CHUYÊN ĐỀ 15_TOÁN THỰC TẾ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ-LOGA RIT CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Phương trình mũ cơ bản

Phương trình dạng $a^x = b$, trong đó a và b là những số cho trước, $a > 0, a \neq 1$, được gọi là ***phương trình mũ cơ bản***

Nếu $b > 0$ thì phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

2. Phương trình logarit cơ bản

Phương trình dạng $\log_a x = b$, trong đó a, b là những số cho trước, $a > 0$, $a \neq 1$, được gọi là ***phương trình lôgarit cơ bản***

Phương trình $\log_a x = b \ (a > 0, a \neq 1)$ luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

3. Bất phương trình mũ cơ bản

Bất phương trình mũ cơ bản là bất phương trình có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$), với a, b là những số cho trước, $a > 0$, $a \neq 1$.

Xét bất phương trình: $a^x > b$ (*)

- Nếu $b \leq 0$ thì mọi $x \in \mathbb{R}$ đều là nghiệm của $(*)$.
- Nếu $b > 0$ thì:
  - Với $a > 1$, nghiệm của $(*)$ là $x > \log_a b$;
  - Với $0 < a < 1$, nghiệm của $(*)$ là $x < \log_a b$.

Tương tự như trên, ta nhận được kết quả về nghiệm của mỗi bất phương trình $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$

4. Bất phương trình lôgarit cơ bản

Bất phương trình lôgarit cơ bản là bất phương trình có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b, \log_a x < b, \log_a x \leq b$), với a, b là các số cho trước, $a > 0, a \neq 1$.

Xét bất phương trình $\log_a x > b$ (**).

Điều kiện xác định của bất phương trình là $x > 0$.

- Với $a > 1$, nghiệm của (**) là $x > a^b$.
- Với $0 < a < 1$, nghiệm của (**) là $0 < x < a^b$.

Tương tự như trên, ta nhận được kết quả về nghiệm của mỗi bất phương trình $\log_a x \geq b, \log_a x < b, \log_a x \leq b$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất $x\%$ / năm $(x>0)$. Sau 3 năm, người đó rút được cả gốc và lãi là 119,1016 triệu đồng. Tìm x, biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt quá trình gửi.

Lời giải

$$100.\left(1+\frac{x}{100}\right)^3 = 119,1016 \Leftrightarrow 1+\frac{x}{100} = 1,06 \Leftrightarrow \frac{x}{100} = 0,06 \Leftrightarrow x = 6$$

Ta có công thức: .

Câu 2: Sử dụng công thức tính mức cường độ âm L ở Câu 14, hãy tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được, biết rằng tai người có thể nghe được âm với cường độ âm từ $10^{-12}\,\mathrm{W}/m^2$ đến $10W/m^2$.

Lời giải

$$L = 10\log\frac{I}{10^{-12}} \Leftrightarrow 130 = 10\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$\Leftrightarrow \log\frac{I}{10^{-12}} = 13 \Leftrightarrow \log\frac{I}{10^{-12}} = \log 1.10^{13}$$

$$\Leftrightarrow \frac{I}{10^{-12}} = 1.10^{13}$$

$$\Leftrightarrow I = 10$$

Câu 3: Trong một trận động đất, năng lượng giải tỏa E (đơn vị: Jun, kí hiệu J) tại tâm địa chấn ở M độ Richter được xác định xấp xỉ bởi công thức: $\log E \approx 11,4+1,5M$.
(Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021).
a) Tính xấp xỉ năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter.
b) Năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn ở 8 độ Richter gấp khoảng bao nhiêu lần năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter?

Lời giải

a) Tính xấp xỉ năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter:

Thay $M=5$ vào công thức, ta có: $\log E \approx 11,4+1,5.5 \approx 18,9 \Rightarrow E \approx 10^{18,9}$

b) Tính tỷ lệ năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 8 độ Richter so với tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter:

$$\log E \approx 11,4+1,5.8 \approx 23,4 \Rightarrow E \approx 10^{23,4} \Rightarrow$$

Gấp khoảng 31623 lần.

Câu 4: Trong cây cối có chất phóng xạ ${}^{14}_{6}C$. Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được phóng xạ của nó bằng 86% độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại. Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó. Biết chu kì bán rã của ${}^{14}_{6}C$ là $T = 5730$ năm, độ phóng xạ của chất phóng xạ tại thời điểm t được cho bởi công thức $H = H_0 e^{-\lambda t}$ với H_0 là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t=0$); $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ (Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021).

Lời giải

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{5,730} \approx 0.12$$

Từ đó, ta có thể tính được hằng số phóng xạ:

Giờ ta cần tìm thời gian t mà đã trôi qua từ thời điểm mẫu gỗ cổ được sinh ra đến thời điểm hiện tại. Để tìm thời gian này, ta sử dụng tỷ lệ phóng xạ giữa mẫu gỗ cổ và mẫu gỗ tươi cùng loại:

$$\frac{H}{H_0} = 0.86 = e^{-\lambda t} \Rightarrow t = \frac{\ln 0.86}{-\lambda} \approx 3,078 \text{ năm}$$

Vậy độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó là khoảng 3,078 năm.

Câu 5: Chất phóng xạ polonium-210 có chu kì bán rã là 138 ngày. Điều này có nghĩa là cứ sau 138 ngày, lượng polonium còn lại trong một mẫu chỉ bằng một nửa lượng ban đầu. Một mẫu $100g$ có khối lượng polonium-210 còn lại sau t ngày được tính theo công thức $M(t) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}(g)$

Câu 6: (nguồn://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Poloniumsection=Atiomc-Mass-Half-Life-anh-Decay)

a) Khối lượng polonium-210 còn lại bao nhiêu sau 2 năm?

b) Sau bao lâu thì còn lại $40g$ polonium-210.

Lời giải

a) Khối lượng polonium-210 còn lại sau 2 năm (730 ngày) là:

$$M(2) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{730}{138}} = 2,56(g)$$

b) $M(t) = 40 \quad 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}} = 40 \Leftrightarrow t = 182,4$ khi

Vậy sau 182,4 ngày còn lại lại 40 g polonium-210

Câu 7: Nhắc lại rằng, mức cường độ âm L được tính bằng công thức $L = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)(dB)$, trong đó I là cường độ của âm tính bằng W/m^2 và $I_0 = 10^{12}\,\text{W}/m^2$

(Nguồn: Vật lí 12, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52)

a) Một giáo viên đang giảng Câu trong lớp học, có mức cường độ âm là $50dB$. Cường độ âm của giọng nói giáo viên bằng bao nhiêu?

b) Mức cường độ âm trong một nhà xưởng thay đổi trong khoảng từ $75dB$ đến $90dB$. Cường độ âm trong nhà xưởng này thay đổi trong khoảng nào?

Lời giải

a) Khi $L = 50$ thì $10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 50 \Leftrightarrow I = 10^{-7}$

Vậy cường độ âm của giọng nói giáo viên là $10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}$

b) Khi $L = 75$ thì $10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 75 \Leftrightarrow I = 3,2.10^{-5}$

Khi $L = 90$ thì $10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 90 \Leftrightarrow I = 10^{-3}$

Vậy cường độ âm trong nhà xưởng thay đổi từ $3,2.10^{-5}$ đến 10^{-3}

Câu 8: Thực hiện một mẻ nuôi cấy vi khuẩn với 1000 vi khuẩn ban đầu, nhà sinh học phát hiện số lượng vi khuẩn tăng thêm 25% sau mỗi hai ngày

1. Công thức $P(t) = P_0.a^t$ cho phép tính số lượng vi khuẩn của mẻ nuôi cấy sau t ngày kể từ thời điểm ban đầu. Xác định các tham số P_0 và $a\ (a > 0)$. Làm tròn a đến hàn phần trăm.
2. Sau 5 ngày thì số lượng vi khuẩn bằng bao nhiêu ? Làm tròn kết quả đến hàng trăm.
3. Sau bao nhiêu ngày thì số lượng vi khuẩn vượt gấp đôi số lượng ban đầu? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) Ban đầu có 1000 vi khuẩn nên $P_0 = 1000$.

Sau 2 ngày, số lượng vi khuẩn là: $P = 125\%P_0 = 125\%.1000 = 1250$

Ta có: $P(2) = P_0 \cdot a^2 \Leftrightarrow 1250 = 1000 \cdot a^2 \Leftrightarrow a^2 = 1,25 \Leftrightarrow a \approx 1,12$

b) Số lượng vi khuẩn sau 5 ngày là: $P(5) = P_0 \cdot a^5 = 1000.1,12^2 \approx 1800$ (vi khuẩn).

c) Với $P(t) = 2P_0$ ta có:

$$P(t) = P_0 \cdot a^t \Leftrightarrow 2P_0 = P_0 \cdot 1,12^t \Leftrightarrow 1,12^t = 2 \Leftrightarrow t = \log_{1,12} 2 \approx 6,1 \text{ (ngày)}$$

Vậy sau 6,1 ngày thì số lượng vi khuẩn vượt gấp đôi số lượng ban đầu.

Câu 9: Nhắc lại rằng, độ PH của một dung dịch được tính theo công thức $PH = -\log\left[H^+\right]$, trong đó $\left[H^+\right]$ là nồng độ H^+ của dung dịch đó tính bằng mol/L. Nồng độ H^+ trong dung dịch cho biết độ acid của dung dịch đó.

1. Dung dịch acid A có độ pH bằng 1,9 ; dung dịch B có độ pH bằng 2,5. Dung dịch nào có độ acid cao hơn và cao hơn bao nhiêu lần

2. Nước cất có nồng độ H^+ là $10^{-7}\ mol/L$. Nước chảy từ một vòi nước có độ pH từ $6,5$ đến $6,7$ thì có độ acid cao hay thấp hơn nước cất.

Lời giải

$$pH_A = 1,9 \Leftrightarrow -\log\left[H^+\right] = 1,9 \Leftrightarrow \log\left[H^+\right] = -1,9 \Leftrightarrow H^+ = 10^{-1,9}$$

a)

Vậy độ acid của dung dịch A là $10^{-1,9}$ mol/L.

$$pH_B = 2,5 \Leftrightarrow -\log\left[H^+\right] = 2,5 \Leftrightarrow \log\left[H^+\right] = -2,5 \Leftrightarrow H^+ = 10^{-2,5}$$

Vậy độ acid của dung dịch B là $10^{-2,5}$ mol/L.

$$\frac{10^{-1,9}}{10^{-2,5}} \approx 3,98$$

Ta có:

Vậy độ acid của dung dịch A cao hơn độ acid của dung dịch B 3,98 lần.

b) Ta có:

$$6,5 < pH < 6,7 \Leftrightarrow 6,5 < -\log\left[H^+\right] < 6,7 \Leftrightarrow -6,5 > \log\left[H^+\right] > -6,7 \Leftrightarrow 10^{-6,5} > H^+ > 10^{-6,7}$$

Vậy nước chảy từ vòi nước có độ acid từ $10^{-6,7}$ mol/L đến $10^{-6,5}$ mol/L.

Vậy nước đó có độ acid cao hơn nước cất.

Câu 10: Bác Minh gửi tiết kiệm 500 triệu đồng ở một ngân hàng với lãi suất không đổi $7,5\%$ một năm theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng. Tổng số tiền bác Minh thu được (cả vốn lẫn lãi) sau n năm là:

$A = 500.(1 + 0,075)^n$ (triệu đồng).

Tính thời gian tối thiểu gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

Lời giải

Ta có $500(1+0,075)^n \geq 800$

Chia cả hai vế của bất phương trình cho 500: $(1+0,075)^n \geq \frac{800}{500} = 1,6$

Lấy logarit tự nhiên ở cả hai vế của bất phương trình: $n\ln(1+0,075)^n \geq \ln(1,6)$

Chia cả hai vế của bất phương trình cho $\ln(1+0.075)$: $n \geq \frac{\ln(1,6)}{\ln(1+0,075)} \approx 9,25$

Vậy thời gian tối thiểu cần gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng là 10 năm.

Câu 11: Số lượng vi khuẩn ban đầu trong một mẻ nuôi cấy là 500 con. Người ta lấy một mẫu vi khuẩn trong mẻ nuôi cấy đó, đếm số lượng vi khuẩn và thấy rằng tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn là 40% mỗi giờ. Khi đó số lượng vi khuẩn $N(t)$ sau t giờ nuôi cấy được ước tính bằng công thức sau: $N(t) = 500e^{0,4t}$

Hỏi sau bao nhiêu giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80 000 con?

Lời giải

Giải phương trình: $80000 = 500e^{0,4t}$

Chia cả hai vế của phương trình cho 500: $160 = e^{0,4t}$

Logarit tự nhiên của cả hai vế: $\ln 160 = 0,4t \Rightarrow t = \frac{\ln 160}{04} \approx 5,43$

Vậy sau khoảng 5.43 giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn sẽ vượt mức 80000 con.

Câu 12: Giả sử nhiệt độ $T(^\circ\text{C})$ của một vật giảm dần theo thời gian cho bởi công thức: $T = 25 + 70e^{-0,5t}$, trong đó thời gian t được tính bằng phút.

a) Tìm nhiệt độ ban đầu của vật.

b) Sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại 30°C?

Lời giải

a) Nhiệt độ ban đầu của vật: $T = 25 + 70e^{0,5t} = 25 + 70e^{0,5\times 0} = 25 + 70 = 95$

b) Để tìm thời gian t mà nhiệt độ của vật còn lại 30°C.

$30 = 25 + 70e^{0,5t} \Rightarrow \ln\frac{30-25}{70} = 0,5t$

Giải phương trình trên ta tìm được giá trị của t: $t = 2\ln\frac{1}{7} \approx 6,04$

Vậy sau khoảng 6,04 phút nhiệt độ của vật sẽ giảm còn 30°C.

Câu 13: Tính nồng độ ion hydrogen (tính bằng mol/lít) của một dung dịch có độ pH là 8.

Lời giải

Độ pH của một dung dịch được tính bằng công thức $pH = -\log_{10}\left[H^+\right]$.

$\Rightarrow \left[H^+\right] = 10^{-pH}$. Do đó, nồng độ ion hydrogen của dung dịch có độ pH là 8 là:

$\left[H^+\right] = 10^{-pH} = 10^{-8}(\text{mol/}$ lít).

Vậy, nồng độ ion hydrogen của dung dịch là $10^{-8}\,\text{mol/}$ lít.

Câu 14: Lạm phát là sự tăng mức giá chung một cách liên tục của hàng hoá và dịch vụ theo thời gian, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó. Chẳng hạn, nếu lạm phát là 5% một năm thì sức mua của 1 triệu đồng sau một năm chỉ còn là 950 nghìn đồng (vì đã giảm mất 5% của 1 triệu đồng, tức là 50000 đồng). Nói chung, nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là $r\%$ một năm thì tổng số tiền P ban đầu, sau n năm số tiền đó chỉ còn giá trị là

$$A = P\cdot\left(1-\frac{r}{100}\right)^n.$$

a) Nếu tỉ lệ lạm phát là 8% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại bao nhiêu?

b) Nếu sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm chỉ còn là 90 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của hai năm đó là bao nhiêu?

c) Nếu tỉ lệ lạm phát là 5% một năm thì sau bao nhiêu năm sức mua của số tiền ban đầu chỉ còn lại một nửa?

Lời giải

a) Theo công thức $A = P\cdot\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$, ta có: $A = \left(1-\frac{8}{100}\right)^2 \approx 73,6$ triệu đồng

Vậy sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm với tỉ lệ lạm phát là 8% một năm chỉ còn lại khoảng 73.6 triệu đồng.

b) Thay $P = 100$ triệu đồng, $A = 90$ triệu đồng, $n = 2$ vào phương trình ta có:

$90 = 100.\left(1-\frac{r}{100}\right)^2$ $=5,13\%$

Vậy tỉ lệ lạm phát trung bình của hai năm đó là khoảng 5.13 %.

c)Thay $P = 1$ và $A = \frac{1}{2}$ vào phương trình ta có: $\frac{1}{2} = \left(r-\frac{r}{100}\right)^n$

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) n\ln\left(1-\frac{r}{100}\right)$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(1-\frac{r}{100}\right)}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(1-\frac{5}{100}\right)} \approx 14,21$$

Vậy sau khoảng 14 năm và 3 tháng, sức mua của số tiền ban đầu sẽ chỉ còn lại một nửa nếu tỉ lệ lạm phát là 5% một năm.

Câu 15: Giả sử quá trình nuôi cấy vi khuẩn tuân theo quy luật tăng trưởng tự do. Khi đó, nếu gọi N_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu và $N(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ thì ta có: $N(t) = N_0 e^{rt}$ trong đó r là tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn mỗi giờ.

Giả sử ban đầu có 500 con vi khuẩn và sau 1 giờ tăng lên 800 con. Hỏi:

a) Sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là khoảng bao nhiêu con?

b) Sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng lên gấp đôi?

Lời giải

$$r = \frac{\ln\frac{N(t)}{N_0}}{t}$$

a) Ta có công thức tính tỉ lệ tăng trưởng r như sau:

Áp dụng vào giá trị ban đầu ta có: $r = 0,47\%$

Sử dụng công thức tính số lượng vi khuẩn sau t giờ ta được: $N(t) = N_0 e^{rt} = 500e^{0,47t}$

Vậy sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn khoảng là: $N(5) = 500e^{0,47\times 5} \approx 3,643$ con

b) Áp dụng công thức tính số lượng vi khuẩn sau t giờ, ta được: $N(t) = N_0 e^{rt} = N_0$

$e^{rt} = 2 = rt = \ln 2$

$$t = \frac{\ln 2}{r} = \frac{\ln 2}{0,47} \approx 1,47$$

Do đó, thời gian cần tìm là:

Vậy số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng lên gấp đôi sau khoảng 1.47 giờ.

Câu 16: Vào năm 1938, nhà vật lí Frank Benford đã đưa ra một phương pháp để xác định xem một bộ số đã được chọn ngẫu nhiên hay đã được chọn theo cách thủ công. Nếu bộ số này không được chọn ngẫu nhiên thì công thức Benford sau sẽ được dùng ước tính xác suất P để chữ số d là chữ số đầu tiên của bộ số đó: $P = \log\frac{d+1}{d}$. *(Theo F. Benford, The Law of Anomalous Numbers, Proc. Am. Philos. Soc. 78 (1938), 551 -572).*

Chẳng hạn, xác suất để chữ số đầu tiên là 9 bằng khoảng $4,6\%$ (thay $d = 9$ trong công thức Benford để tính P).

a) Viết công thức tìm chữ số d nếu cho trước xác suất P.

b) Tìm chữ số có xác suất bằng 9,7% được chọn.

c) Tính xác suất đề chữ số đầu tiên là 1.

Lời giải

a) Ta có công thức tính xác suất P như sau:

$$P = \log\frac{d+1}{d}$$

$$P = \log\frac{d+1}{d} \Rightarrow \frac{d+1}{d} = e^P \Rightarrow d+1 = de^P \Rightarrow d = \frac{1}{e^P - 1}$$

b) Để tìm chữ số có xác suất bằng $9,7\%$, ta giải phương trình sau theo d:

$$\log\frac{d+1}{d} = \log\frac{10}{9,7} \Rightarrow \frac{d+1}{d} = \frac{10}{9,7} \Rightarrow d+1 = \frac{1}{0,97} = 1,03$$

Vậy chữ số có xác suất bằng $9,7\%$ là 1.

c) Để tính xác suất để chữ số đầu tiên là 1, ta thay $d = 1$ vào công thức tính P:

$$P = \log\frac{1+1}{1} = \log 2 \approx 0,3$$

Câu 17: Dân số thế giới năm 2020 là khoảng 7,79 tỉ người và tăng với tốc độ khoảng $1,05\%$ mỗi năm (theo danso.org). Giả sử tốc độ tăng này không đổi. Khi đó mô hình $P(t) = 7,79\cdot(1,0105)^{t-2020}$ có thể dùng để ước tính dân số thế giới (theo đơn vị tỉ người) vào năm t.

a) Theo mô hình này, khi nào dân số thế giới đạt 8,5 tỉ người?

b) Theo mô hình này, khi nào dân số thế giới đạt 10 tỉ người?

Lời giải

a) Dân số thế giới đạt 8,5 tỉ người khi t thoả mãn phương trình:

$$7,79\cdot(1,0105)^{t-2020} = 8,5 \Leftrightarrow 1,0105^{t-2020} = \frac{8,5}{7,79} \Leftrightarrow t - 2020 = \log_{1,0105}\frac{8,5}{7,79}$$

$$\Leftrightarrow t = 2020 + \log_{1,0105}\frac{8,5}{7,79} \approx 2028,35.$$

Vậy theo mô hình đã cho thì đến năm 2029 dân số thế giới đạt 8,5 tỉ người.

b) Dân số thế giới là 10 tỉ người khi t thoả mãn phương trình:

$$7,79\cdot(1,0105)^{t-2020} = 10 \Leftrightarrow (1,0105)^{t-2020} = \frac{10}{7,79} \Leftrightarrow t - 2020 = \log_{1,0105}\frac{10}{7,79}$$

$$\Leftrightarrow t = 2020 + \log_{1,0105}\frac{10}{7,79} \approx 2043,91$$

Vậy theo mô hình đã cho thì đến năm 2044 dân số thế giới đạt 10 tỉ người.

Câu 18: Áp suất khi quyển p lên một vật giảm khi độ cao tăng dần. Giả sử áp suất này (tính bằng milimét thuỷ ngân) được biểu diễn theo độ cao h (tinh bằng kilômét) so với mực nước biển bằng công thức $p(h)=760\cdot e^{-0,145h}$.

a) Một máy bay đang chiu áp suất khi quyển 320mmHg. Tìm độ cao của máy bay đó.

b) Một người đứng trên đỉnh của một ngọn núi và chịu áp suất khi quyển 667mmHg. Tìm chiều cao của ngọn núi này.

Lời giải

a) Giải phương trình $760e^{-0,145h}=320$, ta tìm được $h\approx 5,965$ km. Vậy độ cao của máy bay là khoảng $5,965$ km.

b) Giải phương trình $760e^{-0,145h}=667$, ta tìm được $h\approx 0,9$ km. Vậy chiều cao của ngọn núi là khoảng 0,9 km.

Câu 19: Giả sử giá trị còn lại V (triệu đồng) của một chiếc ô tô nào đó sau t năm được cho bằng công thức $V(t)=730\cdot(0,82)^t$.

a) Theo mô hình này, khi nào chiếc xe có giá trị 500 triệu đồng?

b) Theo mô hình này, khi nào chiếc xe có giá trị 200 triệu đồng?

(Kết quả của câu a và câu b được tính tròn năm).

Lời giải

a) Giải phương trình $730\cdot(0,82)^t=500$, ta được $t\approx 1,91$ năm. Vậy chiếc xe có giá trị 500 triệu đồng sau khoảng 2 năm.

b) Giải phương trình $730\cdot(0,82)^t=200$, ta được $t\approx 6,52$ năm. Vậy chiếc xe có giá trị 200 triệu đồng sau khoảng 7 năm.

Câu 20: Giả sử tổng chi phí hoạt động (đơn vị tỉ đồng) trong một năm của một công ty được tính bằng công thức $C(t)=90-50e^{-t}$, trong đó t là thời gian tính bằng năm kể từ khi công ty được thành lập. Tính chi phí hoạt động của công ty đó vào năm thứ 10 sau khi thành lập (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

Lời giải

Chi phi hoạt động của công ty đó vào năm thứ 10 sau khi thành lập là:

$C(10)=90-50e^{-10}\approx 89,998$ (tỉ đồng)

Câu 21: Nhắc lại rằng độ pH của một dung dịch được tính bằng công thức $\text{pH} = -\log\left[\text{H}^+\right]$, ở đó $\left[\text{H}^+\right]$ là nồng độ ion hydrogen của dung dịch tính bằng mol/lít. Biết rằng máu của người bình thường có độ pH từ 7,30 đến 7,45. Hỏi nồng độ ion hydrogen trong máu người bình thường nhận giá trị trong đoạn nào?

Lời giải

Ta có: $7,30 \le -\log\left[\text{H}^+\right] \le 7,45 \Leftrightarrow -7,30 \ge \log\left[\text{H}^+\right] \ge -7,45 \Leftrightarrow 10^{-7,30} \ge \left[\text{H}^+\right] \ge 10^{-7,45}$

Vậy nồng độ ion hydrogen trong máu người bình thường nhận giá trị trong đoạn $\left[5,01 \cdot 10^{-8}; 3,55 \cdot 10^{-8}\right]$.

Câu 22: Nhắc lại rằng mức cường độ âm (đo bằng dB) được tính bởi công thức $L = 10\log\dfrac{I}{I_0}$, trong đó I là cường độ âm tính theo W/m^2 và $I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$.

a) Tính cường độ âm của âm thanh tàu điện ngầm có mức cường độ âm là $100\ \text{dB}$.

b) Âm thanh trên một tuyến đường giao thông có mức cường độ âm thay đổi từ $70\ \text{dB}$ đến $85\ \text{dB}$. Hỏi cường độ âm thay đổi trong đoạn nào?

Lời giải

a) Giải phương trình $100 = 10\log\dfrac{I}{10^{-12}}$, ta tìm được $I = 0,01$.

b) Ta có: $70 \le 10\log\dfrac{I}{10^{-12}} \le 85$. Giải bất phương trình này, ta được $10^{-5} \le I \le 10^{-3,5}$.

Vậy cường độ âm thay đổi trong đoạn $\left[10^{-5}; 10^{-3,5}\right]$.

Câu 23: Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất là $6\%/$ năm. Để có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì người đó phải gửi ít nhất bao nhiêu năm? Biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt quá trình gửi.

Lời giải

Gọi x là số năm người đó gửi tiền trong ngân hàng.

Số tiền cả gốc và lãi người đó có được sau x năm được tính bởi công thức: $S = 100 \cdot 1,06^x$.

Để có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì

$100.1,06^x > 130 \Leftrightarrow 1,06^x > 1,3 \Leftrightarrow x > \log_{1,06} 1,3$. Suy ra $x > 4,503$.

Do kì hạn gửi là 12 tháng nên để rút được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì người đó phải gửi ít nhất 5 năm.

Câu 24: Độ pH của đất thích hợp cho trồng hoa hồng là từ 6,5 đến 7. Tính nồng độ của ion hydrogen $\left[\text{H}^+\right]$ của đất để thích hợp cho trồng hoa hồng.

Lời giải

Ta có: $6,5 < -\log\left[\text{H}^+\right] < 7 \Leftrightarrow -7 < \log\left[\text{H}^+\right] < -6,5 \Leftrightarrow 10^{-7} < \left[\text{H}^+\right] < 10^{-6,5}$.

Vậy nồng độ của ion hydrogen $\left[\text{H}^+\right]$ của đất trong khoảng $\left(10^{-7};10^{-6,5}\right)$ thì thích hợp để trồng hoa hồng.

Câu 25: Người ta nuôi cấy vi khuẩn Bacillus subtilis trong nồi lên men và thu được số liệu sau: Lúc ban đầu, số tế bào/1 ml dịch nuôi là 2.10^2. Sau 13 giờ, số tế bào/1 ml dịch nuôi là $3,33 \cdot 10^9$. Biết vi khuẩn Bacillus subtilis sinh trưởng trong điều kiện hoàn toàn tối ưu và sinh sản theo hình thức tự nhân đôi. Hỏi sau bao nhiêu phút, vi khuẩn Bacillus subtilis tự nhân đôi một lần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Gọi T (phút) là thời gian để vi khuẩn Bacillus subtilis tự nhân đôi một lần. Theo giả thiết, ta có:

$$3,33 \cdot 10^9 = 2 \cdot 10^2 \cdot 2^{\frac{13 \cdot 60}{T}} \Leftrightarrow \frac{13 \cdot 60}{T} = \log_2\left(1,665 \cdot 10^7\right).$$

Suy ra $T \approx 33$ phút.

Câu 26: Tốc độ của gió S (dặm/giờ) gần tâm của một cơn lốc xoáy được tính bởi công thức: $S = 93\log d + 65$, trong đó d (dặm) là quãng đường cơn lốc xoáy đó di chuyển được.
(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

Tính quãng đường cơn lốc xoáy đã di chuyển được, biết tốc độ của gió ở gần tâm bằng 140 dặm/giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

6,4 dặm.

Câu 27: Dân số thành phố Hà Nội năm 2022 khoảng 8,4 triệu người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Hà Nội không đổi và bằng $r = 1,04\%$. Biết rằng, sau t năm dân số Hà Nội (tính từ mốc năm 2022) ước tính theo công thức: $S = A.e^{rt}$, trong đó A là dân số năm lấy làm mốc. Hỏi từ năm nào trở đi, dân số của Hà Nội vượt quá 10 triệu người?

Lời giải

$$8,4e^{0,0104t} > 10 \Leftrightarrow t > \frac{\ln 10 - \ln 8,4}{0,0104}$$

Ta có: .

$$t > 16,764$$

Suy ra .

Vậy sau khoảng17 năm tính từ mốc năm 2022, tức là từ năm 2039 thì dân số Hà Nội vượt quá 10 triệu người.

Câu 28: Mức cường độ âm $L(\text{dB})$ được tính bởi công thức $L = 10\log\frac{I}{10^{-12}}$, trong đó $I(\text{W/m}^2)$ là cường độ âm. Để đảm bảo sức khoẻ cho công nhân, mức cường độ âm trong một nhà máy phải giữ sao cho không vượt quá 85 dB. Hỏi cường độ âm của nhà máy đó phải thoả mãn điều kiện nào để đảm bảo sức khoẻ cho công nhân?

Lời giải

$10^{-3,5}(\text{W/m}^2)$

Cường độ âm của nhà máy đó không vượt quá .

Câu 29: Số lượng của một loài vi khuẩn sau x giờ được tính bởi công thức $f(x) = Ae^{rx}$, trong đó, A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng $(r > 0)$. Biết số vi khuẩn ban đầu là 1000 con và sau 10 giờ tăng trưởng thành 5000 con.

a) Tính tỉ lệ tăng trưởng của vi khuẩn.

b) Hỏi sau khoảng bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần so với số lượng vi khuẩn ban đầu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

$$1000e^{10r} = 5000 \Leftrightarrow e^{10r} = 5$$

a) Theo giả thiết, ta có: .

$$r = \frac{\ln 5}{10}$$

Suy ra tỉ lệ tăng trưởng của vi khuẩn là: .

b) Khi số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần so với số lượng vi khuẩn ban đầu thì ta có phương trình:

$$Ae^{rx} = 10A \Leftrightarrow e^{rx} = 10 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 10}{r}.$$

$r = \frac{\ln 5}{10}$ $x = \frac{\ln 10}{\frac{\ln 5}{10}} \approx 14$

Thay ta có: .

Vậy sau khoảng 14 giờ thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần.

Câu 30: Với nước biển có nồng độ muối 30%, nhiệt độ $T(^\circ\mathrm{C})$ của nước biển được tính bởi công thức $T = 7,9\ln(1,0245-d)+61,84$, ở đó $d\left(\mathrm{g/cm^3}\right)$ là khối lượng riêng của nước biển.
(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

Biết vùng biển khơi mặt ở một khu vực có nồng độ muối 30% và nhiệt độ là $8^\circ\mathrm{C}$. Tính khối lượng riêng của nước biển ở vùng biển đó (làm tròn kết quả đến hàng phần chục nghìn).

Lời giải

Theo giả thiết, với $T=8$ ta có phương trình:

$$7,9\ln(1,0245-d)+61,84=8 \Leftrightarrow \ln(1,0245-d)=\frac{-2692}{395}$$

$$\Leftrightarrow 1,0245-d=e^{\frac{-2692}{395}} \Leftrightarrow d=1,0245-e^{\frac{-2692}{395}}$$

Suy ra khối lượng riêng của nước biển ở vùng biển đó là: $d\approx 1,0234\ \mathrm{g/cm^3}$.

Câu 31: Cường độ của một trận động đất, kí hiệu là M (độ Richter), được cho bởi công thức $M=\log A-\log A_0$, ở đó A là biên độ rung chấn tối đa đo được bằng địa chấn kế và A_0 là biên độ chuẩn (hằng số phụ thuộc vào từng khu vực)(Nguồn: https://vi.wikipedia.org/wiki/Dô__Richter)
Vào hồi 12 giờ 14 phút trưa ngày 27/07/2020, tại khu vực huyện Mộc Châu, Sơn La xảy ra trận động đất thứ nhất với cường độ 5,3 độ Richter. Trong vòng 20 tiếng đồng hồ, Sơn La đã xảy ra liên tiếp 7 trận động đất. Đến 8 giờ 26 phút sáng 28/07/2020, trận động đất thứ bảy xảy ra với cường độ 4 độ Richter.

(Nguồn: https://plo.vn/7-tran-dong-dat-lien-tiep-o-son-la-trong-vong-20-tieng-dong-ho-posi585443.html)

Biết rằng biên độ chuẩn được dùng cho cả tỉnh Sơn La. Hỏi biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ nhất gấp khoảng mấy lần biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ bảy (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Cường độ trận động đất thứ nhất là: $M_1=\log A_1-\log A_0=5,3$.

Cường độ trận động đất thứ bảy là: $M_7=\log A_7-\log A_0=4$.

Do đó, ta có:

$$M_1-M_7=\log A_1-\log A_7=1,3 \Leftrightarrow \log\frac{A_1}{A_7}=1,3 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_7}=10^{1,3}.$$

$\frac{A_1}{A_7} \approx 20$

Suy ra .

Vậy biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ nhất gấp khoảng 20 lần biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ bảy.

Câu 32: Đồng vị phóng xạ Uranium-235 (thường được sử dụng trong điện hạt nhân) có chu kì bán rã là $T = 703800000$ năm. Theo đó, nếu ban đầu có 100 gam Uranium-235 thì sau t năm, do bị phân rã, lượng Uranium-235 còn lại được tính bởi công thức $M = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ (g). Sau thời gian bao lâu thì lượng Uranium-235 còn lại bằng 90% so với ban đầu?

Lời giải

Khi $M = 90\,\text{g}$, ta có phương trình:

$$90 = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = 0{,}9 \Leftrightarrow \frac{t}{T} = \log_{\frac{1}{2}} 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow t = T \cdot \log_{\frac{1}{2}} 0{,}9 \approx 106979777$$

(năm)

Câu 33: Người ta dùng thuốc để khử khuẩn cho một thùng nước. Biết rằng nếu lúc đầu mỗi mililít nước chứa P_0 vi khuẩn thì sau t giờ (kể từ khi cho thuốc vào thùng), số lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước là $P = P_0 \cdot 10^{-\alpha t}$, với α là một hằng số dương nào đó. Biết rằng ban đầu mỗi mililít nước có 9000 vi khuẩn và sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước là 6000. Sau thời gian bao lâu thì số lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước trong thùng ít hơn hoặc bằng 1000?

Lời giải

$$6000 = 9000.10^{-2\alpha} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}\log\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$$

$$9000.10^{-\alpha t} \le 1000 \Leftrightarrow 10^{-\alpha t} \le \frac{1}{9} \Leftrightarrow -\alpha t \le \log\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow t \ge -\frac{2}{\alpha}\log\frac{1}{3} = -\frac{2}{\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}} \cdot \log\frac{1}{3} = \frac{4\log 3}{\log\frac{3}{2}} \approx 10{,}8$$

(giờ)

Câu 34: Độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\text{pH} = -\log x$, trong đó x là nồng độ ion H^+ của dung dịch đó tính bằng mol/L. Biết rằng độ pH của dung dịch A lớn hơn độ pH của dung dịch B là 0,7. Dung dịch B có nồng độ ion H^+ gấp bao nhiêu lần nồng độ ion H^+ của dung dịch A ?

Lời giải

Ta có: $\text{pH}_A = -\log x_A; \text{pH}_B = -\log x_B$

$$\Rightarrow \mathrm{pH}_{\mathrm{A}}-\mathrm{pH}_{\mathrm{B}}=-\log x_{\mathrm{A}}+\log x_{\mathrm{B}}=\log \frac{x_{\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{A}}}.$$

$$\log \frac{x_{\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{A}}}=0,7 \Rightarrow \frac{x_{\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{A}}}=10^{0,7} \approx 5$$

Từ đó suy ra (lần).

Câu 35: Công thức $M=M_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ cho biết khối lượng của một chất phóng xạ sau thời gian t kể từ thời điểm nào đó (gọi là thời điểm ban đầu), M_0 là khối lượng ban đầu, T là chu kì bán rã của chất phóng xạ đó (cứ sau mỗi chu kì, khối lượng của chất phóng xạ giảm đi một nửa). Trong một phòng thí nghiệm, với khối lượng $200\ \mathrm{g}$ radon ban đầu, sau 16 ngày, chỉ còn lại $11\ \mathrm{g}$. Chu kì bán rã của radon bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$11=200.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{16}{T}} \Leftrightarrow \frac{16}{T}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{11}{200}=\log_2\frac{200}{11} \Leftrightarrow T=\frac{16}{\log_2\frac{200}{11}} \approx 3,8$$

(ngày)

Câu 36: Công thức $\log x=11,8+1,5M$ cho biết mối liên hệ giữa năng lượng x tạo ra (tính theo erg, 1 erg tương đương 10^{-7} jun) với độ lớn M theo thang Richter của một trận động đất.

a) Trận động đất có độ lớn 5 độ Richter tạo ra năng lượng gấp bao nhiêu lần so với trận động đất có độ lớn 3 độ Richter?

b) Người ta ước lượng rằng một trận động đất có độ lớn khoảng từ 4 đến 6 độ Richter. Năng lượng do trận động đất đó tạo ra nằm trong khoảng nào?

Lời giải

a) Gọi x_1, x_2 (erg) lần lượt là năng lượng tạo ra của hai trận động đất có độ lớn lần lượt là $M_1=5, M_2=3$ (độ Richter).

Ta có: $\log x_1=11,8+1,5M_1;\log x_2=11,8+1,5M_2$

$$\Rightarrow \log x_1-\log x_2=1,5\left(M_1-M_2\right)\Rightarrow \log\frac{x_1}{x_2}=3\Rightarrow \frac{x_1}{x_2}=10^3=1000$$

.

b) $$11,8+1,5.4\le \log x\le 11,8+1,5\cdot 6\Rightarrow 17,8\le \log x\le 20,8\Rightarrow 10^{17,8}\le x\le 10^{20,8}$$