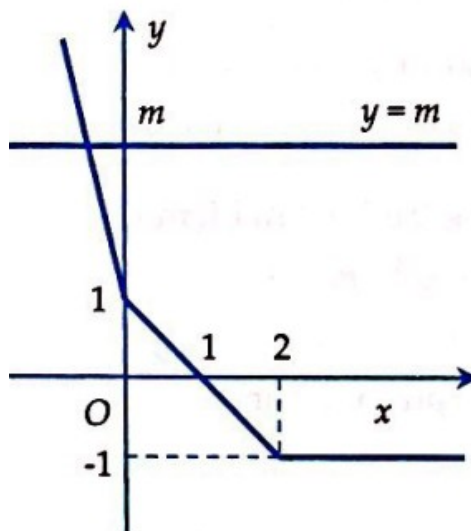
Viết lại phương trình thành:

$$\left| \frac{1}{2}x-1 \right| + \frac{1}{2}|x| - x = m \quad (*)$$

Vẽ đồ thị hàm số:

$$y = \left| \frac{1}{2}x-1 \right| + \frac{1}{2}|x| - x \quad (C)$$

$$= \begin{cases} 1-2x & \text{khi } x < 0 \\ 1-x & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ -1 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$$



Vì số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $y = m$ nên $m \geq -1$ thì phương trình có nghiệm.

Câu 8: Đáp án A.

Khử giá trị tuyệt đối ta được

1. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ta có phương trình:

$$x + y = 1 \quad (d_1)$$

2. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \end{cases}$ ta có phương trình:

$$x - y = 1 \quad (d_2)$$

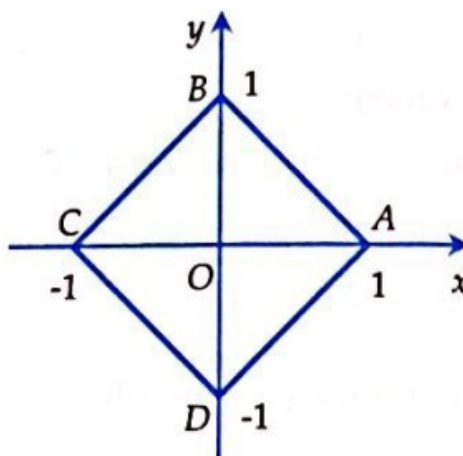
3. $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ta có phương trình:

$$-x + y = 1 \quad (d_3)$$

4. $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$ ta có phương trình:

$$-x - y = 1 \quad (d_4)$$

Vẽ 4 đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 suy ra tập nghiệm của phương trình là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $\sqrt{2}$.



III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

Câu 1: Đáp án B.

- Với $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$

Khi đó phương trình trở thành

$$2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

- Với $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

Ta có: $\Delta' = m^2 - (m+1)(m-2) = m+2$.

Phương trình vô nghiệm khi

$$m+2 < 0 \Leftrightarrow m < -2$$

Câu 2: Đáp án C.

Viết lại phương trình:

$$(2k-1)x^2 - 8x + 6 = 0$$

- Với $2k-1=0 \Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$.

Khi đó phương trình trở thành

$$-8x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

- Với $2k-1 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq \frac{1}{2}$.

Ta có $\Delta' = 16 - 6(2k-1) < 0$

$$\Leftrightarrow -12k + 22 < 0 \Leftrightarrow k > \frac{11}{6}, \text{ do đó số nguyên } k \text{ nhỏ nhất là } k = 2$$

Câu 3: Đáp án C.

- Với $m=0$. Khi đó, phương trình trở thành: $-2x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Do đó $m=0$ là một giá trị cần tìm.

- Với $m \neq 0$ ta có

$$\Delta' = (m+1)^2 - m(m+1) = m+1$$

Khi đó phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$$

Câu 4: Đáp án C.

Phương trình đã cho có nghiệm kép khi:

$$\begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' = 9(m+1)^2 - (m+1)(2m+3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{-6}{7} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{6}{7}$$

Câu 5: Đáp án C.

Viết lại phương trình:

$$(2-m)x^2 - x - 2 = 0$$

- Với $2-m=0 \Leftrightarrow m=2$

Khi đó phương trình trở thành;

$$-x-2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

Do đó $m=2$ là một giá trị cần tìm.

- Với $2-m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Ta có:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(2-m)(-2) = -8m + 17$$

Khi đó phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow -8m + 17 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{17}{8}$$

Câu 6: Đáp án B.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0$

Khi đó gọi hai nghiệm là x_1, x_2 là

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

Câu 7: Đáp án A.

Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 0 \\ -4m < 0 \Leftrightarrow m > 0 \\ m^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

Vậy có 5 giá trị thỏa mãn yêu cầu.

Câu 8: Đáp án B.

Phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 2m + 2 > 0 \\ S = 2(m + 1) > 0 \\ P = m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m > -1 \\ \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m > 1$$

Vậy với $m > 1$ thỏa mãn.

Câu 9: Đáp án A.

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình khi đó ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p < 0 \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

Theo giả thiết ta có $|x_1 - x_2| = 1$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1$$

$$\Rightarrow q^2 - 4q = 1 \Rightarrow p^2 = 4q + 1$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{4q + 1} > 0$$

Câu 10: Đáp án C.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2 = 0$.

Công Phá Toán - Lớp 10

Tìm m để biểu thức $P = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) - 6$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 2) = 2m - 1$ để phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$$

Theo định lí Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1x_2 = m^2 + 2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } P = m^2 + 2 - 2(2m + 2) - 6$$

$$= m^2 - 4m - 8 = (m - 2)^2 - 12 \geq -12$$

$$\Rightarrow P_{\min} = -12 \text{ khi } m = 2.$$

Câu 11: Đáp án A.

Ta có

$$\Delta = m^2 - 4(m - 1) = (m - 2)^2 \geq 0 \quad \forall m$$

Do đó phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi giá trị của m . Theo hệ thức

$$\text{Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$= m^2 - 2(m - 1) = m^2 - 2m + 2.$$

Khi đó:

$$P = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)} = \frac{2m + 1}{m^2 + 2}$$

$$\Rightarrow P + \frac{1}{2} = \frac{2m + 1}{m^2 + 2} + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2(2m+1)+m^2+2}{2(m^2+2)} \\
 &= \frac{(m+2)^2}{2(m^2+2)} \geq 0 \quad \forall m \in \mathbb{R} \\
 &\Rightarrow P \geq \frac{1}{2} \quad \forall m \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = -2$.

Câu 12: Đáp án C.

Giả sử phương trình $x^2 + px + q = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $x^2 + mx + n = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 .

Theo bài ra ta có:
$$\begin{cases} x_1 = x_3^3 \\ x_2 = x_4^3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow x_1 + x_2 = x_3^3 + x_4^3 \\
 &= (x_3 + x_4)(x_3^2 + x_4^2 - x_3x_4) \\
 &= (x_3 + x_4)\left[(x_3 + x_4)^2 - 3x_3x_4\right] \quad (*)
 \end{aligned}$$

Theo hệ thức Vi-et:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_3 + x_4 = -m \\ x_3 \cdot x_4 = n \end{cases}$$

Thay vào (*) ta được:

$$-p = -m(m^2 - 3n) \Rightarrow p = m^3 - 3mn$$

Câu 13: Đáp án D.

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\Delta' = (m-1)^2 - (m^2 - 3m + 4) > 0$$

Công Phá Toán - Lớp 10

$$\Leftrightarrow m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 3$$

Một nghiệm gấp đôi nghiệm kia khi:

$$(x_1 - 2x_2)(x_2 - 2x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x_1x_2 - 2(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9(m^2 - 3m + 4) - 8(m^2 - 2m + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 11m + 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 7 \end{cases}$$

Câu 14: Đáp án A.

Phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$$

$$P = x_1^2 + x_2^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2m^2 - 2m - 4$$

Xét $f(m) = 2m^2 - 2m - 4, m \geq 3$

Bảng biến thiên:

m	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$f(m)$		8	$+\infty$

$$\Rightarrow P \geq 8 \Rightarrow P_{\min} = 8 \text{ khi } m = 3$$

Câu 15: Đáp án B.

Phương trình bậc hai có các nghiệm $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}$ có dạng

$$(x - \sqrt{x_1})(x - \sqrt{x_2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})x + \sqrt{x_1 x_2} = 0$$

Đặt $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = B (B > 0)$ ta có:

$$B^2 = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2$$

$$= x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = -p + 2\sqrt{q}$$

$$\Rightarrow B = \sqrt{-p + 2\sqrt{q}}, \sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{q}$$

Vậy phương trình đã cho cần lập là:

$$x^2 - \sqrt{-p + 2\sqrt{q}}x + \sqrt{q} = 0$$

Câu 16: Đáp án D.

Phương trình đã cho có 3 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$$

có hai nghiệm dương phân biệt $\neq 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 5) > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m > 2$$

Câu 17: Đáp án C.

$$\text{Đặt } t = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \geq 4$$

Phương trình đã cho trở thành;

$$t^2 + (1-3m)t + 3m - 2 = 0 \quad (2)$$

với $|t| \geq 2$

Công Phá Toán - Lớp 10

Yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm m để phương trình (2) có nghiệm $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Ta có: $\Delta = 9(m-1)^2$ nên phương trình (2) có 2 nghiệm $\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 3m - 2 \end{cases}$.

Ta đi tìm m để phương trình (2) có 2 nghiệm $\in (-2; 2)$

$$\Leftrightarrow -2 < 3m - 2 < 2 \quad \text{vì } t_1 = 1 \in (-2; 2)$$

$$\Rightarrow 0 < m < \frac{4}{3} \quad \text{thỏa mãn yêu cầu tương đương với } \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq \frac{4}{3} \end{cases}.$$

Câu 18: Đáp án A.

Đặt $x^2 = t, t \geq 0$ ta có phương trình:

$$mt^2 - 2(m-3)t + 4m = 0 \quad (2)$$

Để phương trình đã cho có 3 nghiệm thì phương trình (2) phải có 2 nghiệm $t_1 = 0, t_2 > 0$.

Điều kiện cần: $t = 0 \Rightarrow m = 0$

Khi đó ta có phương trình:

$$6t = 0 \Rightarrow t = 0$$

Vậy không có giá trị nào của m để phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 19: Đáp án D.

Điều kiện: $x \geq 1$.

Phương trình

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$$

Đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} \quad (0 \leq t < 1)$

Bài toán trở thành tìm m để phương trình $-3t^2 + 2t = m$ có nghiệm thuộc $[0; 1)$.

Xét hàm số $f(t) = -3t^2 + 2t, t \in [0; 1)$.

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$f(t)$	0	$\frac{1}{3}$	-1

$$\Rightarrow -1 < m \leq \frac{1}{3}$$

Từ bảng biến thiên là giá trị cần tìm.

Câu 20: Đáp án B.

Điều kiện: $0 \leq x \leq 9$.

Bình phương 2 vế của phương trình ta được: $9 + 2\sqrt{-x^2 + 9x} = -x^2 + 9x + m$

Đặt $t = \sqrt{-x^2 + 9x}, 0 \leq t \leq \frac{9}{2}$ ta có phương trình: $-t^2 + 2t + 9 = m$.

Khảo sát $f(t) = -t^2 + 2t + 9$ trên $\left[0; \frac{9}{2}\right]$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0	1	$\frac{9}{2}$
$f(t)$	9	10	$-\frac{9}{4}$

$$\Rightarrow -\frac{9}{4} \leq m \leq 10$$

Từ bảng biến thiên

Câu 1: Đáp án B.

$$D = \begin{vmatrix} m & m+2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - m - 2 = (m+1)(m-2)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & m+2 \\ m & m \end{vmatrix} = -m^2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 2$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi $m \neq -1$ và $m \neq 2$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{-m^2}{m^2 - m - 2} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{m^2 - 2}{m^2 - m - 2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + y = \frac{-2}{m^2 - m - 2}$$

Câu 2: Đáp án A.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{cases}$$

Hệ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(2m^2 - 7m + 3) = 0 \\ -3m \neq 0 \\ m(4m - 3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 3: Đáp án C.

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} m+1 & -2 \\ m^2 & -1 \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1$$

$$= 2(m-1)\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m-1 & -2 \\ m^2+2m & -1 \end{vmatrix} = 2m^2 + 3m + 1$$

$$= 2(m+1)\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m+1 & m-1 \\ m^2 & m^2+2m \end{vmatrix} = 4m^2 - 2m$$

$$= 4m\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

+ Trường hợp 1: Hệ có vô số nghiệm

$$\Rightarrow D = D_x = D_y = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Q}$$

+ Trường hợp 2:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Q}$$

Lúc đó hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{m+1}{m-1} = 1 + \frac{2}{m-1} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{2m}{m-1} = 2 + \frac{2}{m-1} \end{cases}$$

$$x, y \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow m = -1 \text{ là ước nguyên của } 2 \Rightarrow \begin{cases} m-1 = -2 \\ m-1 = -1 \\ m-1 = 2 \\ m-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 0 \\ m = 3 \\ m = 2 \end{cases}$$

Câu 4: Đáp án D.

Từ (2) ta có: $y = 5 - 2x$ thế vào (1) ta có: $5 - 2x + x^2 = 4x$

Công Phá Toán - Lớp 10

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$

- Với $x = 1 \Rightarrow y = 3$

- Với $x = 5 \Rightarrow y = -5$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm là $(1; 3); (5; -5)$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 4$

Câu 5: Đáp án A.

Đặt $S = x + y, P = x \cdot y$

Ta có:

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = S^3 - 3PS$$

Ta có hệ:
$$\begin{cases} S^3 - 3PS + P^3 = 17 \\ S + P = 5 \end{cases}$$

Lại đặt: $S + P = S_1, S \cdot P = P_1$ ta có:

$$S^3 + P^3 = (S + P)^3 - 3SP(S + P) = S_1^3 - 3P_1S_1$$

Ta có hệ:
$$\begin{cases} S_1^3 - 3P_1S_1 - 3P_1 = 17 \\ S_1 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = 5 \\ P_1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} S = 2 \\ P = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Vì $S^2 \geq 4P$ nên chỉ có $\begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$

$$\text{thỏa mãn} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow x, y$ là nghiệm phương trình:

$$X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Nghiệm của hệ là

$$(1; 2); (2; 1) \Rightarrow x_1 + x_2 = 1 + 2 = 3$$

Câu 6: Đáp án C.

Ta có:

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = S^3 - 3PS$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} S^3 - 3P.S = 2 \\ S.P = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^3 = 8 \\ S.P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases} \Rightarrow S + P = 3$$

Câu 7: Đáp án D.

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \sqrt{x-4} \\ v = \sqrt{y-1}; u, v \geq 0 \end{cases}$$

Khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ u^2 + v^2 = 3m - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 4 \\ u.v = \frac{21-3m}{2} \end{cases}$$

Suy ra u, v là nghiệm không âm của phương trình:

$$X^2 - 4X + \frac{21-3m}{2} = 0 \quad (*)$$

Theo đề bài hệ đã cho có nghiệm

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{13}{3} \\ m \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{13}{3} \leq m \leq 7$$

Câu 8: Đáp án B.

Điều kiện: $x \geq 0; y \geq 0$. Khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3 = Q \end{cases}$$

Đặt: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = S, \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = P$

$$\Rightarrow S \geq 0, P \geq 0 \quad (S^2 \geq 4P)$$

Ta có hệ:
$$\begin{cases} S = 1 \\ S^2 - 3PS = Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = \frac{1-Q}{3} \end{cases}$$

(thỏa mãn ĐK)

$$\begin{cases} S^2 \geq 4P \\ P \geq 0 \\ S \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 4 \cdot \frac{1-Q}{3} \\ \frac{1-Q}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 4 - 4Q \\ Q \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4Q \geq 1 \\ Q \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q \geq \frac{1}{4} \\ Q \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_{\max} = 1, Q_{\min} = \frac{1}{4}$$

Câu 9: Đáp án C.

Trừ vế theo vế của hai phương trình, ta được:

$$x^2 - y^2 - 3x + 3y = 2y - 2x$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

- TH1: $x = y$ ta có hệ:

$$\begin{cases} x^2 - 3x = 2y \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \\ x = y \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm là $(0; 0), (5; 5)$.

- TH2: $x + y - 1 = 0$ ta có hệ:

$$\begin{cases} x^2 - 3x = 2y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 2(1 - x) \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm.

Câu 10: Đáp án D.

Trừ vế theo vế hai phương trình ta có:

$$x^3 - y^3 = x - y$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2 + xy - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \end{cases}$$

- TH1: Với $x = y$ thay vào (1) ta có:

$$x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm là

Công Phá Toán - Lớp 10

$$(0;0), (\sqrt{3};\sqrt{3}), (-\sqrt{3};-\sqrt{3})$$

- TH2: $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$. Kết hợp với phương trình mà ta cộng về với về của 2 phương trình đã cho ta được:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \\ x^3 + y^3 = 3(x+y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - xy - 1 = 0 \\ (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 3(x+y) = 0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x+y = S \\ xy = P \end{cases}$ ta có hệ:

$$\begin{cases} S^2 - P - 1 = 0 \\ S^3 - 3PS - 3S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - P - 1 = 0 \\ S(S^2 - 3P - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 0 \\ S^2 - P - 1 = 0 \\ S^2 - 3P - 3 = 0 \\ S^2 - P - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 0 \\ P = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x, y$ là nghiệm phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0$$

hay $X^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow X = \pm 1$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm là $(1;-1), (-1;1)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 5 nghiệm $(0;0), (\sqrt{3};\sqrt{3}), (-\sqrt{3};-\sqrt{3}), (1;-1), (-1;1)$.

Câu 11: Đáp án A.

Nhận xét: Vế trái của hai phương trình đều là bậc hai; vế phải là hằng số nên ta có thể nhân chéo hai phương trình đưa về phương trình đẳng cấp.

Ta có: $1(y^2 - 3xy) = 4(x^2 - 4xy + y^2)$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 13xy + 3y^2 = 0$$

+ Với $y = 0 \Rightarrow x = 0$ không là nghiệm của hệ

+ Với $y \neq 0$ chia hai vế cho y^2 ta được: $4\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 13\left(\frac{x}{y}\right) + 3 = 0$

Đặt $\frac{x}{y} = t$ ta có phương trình:

$$4t^2 - 13t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{1}{4} \end{cases}$$

- Với $t = 3 \Rightarrow \frac{x}{y} = 3 \Leftrightarrow x = 3y$ thay vào (1) ta được $y^2 = \frac{-1}{2}$ vô nghiệm.

- Với $t = \frac{1}{4}$ ta có: $\frac{x}{y} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = 4x$ thay vào (1)

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 0$$

Câu 12: Đáp án B.

Đặt $S = x + y, P = x.y$ ($S^2 \geq 4P$)

Hệ phương trình đã cho có dạng

$$\begin{cases} S = 2a - 1 \\ S^2 - 2P = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$$

Công Phá Toán - Lớp 10

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 2a - 1 \\ P = \frac{3}{2}a^2 - 3a + 2 \end{cases}$$

Để hệ có nghiệm thì $S^2 \geq 4P$

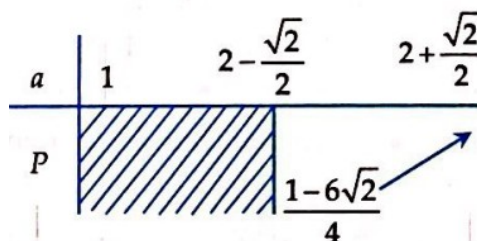
$$\Rightarrow (2a - 1)^2 - 4\left(\frac{3}{2}a^2 - 3a + 2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2a^2 + 8a - 7 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (*)$$

Điều kiện (*) là điều kiện có nghiệm của hệ phương trình.

Xét: $P = xy = \frac{3}{2}a^2 - 3a + 2$ ta có bảng biến thiên trên đoạn $\left[2 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ là:



Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$a = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Câu 13: Đáp án B.

Hệ đã cho biến đổi thành:

$$\begin{cases} (x^2 + y) + xy(x^2 + y) + xy = \frac{-5}{4} \\ (x^2 + y)^2 + xy = \frac{-5}{4} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} S = x^2 + y \\ P = xy \end{cases},$$

hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} S + PS + P = \frac{-5}{4} \\ S^2 + P = \frac{-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{-5}{4} - S^2 \\ S^3 + S^2 + \frac{1}{4}S = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 0 \\ P = \frac{-5}{4} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} S = \frac{-1}{2} \\ P = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$\text{- TH1: Với } \begin{cases} S = 0 \\ P = \frac{-5}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ xy = \frac{-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \\ y = -\sqrt[3]{\frac{25}{16}} \end{cases}$$

$$\text{- TH2: Với } \begin{cases} S = \frac{-1}{2} \\ P = \frac{-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = \frac{-1}{2} \\ xy = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + \frac{1}{2} \\ 2x^3 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\frac{25}{16}} \right); \left(1; \frac{3}{2} \right)$$

$$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 = \frac{9}{4}.$$

Công Phá Toán - Lớp 10

Câu 14: Đáp án C.

Dùng máy tính cầm tay nhập biểu thức:

$$\sqrt{X^2 - 2X - Y + 4} - \sqrt{4X + Y + 1} + X - 1$$

Ấn: SHIFT SOLV gán $Y = 100 =$

Máy luận: 11,0489 ... tức là (11,0489 ..., 100) là 1 cặp nghiệm của phương trình.

- Nhập tiếp: $\sqrt{4X + Y + 1}$ ấn "=" ta được kết quả là

$$12,0489... = 11,0489... + 1 = x + 1$$

- Nhập tiếp: $\sqrt{X^2 - 2X - Y + 4}$ ấn bằng máy hiện 2 ta hiểu:

$$\sqrt{X^2 - 2X - Y + 4} = 2 \text{ tại}$$

$$x = 11,0489; y = 100$$

Phương trình (1) của hệ phương trình với

$$\left(\sqrt{x^2 - 2x - y + 4} - 2 \right)$$

$$- \left[\sqrt{4x + y + 1} - (x + 1) \right] = 0$$

Nhân liên hợp ta có:

$$\frac{x^2 - 2x - y}{\sqrt{x^2 - 2x - y + 4} + 2} + \frac{x^2 + 2x + 1 - 4x - y - 1}{(x + 1) + \sqrt{4x + y + 1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x - y) \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - y + 4} + 2} + \frac{1}{x + 1 + \sqrt{4x + y + 1}} \right] = 0$$

Vì trong ngoặc vuông lớn hơn 0 nên $\Rightarrow y = x^2 - 2x$ thế vào phương trình (2) của hệ ta được:

$$4x^2 - 24x + 35 = 5\sqrt{3x-2} + 5\sqrt{x+3}$$

Đến đây dùng máy tính nhẩm được $x = 1$ hoặc $x = 6$.

Vậy $x_1 + x_2 = 7$.

V. ĐỀ KIỂM TRA CH

Câu 1: Đáp án A.

Thay $x = 1; y = 2$ vào phương trình của 4 đáp án ta thấy đáp án A.

Câu 2: Đáp án D.

Câu 3: Đáp án A.

Nhận dạng hệ 3 phương trình bậc nhất 3 ẩn theo công thức:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \text{ trong đó mỗi phương trình là 1 phương trình bậc nhất 3 ẩn}$$

với các hệ số không đồng thời bằng 0.

Câu 4: Đáp án A.

Câu 5: Đáp án A.

Phân tích phương án nhiều:

B. Sai do tính nhầm $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

C. Sai do tính nhầm

$$x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$$

D. Sai do không nhìn ra điều kiện.

Câu 6: Đáp án B.

$$x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{6} = 0 \text{ có}$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = \sqrt{2} + \sqrt{3} > 0 \\ P = \sqrt{6} > 0 \end{cases}$$

Công Phá Toán - Lớp 10

$\Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm dương

Câu 7: Đáp án A.

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 15-3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 5$$

Câu 8: Đáp án D.

ĐKXĐ: $x \geq -2$. Ta có:

$$\sqrt{x+2} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x+2 = 4x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$$

$$x+2 = 4x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

Do đó, $\sqrt{x+2} = 2x$ và $x+2 = 4x^2$ không phải là cặp phương trình tương đương.

Câu 9: Đáp án C.

$$+) \frac{2x+1}{\sqrt{x-3}} = \frac{x+2}{\sqrt{x-3}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ 2x+1 = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) vô nghiệm.

$$+) (x-3)^2 = -\frac{x}{\sqrt{x-2}}$$

$$\text{ĐKXĐ: } x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$\Rightarrow \frac{-x}{\sqrt{x-2}} < 0 \quad \forall x > 2$$

mà $(x-3)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm.

+) $\sqrt{x+1} + x = 3 + \sqrt{x+1}$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

$\Rightarrow$ Phương trình (3) có nghiệm

+) $\frac{3x+1}{\sqrt{-x+2}} = \sqrt{x-3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+2 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình (4) vô nghiệm.

Câu 10: Đáp án A.

$$|2x^2 - 3x - 2| = |x + 2|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 = x + 2 \\ 2x^2 - 3x - 2 = -x - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x - 4 = 0 \\ 2x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Tổng tất cả các nghiệm của phương trình là 3.

Câu 11: Đáp án B.

Phương trình đã cho có 2 hai nghiệm là 1 và 2.

Suy ra $\frac{x_1}{x_2 + 1}$ và $\frac{x_2}{x_1 + 1}$ là một trong hai giá trị $\frac{1}{3}$ và 1.

Hai số có tổng bằng $\frac{4}{3}$ và tích bằng $\frac{1}{3}$

Công Phá Toán - Lớp 10

Do đó $\frac{x_1}{x_2 + 1}$ và $\frac{x_2}{x_2 + 1}$ là nghiệm của phương trình

$$X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 3X^2 - 4X + 1 = 0$$

Câu 12: Đáp án B.

Điều kiện: $x \neq y$

Hệ phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = -2 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Câu 13: Đáp án A.

Gọi x là số xe chở được 4 khách và y là số xe chở được 7 khách (x, y nguyên và $0 \leq x, y \leq 85$)

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 85 \\ 4x + 7y = 445 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 35 \end{cases}$$

Câu 14: Đáp án A.

ĐKXD: $x \geq \frac{9}{10}$

$$\sqrt{10x - 9} = 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 10x - 9 = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 14x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

$$\text{Vậy } A = 1^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}.$$

Câu 15: Đáp án A.

$$|x-3| = 5-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 5-2x \\ x-3 = -5+2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ x = 2 \end{cases}$$

Thử lại vào phương trình ta thấy $x=2$ thỏa mãn nên $x=2$ là nghiệm.

Câu 16: Đáp án B.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 - 3x + 1}, t \geq 0.$$

$$\Rightarrow t^2 = x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow -x^2 + 3x = -t^2 + 1$$

Khi đó, phương trình ban đầu trở thành $-t^2 + t + 1 = 0$.

Câu 17: Đáp án D.

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -4 \text{ (vn)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } S = 0.$$

Câu 18: Đáp án B.

$$\text{ĐKXD: } x \neq 1.$$

Với điều kiện trên phương trình tương đương

$$x^2 - x + 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 2.$$

Đối chiếu điều kiện ta được phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Câu 19: Đáp án C.

$$\text{Ta có } 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Do đó, tập nghiệm của phương trình đã cho là $S_0 = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$.

Xét các đáp án:

* **Đáp án A.** Ta có

$$2x - \frac{x}{1-x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \neq 0 \\ 2x(1-x) - x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Do đó, tập nghiệm của phương trình là $S_1 = \left\{0; \frac{1}{2}\right\} \supset S_0$.

* **Đáp án B.** Ta có

$$4x^3 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Do đó, tập nghiệm của phương trình là $S_2 = \left\{-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right\} \supset S_0$.

* **Đáp án C.** Ta có

$$(2x^2 - x)^2 + (x - 5)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x = 0 \\ x = 5 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm}).$$

Do đó, tập nghiệm của phương trình là $S_3 = \emptyset \supset S_0$.

* **Đáp án D.** Ta có

$$2x^3 + x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}.$$

Do đó, tập nghiệm của phương trình là $S_2 = \left\{-1; 0; \frac{1}{2}\right\} \supset S_0$.

Câu 20: Đáp án D.

Từ hệ phương trình đã cho ta suy ra

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\text{Hệ phương trình } \begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \\ 2mx + 5y - m = 0 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất khi $(1; -2)$ là nghiệm của phương trình $2mx + 5y - m = 0$ tức là:

$$2m \cdot 1 + 5 \cdot (-2) - m = 0 \Leftrightarrow m = 10$$

Câu 21: Đáp án C.

$$(m^2 - 4m + 3)x = m^2 - 3m + 2$$

Nếu $m = 1 \Leftrightarrow 0x = 0 \Rightarrow$ Phương trình có vô số nghiệm

Nếu $m = 3 \Leftrightarrow 0x = 2 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm

Nếu $m \neq 3$ và $m \neq 1 \Leftrightarrow x = \frac{m-2}{m-3} \Rightarrow$ Phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

Câu 22: Đáp án A.

$$(m-2)^2 x - 4 = 4x - m$$

$$\Leftrightarrow m(m-4)x = 4-m \quad (1)$$

$$\text{Với } m=0: (1) \Leftrightarrow 0x=4:$$

Phương trình vô nghiệm

$$\text{Với } m=4: (1) \Leftrightarrow 0x=0: \text{ Phương trình nghiệm đúng với mọi } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Với } m \neq 0 \text{ và } m \neq 4:$$

$$(1) \Leftrightarrow x = \frac{-1}{m}, \frac{-1}{m} < 0 \Leftrightarrow m > 0$$

Do đó phương trình có nghiệm âm khi và chỉ khi $m > 0$.

Câu 23: Đáp án A.

Hệ phương trình có vô số nghiệm

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{m}{1} = \frac{1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} = \frac{1}{1} \\ \frac{m}{1} = \frac{1}{1} \end{cases} \Leftrightarrow m=1$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m} \neq \frac{m}{1} \Leftrightarrow m^2 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$$

$$\text{Với } m=-1 \text{ ta có hệ } \begin{cases} x-y=1 \\ -x+y=1 \end{cases} \text{ hệ vô nghiệm.}$$

Câu 24: Đáp án D.

$$x^7 - 14x^5 + 49x^3 - 36x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36) = 0$$

$$\Leftrightarrow x[(x^6 - x^4) - 13(x^4 - x^2) + 36(x^2 - 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow x[x^4(x^2 - 1) - 13x^2(x^2 - 1) + 36(x^2 - 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 1)(x^4 - 13x^2 + 36) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1) \times [x^2(x^2 - 4) - 9(x^2 - 4)] = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3) = 0$$

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm số là: $x = 0$; $x = \pm 1$; $x = \pm 2$; $x = \pm 3$.

Câu 25: Đáp án D.

Gọi A, B, C lần lượt là số học sinh của 3 nhóm A, B, C .

$$(0 < A, B, C < 36; A, B, C \in \mathbb{N})$$

$$\text{Theo đề ta có } \begin{cases} A + B + C = 36 \\ B - 2 = A \\ A + C = 2B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 36 \\ B - A = 2 \\ A - 2B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 10 \\ B = 12 \\ C = 14 \end{cases}$$

Câu 26: Đáp án D.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + 5x + 28}, \text{ (với } t > 0 \text{)}$$

$$\text{Ta có: } t^2 - 5t - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+3)(t-8) = 0 \Rightarrow t = 8$$

$$\text{Với } t = 8 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 5x + 28} = 8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -9 \end{cases} \Rightarrow T = 4^2 + (-9)^2 = 97$$

Câu 27: Đáp án C.

$$\text{ĐK} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 + x - 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \end{cases} \quad (*)$$

Với điều kiện (*) ta đặt $y = \frac{x^2 + x - 5}{x} \Leftrightarrow x^2 - (y-1)x - 5 = 0 \quad (1)$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm thỏa mãn (*)

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y \neq 0 \quad (**)$$

Với điều kiện (**), phương trình đã cho trở thành: $y + \frac{3}{y} + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow y^2 + 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Với $y = -1$, ta có:

$$(1) \quad \Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{6} \\ x = -1 + \sqrt{6} \end{cases}$$

Với $y = -3$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt:

$$x = -1 - \sqrt{6}, x = -1 + \sqrt{6}, x = 1, x = -5$$

Câu 28: Đáp án B.

$$\Delta = (2m)^2 - 4.(m^2 - 4m + 1) = 16m - 4$$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$$

Theo bài ra $\Rightarrow m \in \{-2; -1; 0\}$

Câu 29: Đáp án A.

$x^2 + 2mx + m^2 + m + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt cùng dương khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - (m^2 + m + 1) > 0 \\ -2m > 0 \\ m^2 + m + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m - 1 > 0 \\ m < 0 \\ m^2 + m + 1 > 0 \quad \forall m \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1$$

Câu 30: Đáp án B.

$$\Delta = 4m + 1; \Delta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{4}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5$$

$$\Leftrightarrow (2m + 3)^2 - 2(m^2 + 2m + 2) = 5$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 8m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0(n) \\ m = -4(l) \end{cases}$$

Câu 31: Đáp án A.

Gọi vận tốc trung bình của Thảo là x (km/h), $x > 0$

Gọi vận tốc trung bình của Châu là $x + 3$ (km/h)

Công Phá Toán - Lớp 10

Thời gian Thảo đi từ A đến B là $\frac{30}{x}$ (h)

Thời gian Châu đi từ A đến B là $\frac{30}{x+3}$ (h)

Ta có phương trình: $\frac{30}{x} - \frac{30}{x+3} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 180 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12(n) \\ x = -15(l) \end{cases}$$

Vậy Vận tốc trung bình của Châu là 15km/h, của Thảo là 12km/h.

Câu 32: Đáp án C.

Gọi A, B, C lần lượt là số đo 3 góc của tam giác ($0 < A, B, C < 180$), đơn vị độ.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $A = B$

Theo đề ta có

$$\begin{cases} A + B + C = 180 \\ A = B \\ C = 2A \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} A + B + C = 180 \\ A = B \\ A = 2C \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B + C = 180 \\ A - B = 0 \\ 2A - C = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} A + B + C = 180 \\ A - B = 0 \\ 2C - A = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 45 \\ B = 45 \\ C = 90 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} A = 72 \\ B = 72 \\ C = 36 \end{cases}$$

Câu 33: Đáp án B.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$)

(1) thành $at^2 + bt + c = 0$ (2)

Phương trình (1) vô nghiệm

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) vô nghiệm hoặc phương trình (2) có 2 nghiệm cùng âm

$$\Leftrightarrow \Delta < 0 \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

Câu 34: Đáp án C.

$$|2x-1| - |x+3| = 4 \Leftrightarrow |2x-1| = 4 + |x+3|$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 = 16 + 8|x+3| + (x+3)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 16 + 8|x+3| + x^2 + 6x + 9$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 10x - 24 = 8|x+3|$$

+ Nếu $x \geq -3$ thì phương trình trở thành $3x^2 - 10x - 24 = 8(x+3)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 18x - 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 8 \end{cases}$$

Kết hợp với $x \geq -3$ có nghiệm $\begin{cases} x = -2 \\ x = 8 \end{cases}$

+ Nếu $x < -3$ thì phương trình trở thành $3x^2 - 10x - 24 = -8(x+3)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Kết hợp với $x < -3$ ta có phương trình vô nghiệm.

Kết luận phương trình có nghiệm

$$x = -2; x = 8$$

Câu 35: Đáp án A.

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} 1+x \neq 0 \\ 1-x \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Với điều kiện trên ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{3}{2x} = 0 \\ & 1 - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1-x}{x(1+x)} + \frac{1+x}{x(1-x)} + \frac{3}{2x} = 0 \\ & \Rightarrow 5(1-x^2) + 2(1-x)^2 + 2(1+x)^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = -3; x = 3$

Câu 36: Đáp án D.

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 + mx + 2}{x^2 - 1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ mx = -3 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq 0 \\ -\frac{3}{m} = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 37: Đáp án D.

Điều kiện: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

(1) $\Rightarrow x^2 - (2m+3)x + 6m = 0$ (2), phương trình luôn có nghiệm là $x = 3$ và $x = 2m$, để phương trình (1) có duy nhất 1 nghiệm thì $2m \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 1$
 $\Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1\}$

Câu 38: Đáp án D.

$$\Delta = (4m-3)^2 - 4.2.(1-2m) = (4m-1)^2$$

$$2(x^2 + 2x)^2 - (4m - 3)(x^2 + 2x) + 1 - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = \frac{1}{2} & (1) \\ x^2 + 2x = 2m - 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2} \notin [-3; 0] \\ x = \frac{-2 - \sqrt{6}}{2} \in [-3; 0] \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 2m. \text{ Phương trình đã cho có 3 nghiệm thuộc đoạn } [-3; 0] \text{ khi}$$

phương trình (2) có hai nghiệm thuộc đoạn $[-3; 0]$ và khác $\frac{-2 - \sqrt{6}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m > 0 \\ -3 \leq -1 + \sqrt{2m} \leq 0 \\ -3 \leq -1 - \sqrt{2m} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \leq \frac{1}{2} \\ m \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1}{2}.$$

Không có giá trị nguyên nào của m thỏa mãn.

Câu 39: Đáp án C.

$$\Delta' = (m - 1)^2 - (2m^2 - 3m + 1) = -m^2 + m$$

$$\text{Để phương trình có hai nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1. (*)$$

Theo định lý Viet, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m - 1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m^2 - 3m + 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } P = |x_1 + x_2 + x_1 x_2|$$

$$= \left| 2(m-1) + 2m^2 - 3m + 1 \right|$$

$$= 2 \left| m^2 - \frac{m}{2} - \frac{1}{2} \right| = 2 \left| \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \right|$$

$$\text{Vi} \quad 0 \leq m \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq m - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \leq 0$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{16} \leq \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left| \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \right| \leq \frac{9}{16}$$

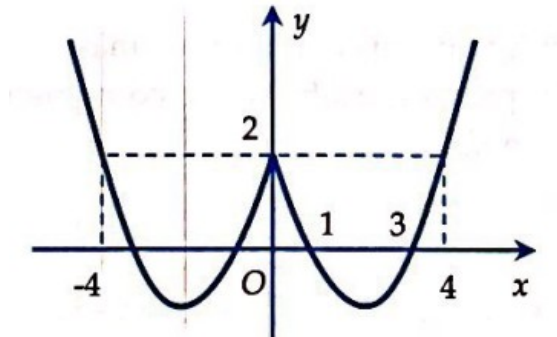
$$\Rightarrow P = 2 \left| \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \right| = 2 \left[\frac{9}{16} - \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{9}{8} - 2 \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{9}{8}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{1}{4}$: thỏa mãn (*).

Câu 40: Đáp án D.

Đồ thị $y = f(|x|)$ như hình vẽ:



$$\Rightarrow m \geq f(|x|) \quad \forall x \in [-4; 4]$$

$$\Leftrightarrow m \geq 2 \Rightarrow m \in \{2; 3; 4; 5\}$$

Câu 41: Đáp án B.

$$D = \begin{vmatrix} 2m-3 & -m \\ 5 & -(2m+3) \end{vmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3m-2 & -m \\ 5 & -(2m+3) \end{vmatrix} = -6(m^2 - 1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2m-3 & 3m-2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -5(m+1)$$

$$-(m+1)(4m-9) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq \frac{9}{4} \end{cases}$$

Với

$$\text{hệ có nghiệm duy nhất} \quad \begin{cases} x = \frac{6(m-1)}{4m-9} \\ y = \frac{5}{4m-9} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } 2x + 3y = -27$$

$$\Leftrightarrow \frac{12(m-1)}{4m-9} + \frac{15}{4m-9} = -27$$

$$\Leftrightarrow 4(m-1) + 5 = -9(4m-9) \Leftrightarrow m = 2$$

Câu 42: Đáp án A.

Công Phá Toán - Lớp 10

Vì c, d là hai nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$ suy ra $c + d = -a$.

Vì a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 + cx + d = 0$ suy ra $a + b = -c$.

Khi đó, ta có hệ

$$\begin{cases} c + d = -a \\ a + b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = -d \\ a + c = -b \end{cases} \Leftrightarrow b = d$$

Lại có
$$\begin{cases} c^2 + ac + b = 0 \\ a^2 + ca + d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c^2 - a^2 + b - d = 0 \Leftrightarrow a^2 = c^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ a = -c \end{cases}$$

- Với $a = -c$ thì từ $c + d = -a \Rightarrow d = 0$: mâu thuẫn giả thiết.

- Với $a = c$ thì từ $c + d = -a \Rightarrow d = -2c$ và từ $a + b = -c \Rightarrow b = -2c$.

Ta có: $c^2 + ac + b = 0$

$$\Rightarrow 2c^2 - 2c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 (l) \\ c = 1 (t/m) \end{cases}$$

Khi đó $S = a + b + c + d$

$$= c - 2c + c - 2c = -2c = -2.1 = -2$$

Câu 43: Đáp án B.

Ta có $|mx + 2x - 1| = |x - 1|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx + 2x - 1 = x - 1 \\ mx + 2x - 1 = -(x - 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)x = 0 & (1) \\ (m+3)x = 2 & (2) \end{cases}$$

Xét (1), ta có:

+ $m = -1$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

+ $m \neq -1$ thì có nghiệm $x = 0$.

Xét (2), ta có:

+ $m = -3$ thì phương trình vô nghiệm.

+ $m \neq -3$ thì phương trình có nghiệm $x = \frac{2}{m+3}$.

Vì $\frac{2}{m+3} \neq 0, \forall m \neq -3$ nên phương trình có hai nghiệm, phân biệt là $x = 0$,

$x = \frac{2}{m+3}$ khi $m \neq -1$ và $m \neq -3$.

Mà $m \in [-5; 5]$ và $m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow m \in \{-5; -4; -2; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ có 9 giá trị m .

Câu 44: Đáp án D.

ĐKXD: $x \neq 1$

Đặt $\frac{x^2}{x-1} = t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - tx + t = 0 \quad (*) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - t + t \neq 0 \\ \Delta_t = t^2 - 4t \end{cases}$$

Với mỗi t thỏa mãn $\Delta_t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < 0 \\ t > 4 \end{cases}$ thì (*) có hai nghiệm x phân biệt.

Mặt khác phương trình đã cho trở thành: $t^2 + 2t + m = 0 \Leftrightarrow (t+1)^2 = 1-m \quad (**)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ \begin{cases} t = -1 - \sqrt{1-m} < 0 \\ t = -1 + \sqrt{1-m} \end{cases} \end{cases} \quad \text{k}$$

Công Phá Toán - Lớp 10

Phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm khi và chỉ khi (**) có hai nghiệm t phân biệt thỏa điều kiện

$$\Delta_t > 0 \text{ hay } \begin{cases} m < 1 \\ -1 + \sqrt{1-m} < 0 \\ -1 + \sqrt{1-m} > 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 1-m < 1 \\ 1-m > 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 1 \\ m < -24 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Có vô số giá trị m

Câu 45: Đáp án C.

ĐK: $x \geq 0$

$$\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+7} = \sqrt{x} + 1$$

$$\Leftrightarrow x+7 = \sqrt{x^3} + 3x + 3\sqrt{x} + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3} + 2x + 3\sqrt{x} - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^3 - 1 + 2(\sqrt{x})^2 - 2 + 3\sqrt{x} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1) \left[(\sqrt{x})^2 + 3\sqrt{x} + 6 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1) \left[\left(\sqrt{x} + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{15}{4} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (t/m)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 1$

Câu 46: Đáp án D.

$$+ \text{ Đặt } \begin{cases} u = \sqrt[3]{12-x} \\ v = \sqrt[3]{4+x} \end{cases} \text{ . Khi đó ta có:}$$

$$\begin{cases} u+v=2 \\ u^3+v^3=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2 \\ u^2-uv+v^2=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2 \\ (u+v)^2-3uv=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2 \\ uv=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$+ \text{ Sử dụng định lí Viet đảo hoặc phương pháp thế ta được: } \begin{cases} u = \frac{3+\sqrt{21}}{3} \\ v = \frac{3-\sqrt{21}}{3} \end{cases}$$

+ Vì vai trò của u, v như nhau nên ta chỉ cần xét $u = \frac{3+\sqrt{21}}{3}$ ta có:

$$12-x = \frac{72+16\sqrt{21}}{9} \Rightarrow x = \frac{36-16\sqrt{21}}{9}$$

Câu 47: Đáp án B.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} (x-3)^2(5-3x) \geq 0 \\ 3x-5 \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Ta thấy $x=3$ thỏa mãn điều kiện (*)

Nếu $x \neq 3$ thì

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 5-3x \geq 0 \\ 3x-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{3} \\ x \geq \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

Do đó điều kiện xác định của phương trình là $x=3$ hoặc $x = \frac{5}{3}$.

Thay $x=3$ và $x = \frac{5}{3}$ vào phương trình thấy chỉ có $x=3$ thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Câu 48: Đáp án B.

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} (3x+y)^2 + (x-3y)^2 + (3x+y) + (x-3y) = 0 \\ 2(3x+y)(x-3y) + (3x+y) + (x-3y) = 0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} 3x+y=a \\ x-3y=b \end{cases}$, hệ phương trình đã cho trở thành.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + a + b = 0 \\ 2ab + (a+b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2ab = 0 \\ 2ab + (a+b) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 2a^2 + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ \begin{cases} a=0 \\ a=-1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=0 \\ a=b=-1 \end{cases}$$

Với $a=b=0$ ta có $\begin{cases} 3x+y=0 \\ x-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Với $a=b=-1$ ta có

$$\begin{cases} 3x+y=-1 \\ x-3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{5} \\ y=\frac{1}{5} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0)$ và $\left(-\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Câu 49: Đáp án A.

Điều kiện: $x, y \neq 0$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + x^2y = 3 \\ 2y^3 + y^2x = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(x^2 - y^3) + xy(x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(2x^2 + 3xy + 2y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

$$\begin{aligned} & (\text{Do } 2x^2 + 3xy + 2y^2 \\ & = 2\left(x + \frac{3}{4}y\right)^2 + \frac{7}{8}y^2 > 0 \quad \forall x, y \neq 0) \end{aligned}$$

Thay vào hệ ta được:

$$3x^3 = 3 \Leftrightarrow x = 1 = y.$$

Vậy hệ có nghiệm: $x = y = 1$.

Câu 50: Đáp án B.

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của hệ nên ta biến đổi hệ trở thành

$$\begin{cases} 2y \frac{1}{x^3} \left(\frac{1}{x^3} + 2y \right) = 6 \\ \frac{1}{x^6} + (2y)^2 = 5 \end{cases}$$

Đặt $a = 2y, b = \frac{1}{x^3}, ab \neq 0$ ta có hệ:

$$\begin{cases} ab(a+b) = 6 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = \frac{6}{ab} \\ (a+b)^2 - 2ab = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = \frac{6}{ab} \\ 2a^3b^3 + 5a^2b^2 - 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 2 \\ a+b = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$* \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

$$* \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} .$$

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm:

$$(x, y) = (1, 1), \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{2} \right)$$