

ĐỀ 1

ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI

MÔN: TOÁN 12

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 24. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	4	$+\infty$	

- A. $x = 2$. B. $x = 4$. C. $x = -1$. D. $x = 1$.

Câu 2: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 3x - 2}{x + 3}$ có phương trình là

- A. $y = 1$. B. $x = -3$. C. $y = x$. D. $y = -2x$.

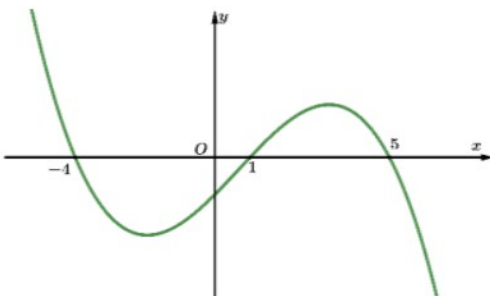
Câu 3: Gọi M và m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$. Khi đó tổng $M + m$ bằng

- A. $4 + 2\sqrt{2}$. B. $4 - 2\sqrt{2}$. C. $1 + \sqrt{2}$. D. $1 - \sqrt{2}$.

Câu 4: Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2024; 2025)$ và chia hết cho 3 , để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 4m + 3$ đồng biến trên khoảng $(2024; +\infty)$?

- A. 1349. B. 1350. C. 1348. D. 936.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x^3 - 3x + 1) = 0$?



- A. 6. B. 5. C. 8. D. 9.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 1; 2)$, $\vec{b} = (2; 1; -2)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{5}$. C. $-\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{9}$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3); B(2;3;-4); C(-3;1;2)$. Điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có tọa độ là

- A. $D(-4;-2;9)$. B. $D(4;2;9)$. C. $D(6;2;-3)$. D. $D(-2;4;5)$.

Câu 8: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O và $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA'}$. Gọi K là trọng tâm của tam giác DCD' . Mặt phẳng (AKC') cắt cạnh AB' tại G . Chọn khẳng định đúng.

- A. $\overrightarrow{GK} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$. B. $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$.
C. $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$. D. $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$.

Câu 9: Điểm khảo sát môn Văn của 25 bạn học sinh nữ lớp $11D$ trong kỳ kiểm tra giữa kì 2 được cho trong bảng sau:

Điểm	4	5	6	7	8	9
Số lượng	4	5	4	6	5	1

Số trung vị của bảng số liệu trên là

- A. 6,5 . B. 7 . C. 6 . D. 5 .

Câu 10: . Thời gian chạy tập luyện cự li 100 m của một vận động viên được cho trong bảng sau:

Thời gian (giây)	$[10;10,4)$	$[10,4;10,8)$	$[10,8;11,2)$	$[11,2;11,6)$	$[11,6;12,0)$
Số lần chạy	3	8	6	2	1

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. 0,18 . B. 0,16 . C. 0,15 . D. 0,17 .

Câu 11: Phương trình $2\cos x - 1 = 0$ có tập nghiệm là:

- A. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$. B. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi; -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$.
C. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$. D. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi; -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$.

Câu 12: Cho góc α thỏa mãn $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$ Giá trị của biểu thức $\sin^2 \alpha$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $P = \frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 13: Cho $a > 0$, $b > 0$ và $a^2 + b^2 = 7ab$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $2(\ln a + \ln b) = \ln(7ab)$. B. $3\ln(a+b) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.
C. $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$. D. $\ln(a+b) = \frac{3}{2}(\ln a + \ln b)$.

Câu 14: Số nghiệm của phương trình $5^{x^2-3x+2} = 25$ là:

A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 15: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$; $q = -5$. Tìm số hạng tổng quát u_n ?

A. $u_n = 2 \cdot (-5)^{n-1}$. B. $u_n = (-2) \cdot (-5)^{n+1}$. C. $u_n = (-2) \cdot 5^{n-1}$. D. $u_n = (-2) \cdot (-5)^{n-1}$.

Câu 16: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây

A. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. B. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.
C. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. D. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

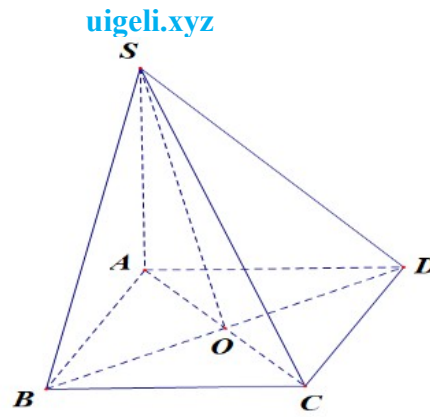
Câu 17: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^5 - 2n^3 + 1}{2n^2 - 4n^5 + 2019}$ bằng

A. -2. B. 0. C. 4. D. $+\infty$

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx^2 - 7x + 5}{2x^2 + 8x - 1} = -4$.

A. $m = -4$. B. $m = -8$. C. $m = 2$. D. $m = -3$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình hình thoi tâm O cạnh $a\sqrt{2}$ và $\angle BAD = 60^\circ$. Tính góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.



- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy (ABC) thỏa mãn $AB = a$, $AC = 2a$, $\angle BAC = 120^\circ$; SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của BC , tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AM .

- A. $a\sqrt{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 21: Tính tổng các hệ số trong khai triển nhị thức $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x\right)^5$.

A. 5. B. 1. C. 32. D. 16.

Câu 22: Từ các chữ số $0; 1; 2; 3; 4; 5$ có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?

A. 156. B. 144. C. 96. D. 134.

Câu 23: Một loại xét nghiệm nhanh SARS-CoV-2 cho kết quả dương tính với $81,2\%$ các ca thực sự nhiễm virus và kết quả âm tính với $98,4\%$ các ca thực sự không nhiễm virus. Giả sử tỉ lệ người nhiễm virus SARS-CoV-2 trong cộng đồng là 2% . Một người trong cộng đồng đó làm xét nghiệm và nhận được kết quả dương tính. Xác suất người đó thực sự nhiễm virus là

A. 0,033. B. 0,039. C. 0,509. D. 0,399.

Câu 24: Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 4 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 3$, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng centimet. Tính gia tốc tức thời khi vận tốc tức thời của con lắc bằng 0 lần đầu tiên.

- A. $\frac{2}{3}$. B. π^2 . C. $-4\pi^2$. D. 7.

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 25: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 2; -3), B(4; 0; 5), C(2; 0; 1)$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Điểm $G\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ là trọng tâm của tam giác ABC .
- b) Diện tích của tam giác ABC bằng $\sqrt{24}$.
- c) Biết điểm $I(a; b; 2)$ cách đều ba điểm A, B, C . Khi đó $a + b = 5$.
- d) Gọi M là điểm bất kì sao cho biểu thức $P = 2MA^2 + 3MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị nhỏ nhất đó bằng 90.

Câu 26: Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp 12 được cho ở bảng sau

Khoảng điểm	[6,5;7)	[7;7,5)	[7,5;8)	[8;8,5)	[8,5;9)	[9;9,5)	[9,5;10]
Số học sinh	8	10	16	24	13	7	4

Mẫu số liệu gộp nhóm đã cho có:

- a) Giá trị trung bình gần bằng $8,12$ (làm tròn đến hàng phần trăm).
- b) Trung vị bằng $8,15$ (làm tròn đến hàng phần trăm).
- c) Mốt bằng $8,5$ (làm tròn đến hàng phần chục).
- d) Phương sai lớn hơn 1.

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = \log_2 x$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = (0; +\infty)$.
- b) Hàm số có đạo hàm $f'(x) = \frac{\ln 2}{x}, x > 0$.
- c) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2 x - 5 \log_2 x - 6 \leq 0$ là $S = \left[\frac{1}{2}; 64\right]$.
- d) Cho phương trình $(f(2x))^2 - (m+2)f(x) + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 2]$ là $[1; 2]$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O và $AB = 2a, AD = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của OA và $SH = \frac{3a}{2}$.

- a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = a^3$.
- b) Hình chiếu vuông góc của tam giác SCH trên mặt phẳng (SBC) là tam giác SCI , với I là hình chiếu của H trên BC .
- c) Số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ là 45° .
- d) Khoảng cách từ điểm C đến $mp(SAD)$ là $\frac{3\sqrt{10}}{20}a$.

Câu 29: Một hộp chứa 40 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 40 . Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời hai thẻ từ hộp. Xét các biến cố
 A : "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 10 ".

A_1 : "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra không chia hết cho 5 ".

A_2 : "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra không chia hết cho 2 ".

a) Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = 780$.

b)
$$P(A_1) = \frac{C_8^2}{C_{40}^2} = \frac{7}{195}$$

c) A_1 và A_2 là hai biến cố độc lập.

d)
$$P(A) = \frac{107}{390}$$

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ và hàm số $y = g(x) = f(x) - mx + 2025$. Gọi $S = (a; b)$ là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = g(x)$ có ba cực trị. Tính giá trị của $2a + 3b$.

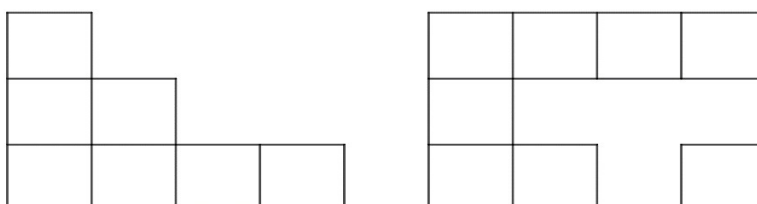
Câu 31: Chị Hà dự định sử dụng hết $4m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu mét khối (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Câu 32: Cho x, y là các số thực thỏa mãn bất phương trình: $\log_3(3x+3) + x - 3y \geq 27^y$. Biết $0 \leq x \leq 2024$, có bao nhiêu cặp (x, y) nguyên thỏa mãn bất phương trình trên?

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , E là trung điểm của SB . Biết rằng tam giác EAC đều, $BD = 2AC = 2$. Lấy I trên đoạn OD với $DI = x$, $0 < x < 1$. Gọi (α) là mặt phẳng qua I và song song với (ACE) . Mặt phẳng (α) cắt AD, CD, SC, SB, SA lần lượt tại M, N, P, Q, R . Tìm diện tích lớn nhất của ngũ giác $MNPQR$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 34: Trong 2025 số nguyên dương đầu tiên, có thể chọn ra tối đa bao nhiêu số sao cho hiệu hai số bất kì luôn khác 6.

Câu 35: Trong một cuộc thi IQ dành cho học sinh các cấp, ban tổ chức đã để robot xếp các khối lập phương $1:1:1$ đơn vị thành một hình khối mà khi nhìn, thí sinh chỉ được nhìn từ các góc nhìn được mô tả qua các hình vẽ và thông tin bên dưới. Thể tích lớn nhất của hình khối đó có thể là?



Lời giải

-----Hết-----

ĐỀ 2

ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI

MÔN: TOÁN 12

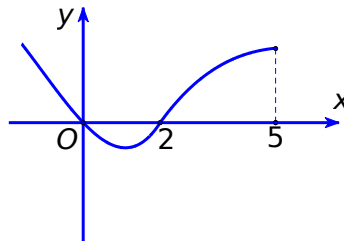
PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 24. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

$$y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$$

Câu 1: Cho hàm số . Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 4)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi $x \in \mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây.



Biết rằng $f(0) + f(4) = f(2) + f(5)$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$?

- A. $f(1)$ B. $f(2)$ C. $f(0)$ D. $f(5)$

$$y = \frac{x^2 - 2(m-2)x + m^2}{x+1}$$

Câu 3: Cho hàm số có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng?

- A. $\begin{cases} m \neq -3 \\ m \neq 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -3 \end{cases}$

Câu 4: Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \leq t \leq 10$$

số , trong đó thời gian t được tính bằng giây. Trong 5 giây kể từ khi máu rời tim, thời điểm nào tốc độ thay đổi của huyết áp giảm nhiều nhất

- A. $2(s)$. B. $4(s)$. C. $5(s)$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}(s)$.

Câu 5: Tìm tổng tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường

thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ song song với đường thẳng $y = -\frac{1}{4}x$.

- A. $m = \frac{1}{6}$. B. $m = \frac{2}{3}$. C. $m = -\frac{2}{3}$. D. $m = 1$.

Câu 6: Cho Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; -2; 3)$ và $\vec{b} = (-1; 3; 0)$.

Vector $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ có tọa độ là

- A. $(1; 7; 2)$. B. $(1; 5; 2)$. C. $(3; 7; 2)$. D. $(1; -1; 6)$.

Câu 7: Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$. B. $\vec{OG} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$.
C. $\vec{AG} = \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$. D. $\vec{AG} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$.

Câu 8: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh AB và G là trọng tâm của tam giác BCD . Đặt $\vec{AB} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c}, \vec{AD} = \vec{d}$. Phân tích véc tơ $\vec{MG}$ theo $\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}$.

- A. $\vec{MG} = -\frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$. B. $\vec{MG} = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$.
C. $\vec{MG} = -\frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$. D. $\vec{MG} = -\frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{d}$.

Câu 9: Tỷ lệ trẻ em suy dinh dưỡng (tính theo cân nặng ứng với độ tuổi) của 10 tỉnh thuộc Đồng bằng sông Hồng được cho như sau:

5,5 13,8 10,2 12,2 11,0 7,4 11,4 13,1 12,5 13,4.

Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là

- A. 11,05 . B. 11,04 . C. 11,03 . D. 11,06 .

Câu 10: Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp $12A$ được cho ở bảng sau:

Khoảng điểm	$[6,5;7)$	$[7;7,5)$	$[7,5;8)$	$[8;8,5)$	$[8,5;9)$	$[9;9,5)$	$[9,5;10)$
Tần số	8	10	16	24	13	7	4

Số trung vị (làm tròn đến hàng phần trăm) của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. 7,15 . B. 9,15 . C. 10,15 . D. 8,15 .

Câu 11: Cho $\cos a = -\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} < a < \pi \right)$. Tính $\sin 2a$

- A. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. B. $\frac{-4\sqrt{2}}{9}$. C. $\frac{-2\sqrt{2}}{9}$. D. $\frac{2\sqrt{2}}{9}$.

Câu 12: . Số nghiệm của phương trình $8 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \sin 12x$ trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ là:

- A. 15 . B. 16 . C. 17 . D. 18 .

$$\log_2 x = 6 \log_4 a - 4 \log_2 \sqrt{b} - \log_{\frac{1}{2}} c$$

Câu 13: Biết đúng. với a, b, c là các số thực dương bất kì. Tìm kết luận

- A. $x = \frac{a^3}{b^2 c}$. B. $x = a^3 - b^2 + c$. C. $x = \frac{a^3 c}{b^2}$. D. $x = \frac{ac^3}{b^2}$.

Câu 14: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$. Tính tổng $S = x_1 + x_2$.

- A. $S = 1$. B. $S = 4$. C. $S = 9$. D. $S = 10$

Câu 15: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội âm, biết $u_3 = 12$, $u_7 = 192$. Tìm u_{10} .

- A. $u_{10} = 1536$. B. $u_{10} = -1536$. C. $u_{10} = 3072$. D. $u_{10} = -3072$

Câu 16: Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3^n} \end{cases}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng tổng quát của dãy (u_n) là

- A. $3 - \frac{1}{3^n}$. B. $\frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{3^{n-2}} \right)$. C. $3 - \frac{1}{3^{n+1}}$. D. $\frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{3^{n-1}} \right)$.

Câu 17: Cho dãy số (u_n) có $u_n = \frac{(3n-2)(n+1)}{2n^2-3}$, với $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{2}$. D. -1 .

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2-2x}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x < 1 \\ 2mx^2 + mx - 2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 1$.

- A. $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = -\frac{1}{2}$. D. $m = 1$.

Câu 19: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $BC = 2a$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BB'C)$ bằng 30° . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\sqrt{2}a^3$. B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. C. $\sqrt{6}a^3$. D. $2a^3$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 21: Từ 7 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau?

A. 7^4 . B. P_7 . C. C_7^4 . D. A_7^4 .

Câu 22: Trong kỳ thi KSCL các môn thi THPT QUỐC GIA dành cho khối 12 của trường THPT Xuân Trường có tất cả 10 phòng thi. Có 7 em học sinh lớp 11 cũng đăng kí dự thi. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 7 em học sinh này vào phòng thi nếu một phòng thi có 3 em và hai phòng thi mỗi phòng có 2 em.

A. 151200 . B. 75600 . C. 37800 . D. 302400 .

Câu 23: Hai xạ thủ cùng bắn mỗi người một viên đạn vào bia một cách độc lập với nhau. Xác suất bắn trúng bia của hai xạ thủ lần lượt là $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{3}$. Tính xác suất của biến cố có ít nhất một xạ thủ không bắn trúng bia.

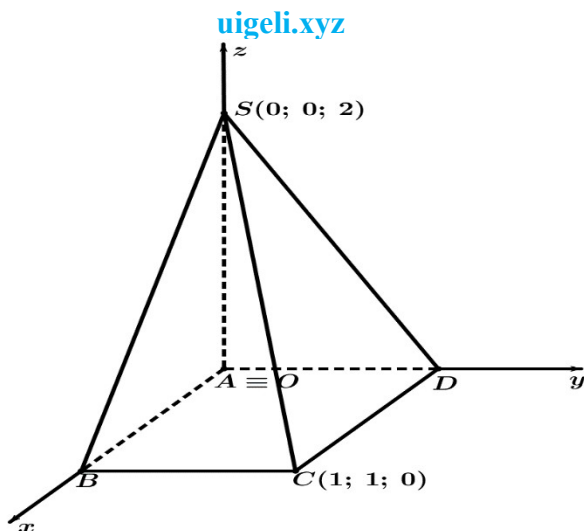
A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 24: Cô Hà gửi 500 triệu vào ngân hàng với kì hạn cố định 12 tháng và hưởng lãi suất 0,65% / tháng. Tuy nhiên sau khi gửi được tròn 8 tháng cô phải dùng đến 500 triệu trên. Cô đến ngân hàng định rút tiền thì được nhân viên ngân hàng tư vấn: “Nếu rút tiền trước kì hạn, toàn bộ số tiền cô gửi chỉ có lãi suất không kỳ hạn là 0,02% / tháng. Cô nên thế chấp sổ tiết kiệm đó tại ngân hàng để vay ngân hàng 500 triệu với lãi suất 0,7% / tháng. Khi sổ của cô đến kì hạn, cô có thể rút tiền để trả nợ ngân hàng”. Nếu làm theo tư vấn của nhân viên ngân hàng cô Hà sẽ đỡ thiệt một số tiền gần nhất với con số nào dưới đây (biết ngân hàng tính lãi theo thể thức lãi kép).

A. 25,385 triệu đồng. B. 25,253 triệu đồng.
C. 25,447 triệu đồng. D. 25,477 triệu đồng.

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Biết điểm $S(0;0;2)$ và $C(1;1;0)$. Về hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với điểm A , các điểm B, D, S lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz (hình vẽ bên dưới).



- a) Tọa độ vector $\overrightarrow{SC} = (1; 1; -2)$.
- b) Chu vi tam giác SBC là $p = \sqrt{11} + 1$.
- c) Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAD là điểm $I\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$.
- d) Biết điểm $H(x; y; z)$ là tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh B của tam giác SBD . Tính $x + y + z = -\frac{2}{5}$.

Câu 26: Nhà đầu tư theo dõi doanh thu bán một loại sản phẩm của hai cửa hàng bán lẻ trong 5 năm. Số liệu thu được thống kê ở bảng sau:

Số tiền doanh thu (triệu đồng)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)
Số tháng của cửa hàng A	5	15	25	10	5
Số tháng của cửa hàng B	10	10	20	10	10

- a) Doanh thu trung bình thu được của cửa hàng B là $\frac{265}{12}$ triệu đồng.
- b) Tứ phân vị thứ hai của bảng số liệu cửa hàng A là: $Q_2 = 22$.
- c) Một của cửa hàng A là $M_o = 22$.
- d) Doanh thu hàng tháng của cửa hàng B biến động lớn hơn cửa hàng A .

Câu 27: Cho hai hàm số $f(x) = \log_2 x$ và $g(x) = 2^x$. Các phát biểu sau đây đúng hay sai

- a) Hàm số $u(x) = f(x) + g(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- b) Phương trình $f\left(\frac{2^x - 1}{|x|}\right) + g(x) = 1 + x$ có chỉ hai nghiệm dương.

- c) Hàm số $f\left([g(x) - 1]^2\right)$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

d) Phương trình $f(x+1) - f(x+2) + \frac{1}{\ln 2^{(x+2)}} = m$ có 1 nghiệm duy nhất khi m không dương.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O và

$$AB = a, BC = a\sqrt{3}, SA = SB = SC = SD = 2a. \text{ Gọi } M \text{ là điểm thỏa mãn } \overrightarrow{SM} = 3\overrightarrow{MB}.$$

a) SO là chiều cao của hình chóp $S.ABCD$.

b) Thể tích của khối tứ diện $MABC$ bằng $\frac{3}{8}a^3$.

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB bằng $\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

d) Mặt phẳng đi qua AM song song với đường thẳng BD chia khối chóp $S.ABCD$ thành 2 khối.

Gọi V_1 là thể tích khối chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối còn lại. Khi đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{11}$.

Câu 29: Một bộ bài tú lơ khơ có 52 lá, rút ngẫu nhiên lần lượt 3 lần, mỗi lần rút 1 lá, sau mỗi lần rút ta đều để lại lá bài đó vào bộ.

Xét các biến cố A, B, C sau đây:

A : "Lần thứ nhất rút được con Át"

B : "Lần thứ hai rút được con Át"

C : "Lần thứ 3 rút được con K "

Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

a) Hai biến cố A và B độc lập.

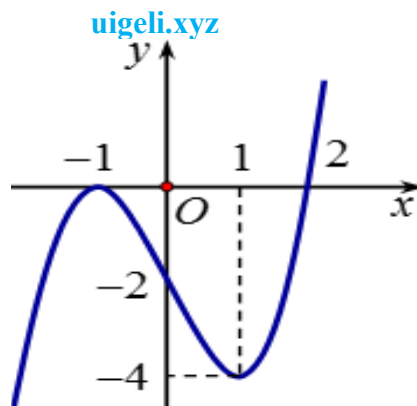
b) Số phần tử của không gian mẫu bằng 2704.

c) Xác suất lần thứ hai rút được con Át là $\frac{1}{52}$.

d) Xác suất để hai lần đầu rút được lá bài Át và lần thứ ba rút được lá bài K là $\frac{1}{2197}$.

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm bậc 4 có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ sau là đồ thị hàm số $y = f'(x)$.



Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

Câu 31: Do lưu lượng nước từ thượng nguồn sông Đồng Nai đổ về lớn, trong khi hồ chứa đã tích gần đạt độ cao công trình thiết kế, do đó công ty thủy điện Trị An đã xả nước điều tiết qua đập tràn. Tổng lượng nước xả xuống hạ lưu sông Đồng Nai trong một giây để đảm bảo an toàn nhất cho hạ lưu

được tính bởi công thức $F(x) = \frac{1}{1700}x^2(225 - x)$, trong đó x là lưu lượng nước xả qua đập tràn trong một giây (x được tính bằng đơn vị m^3). Lưu lượng nước x xả qua đập tràn là bao nhiêu để tổng lượng nước xả xuống hạ lưu sông Đồng Nai trong một giây là nhiều nhất?

Câu 32: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1})$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \frac{x}{y}$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi I là điểm thuộc đoạn SO

sao cho $SI = \frac{1}{3}SO$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua B và I . Mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SC, SD lần lượt tại M, N, P . Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$. Tính $\frac{m}{n}$ (làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 34: Có ^{3} chiếc xe ô tô màu đỏ, ^{2} ô tô màu vàng, ^{1} ô tô màu xanh cùng đỗ bên đường. Hỏi có bao nhiêu cách để không có ^{2} chiếc xe cùng màu nào đỗ cạnh nhau.



Câu 35: Bên trong một căn nhà bỏ hoang hình lập phương thể tích $1000 m^3$ có 3 chú nhện rất hay cãi vã nên phải sống riêng. Mùa đông đến, vì đói rét nên chúng đành quyết định hợp tác với nhau giăng lưới để bắt mồi. Ba chú nhện tính toán sẽ giăng một mảnh lưới hình tam giác theo cách sau: Mỗi chú nhện sẽ đứng ở mép tường bất kì (có thể mép giữa ^{2} bức tường, giữa tường với trần, hoặc giữa tường với nền) rồi phóng những sợi tơ làm khung đến vị trí của ^{2} con nhện còn lại rồi sau đó mới

phóng tơ dính đan phần lưới bên trong. Nhưng vì vốn đã có hiểm khích từ lâu, nên trước khi bắt đầu, chúng quy định để tránh xô xát, không có bất kì ² con nhện nào cùng nằm trên một mặt tường, nền hoặc trần nhà. Tính chu vi nhỏ nhất của mảnh lưới được giăng, biết các sợi tơ khung căng và không chùng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

ĐỀ 3**ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI****MÔN: TOÁN 12**

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 24. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 3)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

- A. $\frac{8}{3}$.
- B. $\frac{10}{3}$.
- C. $\frac{11}{3}$.
- D. Không tồn tại m .

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} - \sqrt{(x+1)(3-x)}$ bằng $\frac{a}{b}$ (với b là số nguyên và

- a là số nguyên âm, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T = a + b$.
- A. 2.
 - B. -4.
 - C. -2.
 - D. -3.

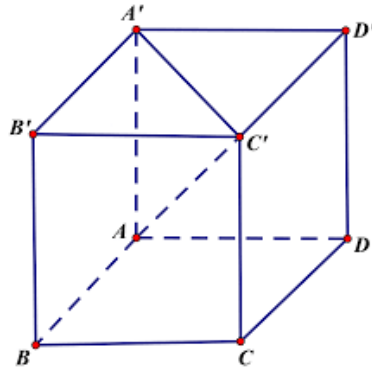
Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{-1+2x}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị (C) . Lấy điểm $M(x_0, y_0)$ ($x_0 \leq 0$) là một điểm trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại A, B thỏa mãn $AI^2 + IB^2 = 24$. Hỏi có tất cả bao nhiêu điểm M thỏa mãn đề bài?

- A. 4.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 1.

Câu 5: Một chú cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách 400 km. Vận tốc dòng nước là 5 km/h. Nếu vận tốc bơi của con cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun. Giả sử $c = 0,5$ hãy tính năng lượng tiêu hao tối thiểu của chú cá hồi.

- A. 40250 jun B. 33750 jun C. 25960 jun D. 36450 jun

Câu 6: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, trong đó mặt đáy là hình bình hành với $\angle DAB = 120^\circ$. Biết độ dài các cạnh $AB = 25$ cm, $AD = 12$ cm và $AA' = 12$ cm. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}|$.



- A. 12 cm B. $\sqrt{469}$ cm C. $\sqrt{613}$ cm D. 25 cm

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(-1;-1;-3)$ B. $(3;1;1)$ C. $(1;1;3)$ D. $(3;3;-1)$

Câu 8: Cho tứ giác $ABCD$ biết $A(0;-2;1)$, $B(1;3;-2)$, $C(1;0;0)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $D(0;-5;3)$ B. $D(0;5;3)$ C. $D(1;5;-3)$ D. $D(0;-5;-3)$

Câu 9: Điều tra về chiều cao của học sinh khối lớp 11, ta có kết quả sau:

Nhóm	Chiều cao (cm)	Số học sinh
1	[150;152)	5
2	[152;154)	18
3	[154;156)	40
4	[156;158)	26
5	[158;160)	8
6	[160;162)	3
		$N = 100$

Giá trị đại diện của nhóm thứ tư là

- A. 156,5 B. 157 C. 157,5 D. 158

Câu 10: Thống kê theo độ tuổi số lượng thành viên của một câu lạc bộ người cao tuổi được mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Độ tuổi	[60;65)	[65;70)	[70;75)	[75;80)	[80;85)	[85;90]
Số thành viên	2	7	9	4	2	1

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng

- A. 72,5 . B. 7,5 . C. 20 . D. 9,5 .

Câu 11: Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{2\cos x - 1}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 12: Tổng các nghiệm trên đoạn $[0; 10\pi]$ của phương trình $3\tan^2 x - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$ là

- A. 50π . B. $\frac{65\pi}{3}$. C. $\frac{341\pi}{3}$. D. 221π .

Câu 13: Cho các số dương a, b, c và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $\log_a b + \log_a c = \log_a (b+c)$. B. $\log_a b + \log_a c = \log_a |b-c|$.
 C. $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$. D. $\log_a b + \log_a c = \log_a (b-c)$.

Câu 14: Tập nghiệm của phương trình $4^{x-x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ là:

- A. $\left\{0; \frac{2}{3}\right\}$. B. $\left\{0; \frac{3}{2}\right\}$. C. $\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$. D. $\{0; 2\}$.

Câu 15: Cho cấp số cộng (u_n) : 1; 4; 7; 10. Số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng là

- A. $u_n = 3n + 1$. B. $u_n = 3n - 2$. C. $u_n = n + 3$. D. $u_n = n - 3$.

Câu 16: Cho dãy số (u_n) xác định $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Khi đó u_{2018} bằng

- A. 2018. B. 10^{2018} . C. $10^{2018} + 2018$. D. 2018^{2018} .

Câu 17: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow m} \frac{x^2 - m^2}{x - m}$ bằng

- A. $2m$. B. $+\infty$. C. m . D. 0 .

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m^2 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ liên tục tại}$$

Câu 18: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên để hàm số $x = 1$. Số phần tử của S là:

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$,

$SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SBD) bằng

- A. 90° . B. 45° . C. 30° . D. 60° .

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. M là điểm trên cạnh AD sao cho BM vuông góc với AC tại H và $AB > AM$, cạnh SH vuông góc

với mặt phẳng đáy, góc $\angle BSH = 45^\circ$. Biết $AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$, $BM = a\sqrt{5}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{16a^3}{3\sqrt{5}}$. B. $\frac{32a^3\sqrt{5}}{15}$. C. $\frac{32a^3}{\sqrt{5}}$. D. $\frac{8a^3\sqrt{5}}{5}$.

Câu 21: Một lớp có 35 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh làm ban sự lớp.

- A. A_{35}^3 . B. C_{15}^3 . C. C_{20}^3 . D. C_{35}^3 .

Câu 22: Trong buổi sinh hoạt nhóm của lớp, tổ một có 12 học sinh gồm 4 học sinh nữ trong đó có Hoa và 8 học sinh nam trong đó có Vinh. Chia tổ thành 3 nhóm, mỗi nhóm gồm 4 học sinh và phải có ít nhất 1 học sinh nữ. Xác suất để Hoa và Vinh cùng một nhóm là

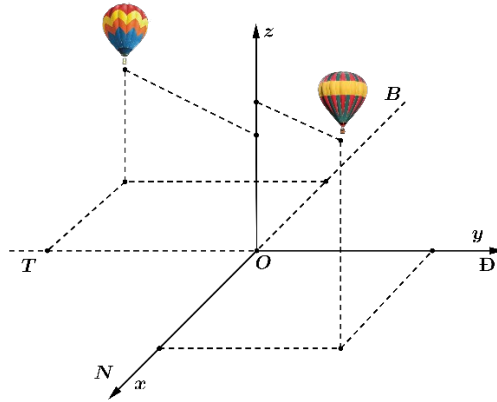
- A. 1470. B. 1471. C. 1472. D. 1473.

Câu 23: Trong kỳ thi THPT Quốc Gia, thí sinh An dự thi môn thi trắc nghiệm Toán. Đề thi gồm 50 câu hỏi; mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn; trong đó có 1 phương án đúng, làm đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Bạn An làm chắc chắn đúng 42 câu, trong 8 câu còn lại chỉ có 3 câu bạn loại trừ được mỗi câu một đáp án chắc chắn sai. Do không còn đủ thời gian nên An bắt buộc phải khoanh bừa các câu còn lại. Xác suất bạn An được 9,4 điểm là

- A. 1536. B. 13824. C. 3456. D. 13824.

Câu 24: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2,5 km về phía nam và 2 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1,5 km về phía bắc và 3 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,6 km. Người ta cần tìm một vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu cho hai khinh khí cầu sao cho tổng

khoảng cách từ vị trí đó tới hai khinh khí cầu nhỏ nhất. Giả sử vị trí cần tìm cách địa điểm hai khinh khí cầu bay lên là a km theo hướng nam và b km theo hướng tây. Tính tổng $2a + 3b$.



- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0); B(2;0;0); D(0;3;0); A'(0;0;4)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a). Điểm C' có tọa độ là $C'(2;3;4)$.
- b). Biết điểm E trong không gian thỏa mãn tứ giác $A'C'BE$ là hình bình hành. Khi đó $E\left(0; -\frac{3}{2}; 0\right)$
- c). Diện tích của tam giác $A'BD$ bằng $\sqrt{61}$.
- d). Cosin góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(CB'D')$ bằng $\frac{43}{61}$.

Câu 26: Nhân dịp khám sức khỏe học sinh đầu năm, người ta đo chiều cao của các học sinh (đơn vị: cm) của hai lớp $12A$ và $12B$ được cho như sau:

Chiều cao (cm)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)
Số học sinh lớp 12A	4	5	12	16	3
Số học sinh lớp 12B	2	2	13	18	5

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau

- a) Chiều cao trung bình của học sinh lớp $12A$ là $163,625$.
- b) Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm (làm tròn đến hàng đơn vị) về chiều cao của học sinh lớp $12A$ là $M_e \approx 164$.

- c) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của học sinh lớp 12B (làm tròn đến hàng đơn vị) là $M_o = 166$.
- d) Sự biến động về chiều cao trung bình của học sinh lớp 12A nhỏ hơn sự biến động về chiều cao trung bình của lớp 12B.

Câu 27: Cho phương trình $\log_2^2 x + 2m \log_2 x - m + 2 = 0$ với m là tham số.

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Điều kiện xác định của phương trình là $x > 0$.
- b) Với $m = -3$ thì tổng tất cả các nghiệm của phương trình là 6.
- c) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-2 < m < 1$.
- d) Phương trình có đúng một nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{1}{4}; 8\right)$ khi và chỉ khi $m \in \{-2; 1\}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Khi đó:

- a) $AD \parallel (SBC)$
- b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB thì $AH \perp BC$
- c) Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng: $\frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$

- d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AB bằng: $\frac{2a\sqrt{5}}{10}$

Câu 29: Cho một hộp chứa 200 thẻ được đánh số từ 1 đến 200. Gọi A, B lượt là hai biến cố chọn được thẻ chẵn và thẻ chia hết cho 3

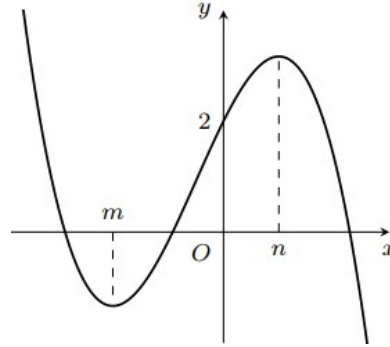
- a) A, B là hai biến cố xung khắc.
- b) Xác suất của biến cố B bằng $\frac{33}{100}$.
- c) Xác suất của biến cố chia hết cho 2 hoặc chia hết cho 3 bằng $\frac{137}{200}$.
- d) Xác suất của biến cố chia hết cho 2 và không chia hết cho 3 bằng $\frac{67}{200}$.

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+1)x^2 - (m-2)x + 3$$

Câu 30: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+1)x^2 - (m-2)x + 3$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.

Câu 31: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ.



Biết rằng $e > n$. Số điểm cực đại của hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ bằng

$$3^{x^2-2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2-2x+3}(2|x-m|+2)$$

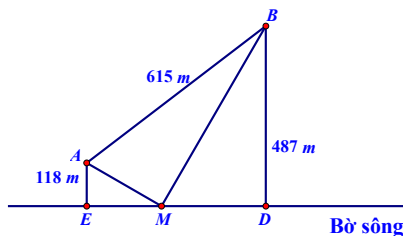
Câu 32: Cho phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2-2x+3}(2|x-m|+2)$, m là tham số thực. Tính tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình có đúng ba nghiệm phân biệt?

Câu 33: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D . Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai

khối đa diện, trong đó khối chứa điểm A có thể tích V . Khi đó $V = \frac{m\sqrt{2}}{n}$ ($m, n \in \mathbf{Z}, \frac{m}{n}$ tối giản). Tính $m.n$?

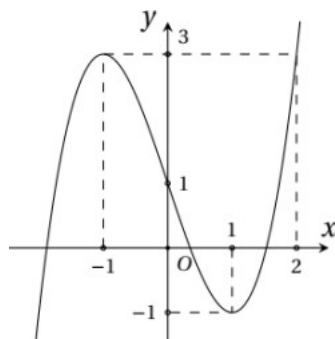
Câu 34: Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau có tích các chữ số của số đó chia hết cho 6?

Câu 35: Cho hai vị trí A, B cách nhau $615m$, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là $118m$ và $487m$. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B . Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là bao nhiêu mét? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 24. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

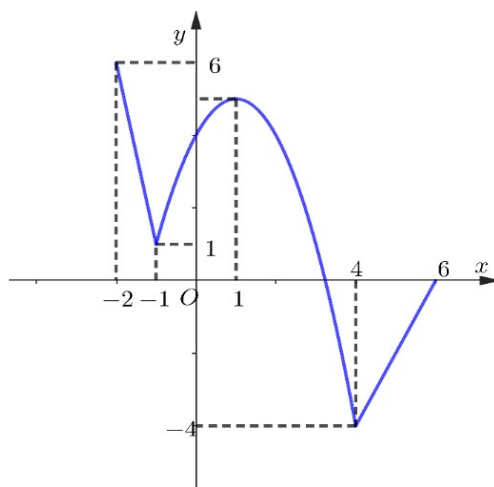
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

- A. $x = -1$. B. $(1; -1)$. C. $x = 1$. D. $(-1; 3)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 6]$. Tính giá trị của $T = 2M + 3m$.



- A. 16. B. 0. C. 7. D. -2.

Câu 3: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 2}$ tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích S bằng

- A. $S = \frac{2}{3}$. B. $S = \frac{4}{3}$. C. $S = \frac{8}{3}$. D. $S = \frac{1}{3}$.

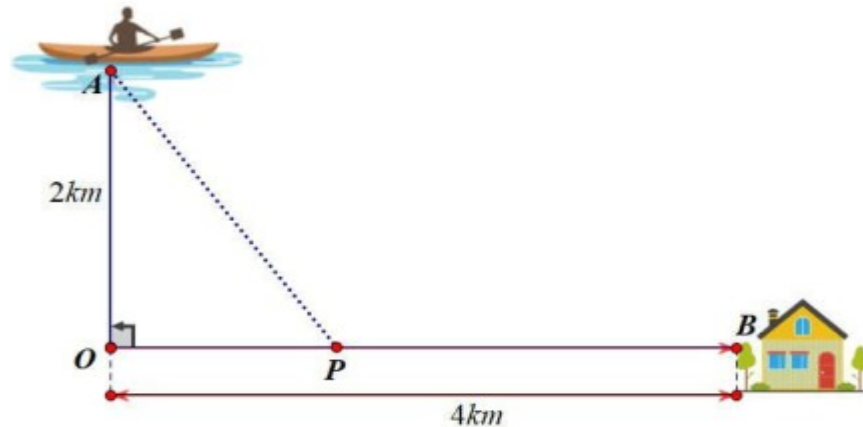
Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ:

	uigeli.xyz			
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'	$+$	$ $	$-$ 0 $+$	
y	$-\infty$	2	$+\infty$ -4	$+\infty$

Phương trình $|f(1 - 2 \sin x)| = 3$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 5: Anh Bình đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông 2 km , anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm B tọa lạc ven bờ sông, B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là 4 km (hình vẽ). Biết rằng anh Bình chèo thuyền với vận tốc 6 km/h và chạy bộ trên bờ với vận tốc 10 km/h . Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Bình từ vị trí xuất phát đến được điểm B là



- A. 44 phút. B. 30 phút. C. 40 phút. D. 38 phút.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 0)$ và vector $\overrightarrow{MN} = (1; -1; 0)$. Tìm tọa độ của điểm N.

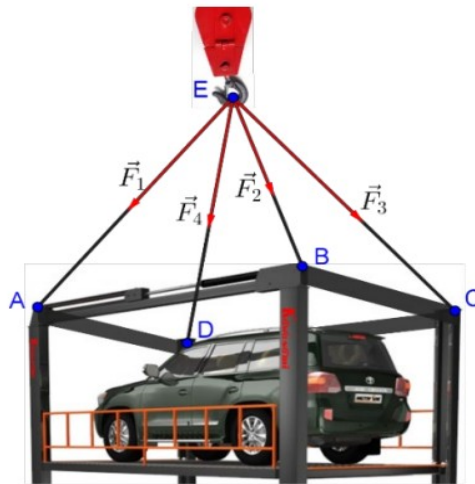
- A. $N(3; -2; 0)$ B. $N(-4; -2; 0)$ C. $N(-2; 0; 0)$ D. $N(2; 0; 0)$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k} - 4\vec{j}$ và $\vec{b} = (m - n; 4m - 6n; n^2 - 3m + 2)$, với m, n là tham số. Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì hiệu $(m - n)$ bằng:

- A. 9. B. -9. C. 1. D. -1.

Câu 8: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° (như hình vẽ). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là $5000\sqrt{3}$

$5000\sqrt{3}$ (N) và trọng lực của khung sắt là 3000 (N). Trọng lượng của ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị) bằng:



- A. 30000 (N). B. 27000 (N). C. 33000 (N). D. 14321 (N).

Câu 9: Để khảo sát kết quả thi tuyển sinh môn Toán trong kì thi tuyển sinh

đại học năm vừa qua của một trường A , người điều tra chọn một mẫu gồm 100 học sinh tham gia kì thi tuyển sinh đó. Điểm môn Toán (thang điểm 10) của các học sinh này được cho bởi bảng phân bố tần số dưới đây. Hãy tìm một của mẫu số liệu?

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	N=100

- A. $M_o = 7$. B. $M_o = 5$. C. $M_o = 8$. D. $M_o = 4$.

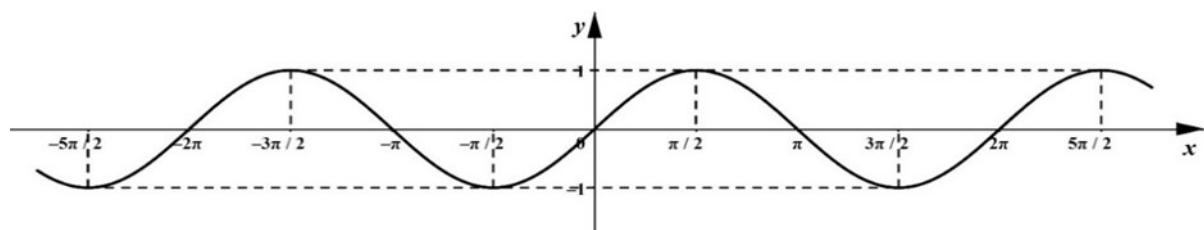
Câu 10: Điều tra ^{42} học sinh của một lớp ^{11} về số giờ tự học ở nhà, người ta có bảng sau đây:

Lớp (Số giờ tự học)	Tần số
$[1; 2)$	8
$[2; 3)$	10
$[3; 4)$	12
$[4; 5)$	9
$[5; 6)$	3

Số trung vị của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào?

- A. $(1; 2)$. B. $(3; 4)$. C. $(2; 3)$. D. $(4; 5)$.

Câu 11: Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây? Biết đồ thị hàm số như hình sau



- A. $(0; \pi)$. B. $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. C. $(-2\pi; -\pi)$. D. $\left(-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right)$.

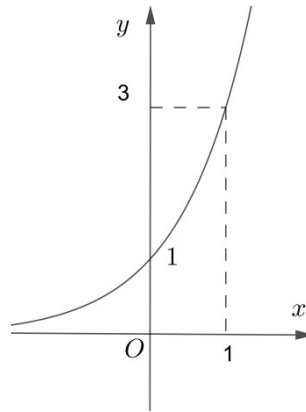
Câu 12: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố X ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182} (t - 80) \right] + 12, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad 0 < t \leq 365.$$

Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

- A. 171. B. 11. C. 364. D. 193.

Câu 13: Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



- A. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. B. $y = 3^x$. C. $y = \log_3 x$. D. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Câu 14: Chị Lan có 400 triệu đồng mang đi gửi tiết kiệm ở hai loại kì hạn khác nhau đều theo hình thức lãi kép. Chị gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý (3 tháng) với lãi suất 2,1% một quý, 200 triệu đồng còn lại chị gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Sau khi gửi được đúng 1 năm, chị rút ra một nửa số tiền cả gốc và lãi ở loại kì hạn theo quý và gửi vào loại kì hạn theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, chị Lan thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi (làm tròn đến hàng nghìn)?

- A. 79760000 đồng. B. 74813000 đồng.
C. 65393000 đồng. D. 70656000 đồng.

Câu 15: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Số hạng tổng quát u_n ($n \geq 2$) bằng

A. $3 \cdot 2^n$. B. $3 \cdot 2^{n+2}$. C. $3 \cdot 2^{n+1}$. D. $3 \cdot 2^{n-1}$.

Câu 16: Khi một vận động viên nhảy dù nhảy ra khỏi máy bay, giả sử quãng đường người ấy rơi tự do (tính theo feet) trong mỗi giây liên tiếp theo thứ tự trước khi bung dù lần lượt là: 16; 48; 80; 112; 144; ... (các quãng đường này tạo thành cấp số cộng). Tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên là



- A. 1600 feet. B. 1520 feet. C. 3200 feet. D. 1760 feet.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^5 - 2n^3 + 1}{4n^5 + 2n^2 + 1}$$

Câu 17: Tìm

- A. 2. B. 8. C. 1. D. 4.

Câu 18: Phương trình $3x^5 + 5x^3 + 10 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng nào sau đây.

- A. $(-2; -1)$. B. $(-10; -2)$. C. $(0; 1)$. D. $(-1; 0)$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , $SA = a\sqrt{7}$ và SA vuông góc với đáy. Gọi α là góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\cos \alpha$.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

- A. $\frac{a\sqrt{42}}{10}$. B. $\frac{a\sqrt{42}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{42}}{12}$. D. $\frac{a\sqrt{42}}{8}$.

Câu 21: Trong đội văn nghệ nhà trường có 8 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để biểu diễn 1 tiết mục văn nghệ là đơn ca hoặc song ca nam - nữ.

- A. 48. B. 25. C. 62. D. 50.

Câu 22: Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 2 quyển sách Ngữ Văn, 3 quyển sách Tiếng Anh và 5 Quyển sách Toán thành hàng ngang lên một kệ sách để hai quyển sách cùng môn thì không được sắp xếp kề nhau?

- A. 63360. B. 120960. C. 14400. D. 144000.

Câu 23: Chọn ngẫu nhiên một vé số có 6 chữ số được lập từ các chữ số từ 0 đến 9. Tính xác suất của biến cố “lấy được vé không có chữ số 1 hoặc không có chữ số 5”.

- A. 0,72103. B. 0,43005. C. 0,653002. D. 0,800738.

Câu 24: Người ta cần xây dựng một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật (không nắp) có thể tích là $125m^3$. Đáy bể bơi là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng. Tính chiều rộng của đáy bể bơi để khi thi công tiết kiệm nguyên vật liệu nhất (làm tròn đến hai chữ số thập phân)?

A. 3,12m.

B. 3,82m

C. 3,62m

D. 3,42m

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$ và $C(-4; 7; 5)$.

a) Độ dài cạnh AB là $\sqrt{26}$.

b) Độ dài đường cao $AH = \frac{55}{26}$ của tam giác ABC .

c) Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$.

d) Điểm $M(a; b; 0)$ trên mặt phẳng Oxy sao cho $2MA^2 + 3MB^2 + 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thỏa mãn $a + b = -\frac{7}{3}$.

Câu 26: Kết quả kiểm tra cân nặng của 20 học sinh nam lớp 12A (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của kilôgam) được cho ở Bảng sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[60; 64)	62	8
[64; 68)	66	9
[68; 72)	70	1
[72; 76)	74	1
[76; 80)	78	1
		$n = 20$

Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 20.

b) Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 64.

c) 10 học sinh nam trong lớp có cân nặng hơn 64,89 kg.

d) Biết độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là $\frac{a\sqrt{109}}{b}$ kg ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản).

Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = ax^2 + bx + 5$ là $-\frac{5}{4}$.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x) = \sin x$.

a) Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $[-1; 1]$.

b) Hàm số $y = f(2x)$ tuần hoàn với chu kỳ π .

c) Hàm số $y = f(2x)$ là hàm số lẻ.

d) Có tất cả 1012 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2024f\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình chữ nhật tâm O với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, biết $SA = SB = SO = a$.

a) Diện tích đáy chóp bằng $a^2\sqrt{3}$.

b) Góc giữa hai đường thẳng SB và CD bằng 60° .

c) Gọi H là trọng tâm tam giác ABO , ta có $\frac{OH}{AD} = \frac{1}{3}$.

d) Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$, ta có $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

Câu 29: Một nhóm học sinh có 5 học sinh khối 10, 7 học sinh khối 11 và 8 học sinh khối 12. Xét phép thử chọn ngẫu nhiên 6 học sinh từ nhóm học sinh trên.

a) Gọi A là biến cố “chọn được 6 học sinh khối 11” và B là biến cố “chọn được 6 học sinh khối 12”. Khi đó A và B là hai biến cố xung khắc.

b) Số cách chọn ra 6 học sinh trong đó có đúng 3 học sinh ở khối 10 là 10.

c) Xác suất để trong 6 học sinh được chọn có ít nhất 1 học sinh khối 10 là $\frac{505}{1504}$.

d) Tính xác suất để chọn được 6 học sinh có đủ 3 khối và số học sinh khối 11 bằng số học sinh khối 12 ta được kết quả là $\frac{a}{b}$, trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó, $a + b = 1534$.

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

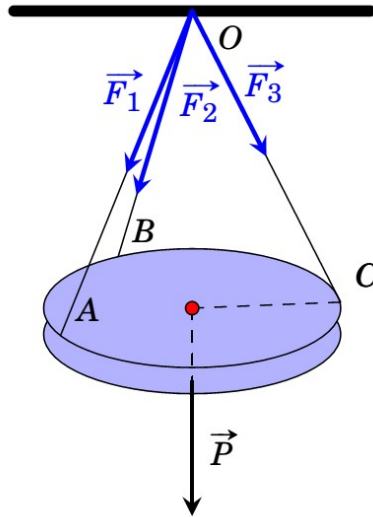
Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(x) = (x - 2)^2(x^2 - 4x + 3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị?

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 + 6x^2 + 2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m; 2)$. Gọi S là tập các giá trị thực của m để qua M kẻ được đúng hai tiếp tuyến với đồ thị (C) . Tính tổng các phần tử của S (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Câu 32: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\log_3(2x^2 + y^2) = \log_7(x^3 + 2y^3) = \log z$. Có bao giá trị nguyên của z để có đúng hai cặp (x, y) thỏa mãn đẳng thức trên?

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành, gọi M và N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MS} = \vec{0}$, $\overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P . Đặt $t = \frac{SP}{SC}$, tính giá trị của biểu thức $t^2 + \frac{71}{16}$?

- Câu 34:** Chọn ngẫu nhiên 2 đỉnh của một hình đa giác đều 12 cạnh nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Tính xác suất để khoảng cách giữa hai đỉnh đó bằng $R\sqrt{2}$ (làm tròn đến hàng phần trăm).
- Câu 35:** Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15 \text{ (N)}$. Trọng lượng của chiếc đèn tròn đó xấp xỉ bằng bao nhiêu?



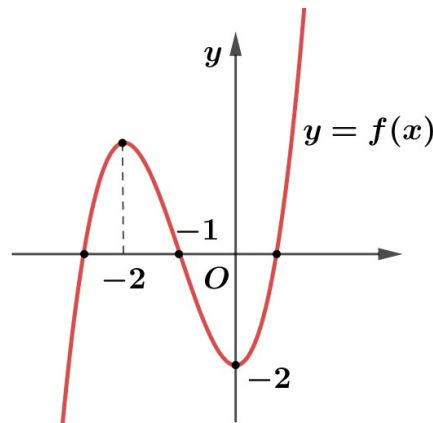
ĐỀ 5

ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI

MÔN: TOÁN 12

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 24. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?



- A. $(-2; 0)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(-2; +\infty)$. D. $(0; +\infty)$.

- Câu 2:** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

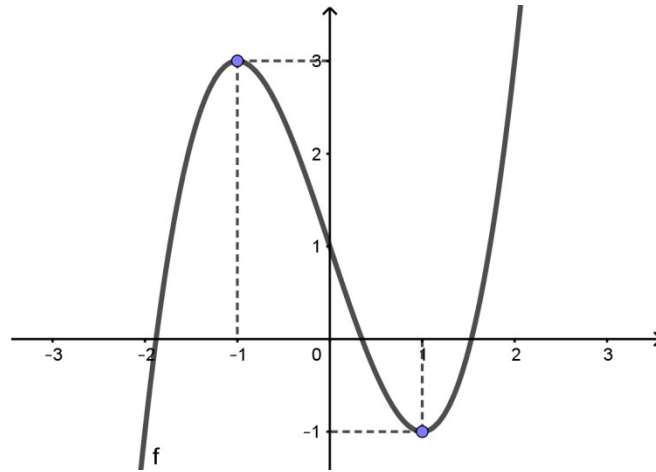
- A. $m = 1$. B. $m = -7$. C. $m = 5$. D. $m = -1$.

$$y = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - mx - 3m}}$$

Câu 3: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận đứng.

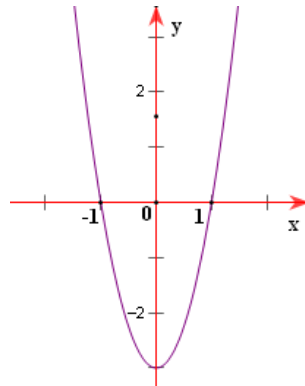
- A. $\left(0; \frac{1}{2}\right]$. B. $(0; +\infty)$. C. $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$. D. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(\sin x - \cos x) = \frac{m}{4}$ có đúng 8 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0; 4\pi]$



- A. 7. B. 8. C. 9. D. 13.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới và $f(1) = -5; f(3) = 15$.



Xét hàm số $g(x) = |f(x) + m|$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của tập S có giá trị bằng

- A. 10. B. -8. C. 8. D. -10.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; 3)$, $\vec{b} = (0; -2; 1)$. Côsin của góc giữa hai vectơ đã cho bằng

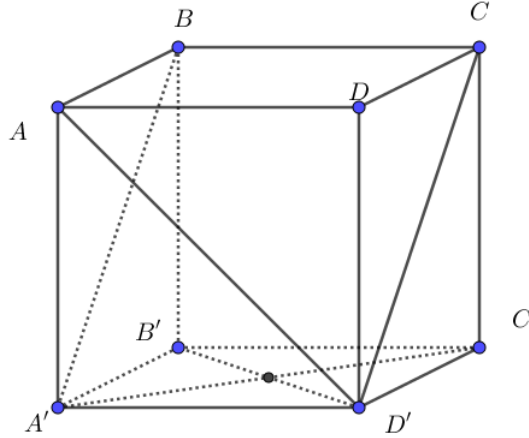
A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{70}}$

B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{\sqrt{70}}$

C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$

Câu 7: Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{BA'}$.



A. $\sqrt{6}a$

B. $\sqrt{5}a$

C. $2\sqrt{3}a$

D. $3\sqrt{2}a$

Câu 8: Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng $m \text{ kg}$ được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\angle ASC = 90^\circ$. Biết độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích là $5\sqrt{2}N$. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$, khi đó giá trị của m bằng bao nhiêu?

A. 3

B. 4

C. 2

D. 5

Câu 9: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về cân nặng và số người như bảng sau.

Cân nặng	[35;42)	[42;49)	[49;56)	[56;63)	[63;70)
Số người	14	3	1	35	31

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là

A. 68,8

B. 60,8

C. 62,8

D. 57,8

Câu 10: Điểm kiểm tra cuối học kỳ môn Toán của hai tổ học sinh lớp 10A như sau:

Tổ 1: 8 6 6 7 3 7 5 9 6

Tổ 2: 4 10 7 3 8 6 4 5 2 6

So sánh khoảng tứ phân vị của tổ 1 (Δ_Q) và khoảng tứ phân vị của tổ 2 (Δ'_Q).

A. $\Delta_Q < \Delta'_Q$

B. $\Delta_Q > \Delta'_Q$

C. $\Delta_Q = \Delta'_Q$

D. Không so sánh được.

Câu 11: Rút gọn $M = \sin(x - y)\cos y + \cos(x - y)\sin y$.

- A. $M = \cos x$. B. $M = \sin x$.
C. $M = \sin x \cos 2y$. D. $M = \cos x \cos 2y$.

Câu 12: Tập giá trị của tham số m để phương trình $\sin x + 2m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(0; \frac{5\pi}{6}\right)$ là $m \in (a; b)$. Khi đó $a - b$ bằng?

- A. 4. B. $\frac{1}{4}$. C. -4. D. $-\frac{1}{4}$.

Câu 13: Cho các số dương a, b, c và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $\log_a b + \log_a c = \log_a (b + c)$. B. $\log_a b + \log_a c = \log_a |b - c|$.
C. $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$. D. $\log_a b + \log_a c = \log_a (b - c)$.

$$4^{x-x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Câu 14: Tập nghiệm của phương trình là:

- A. $\left\{0; \frac{2}{3}\right\}$. B. $\left\{0; \frac{3}{2}\right\}$. C. $\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$. D. $\{0; 2\}$.

Câu 15: Cho cấp số cộng (u_n) : $1; 4; 7; 10$. Số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng là

- A. $u_n = 3n + 1$. B. $u_n = 3n - 2$. C. $u_n = n + 3$. D. $u_n = n - 3$.

Câu 16: Cho dãy số (u_n) xác định $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Khi đó u_{2018} bằng

- A. 2018. B. 10^{2018} . C. $10^{2018} + 2018$. D. 2018^{2018} .

Câu 17: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow m} \frac{x^2 - m^2}{x - m}$ bằng

- A. $2m$. B. $+\infty$. C. m . D. 0.

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m^2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

liên tục tại

Câu 18: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên để hàm số $x = 1$. Số phần tử của S là:

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, biết $AB = 4a, SB = 6a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V . Tỷ số $\frac{a^3}{3V}$ là

- A. $\frac{\sqrt{5}}{80}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{40}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{20}$. D. $\frac{3\sqrt{5}}{80}$.

Câu 20: Người ta dự định đào một hầm rượu có dạng hình chóp cắt đều có hai cạnh đáy là 7m và 5m. Mặt bên tạo với đáy nhỏ thành một góc nhị diện có số đo bằng 120° . Số mét khối đất cần phải di chuyển ra khỏi hầm gần bằng với kết quả nào dưới đây?

- A. 60,82 . B. 64,24 . C. 62,93 . D. 58,94 .

Câu 21: Có bao nhiêu cách chọn một học sinh từ một nhóm gồm 7 học sinh nam và 8 học sinh nữ?

- A. 8 . B. 15 . C. 56 . D. 7 .

Câu 22: Từ các chữ số $6, 7, 8$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số sao cho mỗi chữ số có mặt hai lần và không có chữ số nào giống nhau đứng cạnh nhau.

- A. 18 . B. 76 . C. 30 . D. 36 .

Câu 23: Cho tập $H = \{n \in \mathbb{N}^* | n \leq 100\}$. Chọn ngẫu nhiên ba phần tử thuộc tập H . Tính xác suất để chọn được ba phần tử lập thành một cấp số cộng.

- A. $\frac{1}{132}$. B. $\frac{2}{275}$. C. $\frac{1}{66}$. D. $\frac{4}{275}$.

Câu 24: Nam bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 4 500 000 đồng một tháng. Cứ sau 3 năm thì Nam được tăng lương 33% . Hỏi sau tròn 25 năm đi làm tổng tiền lương Nam nhận được là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

- A. 5 901 519 000 . B. 4 315 428 000 .
C. 3 651 575 000 . D. 4 844 125 000 .

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(2;3;-1), B(-1;0;2)$ và $C(0;-2;1)$.

- a) Tam giác ABC vuông tại B .
b) Tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình chữ nhật là $D(3;1;-2)$.
c) Có đúng một điểm M thuộc trục Oy để $AM = \sqrt{30}$.
d) Có đúng một điểm E thuộc trục Oz để $\cos \angle EAC = \frac{2\sqrt{33}}{33}$.

Câu 26: Thời gian sử dụng điện thoại trong một ngày của 30 sinh viên được tổng hợp lại ở mẫu số ghép nhóm trong bảng sau (đơn vị: phút).

Thời gian (phút)	[0;60)	[60;120)	[120;180)	[180;240)	[240;300)
Số sinh viên	2	7	7	10	4

Với các kết quả tính toán được làm tròn đến hàng phần mười thì:

- a) Số trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là 150.
- b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\Delta Q = 111,9$.
- c) Một của mẫu số liệu là 210,5.
- d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 4724.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(t) = 92 - 20 \ln(t+1)$.

- a) Tập xác định của hàm số là $D = (-1; +\infty)$.
- b) Tập nghiệm của bất phương trình $f(t) \geq 72$ là $S = (-\infty; e-1]$.
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- d) Một nghiên cứu chỉ ra rằng sau khi tham gia một khoá học, phần trăm kiến thức sinh viên còn nhớ sau t tháng kết thúc khoá học được xác định bởi: $f(t) = 92 - 20 \ln(t+1)$, trong đó $f(t)$ được tính bằng % và $0 \leq t \leq 24$. Phần trăm kiến thức sinh viên còn nhớ chỉ 50% là $t = 7,2$ giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Câu 28: Cho hình chóp đều có cạnh đáy bằng a và khoảng cách từ đỉnh đến đáy bằng h .

- a) Khi $h = 3a$ thì chiều cao của hình chóp là $3a$.
- b) Khi $h = 3a$ thì thể tích khối chóp đều trên là $\frac{a^3}{3}$.
- c) Khi $h = 3a$ số đo (làm tròn đến hàng đơn vị của độ) góc giữa cạnh bên và mặt đáy là 56° .
- d) Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao 98 m và cạnh đáy 180 m. Số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy lớn hơn 50° .

Câu 29: Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 3 cầu trắng, 7 quả cầu đỏ và 15 quả cầu xanh. Hộp thứ hai chứa 10 cầu trắng, 6 quả cầu đỏ và 9 quả cầu xanh. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên ra một quả cầu.

- a) Số cách lấy được 1 quả cầu từ hộp thứ nhất là 50.
- b) A là biến cố “Quả cầu được lấy ra từ hộp thứ nhất là màu trắng”, $P(A) = \frac{3}{25}$.
- c) B là biến cố “Quả cầu được lấy ra từ hộp thứ hai là màu trắng”, $P(\overline{B}) = \frac{3}{10}$.
- d) Xác suất để hai quả lấy ra có màu giống nhau bằng $\frac{6}{125}$.

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, với $a \neq 0$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$								$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\nwarrow$ $\nearrow$
 -4 -2 -7

Số điểm cực đại của hàm số $y = g(x) = f(f(x))$ là:

Câu 31: Để xây dựng một bể chứa nước cho khu tập thể dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $512m^3$, đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 2 lần chiều rộng. Chi phí xây dựng bể (gạch, cát, xi măng, ...) là 300000 đồng/ m^2 (chi phí được tính theo diện tích xây dựng; bao gồm diện tích đáy và diện tích xung quanh của bể; coi như không tính chiều dày của đáy và thành bể). Xác định chi phí thấp nhất để xây dựng bể (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).

Câu 32: Xét tất cả các số thực không âm x và y thỏa mãn

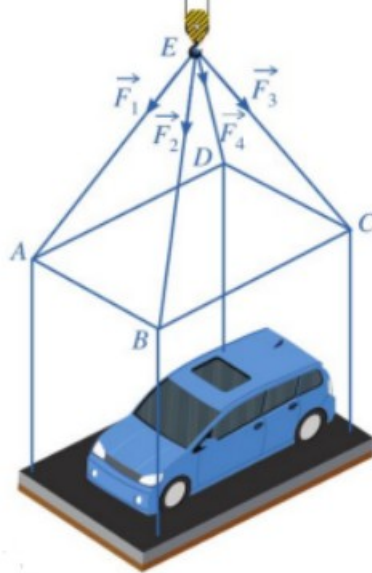
$$2x + y \log_2(x + y + 1) = 6. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: } P = x^2 + y^2 + 2x + 8y.$$

Câu 33: Bên trong một căn nhà bỏ hoang hình lập phương cạnh $5m$ có 3 chú nhện sinh sống. Mùa đông đến, vì đói rét nên chúng đành quyết định hợp tác với nhau giăng lưới để bắt mồi. Ba chú nhện tính toán sẽ giăng một mảnh lưới hình tam giác theo cách sau: Mỗi chú nhện sẽ đứng ở mép tường bất kì (có thể mép giữa 2 bức tường, giữa tường với trần, hoặc giữa tường với nền) rồi phóng những sợi tơ làm khung đến vị trí của 2 con nhện còn lại rồi sau đó mới phóng tơ dính đan phần lưới bên trong. Chúng quy định không có bất kì 2 con nhện nào cùng nằm trên một mặt tường, nền hoặc trần nhà. Chu vi nhỏ nhất của mảnh lưới được giăng (biết các sợi tơ khung căng và không nhùn) là

$$\frac{m}{p} \sqrt{n} \quad m; n; p \in \mathbb{N}^*; \frac{m}{p} \text{ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức } m + n + p.$$

Câu 34: Cho tập $S = \{1, 2, \dots, 280\}$, chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để số đó không chia hết cho 2, 3 và 5 (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 35: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính khối lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị) biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là $5200N$ và trọng lượng của khung sắt là $3500N$. Lấy $g = 10m/s^2$.

**ĐỀ 6****ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI****MÔN: TOÁN 12**

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 24. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 2: Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ là

A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

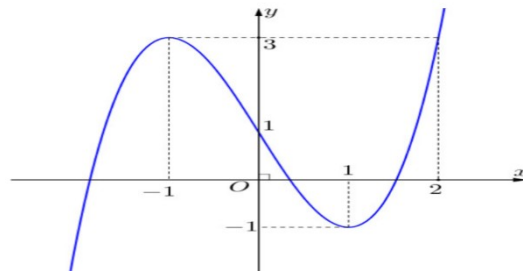
Câu 3: Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x\sqrt{1-x^2}$. Khi đó $M+m$ bằng?

A. 0. B. 1. C. 2. D. -1.

Câu 4: Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 - (2m+1)x + 5$ nghịch biến trên tập xác định.

- A. $-\frac{5}{4} \leq m \leq 1$ B. $-\frac{2}{7} \leq m < 1$ C. $-\frac{7}{2} \leq m < 1$ D. $-\frac{2}{7} \leq m \leq 1$

Câu 5: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(2f(x)+1)=3$ là

A. 9. B. 3. C. 6. D. 5.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (-1; 3; 2)$, $\vec{v} = (-3; -1; 2)$. Khi đó $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bằng

A. 3. B. 2. C. 4. D. 10.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3), B(2; 2; -2)$. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB . Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $T = \frac{13}{2}$. B. $T = 2$. C. $T = 6$. D. $T = \frac{29}{4}$.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $3\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AD}$, $3\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$. Tính vector $\overrightarrow{MN}$ theo các vector $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$.

- A. $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MQ}$ B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MQ}$
- C. $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MQ}$ D. $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MP} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MQ}$

Câu 9: Thời gian xem tivi mỗi buổi tối của một số học sinh tính theo phút được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[6, 5; 9, 5)	[9, 5; 12, 5)	[12, 5; 15, 5)	[15, 5; 18, 5)	[18, 5; 21, 5)	[21, 5; 24, 5)	[24, 5; 27, 5)
Số học sinh	2	3	12	15	24	2	2

Số trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này là:

- A. 15,1. B. 18,1. C. 18,5. D. 15,5.

Câu 10: Một lớp học có 30 học sinh, được chia thành 3 nhóm với các điểm số trung bình và phương sai của từng nhóm như sau:

- * Nhóm 1: $n_1 = 10$, điểm trung bình $\overline{X}_1 = 7,0$, phương sai $S_1^2 = 1,2$.
- * Nhóm 2: $n_2 = 10$, điểm trung bình $\overline{X}_2 = 6,8$, phương sai $S_2^2 = 1,0$.
- * Nhóm 3: $n_3 = 10$, điểm trung bình $\overline{X}_3 = 7,2$, phương sai $S_3^2 = 1,4$.

Hãy tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm $S_{\text{ghép}}^2$ cho cả lớp (làm tròn đến hàng phần chục).

- A. $S_{\text{ghép}}^2 = 1,2$. B. $S_{\text{ghép}}^2 = 1,3$. C. $S_{\text{ghép}}^2 = 1,4$. D. $S_{\text{ghép}}^2 = 1,5$.

Câu 11: Phương trình $2\cos x - \sqrt{2} = 0$ có tất cả các nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
- C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. D. $\begin{cases} x = \frac{7\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 12: Tính giá trị của biểu thức $A = \sin 3x \cdot \cos x + \cos 5x \cdot \sin x$, biết $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- A. $\frac{15}{32}$. B. $-\frac{15}{32}$. C. $\frac{17}{32}$. D. $-\frac{17}{32}$.

Câu 13: Cho $a = \log_2 5$, $b = \log_2 9$. Biểu diễn của $P = \log_2 \frac{40}{3}$ theo a và b là:

- A. $P = 3 + a - 2b$. B. $P = 3 + a - \frac{1}{2}b$. C. $P = \frac{3a}{2b}$. D. $P = 3 + a - \sqrt{b}$.

Câu 14: Phương trình $\frac{1}{5 - \log_2 x} + \frac{2}{1 + \log_2 x} = 1$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ là

- A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{33}{64}$. C. 5 . D. 66 .

Câu 15: Cho một cấp số nhân có các số hạng đều không âm thỏa mãn $u_2 = 6, u_4 = 24$. Tính tổng của 12 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

- A. $3 \cdot 2^{12} - 3$. B. $2^{12} - 1$. C. $3 \cdot 2^{12} - 1$. D. $3 \cdot 2^{12}$.

Câu 16: Cho dãy số (u_n) xác định $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 + 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Hỏi u_{50} bằng

- A. 38119. B. 40522. C. 40524. D. 42811.

Câu 17: Giá trị của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n}{\sqrt{n+1}}$ bằng:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. 0 D. 1

Câu 18: Cho $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - (m+2)x + 2m}{x-2} = 5$. Tính $T = m^5 - 4m^3 + 1$.

A. $T = -134$. B. $T = 136$. C. $T = 1$. D. $T = -3$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC . Biết tam giác SBC là tam giác đều. Số đo của góc giữa SA và (ABC) bằng

A. 45° . B. 30° . C. 75° . D. 60° .

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng 1, $\angle BAD = 120^\circ$. Biết $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng

A. $\frac{\sqrt{39}}{13}$. B. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$. C. $\frac{\sqrt{57}}{19}$. D. $\frac{2\sqrt{57}}{19}$.

Câu 21: Giá trị của tổng $T = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + 2^3C_5^3 + 2^4C_5^4 + 2^5C_5^5$ bằng

A. 3^5 . B. 5^5 . C. 6^5 . D. 4^5 .

Câu 22: Trong một đề thi trắc nghiệm môn Toán có loại câu hỏi trả lời dạng đúng sai. Một câu hỏi có 4 ý hỏi, mỗi ý hỏi học sinh chỉ cần trả lời đúng hoặc chỉ trả lời sai. Nếu 1 ý trả lời đúng đáp án thì được 0,1 điểm, đúng 2 ý được 0,25 điểm, đúng 3 ý được 0,5 điểm và đúng cả 4 ý được 1 điểm. Giả sử một thí sinh làm bài bằng cách chọn phương án ngẫu nhiên để trả lời cho 2 câu hỏi loại đúng sai này. Hỏi có bao nhiêu cách chọn phương án để học sinh đó được 1 điểm ở phần trả lời 2 câu hỏi này.

A. 17. B. 18. C. 16. D. 8.

Câu 23: Lớp 12A1 có 48 bạn đều giỏi ít nhất một trong hai môn Toán và Lý, trong đó có 36 bạn giỏi Toán, 24 bạn giỏi Lý. Chọn ngẫu nhiên 1 bạn. Xác suất chọn được bạn giỏi Toán, biết bạn đó giỏi Lý là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 24: Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Toàn mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là bao nhiêu (biết số lít xăng tiêu thụ trong các ngày là như nhau).

A. 18. B. 22. C. 21. D. 20.

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(3;0;0)$, $B(0;5;0)$, $C(0;5;1)$. Các phát biểu sau đây đúng hay sai?

a) Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(1; \frac{10}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

b) Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \sqrt{34}$.

c) Đường thẳng CG cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm $E(a;b;c)$, khi đó $a+b+c=4$.

d) Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{49}{20}$ sao cho biểu thức

$$T = MA^2 + MB^2 + MC^2 \text{ đạt giá trị lớn nhất, khi đó } x+y+z = \frac{41}{10}.$$

Câu 26: Tại một trường THPT, để khảo sát năng lực học môn Toán của hai lớp 12A và 12B, giáo viên đã cho học sinh ở hai lớp làm bài kiểm tra khảo sát đầu năm, thống kê điểm của học sinh được cho trong bảng sau:

Điểm thi toán của lớp 12A

Lớp điểm thi	$[0;2)$	$[2;4)$	$[4;6)$	$[6;8)$	$[8;10]$
Tần số	2	4	9	28	7

Điểm thi toán của lớp 12B

Lớp điểm thi	$[0;2)$	$[2;4)$	$[4;6)$	$[6;8)$	$[8;10]$
Tần số	6	5	19	16	4

- a) Dựa vào điểm trung bình môn Toán ta đánh giá được lớp 12A học tốt môn toán hơn lớp 12B.
- b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu thống kê điểm của lớp 12B bằng 2.
- c) Điểm học sinh đạt được nhiều nhất ở cả hai lớp là như nhau.
- d) Dựa vào độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê ghép nhóm, ta thấy rằng lớp 12A học đều hơn lớp 12B.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x) = \log_{2025}(4-x^2)$

a) Tập xác định của hàm số chứa 3 giá trị nguyên.

b) Hàm số có đạo hàm $y' = \frac{1}{(4-x^2)\ln 2025}$.

c) Cho $C(1;-3)$ và A, B là giao điểm của $y = f(x)$ và trục hoành. Diện tích tam giác ABC bằng $3\sqrt{3}$.

d) Tập hợp các giá trị thực của tham số m để $y = f(x)$ cắt $y = \log_{2025}(2x+m-1)$ tại hai điểm phân biệt là $(a;b)$. Giá trị $a+b=11$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật,

$AB=a, AD=2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh SD , H là trung điểm cạnh AB . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $SH \perp (ABCD)$

b) $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

c) Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc SCA

d) Khoảng cách từ điểm M đến mp (SAC) bằng $\frac{2\sqrt{57}a}{19}$.

Câu 29: Gieo hai con súc sắc I và II cân đối, đồng chất một cách độc lập. Xét các biến cố A, B, C sau đây:

A : “Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm”

B : “Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con là 7”

C : “Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con lớn hơn hoặc bằng 8”

a) Số phần tử của không gian mẫu bằng 12.

$$P(B) = \frac{1}{18}$$

b) .

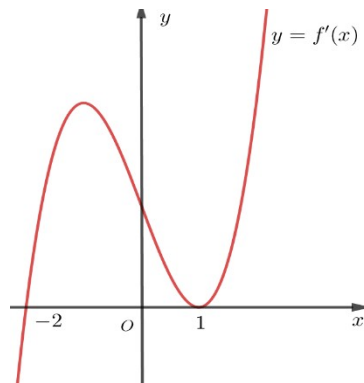
c) Hai biến cố A và B không độc lập.

$$P(C) = \frac{19}{36}$$

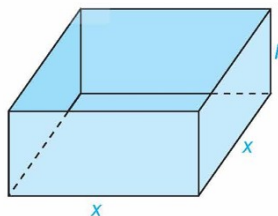
d) .

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $[-15; 15]$ của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x + m)$ có 3 điểm cực trị?



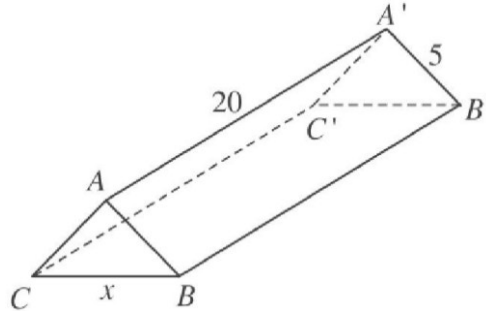
Câu 31: Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và tổng diện tích bề mặt bằng 108cm^2 như hình.



Biết khi $x = x_0; h = h_0$ thì thể tích của hộp là lớn nhất. Khi đó $x_0 + h_0$ bằng bao nhiêu (tính theo đơn vị cm)?

Câu 32: Cho hai số thực x, y thỏa mãn đồng thời $x^2 + y^2 \geq 16$, $\log_{x^2+2y^2+1}(y^2 + 8x + 1) \geq 1$. Biết rằng tồn tại ít nhất một cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $mx + 3y + 3m - 12 = 0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán?

Câu 33: Một hành lang giữa hai toà nhà có hình dạng của một hình lăng trụ đứng. Hai mặt bên $ABB'A'$ và $ACC'A'$ là hai tấm kính hình chữ nhật dài $20m$, rộng $5m$. Gọi x (mét) là độ dài cạnh BC . Tìm x sao cho hình lăng trụ có thể tích lớn nhất (làm tròn đến hàng phần trăm).



Câu 34: Trung tâm y tế dự phòng của huyện A có 3 bác sĩ, 4 kỹ thuật viên và 12 y tá. Để đảm bảo công tác phòng chống dịch Covid-19, lãnh đạo cấp trên yêu cầu trung tâm A phải đảm bảo trong một ngày có 3 ca trực sao cho ca 1 có 7 người và hai ca còn lại mỗi ca có 6 người. Biết là số cách phân chia sao cho mỗi ca có một bác sĩ và ít nhất một kỹ thuật viên là $\overline{abcdefg}$, tính $a + b + c + d + e + f + g$.

Câu 35: Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột AB tạo với mặt đất phẳng một góc 60° . Tại một thời điểm dưới ánh sáng mặt trời, bóng BC của cây cột trên mặt đất dài $20m$ và tạo với cây cột một góc bằng 90° . Biết góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên là 45° . Tính khoảng cách từ đầu A của cây cột đến mặt đất (làm tròn đến hàng phần chục).

-----Hết-----

ĐỀ 7

ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI

MÔN: TOÁN 12

I. TRẮC NGHIỆM (10 điểm).

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 24. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 3}{x + 2}$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng
A. 0. **B.** 1,8. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+7}{5} = \frac{z-3}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + z = 0$. Đường thẳng đối xứng của d qua (P) có phương trình là

$$\text{A. } \frac{x+4}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{1}.$$

$$\text{B. } \frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

$$\text{C. } \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-1}.$$

$$\text{D. } \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}.$$

Câu 3: Bảng dưới đây ghi tốc độ của một số xe ô tô khi đi qua điểm đo tốc độ.

Tốc độ (km/giờ)	[50;52)	[52;54)	[54;56)	[56;58)	[58;60)
Số xe ô tô	40	32	25	20	8

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

$$\text{A. } 55,675.$$

$$\text{B. } 52,26.$$

$$\text{C. } 54,87.$$

$$\text{D. } 55,74.$$

Câu 4: Một công ty có 55% thành viên là nam và tỷ lệ thành viên nam, thành viên nữ có bằng đại học lần lượt là 25%, 30%. Chọn ngẫu nhiên 1 thành viên của công ty đó, xác suất để thành viên này có bằng đại học là

$$\text{A. } 0,2725.$$

$$\text{B. } 0,25.$$

$$\text{C. } 0,1375.$$

$$\text{D. } 0,2775.$$

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$. Cho biết tính đúng sai của các mệnh đề sau:

$$\text{a) Hàm số đó có đạo hàm là } y' = f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \text{ (với } x \neq 1 \text{).}$$

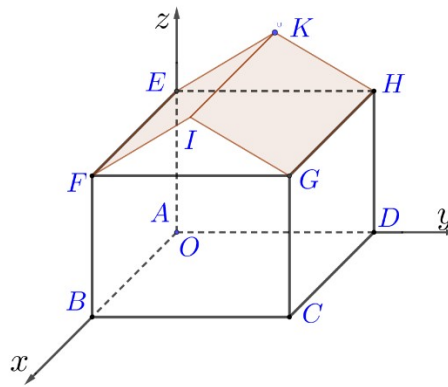
b) Đường thẳng $y = x - 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đó.

c) Giá trị cực tiểu của hàm số đó bằng 1.

$$\text{d) Phương trình } |f(x)| = \frac{1}{x} \text{ có đúng 1 nghiệm.}$$

Câu 6: Một nhà kho được minh họa như hình bên, trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), biết nhà kho có chiều cao bằng 9 m , hai mái $EFIK, HGIK$ là hai hình chữ nhật có kích thước bằng nhau, các bức tường tạo thành hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$, $AB = 10\text{ m}$, $AD = 24\text{ m}$, $AE = 7\text{ m}$.

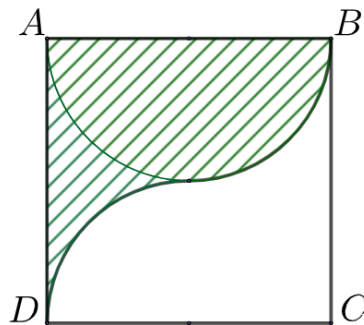
Cho biết tính đúng, sai của các mệnh đề sau:



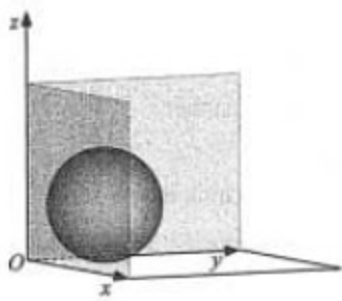
- a) Tọa độ của các điểm $E(0;0;7)$, $F(10;0;7)$, $I(10;12;9)$.
- b) Mặt phẳng $(EFIK)$ có phương trình là $y - 6x + 42 = 0$.
- c) Mặt phẳng $(HGIK)$ có phương trình là $x + 2y - 34 = 0$.
- d) Đường thẳng AG có phương trình là $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$.

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 7: Một vật trang trí có dạng một khối trụ tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo ở hình bên) quanh trục AB . Miền (R) được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình vuông $ABCD$ và các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD . Tính thể tích của vật trang trí đó, làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Câu 8: Hai quả bóng có dạng hình cầu, có bán kính khác nhau. Nếu lần lượt đặt hai quả bóng đó vào góc một căn phòng sao cho quả bóng tiếp xúc với hai bức tường và nền căn phòng thì trên quả bóng đó tồn tại một điểm có khoảng cách đến hai bức tường và nền căn phòng lần lượt là $2\text{ dm}, 3\text{ dm}, 1\text{ dm}$. Tính tổng độ dài các bán kính của hai quả bóng đó.



Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \frac{5}{x^3} + \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$. Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-\infty; 2100)$ thỏa mãn $f(a-2025) + f(5a-29) = 0$?

Câu 10: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = 3a, BC = 4a$ với $a > 0$, biết đáy ABC là tam giác vuông tại C và góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Tính $\sin$ của góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng (ABC') .

II. TỰ LUẬN (10 điểm)

Bài 1. (5 điểm)

Câu 11: Tìm tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 9$ và tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị đó.

Câu 12: Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x - \cos x - 1 = 0$.

Bài 2. (3 điểm)

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = \ln\left(\frac{2024x}{x+2}\right)$. Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số đã cho.

Chứng minh $f'(1) + f'(2) + f'(3) + \dots + f'(2024) < \frac{3}{2}$.

Câu 14: Có bao nhiêu cách xếp 6 quyển sách khác vào ba ngăn tủ khác nhau sao cho mỗi ngăn tủ có ít nhất một quyển sách (biết mỗi ngăn tủ có thể chứa được từ 1 đến 6 quyển sách và không kể thứ tự giữa các quyển sách trong mỗi ngăn tủ).

Bài 3. (2 điểm)

Câu 15: Chứng minh C_{2n}^n là số chẵn, với mọi số nguyên dương n .

Câu 16: Cho hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn $f(f(2a) + f(b)) = 2a + b$, với mọi số hữu tỷ a, b (ký hiệu tập hợp các số hữu tỷ là $\mathbb{Q}$). Chứng minh f là hàm số lẻ.

-----Hết-----

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 24. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một đường tròn có đường kính 30cm . Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo 68° (lấy 2 chữ số thập phân).

- A. $35,6(\text{cm})$. B. $35,61(\text{cm})$. C. $17,8(\text{cm})$. D. $17,81(\text{cm})$.

Câu 2: Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1 = 5$ và $u_5 = 13$. Tìm u_n ?

- A. $u_n = 5n - 3$. B. $u_n = 3n + 2$. C. $u_n = 2n + 3$. D. $u_n = 5n$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{2023x + 2024}{x^2 - 6x + 8} + \sqrt{x - 3}$. Khi đó hàm số $y = f(x)$ liên tục trong khoảng nào sau đây?

- A. $(2; 4)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(3; 4)$.

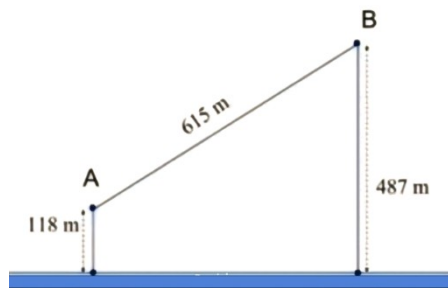
Câu 4: Một ghế Massage Elipsport cao cấp năm 2024 được định giá 40 triệu đồng, mỗi năm giá trị ghế Massage giảm 5% so với năm trước và bắt đầu từ năm thứ 8 trở đi, mỗi năm giá ghế Massage giảm 12% so với năm trước. Hỏi bắt đầu từ năm nào thì giá trị ghế Massage nhỏ hơn 20 triệu đồng?

- A. 2031 . B. 2033 . C. 2035 . D. 2032 .

Câu 5: Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y = (m - 1)x^4 - (m^2 - 2)x^2 + 2024$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

- A. $m = 0$. B. $m = -2$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Câu 6: Cho hai vị trí A, B cách nhau 615m , cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118m và 487m . Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B . Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là (Kết quả được làm tròn đến hàng phần chục).



- A. $741,2\text{m}$. B. $779,8\text{m}$. C. $569,5\text{m}$. D. $671,4\text{m}$.

Câu 7: Trong hình dưới đây, chiếc laptop được mở gời nên hình ảnh của một góc nhị diện. Ta gọi số đo góc nhị diện đó là độ mở của laptop. Tính độ mở của laptop biết $BC = 40\text{cm}$.



- A. $106,27^\circ$. B. $1,51^\circ$. C. $105,26^\circ$. D. $106,26^\circ$.

Câu 8: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a . Độ dài cạnh bên của hình chóp bằng bao nhiêu để góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° .

- A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{a}{6}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{2a}{3}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Biết $SA = 4a$, tam giác ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 2a$, góc $\angle ACB = 30^\circ$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{4a^3}{3}$. B. $V = \frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V = 8a^3\sqrt{3}$. D. $V = \frac{8a^3}{3}$.

Câu 10: Cân nặng của học sinh khối 10 của trường THPT Quỳnh Lưu 1 vào đầu năm được cho như trong bảng dưới đây

Cân nặng	[37,5;42,5)	[42,5;47,5)	[47,5;52,5)	[52,5;57,5)	[57,5;62,5)	[62,5;67,5)
Số học sinh	27	123	150	272	45	10

Trung vị của mẫu số liệu gần với kết quả nào dưới đây?

- A. 52,75 . B. 53,75 . C. 54,24 . D. 53,18 .

Câu 11: Có 10 đội bóng thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt, thắng được 3 điểm, hoà được 1 điểm, thua được 0 điểm. Kết thúc giải đấu, tổng cộng số điểm của tất cả 10 đội là 130 . Hỏi có bao nhiêu trận hoà?

- A. 7 . B. 8 . C. 5 . D. 6 .

Câu 12: Cho tập $S = \{1; 2; 3; \dots; 17\}$ gồm 17 số nguyên dương đầu tiên. Chọn ngẫu nhiên 3 phần tử của tập S . Tính xác suất để 3 số được chọn có tổng chia hết cho 3 .

- A. $\frac{12}{47}$. B. $\frac{23}{18}$. C. $\frac{43}{68}$. D. $\frac{23}{68}$.

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13: Bác An gửi 200 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép với hai quyền sở tiết kiệm như sau :

Quyển 1 bác gửi 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng với lãi suất không đổi 6,8% / năm

Quyển 2 bác gửi 100 triệu đồng kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi 6% / năm

- a) Sau 2 năm, số tiền tiết kiệm ở quyển 1 (cả vốn và lãi) làm tròn đến hàng triệu là 114 triệu đồng.
- b) Sau 2 năm, bác An rút hết tiền ở cả hai quyển sổ tiết kiệm thì được nhiều hơn 225 triệu đồng nhưng ít hơn 230 triệu đồng.
- c) Nếu bác An muốn rút về 300 triệu đồng để sửa nhà thì bác cần gửi ít nhất 8 năm.
- d) Nếu sau 1 năm, bác An rút một nửa số tiền ở quyển 1 (cả vốn và lãi) rồi chuyển sang quyển 2 và tiếp tục gửi thì sau 2 năm (tính từ thời điểm bắt đầu gửi) bác An rút hết tiền về sẽ có lợi hơn là giữ nguyên hai quyển sổ như gửi ban đầu.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O và $AB = a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SB tạo với đáy góc 60° . Vẽ các đường cao AH của tam giác SAB , AK của tam giác SAD và AE của tam giác SAO .

a) $AB \parallel (SCD)$.

b) $AE \perp (SBD)$.

c) Thể tích khối chóp $S.ABO$ bằng $\frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$.

d) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AHK) bằng $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 15: Một đội bóng 11 người thì có 7 cầu thủ chủ chốt gồm A, B, C, D, E, F, G . Đối với những trận bóng không quan trọng thì huấn luyện viên quyết định chỉ tung một số cầu thủ trong 7 cầu thủ chủ chốt trên với nguyên tắc

- (1) Nếu A ở trên sân thì D và E cũng phải ở trên sân.
- (2) Nếu B ở trên sân thì F ngồi dự bị.
- (3) Nếu E dự bị thì F ở trên sân.
- (4) Nếu C ở trên sân thì B hoặc G hoặc cả hai đều ở trên sân.
- (5) Nếu cả C và G đều ở trên sân thì D ngồi dự bị.

- a) Phương án A, C, D, E huấn luyện viên có thể sử dụng trong một trận **không** quan trọng.
- b) Nếu cả C và F đều ở trên sân, thì ba trong số bảy cầu thủ chủ chốt ở trên sân.
- c) Nếu chỉ có 1 cầu thủ chủ chốt ở trên sân thì có thể là B .
- d) A và F đều có mặt trên sân.

Câu 16: Nếu đoạt giải trong cuộc thi Sao Mai, bạn sẽ được tuyển thẳng vào Nhạc viện. Nếu như mệnh đề trên là đúng thì điều nào sau đây cũng đúng?

- (I) Nếu bạn không đoạt giải trong cuộc thi Sao Mai, bạn không được tuyển thẳng vào Nhạc viện.
- (II) Nếu bạn muốn được tuyển thẳng vào Nhạc viện, bạn phải đoạt giải trong cuộc thi Sao Mai.

(III) Nếu như bạn không được tuyển thẳng vào Nhạc viện thì bạn không đoạt giải trong cuộc thi Sao Mai.

- a) Chỉ (I) đúng.
- b) Chỉ (II) đúng.
- c) Chỉ (III) đúng.
- d) Chỉ (I) và (II) đúng.

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 17: Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa, và cả các suối nước đổ về hồ. Từ lúc $8h$ sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống

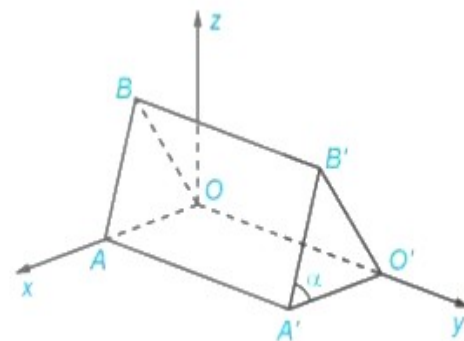
$$h(t) = 24t + 5t^2 - \frac{t^3}{3}$$

theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức . Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy định trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước muộn nhất là lúc mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

Câu 18: Những căn nhà gỗ trong Hình 2.47a được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như hình 2.47b. Với hệ tọa độ $Oxyz$ thể hiện như Hình 2.47b (đơn vị đo lấy theo cm), tọa độ hai điểm $A'(240;450;0)$ và $B'(120;450;300)$. Thể tích mỗi căn gỗ bằng bao nhiêu m^3



a)



b)

PHẦN: Tự luận

Câu 19: (^{3,5} điểm)

a) (2.0 điểm) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		—
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

Biết $f(0)=1; f(2)=-2$. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số

$$y = \frac{(m+1)f(x)-20}{f(x)-m}$$

nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

b) (1,5 điểm) Cho hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 3$ thỏa mãn điều kiện $\min_{(0;2)} f(x) = f(1) = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})$ trên đoạn $[-1;1]$

Câu 20: (2.0 điểm) Ba bạn Nhung, Nhâm, Việt mỗi bạn viết lên bảng một số tự nhiên nhỏ hơn 32 . Tính xác suất để tích ba số tự nhiên được viết lên bảng chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 16 .

Câu 21: (2.0 điểm) Một tỉnh A đưa ra nghị quyết về giảm biên chế cán bộ công chức, viên chức hưởng lương từ ngân sách nhà nước trong giai đoạn 2024-2030 (6 năm) là $10,6\%$ so với số lượng hiện có năm 2024 theo phương thức “ra 2 vào 1” (tức là khi giảm đối tượng hưởng lương từ ngân sách nhà nước 2 người thì được tuyển mới 1 người). Giả sử tỉ lệ giảm và tuyển dụng mới hàng năm so với năm trước đó là như nhau. Tính tỉ lệ tuyển dụng mới hàng năm (làm tròn đến $0,01\%$).

Câu 22: (2.0 điểm) Hình bên là hình chụp đền Kukulkan, là một kim tự tháp Trung Mỹ nằm ở khu di tích Chichen Itza, Mexico, được người Maya xây vào khoảng từ thế kỉ IX đến thế kỉ XII. Phần thân của đền, không bao gồm đền nằm phía trên, có dạng một khối chóp cụt tứ giác đều (không tính cầu thang và coi các mặt bên là phẳng) với độ dài đáy dưới là $55,3(m)$, chiều cao là $24(m)$, góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy là α . Tính thể tích của phần thân ngôi đền có dạng khối chóp cụt tứ giác đều đó theo đơn vị mét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) biết rằng $\tan \alpha = \frac{320}{211}$.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Câu 23: Ông An muốn thiết kế một mái che giếng trời hình chóp di động để có thể tùy thích lấy ánh sáng cho ngôi nhà của mình. Biết rằng đáy của hình chóp là hình chữ nhật có độ dài 2 cạnh đáy là $3m$ và $2m$ và các cạnh bên bằng nhau (hình vẽ minh họa). Ông An mong muốn góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng nằm ngang (ABC) là α thỏa mãn $30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$, đồng thời khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SBC) là lớn nhất, tính khoảng cách lớn nhất đó.

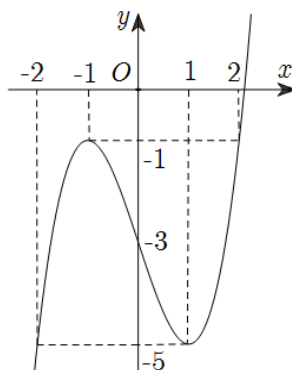
**ĐỀ 9****ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI****MÔN: TOÁN 12**

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 24. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (3-x)(1-x)^2(x+1)^3(x^2+3x+6)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1;3)$. B. $(-\infty;1)$. C. $(3;+\infty)$. D. $(-\infty;-1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\square$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$. Giá trị của $m+M$ là



- A. $m+M = -6$. B. $m+M = 0$. C. $m+M = -1$. D. $m+M = -5$.

Câu 3: Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m trong $[-10;10]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2-(m+3)x+m+2}$ có đúng một đường tiệm cận đứng là

A. 8.

B. 8.

C. 7.

D. 19.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	0	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	+	0	-	+
y	$+\infty$	-1	4	-1	$+\infty$

Phương trình $f(x^2 - 2x) = 3$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 3.

B. 8.

C. 5.

D. 6.

Câu 5: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B đồng thời cùng với điểm $I(1;1)$ tạo thành một tam giác nội tiếp đường tròn có đường kính bằng $2\sqrt{5}$.

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có $|\vec{u}| = 2\sqrt{5}$, $|\vec{v}| = \sqrt{5}$ và $|\vec{u} - 2\vec{v}| = 2\sqrt{5}$. Tìm số đo góc tạo bởi hai vector $\vec{u}$ và $(\vec{u} - \vec{v})$.

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$.

B. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$.

D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 5; 2)$, $\vec{c} = (4; -1; 3)$ và $\vec{x} = (-3; 22; 5)$.

A. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$.

B. $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.

C. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

D. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Câu 9: Cô Hà thống kê lại đường kính thân gỗ của một số cây xoan đào 6 năm tuổi được trồng ở một lâm trường ở bảng sau.

Đường kính (cm)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)
Tần số	5	20	18	7	3

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

A. 25.

B. 30.

C. 6.

D. 69,8.

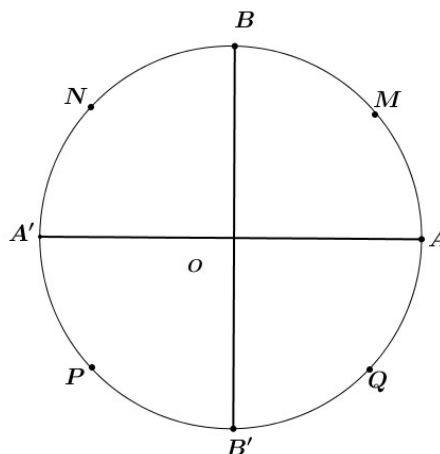
Câu 10: Một công ty cung cấp nước sạch thống kê lượng nước các hộ gia đình trong một khu vực tiêu thụ

Lượng nước tiêu thụ (m^3)	[3;6)	[6;9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)
Số hộ gia đình	24	57	42	29	8

Công ty muốn gửi một thông báo khuyến nghị tiết kiệm nước đến 25% các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ cao nhất. Vậy công ty nên gửi thông báo tiết kiệm nước đến các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ từ bao nhiêu m^3 nước trở lên?

- A. $11 (m^3)$. B. $11,79 (m^3)$. C. $10,56 (m^3)$. D. $12,17 (m^3)$

Câu 11: Trên đường tròn lượng giác gốc A như hình vẽ bên dưới:



Góc lượng giác $-\frac{33\pi}{4}$ có điểm biểu diễn là điểm nào dưới đây?

- A. P . B. M . C. Q . D. N .

Câu 12: Số nghiệm của phương trình $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ trên khoảng $(0; 3\pi)$ là

- A. 6 . B. 4 . C. 5 . D. 3 .

Câu 13: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x^2 - 4x) \leq 1$ là

- A. $(-1; 0) \cup (4; 5)$. B. $[-1; 5]$. C. $[-1; 0] \cup [4; 5]$. D. $[-1; 0) \cup (4; 5]$.

Câu 14: Cho các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x = 6$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại A, B và C thỏa mãn $2AB = 3BC$ và $a.b^5 = 16$. Tổng $a + b^{10}$ bằng

- A. 10 . B. 62 . C. 66 . D. 68 .

Câu 15: Dãy số nào sau đây **không phải** là cấp số nhân?

- A. $1; 1; 1; 1; 1; \dots$. B. $1; -2; 4; -8; 16; -32; \dots$.
C. $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$. D. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \dots$.

Câu 16: Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC . Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$?

- A. $S = \frac{15\pi}{4}$. B. $S = 4\pi$. C. $S = \frac{9\pi}{2}$. D. $S = 5\pi$.

Câu 17: Cho $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \frac{a}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $P = 3a - 2b$.

- A. 9. B. -18. C. 16. D. -9.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{mx^2 - (m-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 8 + m^2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của m để hàm số liên tục tại $x = 1$?

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 19: Tính thể tích V của một khối lăng trụ biết đáy có diện tích $S = 10\text{cm}^2$, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° và độ dài cạnh bên bằng 10cm .

- A. $V = 100\text{cm}^3$. B. $V = 50\sqrt{3}\text{cm}^3$. C. $V = 50\text{cm}^3$. D. $V = 100\sqrt{3}\text{cm}^3$.

Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và $C'D'$ bằng a . Tính thể tích V của khối lập phương đã cho.

- A. $V = 8a^3$. B. $V = 2\sqrt{2}a^3$. C. $V = 3\sqrt{3}a^3$. D. $V = 27a^3$.

Câu 21: Trong một hộp bánh có 6 loại bánh nhân thịt và 4 loại bánh nhân đậu xanh. Có bao nhiêu cách lấy ra 6 bánh để phát cho các em thiếu nhi?

- A. A_{10}^6 . B. $6!$. C. 10^6 . D. C_{10}^6 .

Câu 22: Cho một đa giác đều 48 đỉnh. Lấy ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác. Tính số tam giác tạo thành từ ba đỉnh đó là một tam giác nhọn.

- A. 4048. B. 1101. C. 4049. D. 4050.

Câu 23: Một lớp có 25 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Tính xác suất chọn được một học sinh nữ.

- A. $\frac{4}{5}$. B. $\frac{4}{9}$. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{20}$.

Câu 24: Có ba lực cùng tác động vào một vật. Lực F_1 , F_2 tạo với nhau một góc 120° và có độ lớn lần lượt là 20 N và 15 N . Lực F_3 vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn bằng 4 N . Độ lớn của hợp lực của ba lực trên bằng (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

A. $18,40\text{ N}$ B. $18,50\text{ N}$ C. $18,47\text{ N}$ D. $18,46\text{ N}$

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đỉnh C có tọa độ là $C(3; 3; 0)$.
- b) Chu vi tam giác ABD bằng $6 + 3\sqrt{3}$.
- c) $|\overrightarrow{AC'} - 2\overrightarrow{AD'}| = 2\sqrt{3}$.
- d) Gọi điểm $M(x; y; z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 + MB^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ điểm là $M(0; 1; 0)$.

Câu 26: Đo chiều cao của 40 học sinh lớp 12A cho trong bảng sau:

Chiều cao (cm)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)	[175;180)
Số học sinh	5	11	12	9	2	1

- a) Giá trị đại diện của nhóm $[150;155)$ là $152,5$.
- b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho ở bảng trên xấp xỉ là $6,8\text{ cm}$.
- c) Một của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là $36,14\text{ cm}$.
- d) Chiều cao của lớp 12B đồng đều hơn lớp 12A. Biết rằng người ta tính được phương sai của mẫu số liệu lớp 12B xấp xỉ là $34,1$.

Câu 27: Cho phương trình:
$$\frac{\cos 2x - m \cos x + 1}{2 \cos x + 1} = 0$$

- a) Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- b) Khi $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- c) Khi $m = -1$, tổng các nghiệm của phương trình trên $\left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ bằng 0 .
- d) Phương trình đã cho có 4 nghiệm trên $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi $m \in (-2; -1)$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với đáy, với $SA = \frac{a}{2}$. Khi đó các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $BC \perp SA$.

b) Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

c) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng 60° .

d) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm SB, SC . Thể tích khối chóp $A.BCQP$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 29: Hai hộp bi I và II, mỗi hộp chứa 7 bi trắng, 3 bi đỏ. An lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp I và Bình lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp II. Gọi A_i là biến cố “An lấy được i bi đỏ” và B_j là biến cố “Bình lấy được j bi đỏ”, $i, j \in \{0; 1; 2; 3\}$. Khi đó:

a) A_i và B_j là hai biến cố độc lập.

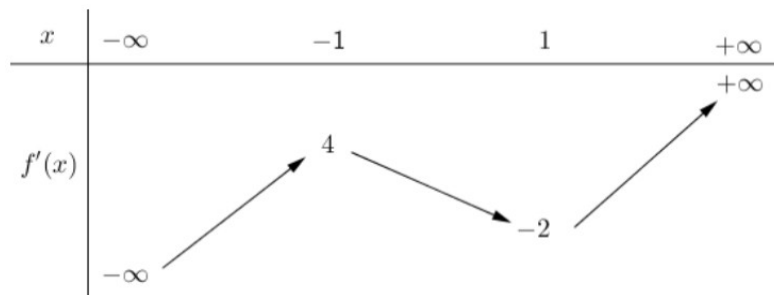
b) Số phần tử của không gian mẫu của phép thử là 240.

c) Xác suất của biến cố “An và Bình đều không lấy được viên bi đỏ nào” là $\frac{7}{24}$.

d) Xác suất của biến cố “An và Bình lấy được số bi đỏ bằng nhau” là $\frac{1409}{3600}$.

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$.

Câu 31: Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ không lớn hơn 2020?

Câu 32: Bất phương trình $\log_2 \frac{4(x+1)}{\sqrt{x}+2} > 2(x-\sqrt{x})$ có tập nghiệm là $S = \left[a; \frac{b+\sqrt{c}}{2} \right)$, trong đó a, b, c là các số nguyên không âm. Tính $a + b^2 + 2c^3$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$ và M là trung điểm cạnh SD . Tính cosin góc giữa đường thẳng AC và đường thẳng BM (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 34: Cho tập hợp A gồm 99 số tự nhiên liên tiếp khác nhau $A = \{1; 2; 3; \dots; 99\}$. Chọn ba số khác nhau từ tập hợp A . Tính xác suất để ba số đó lập thành cấp số cộng (làm tròn đến chữ số hàng phần trăm)

Câu 35: Trong 18 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 18t^2 + t + 3$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu mét trên giây trong 18 giây đầu tiên đó?

ĐỀ 10

ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI

MÔN: TOÁN 12

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 24. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 2)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(-2; 2)$. D. $(-2; 0)$.

Câu 2: Nồng độ của một chất hóa học trong máu sau t giờ kể từ lúc tiêm vào cơ thể người được tính bởi

$$C = \frac{3t^2 + t}{t^3 + 50}$$

công thức Nồng độ chất hóa học đó thay đổi thế nào khi t đủ lớn?

- A. Nồng độ dần về không. B. Nồng độ còn lại một nửa.
C. Nồng độ dần về giá trị $0,06$. D. Nồng độ ổn định với giá trị bằng 3 .

Câu 3: Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x}$?

- A. $y = x^3 - 2 \ln|x|$. B. $y = 6x - 2 \ln|x|$.
C. $y = x^3 + \frac{2}{x^2}$. D. $y = 6x + \frac{2}{x^2}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\square$ thỏa mãn $\int_{-1}^8 f(x) dx = -1$ và $\int_4^8 f(x) dx = 4$. Giá trị của

$$P = \int_{-1}^4 f(x) dx$$

bằng bao nhiêu?

- A. $P = 3$. B. $P = -3$. C. $P = -5$. D. $P = 5$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 4; -5)$ trên trục Oy là điểm nào dưới đây?

- A. $M(3; 0; -5)$. B. $N(3; -4; -5)$. C. $P(0; 4; 0)$. D. $Q(3; 0; 0)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, vector $\vec{n} = (1; -1; 1)$ **KHÔNG** là vector pháp tuyến của mặt phẳng nào dưới đây?

- A. $(P): 2x + y - z - 3 = 0$ B. $(Q): x - y + z - 3 = 0$
 C. $(R): \frac{x}{3} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{3} = 1$ D. $(T): -(x-1) + (y+1) - (z-1) = 0$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 3y - z - 4 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $I(-1; 0; 2)$ và vuông góc với (P) ?

- A. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$. Tâm của (S) là điểm nào dưới đây?

- A. $M(-1; -2; -1)$ B. $N(-1; -2; 1)$ C. $P(1; 2; -1)$ D. $Q(1; 2; 1)$

Câu 9: Bảng dưới đây thống kê kết quả điểm khảo sát môn Tiếng Anh của học sinh khối ^{12} trong một trường A :

Điểm	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)	[70;80)	[80;90)	[90;100)
Tần số	2	7	9	22	35	41	26	8	2

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng bao nhiêu?

- A. 90 B. 100 C. 110 D. 152

Câu 10: Cho hai biến cố A và B , trong đó $P(A) > 0$. Xác suất của biến cố B với điều kiện A bằng biểu thức nào dưới đây?

- A. $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ B. $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ C. $\frac{P(A)}{P(A \cap B)}$ D. $\frac{P(B)}{P(A)}$

Câu 11: Cho hàm số $y = 2^{x^2-1}$. Phương án nào dưới đây đúng?

- A. $y' = (2x-1) \cdot 2^{x^2-1} \ln 2$ B. $y' = 2x 2^{x^2-1} \ln 2$
 C. $y' = 2^{x^2-1} \ln 2$ D. $y' = (2x-1) 2^{x^2-1}$

Câu 12: Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Giá trị $\log_a \sqrt{a}$ bằng bao nhiêu?

- A. 2 B. -2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai đường thẳng SB và AD bằng bao nhiêu?

- A. 60° B. 45° C. 90° D. 30°

Câu 14: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a, AB = a, AD = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng bao nhiêu?
A. 60° . **B.** 45° . **C.** 90° . **D.** 30° .

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) , tam giác ABC vuông tại B . Phương án nào dưới đây SAI?
A. (SAB) vuông góc với (ABC) . **B.** (SAC) vuông góc với (ABC) .
C. (SAB) vuông góc với (SBC) . **D.** (SBC) vuông góc với (ABC) .

Câu 16: Cho $F(x) = 3x^2 + 1$ và $G(x) = 4x^3 + 2x$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$ và $g(x)$. Xét $H(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $h(x) = f(x)g(x)$. Phương án nào dưới đây ĐÚNG?
A. $H(x) = (3x^2 + 1)(4x^3 + 2x)$. **B.** $H(x) = (x^3 + x)(x^4 + x^2)$.
C. $H(x) = 6x(12x^2 + 2)$. **D.** $H(x) = 6(x^2 - 1)(3x^2 + 4)$.

Câu 17: Một bệnh viện thống kê chiều cao của 50 trẻ sơ sinh 12 ngày tuổi một cách ngẫu nhiên. Kết quả thu được như sau:

Độ cao (cm)	[40;42)	[42;44)	[44;46)	[46;48)	[48;50)	[50;52)	[52;54)
Tần số	4	4	5	10	14	8	5

Bộ giá trị nào sau đây là tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên?

A. $Q_1 = 45; Q_2 = 47; Q_3 = 51$. **B.** $Q_1 = 45,5; Q_2 = 47,5; Q_3 = 51,5$.
C. $Q_1 = 45,3; Q_2 = 48,3; Q_3 = 53,3$. **D.** $Q_1 = 45,8; Q_2 = 48,3; Q_3 = 50,1$.

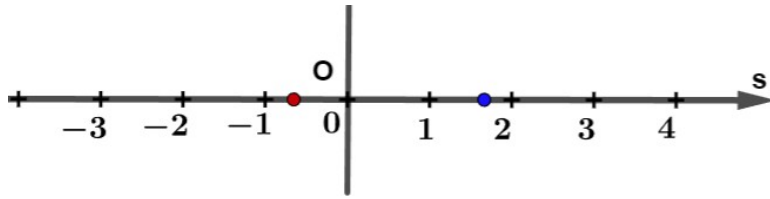
Câu 18: Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ đứng đã cho bằng bao nhiêu?
A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. **B.** $6\sqrt{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 19: Biết rằng có 0,5% dân số nhiễm virus X. Ông A muốn biết mình có bị nhiễm virus X hay không nên đã đến một bệnh viện để thực hiện một xét nghiệm phát hiện virus. Cho biết xét nghiệm này có sai số là 1% (tức là nếu ông A thực sự bị nhiễm virus X thì xác suất ông A nhận kết quả không bị nhiễm là 1%; ngược lại, nếu ông A thực sự không bị nhiễm virus X thì xác suất ông A nhận kết quả bị nhiễm là 1%). Xác suất ông A nhận kết quả bị nhiễm virus X từ xét nghiệm này là bao nhiêu?
A. 0,005. **B.** 0,01. **C.** 0,0149. **D.** 0,0198.

Câu 20: Cho khối chóp cắt tứ giác đều có các cạnh đáy lần lượt bằng 6 và 8 , chiều cao của mặt bên bằng 5 . Thể tích của chóp cắt đã cho bằng bao nhiêu?
A. $\frac{148\sqrt{26}}{3}$. **B.** $\frac{740}{3}$. **C.** $\frac{296\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{148\sqrt{21}}{3}$.

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng; sai.

Câu 1: Trên trục O_s , cho hai chất điểm chuyển động có tọa độ theo thời gian t (giây) lần lượt là $s_1 = 2 \sin t$ và $s_2 = \sin 2t$ (tham khảo hình vẽ minh họa).



Những phương án nào dưới đây đúng?

- a) Trong 4 giây đầu tiên, khoảng cách giữa hai chất điểm lớn nhất là 2,60 (làm tròn đến hàng phần trăm).
- b) Trong 2 giây đầu tiên, khi s_1 lớn nhất thì s_2 bằng 0.
- c) Trong 2 giây đầu tiên, khi s_2 lớn nhất thì s_1 bằng 2.
- d) Trong 4 giây đầu tiên, s_1 và s_2 bằng nhau tại 4 thời điểm.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, xét đường thẳng Δ đi qua $M(2; -1; 1)$ và cắt cả hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$, $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Những phương án nào dưới đây đúng?

- a) Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (0; 1; 1)$.

- b) Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$.

- c) Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (Ozx) tại điểm $A(2; 0; 1)$.

- d) Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

Câu 3: Có hai hộp đựng câu hỏi thi (phiếu), mỗi phiếu ghi một câu hỏi. Hộp thứ nhất có 15 phiếu và hộp thứ hai có 9 phiếu. Biết rằng sinh viên A đi thi chỉ thuộc 10 câu ở hộp thứ nhất và 8 câu ở hộp thứ hai. Thầy giáo rút ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một phiếu thi, sau đó cho sinh viên A rút ngẫu nhiên ra 1 phiếu từ 2 phiếu mà thầy giáo đã rút. Gọi E_1 là biến cố sinh viên A rút ra phiếu từ hộp thứ nhất, E_2 là biến cố sinh viên A rút ra phiếu từ hộp thứ hai. Những phương án nào dưới đây đúng?

- a) Xác suất của biến cố E_1 bằng $\frac{1}{2}$.

- b) Gọi B là biến cố sinh viên A rút được phiếu đã học thuộc thì $B = (B \cap E_1) \cap (B \cap E_2)$.

- c) Xác suất có điều kiện $P(B|E_1) = \frac{8}{9}$.

- d) Nếu sinh viên A rút được phiếu đã học thuộc thì xác suất phiếu đó thuộc hộp thứ nhất bằng $\frac{3}{7}$.

Câu 4: Xét phương trình $\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{3}{a} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^b$ trên khoảng $(-2; 2)$, với a và b là hai số nguyên dương đều bé hơn 20 . Những phương án nào dưới đây đúng?

- a) Nếu b chẵn thì phương trình có nhiều nhất 2 nghiệm phân biệt trên khoảng $(-2; 2)$.
- b) Nếu b lẻ thì phương trình có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $(-2; 2)$.
- c) Có 38 cặp $(a; b)$ sao cho phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt trên khoảng $(-2; 2)$.
- d) Nếu $a = 1$ thì có đúng 9 giá trị của b sao cho phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt trên khoảng $(-2; 2)$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $AB = 1$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) và $SA = \sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC . Những phương án nào sau đây đúng?

- a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
- b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SB bằng $\frac{\sqrt{10}}{5}$.
- c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

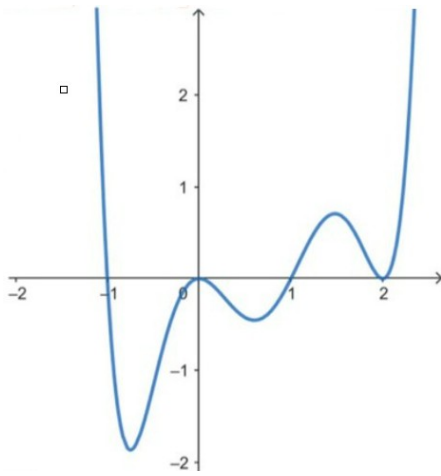
PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Xét hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = x^2 - c^2$ và $y = c^2 - x^2$. Tìm hằng số dương c sao cho diện tích hình phẳng đó bằng 10 (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax + by + cz + 9 = 0$ chứa hai điểm $A(3; 2; 1)$, $B(-3; 5; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + y + z - 5 = 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.

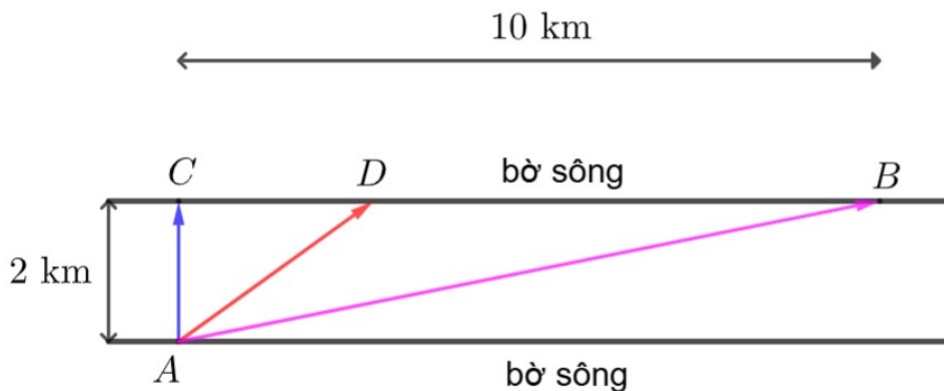
Câu 3: Theo nhận định của một chuyên gia, khả năng công ty của ông A mở được một chi nhánh mới ở thành phố X là 40% có thể xảy ra. Nếu đúng như vậy thì khả năng ông A được bổ nhiệm làm giám đốc cho chi nhánh mới này là 80% có thể xảy ra. Xác suất để ông A trở thành giám đốc cho chi nhánh ở thành phố X là bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Biết $f(-1) = -2$. Gọi S là tập hợp các giá trị m nguyên bé hơn 100 để bất phương trình $f(x) - \frac{5}{3}x^3 < m - x^5$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 1)$. Tính tổng các phần tử của S .



Câu 5: Số lượng cá tính từ lúc thả trong một cái ao sau thời gian (tính bằng tháng) được cho bởi công thức $P(t) = \frac{1000}{1+9e^{-t}}$. Sau n tháng (n là số tự nhiên) thì số lượng cá trong ao vượt hơn 500 con. Số n nhỏ nhất là bao nhiêu?

Câu 6: Một người chèo một chiếc thuyền xuất phát từ điểm A trên bờ một con sông thẳng rộng 2 km, và muốn đến điểm B cách bờ đối diện 10 km. Người này có thể chỉ chèo thuyền hoặc kết hợp chèo thuyền với chạy bộ, càng nhanh càng tốt. Chẳng hạn, anh ta có thể chèo thuyền qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến điểm B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D nào đó ở giữa C và B rồi chạy bộ đến B , xem hình vẽ minh họa dưới đây. Biết rằng vận tốc chèo thuyền của anh ta là 6 km/h (đã tính vận tốc dòng nước), vận tốc chạy bộ của anh ta là 10 km/h. Trong tất cả các phương án đến B bằng cách chèo thuyền hoặc chèo thuyền rồi chạy bộ, phương án nhanh nhất có tổng thời gian là bao nhiêu giờ? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Câu 7: Cho $f(x)$ là hàm số bậc hai thỏa mãn $f(0)=1$ và $\int \frac{f(x)}{x^2(x+1)^3} dx$ là một họ hàm số có dạng $\frac{P(x)}{Q(x)}$, trong đó $P(x), Q(x)$ là các đa thức. Tính $f'(0)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1)$, $B(-1;1;0)$ và điểm C nằm trên tia Ox . Biết rằng đường phân giác trong xuất phát từ A vuông góc với đường trung tuyến xuất phát từ B của tam giác ABC . Tìm hoành độ của điểm C . Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;3;3)$, $B(0;5;5)$, $C(1;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua C sao cho (P) cách A một đoạn bằng 3 và cách B một đoạn bằng 5. Tính khoảng cách từ O đến (P) . Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho đường tròn (C) là giao tuyến của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 3 = 0$. Xét mặt cầu (T) đi qua (C) và tiếp xúc mặt phẳng $(Q): 2x + y - 2z + 1 = 0$. Tính bán kính của (T) . Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

ĐỀ 1

ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI

MÔN: TOÁN 12

PHẦN I

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	C	A	A	B	D	A	A	C	D	A	A
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
C	B	D	C	A	B	C	D	C	A	C	C

PHẦN II

CÂU 1	CÂU 2	CÂU 3	CÂU 4	CÂU 5
a) Sai	a) Đúng	a) Đúng	a) Đúng	a) Đúng
b) Đúng	b) Đúng	b) Sai	b) Sai	b) Sai
c) Sai	c) Sai	c) Đúng	c) Đúng	c) Sai
d) Đúng	d) Sai	d) Sai	d) Sai	d) Đúng

PHẦN III

Câu	1	2	3	4	5	6
Trả lời	7	0,73	5321	0,58	1014	17

LỜI GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN: Trong mỗi câu hỏi, hãy chọn 1 đáp án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$+$
y		2		4	

- A. $x = 2$. B. $x = 4$. C. $x = -1$. D. $x = 1$.

Chọn C

Dựa vào BBT ta thấy tại $x = -1$ thì $y' = 0$ và đổi dấu từ dương sang âm nên hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và giá trị cực đại là $f(-1) = 2$.

$$y = \frac{x^2 + 3x - 2}{x + 3}$$

Câu 2: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có phương trình là

A. $y = 1$.

B. $x = -3$.

C. $y = x$.

D. $y = -2x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 2}{x + 3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x + 3} = 0$$

Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = x$.

Câu 3: Gọi M và m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$. Khi đó tổng $M + m$ bằng

A. $4 + 2\sqrt{2}$.

B. $4 - 2\sqrt{2}$.

C. $1 + \sqrt{2}$.

D. $1 - \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = [1; 9]$.

Ta có
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{9-x}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9-x} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 9-x = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

$$f(1) = f(9) = 2\sqrt{2}, \quad f(5) = 4$$

Suy ra $M = 4$ và $m = 2\sqrt{2}$.

Vậy $M + m = 4 + 2\sqrt{2}$.

Câu 4: Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2024; 2025)$ và chia hết cho 3 , để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 4m + 3$ đồng biến trên khoảng $(2024; +\infty)$?

A. 1349.

B. 1350.

C. 1348.

D. 936.

Lời giải

Chọn A

Ta có
$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$$

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{cases}$ (hai nghiệm phân biệt với mọi m).

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$	y_1		y_2		$+\infty$

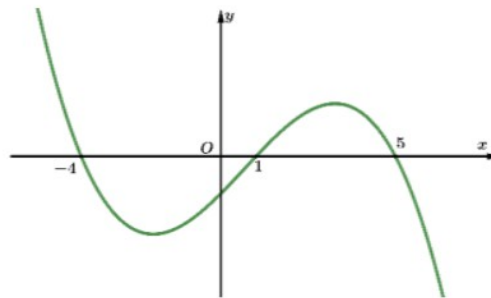
Hàm số đồng biến trên khoảng $(2024; +\infty)$

$$\Leftrightarrow (2024; +\infty) \subset (m + 1; +\infty) \Leftrightarrow m + 1 \leq 2024 \Leftrightarrow m \leq 2023$$

Do m là số nguyên chia hết cho 3 và $m \in (-2024; 2025)$ nên $m \in \{-2022; -2019; \dots; 2022\}$.

Vậy có 1349 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x^3 - 3x + 1) = 0$?



A. 6.

B. 5.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x^3 - 3x + 1)$ với trục hoành là số nghiệm của phương trình $f(x^3 - 3x + 1) = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 1 = -4 \\ x^3 - 3x + 1 = 1 \\ x^3 - 3x + 1 = 5. \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có $f(x^3 - 3x + 1) = 0$

Sử dụng máy tính cầm tay ta giải được: phương trình $x^3 - 3x + 1 = -4$ có 1 nghiệm; phương trình $x^3 - 3x + 1 = 1$ có 3 nghiệm; phương trình $x^3 - 3x + 1 = 5$ có 1 nghiệm, các nghiệm này đôi một

khác nhau. Vậy phương trình $f(x^3 - 3x + 1) = 0$ có 5 nghiệm.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 1; 2)$, $\vec{b} = (2; 1; -2)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{5}$.

C. $-\frac{1}{6}$.

D. $\frac{1}{9}$.

Lời giải

Chọn D

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{9}$$

Ta có

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$; $B(2;3;-4)$; $C(-3;1;2)$. Điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có tọa độ là

A. $D(-4;-2;9)$.

B. $D(4;2;9)$.

C. $D(6;2;-3)$.

D. $D(-2;4;5)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;3;-7)$ và $\overrightarrow{AC} = (-4;1;-1)$ là 2 vector không cùng phương.

Suy ra ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Gọi $D(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;3;-7)$; $\overrightarrow{DC} = (-3-x; 1-y; 2-z)$.

$$\text{Để tứ giác } ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3-x=1 \\ 1-y=3 \\ 2-z=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \\ z=9 \end{cases}$$

Nên $D(-4;-2;9)$.

Câu 8: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O và $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA'}$. Gọi K là trọng tâm của tam giác DCD' . Mặt phẳng (AKC') cắt cạnh AB' tại G . Chọn khẳng định đúng.

A. $\overrightarrow{GK} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$.

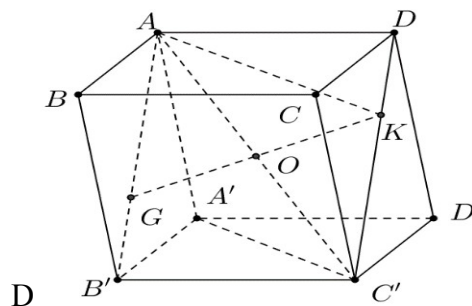
B. $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$.

C. $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$.

D. $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $KC' // AB'$ nên $(AKC') \equiv (ADC'B')$.

Do đó $G = (AKC') \cap AB'$.

Khi đó $\triangle AOG = \triangle C'OK$ nên $AG = C'K = \frac{2}{3} AB'$.

Do đó: $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'}) - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{c})$

$$= -\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$$

Câu 9: Điểm khảo sát môn Văn của 25 bạn học sinh nữ lớp ^{11D} trong kỳ kiểm tra giữa kì 2 được cho trong bảng sau:

Điểm	4	5	6	7	8	9
Số lượng	4	5	4	6	5	1

Số trung vị của bảng số liệu trên là

- A. 6,5 B. 7 C. 6 D. 5

Lời giải

Chọn C

Do bảng số liệu trên đã sắp xếp không giảm, số thứ 13 trong dãy là số 6.

Vậy số trung vị là 6.

Câu 10: Thời gian chạy tập luyện cự li ^{100m} của một vận động viên được cho trong bảng sau:

Thời gian (giây)	[10;10,4)	[10,4;10,8)	[10,8;11,2)	[11,2;11,6)	[11,6;12,0)
Số lần chạy	3	8	6	2	1

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. 0,18 B. 0,16 C. 0,15 D. 0,17

Lời giải

Chọn D

Chọn giá trị đại diện cho nhóm số liệu ta có:

Giá trị đại diện	10,2	10,6	11	11,4	11,8
Số lần chạy	3	8	6	2	1

Thời gian trung bình mỗi lần chạy của vận động viên trên là

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(3.10,2 + 8.10,6 + 6.11 + 2.11,4 + 1.11,8) = 10,8 \quad (\text{giây}).$$

Phương sai của thời gian chạy của vận động viên trên là

$$s^2 = \frac{1}{20}(3.10,2^2 + 8.10,6^2 + 6.11^2 + 2.11,4^2 + 1.11,8^2) - 10,8^2 = 0,17$$

Câu 11: Phương trình $2\cos x - 1 = 0$ có tập nghiệm là:

A. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$ **B.** $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi; -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$
C. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$ **D.** $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi; -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$

Lời giải

Chọn A

$$2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}$$

Ta có:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$$

Câu 12: Cho góc α thỏa mãn $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$ Giá trị của biểu thức $\sin^2 \alpha$ bằng

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $P = \frac{2}{3}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$, ta được

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos 2\alpha \right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 0.$$

Ta có $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 0 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}.$

Câu 13: Cho $a > 0$, $b > 0$ và $a^2 + b^2 = 7ab$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $2(\ln a + \ln b) = \ln(7ab)$ **B.** $3\ln(a+b) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$
C. $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$ **D.** $\ln(a+b) = \frac{3}{2}(\ln a + \ln b)$

Lời giải

Chọn C

Với $a > 0$, $b > 0$, ta có $a^2 + b^2 = 7ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = \ln(ab)$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \ln a + \ln b \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$$

Câu 14: Số nghiệm của phương trình $5^{x^2-3x+2} = 25$ là:

A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$5^{x^2-3x+2} = 25 \Leftrightarrow 5^{x^2-3x+2} = 5^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ta có

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Câu 15: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2; q = -5$. Tìm số hạng tổng quát u_n ?

A. $u_n = 2 \cdot (-5)^{n-1}$ B. $u_n = (-2) \cdot (-5)^{n+1}$ C. $u_n = (-2) \cdot 5^{n-1}$ D. $u_n = (-2) \cdot (-5)^{n-1}$

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức số hạng tổng quát cấp số nhân, ta có:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow u_n = (-2) \cdot (-5)^{n-1}.$$

Câu 16: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây

A. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ B. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n+2)}{6}$ C. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ D. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}$

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = u_1 + 1^2 \\ u_3 = u_2 + 2^2 \\ \dots \\ u_n = u_{n-1} + (n-1)^2 \end{cases}$$

Ta có:

$$u_n = 1 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

Cộng hai vế ta được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^5 - 2n^3 + 1}{2n^2 - 4n^5 + 2019} \text{ bằng}$$

Câu 17: A. -2. B. 0. C. 4. D. $+\infty$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^5 - 2n^3 + 1}{2n^2 - 4n^5 + 2019} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^5}}{\frac{2}{n^3} - 4 + \frac{2019}{n^5}} \right) = -2.$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx^2 - 7x + 5}{2x^2 + 8x - 1} = -4.$$

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m thỏa mãn

A. $m = -4.$

B. $m = -8.$

C. $m = 2.$

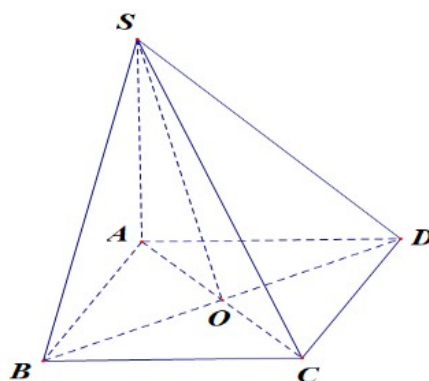
D. $m = -3.$

Lời giải

Chọn B

$$-4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx^2 - 7x + 5}{2x^2 + 8x - 1} \Leftrightarrow -4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{m - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{8}{x} - \frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow -4 = \frac{m}{2} \Leftrightarrow m = -8$$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình hình thoi tâm O cạnh $a\sqrt{2}$ và $\angle BAD = 60^\circ$. Tính góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.



A. $45^\circ.$

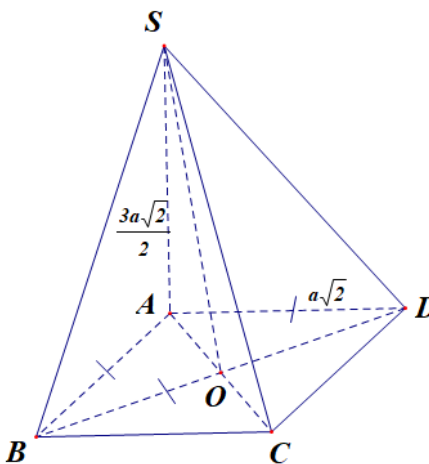
B. $30^\circ.$

C. $60^\circ.$

D. $90^\circ.$

Lời giải

Chọn C



Do $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu của SO lên mặt phẳng $(ABCD)$ là AO . Khi đó góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA}$.

Từ giả thiết ta có $\triangle ABD$ đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên $AO = AB \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

$\triangle SOA$ vuông tại A có $SA = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$, $AO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ nên

$$\tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{OA} = \frac{3a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{6}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SOA} = 60^\circ.$$

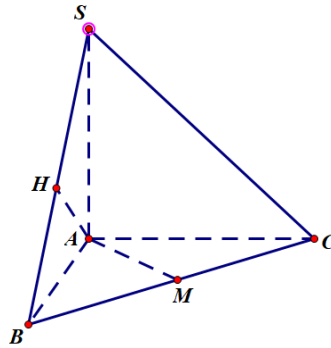
Vậy góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° .

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy (ABC) thỏa mãn $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$; SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của BC , tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AM .

- A. $a\sqrt{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos \widehat{BAC} = 7a^2$.

$$\Rightarrow BM^2 = \frac{7a^2}{4}.$$

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

$AB^2 + AM^2 = BM^2 \Rightarrow \triangle ABM$ vuông tại **A.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} AM \perp AB \\ AM \perp SA \Rightarrow AM \perp (SAB) \\ SA \cap AB \end{cases}.$$

Trong mp (SAB) , kẻ $AH \perp SB$. Suy ra AH là đoạn vuông góc chung của AM và SB .

Do $\triangle SAB$ vuông cân đỉnh S nên $AH = \frac{SB}{2} = \frac{SA\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AM bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 21: Tính tổng các hệ số trong khai triển nhị thức $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x\right)^5$.

A. 5. **B.** 1. **C.** 32. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x\right)^5 = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

có tổng các hệ số là $a + b + c + d + e$.

Chọn $x = 1$ ta có $a + b + c + d + e = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)^5 = 32$.

Câu 22: Từ các chữ số $0; 1; 2; 3; 4; 5$ có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?

A. 156. **B.** 144. **C.** 96. **D.** 134.

Lời giải

Chọn A

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $a \neq 0$ và $a, b, c, d \in A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Vì $\overline{abcd}$ là số chẵn $\Rightarrow d = \{0; 2; 4\}$.

TH1. Nếu $d = 0$, số cần tìm là $\overline{abc0}$. Khi đó:

- a được chọn từ tập $A \setminus \{0\}$ nên có 5 cách chọn.
- b được chọn từ tập $A \setminus \{0; a\}$ nên có 4 cách chọn.
- c được chọn từ tập $A \setminus \{0; a; b\}$ nên có 3 cách chọn.

Như vậy, ta có $5 \times 4 \times 3 = 60$ số có dạng $\overline{abc0}$.

TH2. Nếu $d = \{2; 4\} \Rightarrow d$ có 2 cách chọn.

Khi đó a : có 4 cách chọn, b : có 4 cách chọn và c : có 3 cách chọn.

Như vậy, ta có $2 \times 4 \times 4 \times 3 = 96$ số cần tìm như trên.

Vậy có tất cả $60 + 96 = 156$ số cần tìm.

Câu 23: Một loại xét nghiệm nhanh SARS-CoV-2 cho kết quả dương tính với $81,2\%$ các ca thực sự nhiễm virus và kết quả âm tính với $98,4\%$ các ca thực sự không nhiễm virus. Giả sử tỉ lệ người nhiễm virus SARS-CoV-2 trong cộng đồng là 2% . Một người trong cộng đồng đó làm xét nghiệm và nhận được kết quả dương tính. Xác suất người đó thực sự nhiễm virus là

A. $0,033$. **B.** $0,039$. **C.** $0,509$. **D.** $0,399$.

Lời giải

Chọn C

Gọi A : “Người làm xét nghiệm có kết quả dương tính”.

B : “Người làm xét nghiệm thực sự nhiễm virus”.

Khi đó, ta có: $P(A|B) = 81,2\% = 0,812$.

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = 98,4\% = 0,984, \text{ suy ra } P(A|\bar{B}) = 1 - 0,984 = 0,016$$

Do tỷ lệ người nhiễm virus trong cộng đồng là 2% nên $P(B) = 2\% = 0,02$ và $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,02 = 0,98$,

$$\begin{aligned} \text{Do đó } P(A) &= P(B).P(A|B) + P(\bar{B}).P(A|\bar{B}) \\ &= 0,02.0,812 + 0,98.0,016 = 0,03192 \end{aligned}$$

Ta có

$$P(B|A) = \frac{P(B).P(A|B)}{P(A)} = \frac{0,02.0,812}{0,03192} = 0,509$$

Câu 24: Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương

$$x = 4 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 3$$

trình chuyển động, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng centimét. Tính gia tốc tức thời khi vận tốc tức thời của con lắc bằng 0 lần đầu tiên.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** π^2 . **C.** $-4\pi^2$. **D.** 7 .

Lời giải

Chọn C

$$v(t) = x'(t) = -4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Vận tốc tức thời của con lắc

$$a(t) = v'(t) = -4\pi^2 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Gia tốc tức thời của con lắc:

Khi vận tốc tức thời của con lắc bằng 0

$$\Leftrightarrow -4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \pi t - \frac{2\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} + k \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Vì $t > 0$ nên $t = \frac{2}{3}$.

Với $t = \frac{2}{3}$ thì $a\left(\frac{2}{3}\right) = -4\pi^2 \cos\left(\pi \cdot \frac{2}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) = -4\pi^2$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI: Trong mỗi ý ở mỗi câu, hãy chọn đúng hay sai

Câu 25: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-3), B(4;0;5), C(2;0;1)$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Điểm $G\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ là trọng tâm của tam giác ABC .

b) Diện tích của tam giác ABC bằng $\sqrt{24}$.

c) Biết điểm $I(a;b;2)$ cách đều ba điểm A, B, C . Khi đó $a + b = 5$.

d) Gọi M là điểm bất kì sao cho biểu thức $P = 2MA^2 + 3MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị nhỏ nhất đó bằng 90 .

Lời giải

Chọn a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng.

a) Mệnh đề sai vì

G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(\frac{7}{2}; \frac{2}{3}; 1\right)$.

b) Mệnh đề đúng vì

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3; -2; 8); \overrightarrow{AC} = (1; -2; 4)$.

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (8; -4; -4)$

Diện tích của tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} \left\| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right\| = 2\sqrt{6} = \sqrt{24}$.

c) Mệnh đề sai vì

Ta có:

$$\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ BI^2 = CI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b-2)^2 + 25 = (a-4)^2 + b^2 + 9 \\ (a-4)^2 + b^2 + 9 = (a-2)^2 + b^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 4b = -5 \\ a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = \frac{35}{4} \end{cases}$$

Vậy $I\left(5; \frac{35}{4}; 2\right)$. Khi đó $a + b = \frac{55}{4}$.

d) Mệnh đề đúng vì

Gọi $H(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(1-x) + 3(4-x) - (2-x) = 0 \\ 2(2-y) + 3(-y) - (-y) = 0 \\ 2(-3-z) + 3(5-z) - (1-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow H(3; 1; 2)$$

Khi đó

$$\begin{aligned} P &= 2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 = 2(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})^2 + 3(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})^2 - (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC})^2 \\ &= 4MH^2 + 2HA^2 + 3HB^2 - HC^2 + 2\overrightarrow{MH}(2\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC}) \\ &= 4MH^2 + 2HA^2 + 3HB^2 - HC^2. \end{aligned}$$

Biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất khi $M \equiv H \Rightarrow M(3; 1; 2)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 90.

Câu 26: Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp 12 được cho ở bảng sau

Khoảng điểm	[6,5;7)	[7;7,5)	[7,5;8)	[8;8,5)	[8,5;9)	[9;9,5)	[9,5;10]
Số học sinh	8	10	16	24	13	7	4

Mẫu số liệu gộp nhóm đã cho có:

- a) Giá trị trung bình gần bằng $8,12$ (làm tròn đến hàng phần trăm).
- b) Trung vị bằng $8,15$ (làm tròn đến hàng phần trăm).
- c) Một bằng $8,5$ (làm tròn đến hàng phần chục).
- d) Phương sai lớn hơn 1.

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Sai.

a) Mệnh đề đúng vì

$$n = 82$$

$$\bar{x} = \frac{6,75 \cdot 8 + 7,25 \cdot 10 + 7,75 \cdot 16 + 8,25 \cdot 24 + 8,75 \cdot 13 + 9,25 \cdot 7 + 9,75 \cdot 4}{82} \approx 8,12$$

b) Mệnh đề đúng vì

Nhóm chứa trung vị: $[8; 8,5)$.

$$M_e = 8 + \frac{\frac{82}{2} - (8 + 10 + 16)}{24} \cdot 0,5 \approx 8,15$$

c) Mệnh đề sai vì

$$M_o = 8 + \frac{24-16}{(24-16)+(24-13)} \cdot 0,5 \approx 8,21$$

d) Mệnh đề sai vì

$$\begin{aligned} & (6,75 - \bar{x})^2 \cdot 8 + (7,25 - \bar{x})^2 \cdot 10 + (7,75 - \bar{x})^2 \cdot 16 + (8,25 - \bar{x})^2 \cdot 24 + (8,75 - \bar{x})^2 \cdot 13 \\ s^2 = & \frac{+ (9,25 - \bar{x})^2 \cdot 7 + (9,75 - \bar{x})^2 \cdot 4}{82} \\ & \approx 0,608 < 1 \end{aligned}$$

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = \log_2 x$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = (0; +\infty)$.

b) Hàm số có đạo hàm $f'(x) = \frac{\ln 2}{x}, x > 0$.

c) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2 x - 5 \log_2 x - 6 \leq 0$ là $S = \left[\frac{1}{2}; 64 \right]$.

d) Cho phương trình $(f(2x))^2 - (m+2)f(x) + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 2]$ là $[1; 2]$.

Lời giải

GVPB1: Bùi Xuân Thùy; GVPB2: ...

a) $f(x) = \log_2 x$

Điều kiện xác định: $x > 0$. Tập xác định: $D = (0; +\infty)$.

Chọn ĐÚNG.

b) $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 2}$

Chọn SAI.

c) $\log_2^2 x - 5 \log_2 x - 6 \leq 0$ (1)

ĐK: $x > 0$ (*)

Đặt $t = \log_2 x$

(1) thành $t^2 - 5t - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 6 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} -1 \leq \log_2 x \leq 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 64$

So với (*): (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 64$

Vậy $S = \left[\frac{1}{2}; 64 \right]$.

Chọn ĐÚNG.

d) $(f(2x))^2 - (m+2)f(x) + m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (\log_2(2x))^2 - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow [1 + \log_2(x)]^2 - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0 (*)$

Đặt $t = \log_2 x = f(x)$, $x \in [1; 2] \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$ và mỗi giá trị của x sẽ cho một giá trị của t

(*) trở thành $(1+t)^2 - (m+2)t + m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 - mt - 2t + m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 1 = m(t-1)$

$\Leftrightarrow (t-1)(t+1-m) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = m-1 & (1) \\ t = 1 & (2) \end{cases}$

Với $t = 1$ thì phương trình có một nghiệm $x = 2$

Vậy để phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (1) phải có một nghiệm $t \neq 1$

$0 \leq m-1 < 1 \Leftrightarrow 1 \leq m < 2$

Vậy $m \in [1; 2)$ để thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn SAI.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O và $AB = 2a, AD = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của OA và $SH = \frac{3a}{2}$.

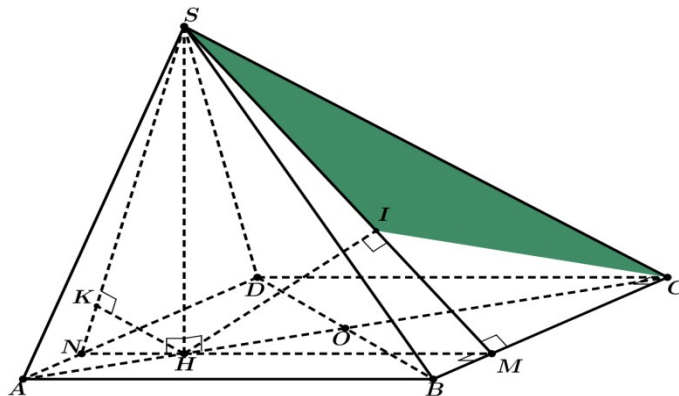
a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = a^3$.

b) Hình chiếu vuông góc của tam giác SCH trên mặt phẳng (SBC) là tam giác SCI , với I là hình chiếu của H trên BC .

c) Số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ là 45° .

d) Khoảng cách từ điểm C đến $mp(SAD)$ là $\frac{3\sqrt{10}}{20}a$

Lời giải



Chọn a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai.

a) Mệnh đề đúng, vì:

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABCD \text{ là } V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} a \cdot 2a \cdot a = a^3$$

b) Mệnh đề sai, vì:

$$\text{Kẻ } HM \perp BC \text{ và } HI \perp SM \text{ . Từ đó suy ra } HI \perp (SBC)$$

Vậy hình chiếu vuông góc của tam giác SCH trên mặt phẳng (SBC) là tam giác SCI , với I là hình chiếu của H trên SM .

c) Mệnh đề đúng, vì:

$$\text{Do } \begin{cases} HM \perp BC \\ SM \perp BC \end{cases} \text{ nên góc phẳng nhị diện } [S, BC, A] \text{ là } \widehat{SMH}.$$

$$\text{Ta có: } HM \parallel AB \Rightarrow \frac{HM}{AB} = \frac{CH}{CA} = \frac{3}{4} \Rightarrow HM = \frac{3}{2}a$$

$$\text{Tính } \tan \widehat{SMH} = \frac{SH}{HM} = 1 \Rightarrow \widehat{SMH} = 45^\circ$$

d) Mệnh đề sai, vì:

$$\text{Kẻ } HN \perp AD \text{ và } HK \perp SN \text{ . Từ đó suy ra } HK \perp (SAD)$$

$$\text{Ta có: } d(C, (SAD)) = 4d(H, (SAD)) = 4HK$$

$$\text{Tính } HK = \frac{HN \cdot HS}{\sqrt{HN^2 + HS^2}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{3a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{20}a$$

$$\text{Vậy } d(C, (SAD)) = 4d(H, (SAD)) = 4HK = \frac{3\sqrt{10}}{5}a$$

Câu 29: Một hộp chứa 40 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến

40 . Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời hai thẻ từ hộp. Xét các biến cố

A : "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 10 ".

A_1 : "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra không chia hết cho 5 ".

A_2 : "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra không chia hết cho 2 ".

a) Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = 780$.

$$\text{b) } P(A_1) = \frac{C_8^2}{C_{40}^2} = \frac{7}{195}$$

c) A_1 và A_2 là hai biến cố độc lập.

d)
$$P(A) = \frac{107}{390}.$$

Lời giải

Từ 1 đến 40 có 8 số chia hết cho 5 là $\{5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40\}$

có 20 số chia hết cho 2 là $\{2; 4; 6; \dots; 38; 40\}$

và 4 số chia hết cho 10 là $\{10; 20; 30; 40\}$

a) Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{40}^2 = 780$.

Chọn ĐÚNG.

b) Ta có A_1 là biến cố "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra không chia hết cho 5", khi đó

$$P(A_1) = \frac{C_{32}^2}{C_{40}^2} = \frac{124}{195}.$$

Chọn SAI.

c) Ta có A_1 và A_2 là hai biến cố không độc lập.

Chọn SAI.

d) Ta thấy A là biến cố đối của biến cố $A_1 \cup A_2$.

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = \frac{C_{32}^2}{C_{40}^2} + \frac{C_{20}^2}{C_{40}^2} - \frac{C_{16}^2}{C_{40}^2} = \frac{283}{390}.$$

Ta có

Do đó, xác suất biến cố A "Tích các số ghi trên hai thẻ chia hết cho 10" là

$$P(A) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = \frac{107}{390}.$$

Chọn ĐÚNG.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN: Trong mỗi câu, hãy viết phần trả lời ngắn không quá 4 ký tự (phải là số) và để ngoài MathType

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ và hàm số $y = g(x) = f(x) - mx + 2025$. Gọi $S = (a; b)$ là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = g(x)$ có ba cực trị. Tính giá trị của $2a + 3b$.

Lời giải

Trả lời: 7

Từ yêu cầu bài toán ta có: $g'(x) = f'(x) - m \Leftrightarrow g'(x) = x^3 + 3x^2 - 1 - m$.

Suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow x^3+3x^2-1-m=0 \Leftrightarrow x^3+3x^2-1=m$.

Để hàm số $y=g(x)$ có ba cực trị thì $g'(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt.

Hay phương trình $x^3+3x^2-1=m$ có ba nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $y=h(x)=x^3+3x^2-1$ có $h'(x)=3x^2+6x$ và $h'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=0 \end{cases}$.

Do đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		3		-1		$+\infty$

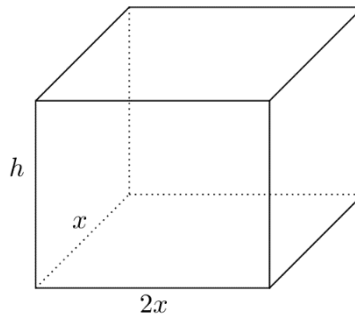
Để phương trình $x^3+3x^2-1=m$ có ba nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại ba điểm phân biệt. Nghĩa là $-1 < m < 3$. Hay $S=(-1;3)$.

Do đó $2a+3b=7$

Câu 31: Chị Hà dự định sử dụng hết 4m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu mét khối (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Trả lời: 0,73



Giả sử bể cá có kích thước như hình vẽ, với $x, h > 0$.

Theo đề bài ta có: $2x^2+2xh+4xh=4 \Leftrightarrow h=\frac{4-2x^2}{6x}$.

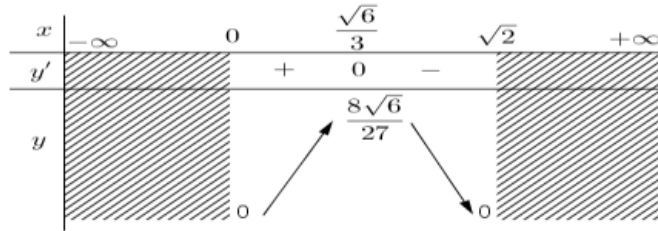
Do $x > 0, h > 0$ nên $4-2x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{2}$.

Thể tích của bể cá là $V=2x^2h=\frac{4x-2x^3}{3}=f(x)$, với $x \in (0; \sqrt{2})$.

Ta có: $f'(x)=\frac{4}{3}-2x^2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (\text{vì } x > 0).$$

Bảng biến thiên



Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $\frac{8\sqrt{6}}{27} \text{ m}^3 \approx 0,73 \text{ m}^3$.

Câu 32: Cho x, y là các số thực thỏa mãn bất phương trình: $\log_3(3x+3) + x - 3y \geq 27^y$. Biết $0 \leq x \leq 2024$, có bao nhiêu cặp (x, y) nguyên thỏa mãn bất phương trình trên?

Lời giải

Trả lời: 5321

Ta có:

$$\log_3(3x+3) + x - 3y \geq 27^y \Leftrightarrow 3^{\log_3(x+1)} + \log_3(x+1) \geq 3^{3y} + 3y. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$.

Ta có $f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Nên hàm số $f(t) = 3^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow f(\log_3(x+1)) \geq f(3y) \Leftrightarrow \log_3(x+1) \geq 3y \Leftrightarrow x \geq 3^{3y} - 1$.

Với $0 \leq x \leq 2024 \Rightarrow 1 \leq 3^{3y} \leq 2025 \Rightarrow 0 \leq y \leq \log_{27} 2025$.

Vì $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2\}$.

Với $y = 0$ thì $x \geq 0$ nên có 2025 cặp số (x, y) thỏa mãn.

Với $y = 1$ thì $x \geq 26$ nên có 1999 cặp số (x, y) thỏa mãn.

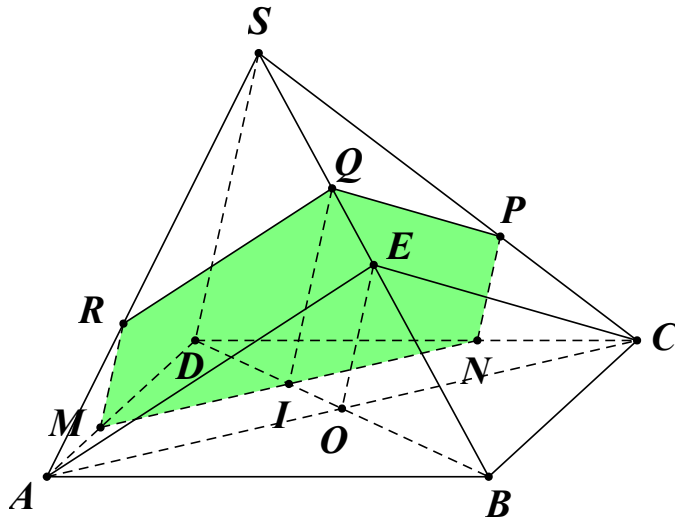
Với $y = 2$ thì $x \geq 728$ nên có 1297 cặp số (x, y) thỏa mãn.

Vậy có tất cả 5321 cặp (x, y) thỏa mãn.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , E là trung điểm của SB . Biết rằng tam giác EAC đều, $BD = 2AC = 2$. Lấy I trên đoạn OD với $DI = x, 0 < x < 1$. Gọi (α) là mặt phẳng qua I và song song với (ACE) . Mặt phẳng (α) cắt AD, CD, SC, SB, SA lần lượt tại M, N, P, Q, R . Tìm diện tích lớn nhất của ngũ giác $MNPQR$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,58



Qua I dựng đường thẳng song song với AC cắt AD, CD lần lượt tại M và N .

Qua I dựng đường thẳng song song với OE cắt SB tại Q .

Qua Q dựng đường thẳng song song với AE cắt SA tại R .

Qua Q dựng đường thẳng song song với EC cắt SC tại P .

$$(\alpha) \equiv (MNPQR) \quad (MNPQR) \perp (ACE)$$

Khi đó và .

Ta có: $\frac{QP}{EC} = \frac{QR}{AE} = \frac{RP}{AC} = \frac{SP}{SC}$ nên $\triangle QRP$ đều.

Ta có: $IQ \parallel OE \parallel SD$ nên $\begin{cases} RM \parallel SD \\ PN \parallel SD \end{cases}$. Mặt khác $\frac{CN}{CD} = \frac{AM}{AD}$ nên $RM = PN \Rightarrow MNPR$ là hình bình hành.

Lại có $\triangle EAC$ đều nên $OE \perp AC \Rightarrow PN \perp MN$. Suy ra $MNPR$ là hình chữ nhật.

Tam giác EAC đều có cạnh $AC = 1$ nên $EO = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SD = \sqrt{3}$.

Ta có: $\frac{MN}{AC} = \frac{DI}{DO} = \frac{x}{1} \Rightarrow MN = x$; $\frac{RM}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{OI}{OD} = 1 - x \Rightarrow RM = (1 - x)\sqrt{3}$.

Diện tích hình chữ nhật $MNPR$ bằng: $S_{MNPR} = \sqrt{3}(1 - x).x = -\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}x$.

Diện tích tam giác EAC bằng: $S_{\Delta EAC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

$$\frac{S_{\Delta QRP}}{S_{\Delta EAC}} = \left(\frac{QR}{AE}\right)^2 = \left(\frac{SR}{SA}\right)^2 = \left(\frac{DM}{DA}\right)^2 = \left(\frac{DI}{DO}\right)^2 = x^2 \Rightarrow S_{\Delta QRP} = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$$

Lại có:

Do đó diện tích ngũ giác $MNPQR$ bằng: $\frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + (-\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}x) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} x^2 + \sqrt{3}x$.

Xét hàm số $f(x) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} x^2 + \sqrt{3}x$ với $0 < x < 1$.

Dễ thấy hàm số đạt GTLN bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$ tại $x = \frac{2}{3}$.

Vậy diện tích lớn nhất của ngũ giác $MNPQR$ là $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$.

Câu 34: Trong 2025 số nguyên dương đầu tiên, có thể chọn ra tối đa bao nhiêu số sao cho hiệu hai số bất kì luôn khác 6.

Lời giải

Trả lời: 1014

Vì hiệu hai số bất kì bằng 6 là một số chẵn nên hai số đó cùng tính chẵn lẻ nên ta sẽ có hai trường hợp là tập hợp các số chẵn hay lẻ không có hiệu bằng 6 và trường hợp là tập hợp chứa cả các số chẵn và lẻ không có hiệu bằng 6.

Trường hợp 1: Hai số cùng lẻ.

Trong dãy số lẻ: 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; ...; 2021; 2023; 2025, để ý rằng $7 - 1 = 6$ và $13 - 7 = 6$, ... Vậy nên số như vị bị “kẹp” giữa hai số khác sao cho hiệu của chúng bằng 6 chẳng hạn là 7 theo như trên thì ở giữa 1 và 13. Ta có bảng liệt kê các cặp số $(A; B)$ với $B - A = 6$.

A	B
1	7
3	9
5	11
7	13
9	15
11	17
13	19
15	21
17	23
...	
2017	2023
2019	2025

2021	
2023	
2025	

Bằng cách tạo bảng như trên thì ta có thể loại trừ được khả năng như trên.

Vậy nhóm đầu tiên gồm tập hợp các số $(7; 9; 11), (19; 21; 23), \dots, (2023; 2025)$

Đây là nhóm gồm các số có những bộ ba dạng $(12k + 7; 12k + 9; 12k + 11)$ với $0 \leq k \leq 168$.

k	$12k + 7$	$12k + 9$	$12k + 11$
0	7	9	11
1	19	21	23
2	31	33	35
...			
167	2011	2013	2015
168	2023	2025	

Vậy có $3 \cdot 168 + 2 = 506$ số mà tất cả các số đó đều không có bất kì hai số nào có hiệu bằng 6. Nhóm tiếp theo là nhóm bị bỏ từ trước, khi đó nhóm đầu tiên như sẽ bị bỏ ngược lại.

Khi đó nhóm tiếp theo gồm tập hợp các số $(1; 3; 5), (13; 15; 17), \dots, (2017; 2019; 2021)$

Đây là nhóm gồm các số có những bộ ba dạng $(12k + 1; 12k + 3; 12k + 5)$ với $0 \leq k \leq 168$

k	$12k + 1$	$12k + 3$	$12k + 5$
0	1	3	5
1	13	15	17
2	25	27	29
...			
167	2005	2007	2009
168	2017	2019	2021

Vậy có $3 \cdot 169 = 507$ số mà tất cả các số đó đều không có bất kì hai số nào có hiệu bằng 6.

Trường hợp 2: Hai số cùng chẵn, lập luận tương tự với trường hợp 1 là hiệu hai số chẵn, khi đó ta cũng có hai tập hợp thỏa mãn lần lượt chứa 507 số và 505 số.

Trường hợp 3: Hai số khác tính chẵn lẻ

Trong dãy số: $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; \dots; 12; 13; \dots; 2022; 2023; 2024; 2025$, lí luận tương tự trường hợp 1 ta có bảng bên dưới với $B - A = 6$

A	B
1	7
2	8
3	9
4	10
5	11
6	12
7	13
...	

Vậy ta có nhóm gồm các số $(1; 2; 3; 4; 5; 6); (13; 14; 15; 16; 17; 18); \dots$

Đây là nhóm gồm các số có những bộ sáu dạng
 $(12k + 1; 12k + 2; 12k + 3; 12k + 4; 12k + 5; 12k + 6)$ với $0 \leq k \leq 168$.

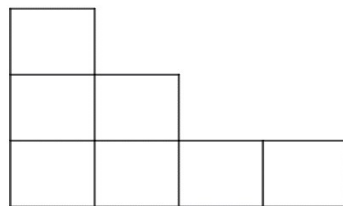
k	$12k + 1$	$12k + 2$	$12k + 3$	$12k + 4$	$12k + 5$	$12k + 6$
0	1	2	3	4	5	6
1	13	14	15	16	17	18
...						
167	2005	2006	2007	2008	2009	2010
168	2017	2018	2019	2020	2021	2022

Vậy có tất cả $6 \cdot 169 = 1014$ số trong tập hợp này. Nhóm còn lại vì dừng ở 2025 nên chỉ có tất cả $6 \cdot 168 + 3 = 1011$

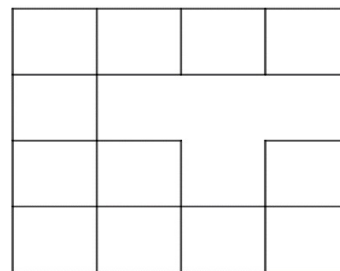
Câu 35: Trong một cuộc thi IQ dành cho học sinh các cấp, ban tổ chức đã

để robot xếp các khối lập phương $1:1:1$ đơn vị thành một hình khối mà khi nhìn, thí sinh chỉ được nhìn từ các góc nhìn được mô tả qua các hình vẽ và thông tin bên dưới.

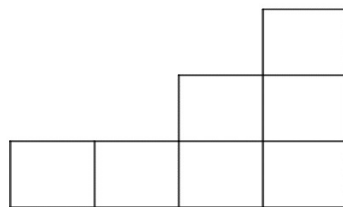
Thể tích lớn nhất của hình khối đó có thể là?



Từ trước và từ phải qua



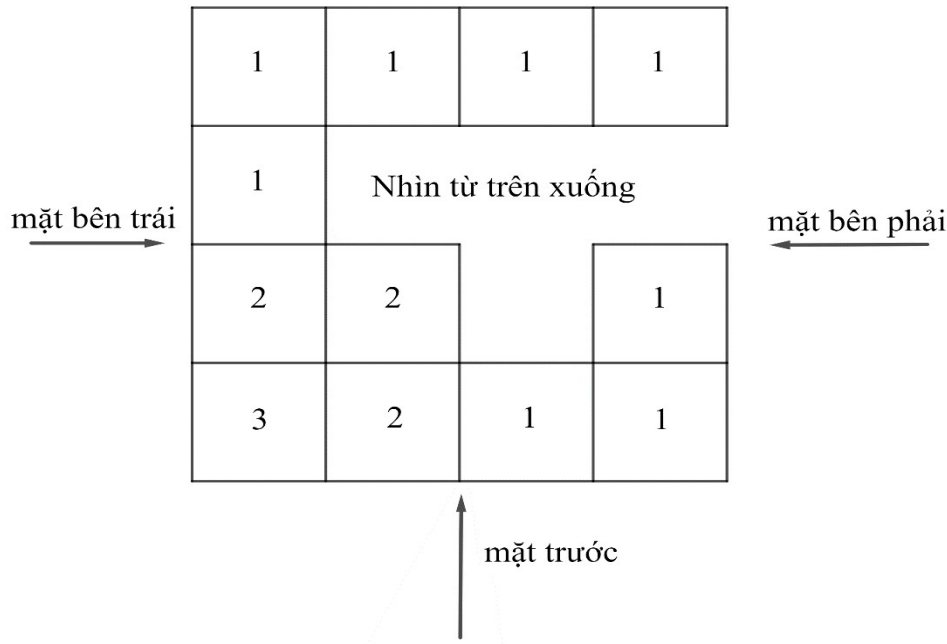
Từ trên xuống



Từ trái qua

Lời giải

Trả lời: 17



Để có thể bao quát cả hình, ta sẽ lấy góc nhìn từ trên xuống.

Với mỗi ô vuông như hình trên, ta đánh số và mỗi số tượng trưng cho số hình lập phương $1:1:1$ đơn vị được xếp chồng lên ô vuông đó.

Bằng cách đánh số như vậy và để cho thể tích hình khối này lớn nhất thì ở ô thứ 2 của cột 2 (từ trái sang), hàng 3, có thể được robot xếp chồng thêm hai khối lập phương nữa vì khi đó hình dạng của hình khối khi nhìn từ các góc nhìn mà học sinh được nhìn vẫn không đổi.

Vậy thể tích lớn nhất của hình khối đó có thể là 17.

ĐỀ 2

ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI

MÔN: TOÁN 12

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.D	4.D	5.A	6.D	7.A	8.A
9.A	10.D	11.B	12.C	13.C	14.A	15.B	16.D
17.C	18.B	19.A	20.D	21.D	22.B	23.B	24.D

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

CÂU 1	CÂU 2	CÂU 3	CÂU 4	CÂU 5
a) Đúng	a) Sai	a) Sai	a) Đúng	a) Đúng
b) Sai	b) Đúng	b) Sai	b) Sai	b) Sai
c) Đúng	c) Đúng	c) Đúng	c) Sai	c) Sai
d) Sai	d) Đúng	d) Sai	d) Đúng	d) Đúng

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu	1	2	3	4	5	6
Chọn	1	150	0,94	1,8	120	3,67

PHẦN I. CẤU TRÚC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN: Trong mỗi câu hỏi, hãy chọn 1 đáp án.

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 4)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

TXĐ:

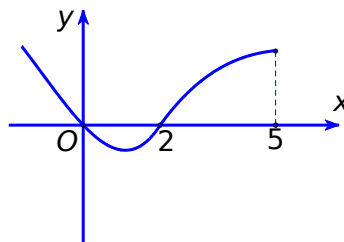
$$y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1} \quad y' = \frac{x^2 + 2x + 5}{(x + 1)^2} > 0, \quad \forall x \neq -1$$

Hàm số có

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Do đó đồng biến trên khoảng $(2; 4)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi $x \in \mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây.



Biết rằng $f(0) + f(4) = f(2) + f(5)$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$?

- A. $f(1)$
- B. $f(2)$
- C. $f(0)$
- D. $f(5)$

Lời giải

Chọn D

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$

x	0	2	5	
$f'(x)$	0	—	0	+
$f(x)$				

$$f(2) < f(4)$$

Từ bảng biến thiên ta thấy A

Mà $f(0) + f(4) = f(2) + f(5)$ nên $f(5) - f(0) = f(4) - f(2) > 0$ suy ra $f(5) > f(0)$

$$\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$$

Vậy

$$y = \frac{x^2 - 2(m-2)x + m^2}{x+1}$$

Câu 3: Cho hàm số có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng?

- A. $\begin{cases} m \neq -3 \\ m \neq 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -3 \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

TXĐ:

Đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2(m-2)x + m^2}{x+1}$ nếu $\lim_{x \rightarrow -1^{\pm}} y = \infty$

hay $x = -1$ không là nghiệm của phương trình $x^2 - 2(m-2)x + m^2 = 0$ tức là

$$1^2 + 2(m-2) + m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -3 \end{cases}$$

Vậy

Câu 4: Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \leq t \leq 10$$

số , trong đó thời gian t được tính bằng giây. Trong 5 giây kể từ khi máu rời tim, thời điểm nào tốc độ thay đổi của huyết áp giảm nhiều nhất

- A. $2(s)$. B. $4(s)$. C. $5(s)$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}(s)$.

Lời giải

Chọn D

Tốc độ thay đổi của huyết áp sau t giây là:

$$P'(t) = \frac{50t(t^2 + 1) - 2t(25t^2 + 125)}{(t^2 + 1)^2} = \frac{-200t}{(t^2 + 1)^2}$$

$$P''(t) = \frac{-200(t^2 + 1)^2 + 800t^2 \cdot (t^2 + 1)}{(t^2 + 1)^4} = \frac{-200(t^2 + 1) + 800t^2}{(t^2 + 1)^3} = \frac{600t^2 - 200}{(t^2 + 1)^3}$$

$$P''(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \notin [0; 5] \end{cases}$$

Ta có:

$$P'(0) = 0; P'(5) = \frac{-250}{169}; P'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{75\sqrt{3}}{2}$$

Trong 5 giây kể từ khi máu rời tim, thời gian tốc độ thay đổi của huyết áp giảm nhiều nhất là $\frac{\sqrt{3}}{3}(s)$.

Câu 5: Tìm tổng tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường

thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ song song với đường thẳng $y = -\frac{1}{4}x$.

- A. $m = \frac{1}{6}$. B. $m = \frac{2}{3}$. C. $m = -\frac{2}{3}$. D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6m(1-2m), y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = 1-2m \end{cases}$$

$$\text{Để hàm số có hai cực trị thì } m \neq 1-2m \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}.$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(m; -7m^3 + 3m^2)$, $B(1-2m; 20m^3 - 24m^2 + 9m - 1)$.

Do đó $\overrightarrow{AB} = (1-3m; (3m-1)^3)$. Do đó đường thẳng AB có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = ((3m-1)^2; 1)$.

$$\vec{n} = ((3m-1)^2; 1)$$

Do đó phương trình đường thẳng AB :

$$(3m-1)^2 x + y - 2m^3 + 3m^2 - m = 0 \Leftrightarrow y = -(3m-1)^2 x + 2m^3 - 3m^2 + m$$

Để đường thẳng AB song song với đường thẳng $y = -\frac{1}{4}x$ thì:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{1}{6} \\ m \neq 0 \\ m \neq \frac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{6}$$

Câu 6: Cho Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; -2; 3)$ và $\vec{b} = (-1; 3; 0)$.

Vector $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ có tọa độ là

- A. $(1; 7; 2)$ B. $(1; 5; 2)$ C. $(3; 7; 2)$ D. $(1; -1; 6)$

Lời giải

Chọn D

Có $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, gọi $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2.1 + (-1) = 1 \\ c_2 = 2.(-2) + 3 = -1 \\ c_3 = 2.3 + 0 = 6 \end{cases}$$

$$\vec{c} = (1; -1; 6)$$

Vậy

Câu 7: Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ B. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$
C. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} = 2(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ}) = \vec{0}$$

, với I, J là trung điểm của

AB, CD

Câu 8: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh AB và G là trọng tâm của tam giác BCD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Phân tích véc tơ $\overrightarrow{MG}$ theo $\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}$.

A. $\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$

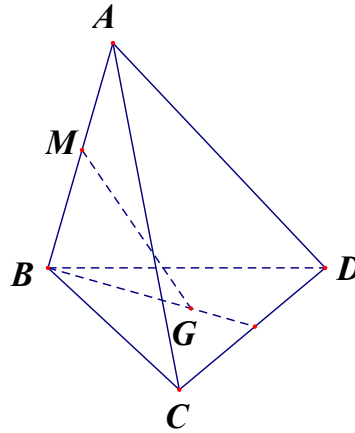
B. $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$

C. $\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$

D. $\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{d}$

Lời giải

Chọn A



$$\begin{aligned}\overrightarrow{MG} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ &= -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}\end{aligned}$$

Câu 9: Tỷ lệ trẻ em suy dinh dưỡng (tính theo cân nặng ứng với độ tuổi) của 10 tỉnh thuộc Đồng bằng sông Hồng được cho như sau:

5,5 13,8 10,2 12,2 11,0 7,4 11,4 13,1 12,5 13,4.

Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là

A. 11,05

B. 11,04

C. 11,03

D. 11,06.

Lời giải

Chọn A

$$\bar{x} = \frac{5,5 + 13,8 + 10,2 + 12,2 + 11,0 + 7,4 + 11,4 + 13,1 + 12,5 + 13,4}{10} = 11,05$$

Câu 10: Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp 12^A được cho ở bảng sau:

Khoảng điểm	[6,5;7)	[7;7,5)	[7,5;8)	[8;8,5)	[8,5;9)	[9;9,5)	[9,5;10)
Tần số	8	10	16	24	13	7	4

Số trung vị (làm tròn đến hàng phần trăm) của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. 7,15 . B. 9,15 . C. 10,15 . D. 8,15 .

Lời giải

Chọn D

Cỡ mẫu là $n = 82$.

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{82}$ là các giá trị điểm trung bình môn Toán của học sinh lớp 12A theo thứ tự tăng dần.

Vì cỡ mẫu chẵn nên ta có trung vị là $\frac{x_{41} + x_{42}}{2}$.

Mà hai giá trị x_{41}, x_{42} thuộc nhóm $[8; 8,5)$ nên nhóm này chứa trung vị.

Vậy ta có giá trị trung vị là $M_e = 8 + \frac{\frac{82}{2} - (8+10+16)}{24} \cdot (8,5 - 8) = 8,14583 \approx 8,15$.

Câu 11: Cho $\cos a = -\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} < a < \pi \right)$. Tính $\sin 2a$

- A. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. B. $\frac{-4\sqrt{2}}{9}$. C. $-\frac{2\sqrt{2}}{9}$. D. $\frac{2\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \sin^2 a = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin a = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\sin a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a = \frac{-4\sqrt{2}}{9}$.

Câu 12: Số nghiệm của phương trình $8 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \sin 12x$ trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ là:

- A. 15 . B. 16 . C. 17 . D. 18 .

Lời giải

Chọn C

Ta có: $8 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \sin 12x$

$\Leftrightarrow 4 \sin 4x \cos 4x \cos 8x = \sin 12x \Leftrightarrow 2 \sin 8x \cos 8x = \sin 12x$

$$\Leftrightarrow \sin 16x = \sin 12x \Leftrightarrow \begin{cases} 16x = 12x + k2\pi \\ 16x = \pi - 12x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{k\pi}{14} \end{cases}$$

$$\text{Xét } \frac{k\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \Leftrightarrow k = \pm 1; k = 0$$

$$\text{Xét } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{28} + \frac{k\pi}{14} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -7,5 \leq k \leq 6,5 \Rightarrow k = \{-7; -6; \dots; 5; 6\}$$

$$\text{Do đó PT có 17 nghiệm thuộc đoạn } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right].$$

$$\log_2 x = 6\log_4 a - 4\log_2 \sqrt{b} - \log_{\frac{1}{2}} c$$

Câu 13: Biết đúng. với a, b, c là các số thực dương bất kì. Tìm kết luận

A. $x = \frac{a^3}{b^2 c}$. B. $x = a^3 - b^2 + c$. C. $x = \frac{a^3 c}{b^2}$. D. $x = \frac{ac^3}{b^2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_2 x = 6\log_4 a - 4\log_2 \sqrt{b} - \log_{\frac{1}{2}} c$$

Ta có

$$\Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 a^3 - \log_2 b^2 + \log_2 c \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 \frac{a^3 c}{b^2} \Leftrightarrow x = \frac{a^3 c}{b^2}$$

Câu 14: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$. Tính tổng $S = x_1 + x_2$.

A. $S = 1$. B. $S = 4$. C. $S = 9$. D. $S = 10$

Lời giải

Chọn A

$$9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \\ 3^x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ta có

$$\text{Vậy } S = x_1 + x_2 = 0 + 1 = 1$$

Câu 15: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội âm, biết $u_3 = 12$, $u_7 = 192$. Tìm u_{10} .

A. $u_{10} = 1536$. B. $u_{10} = -1536$. C. $u_{10} = 3072$. D. $u_{10} = -3072$

Lời giải

Chọn B

Gọi q là công bội của cấp số nhân đề bài cho ($q < 0$).

Ta có
$$\begin{cases} u_3 = 12 = u_1 q^2 \\ u_7 = 192 = u_1 q^6 \end{cases} \Rightarrow \frac{u_1 q^6}{u_1 q^2} = \frac{192}{12} \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q = \pm 2.$$

Mà $q < 0 \Rightarrow q = -2 \Rightarrow u_1 = \frac{12}{q^2} = 3$.

Do đó $u_{10} = u_1 q^9 = 3 \cdot (-2)^9 = -1536$.

Câu 16: Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3^n} \end{cases}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng tổng quát của dãy (u_n) là

A. $3 - \frac{1}{3^n}$. B. $\frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{3^{n-2}} \right)$. C. $3 - \frac{1}{3^{n+1}}$. D. $\frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{3^{n-1}} \right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $u_1 = 1; u_2 = u_1 + \frac{1}{3}; u_3 = u_2 + \frac{1}{3^2}; u_4 = u_3 + \frac{1}{3^3}; \dots; u_n = u_{n-1} + \frac{1}{3^{n-1}}$.

Cộng vế với vế ta được:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n = 1 + u_1 + \frac{1}{3} + u_2 + \frac{1}{3^2} + u_3 + \frac{1}{3^3} + \dots + u_{n-1} + \frac{1}{3^{n-1}}.$$

$$\Rightarrow u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{3^{n-1}} \right).$$

Câu 17: Cho dãy số (u_n) có $u_n = \frac{(3n-2)(n+1)}{2n^2-3}$, với $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{2}$. D. -1 .

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n-2)(n+1)}{2n^2-3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + n - 2}{2n^2 - 3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}{2 - \frac{3}{n^2}} = \frac{3}{2}.$$

Ta có

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{2-2x}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x < 1 \\ 2mx^2 + mx - 2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}.$$

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ đã cho liên tục tại điểm $x = 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

A. $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = -\frac{1}{2}$. D. $m = 1$.

Chọn B

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

+ Ta có $f(1) = 3m - 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2mx^2 + mx - 2) = 3m - 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2-2x}{\sqrt{2-x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(2-2x)(\sqrt{2-x}+1)}{(\sqrt{2-x}-1)(\sqrt{2-x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(1-x)(\sqrt{2-x}+1)}{1-x} = 4.$$

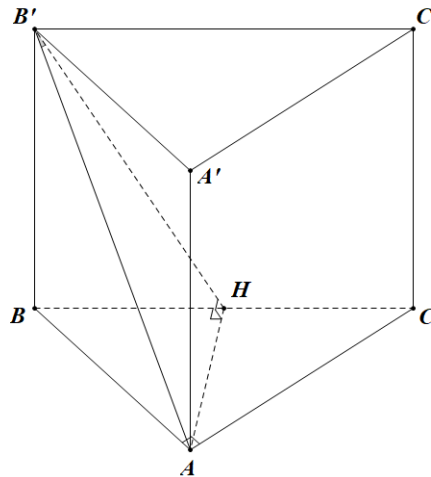
+ Hàm số liên tục tại điểm $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 3m - 2 = 4 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 19: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $BC = 2a$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BB'C)$ bằng 30° . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\sqrt{2}a^3$. B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. C. $\sqrt{6}a^3$. D. $2a^3$.

Lời giải

Chọn A



+) Gọi H là trung điểm của BC , theo bài ra ta có: $AH \perp BC$, $AH = BH = CH = \frac{BC}{2} = a$.

+) Do $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BB' \end{cases}$ nên $AH \perp (BB'C)$.

Từ đó suy ra góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BB'C)$ bằng góc $\angle AB'H$
 $\Rightarrow \angle AB'H = 30^\circ$.

+) Trong tam giác AHB' , vuông tại H có: $B'H = AH \cdot \cot \angle AB'H = a \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3}$.

+) Trong tam giác HBB' , vuông tại B có: $BB' = \sqrt{B'H^2 - BH^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

+) Diện tích tam giác ABC : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = a^2$.

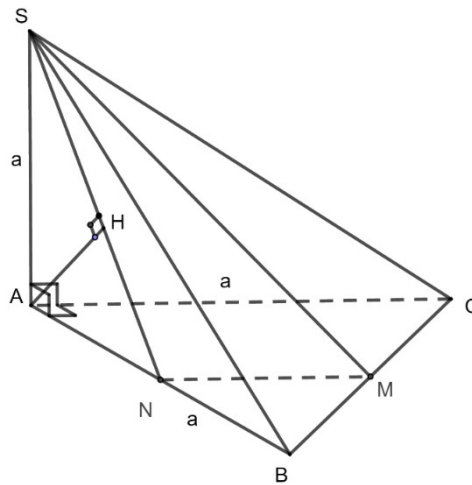
Thể tích khối lăng trụ đã cho là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot BB' = a^2 \cdot a\sqrt{2} = a^3\sqrt{2}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ C. $\frac{a}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm AB , và H là hình chiếu của A trên SN .

Ta có $AC \parallel MN \Rightarrow AC \parallel (SMN) \Rightarrow d(AC, SM) = d(AC, (SMN)) = d(A, (SMN))$.

$$\left. \begin{array}{l} MN \perp SA \\ MN \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow MN \perp (SAB)$$

$$\left. \begin{array}{l} (SAB) \perp (SMN) \\ (SAB) \cap (SMN) = SN \\ AH \perp SN \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp (SMN)$$

Ta có

Suy ra $AH = d(A, (SMN))$.

$$AH = \frac{AS \cdot AN}{\sqrt{AS^2 + AN^2}} = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{5}a}{5}.$$

Vậy $d(A, (SMN)) = \frac{\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 21: Từ 7 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau?

- A. 7^4 . B. P_7 . C. C_7^4 . D. A_7^4 .

Lời giải

Chọn D

Mỗi số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ 7 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 là một chỉnh hợp chập 4 của 7 phần tử. Nên số tự nhiên tạo thành là: A_7^4 (số).

Câu 22: Trong kỳ thi KSCL các môn thi THPT QUỐC GIA dành cho khối 12 của trường THPT Xuân Trường có tất cả 10 phòng thi. Có 7 em học sinh lớp 11 cũng đăng kí dự thi. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 7 em học sinh này vào phòng thi nếu một phòng thi có 3 em và hai phòng thi mỗi phòng có 2 em.

- A. 151200 . B. 75600 . C. 37800 . D. 302400 .

Lời giải

Chọn B

Chọn một phòng thi rồi xếp 3 em có $C_{10}^1 \cdot C_7^3 = 350$ cách.

Chọn tiếp 2 phòng từ 9 phòng thi còn lại và xếp mỗi phòng 2 em có $C_9^2 \cdot C_4^2 = 216$.

Vậy có tất cả $350 \cdot 216 = 75600$ cách xếp.

Câu 23: Hai xạ thủ cùng bắn mỗi người một viên đạn vào bia một cách độc lập với nhau. Xác suất bắn trúng

bia của hai xạ thủ lần lượt là $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{3}$. Tính xác suất của biến cố có ít nhất một xạ thủ không bắn trúng bia.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử ta có hai xạ thủ A, B.

Ta có: Xác suất bắn trúng mục tiêu của xạ thủ A, B tương ứng là $P(A), P(B)$

Gọi biến cố D: "có ít nhất một xạ thủ không bắn trúng bia"

$\overline{D}$: "Cả hai xạ thủ đều bắn trúng bia", khi đó $\overline{D} = A \cap B$

$$\text{Suy ra } P(\overline{D}) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} .$$

Câu 24: Cô Hà gửi 500 triệu vào ngân hàng với kì hạn cố định 12 tháng và hưởng lãi suất 0,65% / tháng. Tuy nhiên sau khi gửi được tròn 8 tháng cô phải dùng đến 500 triệu trên. Cô đến ngân hàng định rút tiền thì được nhân viên ngân hàng tư vấn: "Nếu rút tiền trước kì hạn, toàn bộ số tiền cô gửi chỉ

có lãi suất không kỳ hạn là $0,02\%$ / tháng. Cô nên thế chấp sổ tiết kiệm đó tại ngân hàng để vay ngân hàng 500 triệu với lãi suất $0,7\%$ / tháng. Khi sổ của cô đến kì hạn, cô có thể rút tiền để trả nợ ngân hàng”. Nếu làm theo tư vấn của nhân viên ngân hàng cô Hà sẽ đỡ thiệt một số tiền gần nhất với con số nào dưới đây (biết ngân hàng tính lãi theo thể thức lãi kép).

- A. 25,385 triệu đồng. B. 25,253 triệu đồng.
C. 25,447 triệu đồng. D. 25,477 triệu đồng.

Lời giải

Chọn D

Số tiền trả cho ngân hàng nếu vay 500 triệu trong 4 tháng $N = 500 \cdot (1 + 0,7\%)^4 - 500$

Tổng số tiền lãi nếu cô Hà gửi đúng kì hạn là $L_1 = 500 \cdot (1 + 0,65\%)^{12} - 500$

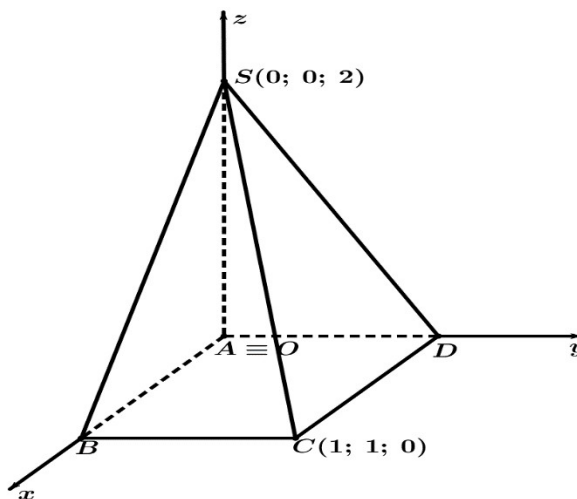
Số tiền lãi nếu cô Hà làm theo tư vấn của nhân viên ngân hàng $L = L_1 - N = 26,277$

Số tiền lãi nếu gửi 8 tháng theo hình thức lãi suất không kì hạn $L_2 = 500 \cdot (1 + 0,02\%)^8 - 500 \approx 0,8$.

Số tiền cô Hà đỡ thiệt nếu làm theo tư vấn của nhân viên ngân hàng $26,277 - 0,8 = 25,477$

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI: Trong mỗi ý ở mỗi câu, hãy chọn đúng hay sai

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Biết điểm $S(0;0;2)$ và $C(1;1;0)$. Vẽ hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với điểm A , các điểm B, D, S lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz (hình vẽ bên dưới).



a) Tọa độ vector $\overrightarrow{SC} = (1; 1; -2)$.

b) Chu vi tam giác SBC là $p = \sqrt{11} + 1$.

c) Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAD là điểm $I\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$.

d) Biết điểm $H(x; y; z)$ là tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh B của tam giác SBD . Tính $x + y + z = -\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai.

Ta có: $S(0; 0; 2), A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C(1; 1; 0)$ và $D(0; 1; 0)$.

a) Mệnh đề đúng, vì

Tọa độ $\overrightarrow{SC} = (1 - 0; 1 - 0; 0 - 2) = (1; 1; -2)$.

b) Mệnh đề đúng, vì

Ta có: $\overrightarrow{SC} = (1; 1; -2) \Rightarrow SC = |\overrightarrow{SC}| = \sqrt{6}$, $\overrightarrow{SB} = (1; 0; -2) \Rightarrow SB = |\overrightarrow{SB}| = \sqrt{5}$ và $BC = 1$.

Vậy chu vi tam giác SBC là $p = SB + SC + BC = \sqrt{5} + \sqrt{6} + 1$.

c) Mệnh đề đúng, vì

Ta có tam giác SAD vuông tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAD là trung điểm I của SD .

Vậy tọa độ điểm $I\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$.

d) Mệnh đề sai, vì

Gọi $H(x; y; z)$ là điểm cần tìm.

Ta có: $\overrightarrow{SH} = (x; y; z - 2)$, $\overrightarrow{SD} = (0; 1; -2)$.

Vì S, H, D thẳng hàng nên tồn tại số thực t sao cho:

$$\overrightarrow{SH} = t \cdot \overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \cdot 0 \\ y = t \cdot 1 \\ z - 2 = t \cdot (-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -2t + 2. \end{cases}$$

Suy ra $H(0; t; -2t + 2)$ và $\overrightarrow{BH} = (-1; t; -2t + 2)$.

Vì $BH \perp SD$ nên $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{SD} = 0 \Leftrightarrow (-1) \cdot 0 + t \cdot 1 + (-2t + 2) \cdot (-2) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{5}$.

Vậy $H\left(0; \frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right) \Rightarrow x + y + z = \frac{6}{5}$.

Câu 26: Nhà đầu tư theo dõi doanh thu bán một loại sản phẩm của hai cửa hàng bán lẻ trong 5 năm. Số liệu thu được thống kê ở bảng sau:

Số tiền doanh thu (triệu đồng)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)
Số tháng của cửa hàng A	5	15	25	10	5

Số tháng của cửa hàng B	10	10	20	10	10
-------------------------	----	----	----	----	----

a) Doanh thu trung bình thu được của cửa hàng B là $\frac{265}{12}$ triệu đồng.

b) Tứ phân vị thứ hai của bảng số liệu cửa hàng A là: $Q_2 = 22$.

c) Một của cửa hàng A là $M_o = 22$.

d) Doanh thu hàng tháng của cửa hàng B biến động lớn hơn cửa hàng A.

Lời giải

Chọn a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Đúng.

a) Mệnh đề sai, vì

Chọn giá trị đại diện cho các nhóm số liệu ta có:

Giá trị đại diện	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5
Số tháng của cửa hàng A	5	15	25	10	5
Số tháng của cửa hàng B	10	10	20	10	10

Doanh thu trung bình thu được của cửa hàng A và B tương ứng là:

$$\bar{x}_A = \frac{1}{60} (12,5 \times 5 + 17,5 \times 15 + 22,5 \times 25 + 27,5 \times 10 + 32,5 \times 5) = \frac{265}{12} \text{ triệu đồng.}$$

$$\bar{x}_B = \frac{1}{60} (12,5 \times 10 + 17,5 \times 10 + 22,5 \times 20 + 27,5 \times 10 + 32,5 \times 10) = 22,5 \text{ triệu đồng.}$$

b) Mệnh đề đúng, vì

Giá trị đại diện	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5
Số tháng của cửa hàng A	5	15	25	10	5

Cỡ mẫu: $n = 60$ nên tứ phân vị thứ hai của mẫu là: $\frac{1}{2}(x_{30} + x_{31}) \in [20; 25)$

Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu là:

$$Q_2 = M_e = 20 + \frac{\frac{60}{2} - (5 + 15)}{25} \cdot (25 - 20) = 22$$

c) Mệnh đề đúng, vì

Số tiền doanh thu (triệu đồng)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)
--------------------------------	---------	---------	---------	---------	---------

Số tháng của cửa hàng A	5	15	25	10	5
-------------------------	---	----	----	----	---

Nhóm chứa một là: $[20; 25)$, một của cửa hàng A là:

$$M_o = 20 + \frac{25-15}{(25-15)+(25-10)} \cdot 5 = 22$$

d) Mệnh đề đúng, vì

Độ lệch chuẩn của số tiền doanh thu hàng tháng tương ứng là:

Cửa hàng A

$$S_A^2 = \frac{1}{60} \left[\left(12,5 - \frac{265}{12} \right)^2 \cdot 5 + \left(17,5 - \frac{265}{12} \right)^2 \cdot 15 + \left(22,5 - \frac{265}{12} \right)^2 \cdot 25 + \left(27,5 - \frac{265}{12} \right)^2 \cdot 10 + \left(32,5 - \frac{265}{12} \right)^2 \cdot 5 \right] = \frac{3875}{144} \Rightarrow s_A = \sqrt{S_A^2} = 5,19$$

Cửa hàng B

$$S_B^2 = \frac{(12,5 - 22,5)^2 \cdot 10 + (17,5 - 22,5)^2 \cdot 10 + (22,5 - 22,5)^2 \cdot 20}{60} + \frac{(27,5 - 22,5)^2 \cdot 10 + (32,5 - 22,5)^2 \cdot 10}{60} = \frac{125}{3} \Rightarrow S_B = \sqrt{S_B^2} = 6,45$$

Như vậy, độ lệch chuẩn của doanh thu hàng tháng của cửa hàng B cao hơn của cửa hàng A, điều này cho thấy doanh thu hàng tháng của cửa hàng B biến động lớn hơn.

Câu 27: Cho hai hàm số $f(x) = \log_2 x$ và $g(x) = 2^x$. Các phát biểu sau đây đúng hay sai

a) Hàm số $u(x) = f(x) + g(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Phương trình $f\left(\frac{2^x - 1}{|x|}\right) + g(x) = 1 + x$ có chỉ hai nghiệm dương.

c) Hàm số $f([g(x) - 1]^2)$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

d) Phương trình $f(x+1) - f(x+2) + \frac{1}{\ln 2^{(x+2)}} = m$ có 1 nghiệm duy nhất khi m không dương.

Lời giải

a) Sai | b) Sai | c) Đúng | d) Sai.

a) Mệnh đề sai vì

TXĐ: $x > 0$ nên hàm số $u(x) = f(x) + g(x)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$.

b) Mệnh đề sai, vì

Đặt phương trình ở ý b là (*), khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{2^x - 1}{|x|} \right) = 1 + x - 2^x$$

Điều kiện: $2^x - 1 > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x| = x$

Từ đó (*) $\Leftrightarrow \log_2(2^x - 1) + 2^x - 1 = \log_2 x + x$

Xét hàm số $h(t) = \log_2 t + t, \forall t > 0$ thì phương trình có dạng $h(2^x - 1) = h(x) \Leftrightarrow 2^x - 1 = x$

Ta xét hàm số $k(x) = 2^x - x - 1 = 0$, vì $k''(x) = 2^x \cdot (\ln 2)^2 > 0$ nên $k(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm.

Nhận thấy $k(0) = k(1) = 0$

Do đó phương trình (*) có tập nghiệm là $S = \{0; 1\}$

c) Mệnh đề đúng, vì

TXĐ của hàm số $f([g(x) - 1]^2) = \log_2(2^x - 1)^2$ là $2^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

d) Mệnh đề sai, vì

Điều kiện: $x > -1$

Phương trình

$$f(x+1) - f(x+2) + \frac{1}{\ln 2^{(x+2)}} = m \Leftrightarrow \log_2(x+1) - \log_2(x+2) + \frac{1}{(x+2)\ln 2} = m$$

$$v(x) = \log_2(x+1) - \log_2(x+2) + \frac{1}{(x+2)\ln 2}$$

Khi đó đặt

$$v'(x) = \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} \right] = \frac{1}{(x+1)(x+2)^2 \cdot \ln 2} > 0$$

thì

Vậy hàm số $v(x)$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

Mặt khác

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\log_2(x+1) - \log_2(x+2) + \frac{1}{(x+2)\ln 2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\log_2\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \frac{1}{(x+2)\ln 2} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} v(x) = -\infty$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất khi $m < 0$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O và

$$AB = a, BC = a\sqrt{3}, SA = SB = SC = SD = 2a. \text{ Gọi } M \text{ là điểm thỏa mãn } \overrightarrow{SM} = 3\overrightarrow{MB}.$$

a) SO là chiều cao của hình chóp $S.ABCD$.

b) Thể tích của khối tứ diện $MABC$ bằng $\frac{3}{8}a^3$.

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB bằng $\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

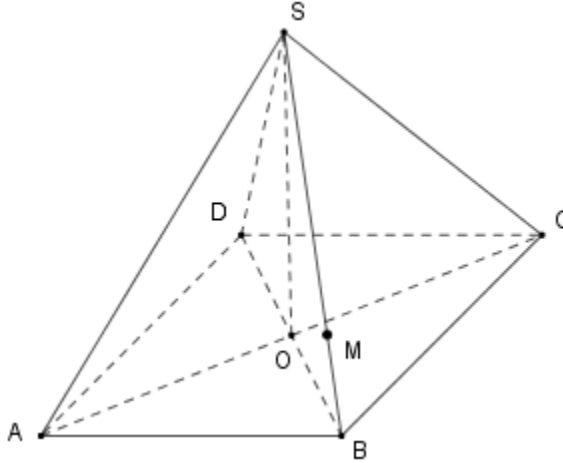
d) Mặt phẳng đi qua AM song song với đường thẳng BD chia khối chóp $S.ABCD$ thành 2 khối.

Gọi V_1 là thể tích khối chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối còn lại. Khi đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{11}$.

Lời giải

a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng.

a)



Theo giả thiết thì hai tam giác SAC và (SBD) cân ở S nên: $SO \perp AC$ và $SO \perp BD$, suy ra $SO \perp (ABCD)$

Chọn ĐÚNG.

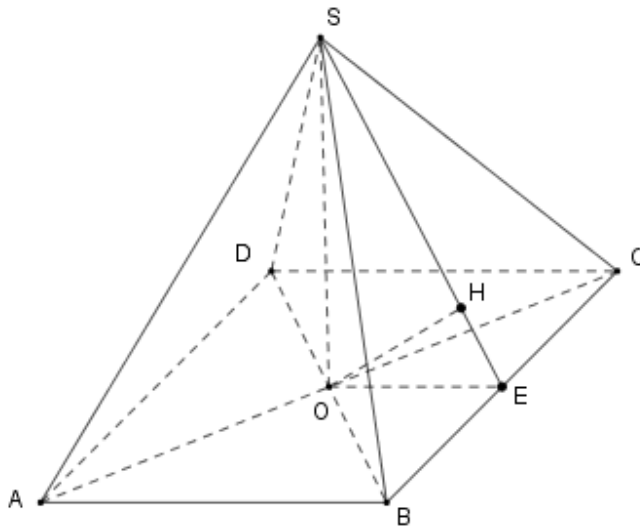
b) Theo giả thiết suy ra M thuộc đoạn SB và $SM = \frac{3}{4}SB$; $MB = \frac{1}{4}SB$.

$$\text{Ta có } \frac{V_{M.ABC}}{V_{S.ABC}} = \frac{d(M, (ABC))}{d(S, (ABC))} = \frac{BM}{BS} = \frac{1}{4} \rightarrow V_{M.ABC} = \frac{1}{4}V_{S.ABC} = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}$$

$$\text{Tính được } V_{S.ABCD} = a^3 \rightarrow V_{M.ABC} = \frac{1}{8}a^3$$

Chọn SAI.

c)



$$\text{Ta có } d(AD, SB) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)) = 2d(O, (SBC))$$

Gọi E là trung điểm BC , gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SE .

Khi đó $d(O, (SBC)) = OH$

$$OH = \frac{SO \cdot OE}{\sqrt{SO^2 + OE^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{\sqrt{39}}{13}a$$

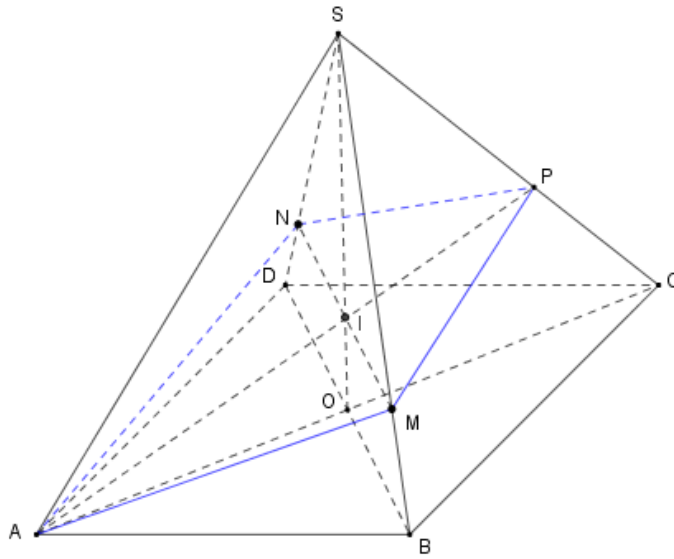
Áp dụng tính chất trong tam giác vuông SOE , ta có

$$d(AD, SB) = \frac{2\sqrt{39}}{13}a$$

Từ đó

Chọn SAI.

d)



Kẻ đường thẳng qua M song song với BD , cắt SD tại N và cắt SO tại I . Gọi P là giao điểm của AI với SC . Khi đó khối chóp $S.AMPN$ có thể tích V_1 , khối $ABCDMPN$ còn lại có thể tích V_2 .

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.AMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.AMP}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.ANP}}{2V_{S.ADC}} = \frac{1}{2} \left(\frac{SM}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} + \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SP}{SC} \right) = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} \quad (1)$$

$$\text{Do } MI \text{ song song } DB \text{ nên } \frac{SI}{IO} = \frac{SM}{MB} = 3 \quad \text{và} \quad \frac{SM}{SB} = \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\text{Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác } SCO, \text{ ta có } \frac{SI}{IO} \cdot \frac{OA}{AC} \cdot \frac{CP}{PS} = 1 \Leftrightarrow \frac{CP}{PS} = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow \frac{SP}{SC} = \frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\text{Thay (2), (3) vào (1) ta có } \frac{V_{S.AMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}, \text{ từ đó suy ra được } \frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{11}$$

Chọn ĐÚNG.

Câu 29: Một bộ bài tú lơ khơ có 52 lá, rút ngẫu nhiên lần lượt 3 lần, mỗi lần

rút 1 lá, sau mỗi lần rút ta đều để lại lá bài đó vào bộ.

Xét các biến cố A, B, C sau đây:

A : "Lần thứ nhất rút được con Át"

B : "Lần thứ hai rút được con Át"

C : "Lần thứ 3 rút được con K "

Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

a) Hai biến cố A và B độc lập.

b) Số phần tử của không gian mẫu bằng 2704 .

c) Xác suất lần thứ hai rút được con Át là $\frac{1}{52}$.

d) Xác suất để hai lần đầu rút được lá bài Át và lần thứ ba rút được lá bài K là $\frac{1}{2197}$.

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng.

a) **Mệnh đề đúng** vì việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố A không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố B .

b) **Mệnh đề sai**, vì: Số phần tử của không gian mẫu bằng $52^3 = 140608$.

c) **Mệnh đề sai**, vì: Xác suất lần thứ hai rút được con Át là $\frac{4}{52}$.

d) **Mệnh đề đúng**, vì: Các biến cố A, B và C đôi một độc lập với nhau.

Xác suất rút lá bài thứ nhất là con Át là $P(A) = \frac{4}{52}$.

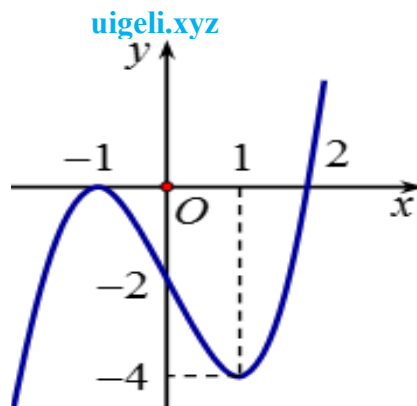
Xác suất rút lá bài thứ hai là con Át là $P(B) = \frac{4}{52}$.

Xác suất rút lá bài thứ ba là con J là $P(C) = \frac{4}{52}$.

Vậy xác suất cần tính là: $P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{2197}$. **Chọn ĐÚNG.**

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN: Trong mỗi câu, hãy viết phần trả lời ngắn không quá 4 ký tự (phải là số) và để ngoài MathType

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm bậc 4 có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ sau là đồ thị hàm số $y = f'(x)$.



Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

Lời giải

Trả lời: 1

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Từ đồ thị thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Xét $g(x) = f(x^2 - 2) \Rightarrow g'(x) = 2xf'(x^2 - 2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$			$g(0)$			$+\infty$	
		$g(-2)$			$g(2)$			

Vậy hàm số $g(x)$ có 1 điểm cực đại.

Câu 31: Do lưu lượng nước từ thượng nguồn sông Đồng Nai đổ về lớn, trong khi hồ chứa đã tích gần đạt độ cao công trình thiết kế, do đó công ty thủy điện Trị An đã xả nước điều tiết qua đập tràn. Tổng lượng nước xả xuống hạ lưu sông Đồng Nai trong một giây để đảm bảo an toàn nhất cho hạ lưu

$$F(x) = \frac{1}{1700} x^2 (225 - x)$$

được tính bởi công thức , trong đó x là lưu lượng nước xả qua đập tràn trong một giây (x được tính bằng đơn vị m^3). Lưu lượng nước x xả qua đập tràn là bao nhiêu để tổng lượng nước xả xuống hạ lưu sông Đồng Nai trong một giây là nhiều nhất?

Lời giải

Trả lời: 150

Bài toán dẫn đến việc tìm x để hàm số $F(x) = \frac{1}{1700}x^2(225-x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[0; +\infty)$.

Ta có: $F(x) = \frac{1}{1700}x^2(225-x) = -\frac{1}{1700}x^3 + \frac{225}{1700}x^2 \Rightarrow F'(x) = -\frac{3}{1700}x^2 + \frac{9}{34}x$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{1700}x^2 + \frac{9}{34}x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 150 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	150	$+\infty$
F'		+	0
			-
F	0	992,65	0

Dựa vào bảng biến thiên ta được: $\max_{[0; +\infty)} F(x) = F(150) \approx 992,65$

Vậy lưu lượng nước x xả qua đập tràn là $150 m^3$ thì tổng lượng nước xả xuống hạ lưu sông Đồng Nai trong một giây là nhiều nhất.

Câu 32: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1})$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{y}$$

bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,94

Có $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1})$

$$\Leftrightarrow 2^y + y = 2x + \log_2(2x + 2^y) - 1 \quad (1)$$

Đặt $t = \log_2(2x + 2^y) \Rightarrow 2x + 2^y = 2^t \Rightarrow 2x = 2^t - 2^y$

(1) trở thành: $2^y + y = 2^t - 2^y + t - 1 \Leftrightarrow 2^{y+1} + y + 1 = 2^t + t \quad (2)$

Xét hàm số $f(x) = 2^x + x, \forall x > 0 \Rightarrow f'(x) = 2^x \ln 2 + 1 > 0, \forall x > 0$ nên hàm số $f(x) = 2^x + x$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$. Kết hợp với (2) ta có: $t = y + 1$ hay $\log_2(2x + 2^y) = y + 1 \Leftrightarrow 2x + 2^y = 2^{y+1} \Leftrightarrow x = 2^{y-1}$

Khi đó $P = \frac{x}{y} = \frac{2^{y-1}}{y} \Rightarrow P' = \frac{2^{y-1} y \ln 2 - 2^{y-1}}{y^2}$

$$P' = 0 \Leftrightarrow y \ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\ln 2}$$

Cho

Bảng biến thiên:

y	0	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$	
P'		-	0	+
P	$+\infty$		$\frac{e \ln 2}{2}$	$+\infty$

$$V_{\min} = \frac{e \ln 2}{2} \approx 0,94 \quad \text{khi} \quad x = \frac{e}{2} \quad \text{và} \quad y = \frac{1}{\ln 2}$$

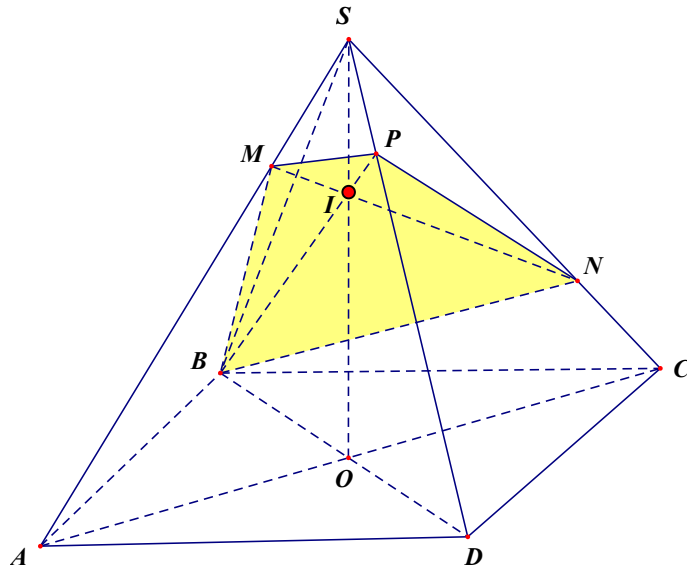
Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi I là điểm thuộc đoạn SO

sao cho $SI = \frac{1}{3}SO$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua B và I . Mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SC, SD lần lượt tại M, N, P . Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của

$$\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} \quad \frac{m}{n} \quad \text{Tính} \quad \frac{m}{n} \quad (\text{làm tròn đến hàng phần chục}).$$

Lời giải

Trả lời: 1,8



$$+) \text{ Đặt } \begin{cases} \frac{SA}{SM} = x \\ \frac{SC}{SN} = y \end{cases} \quad (x, y \geq 1)$$

$$+) \text{ Có } \frac{SB}{SB} + \frac{SD}{SP} = 2 \frac{SO}{SI} = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow \frac{SD}{SP} = 5$$

$$+) \text{ Có } x + y = 2 \frac{SO}{SI} = 6 \Leftrightarrow y = 6 - x, 1 \leq x \leq 5.$$

$$+) \frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x+1+y+5}{4.x.1.y.5} = \frac{12}{20xy} = \frac{3}{5xy} = \frac{3}{5x(6-x)} = \frac{3}{5(6x-x^2)}.$$

$$+) \text{ Xét } f(x) = \frac{3}{5(6x-x^2)}, \text{ với } 1 \leq x \leq 5.$$

$$+) \text{ Có } f'(x) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2x-6}{(6x-x^2)^2}.$$

$$+) \begin{cases} f'(x) = 0 \\ 1 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

$$+) f(1) = \frac{3}{25}; f(3) = \frac{1}{15}; f(5) = \frac{3}{25} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{25} \\ n = \frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{9}{5} = 1,8.$$

Câu 34: Có ³ chiếc xe ô tô màu đỏ, ² ô tô màu vàng, ¹ ô tô màu xanh cùng đỗ bên đường. Hỏi có bao nhiêu cách để không có ² chiếc xe cùng màu nào đỗ cạnh nhau.



Lời giải

Trả lời: 120

Ta đánh số thứ tự của các xe từ 1 đến 6, số thứ tự các vị trí từ I đến VI.

• **Trường hợp thứ nhất.** Xe màu đỏ đỗ ở các vị trí I, III, V nên có ³! cách. Xe màu vàng và màu xanh đỗ ở các vị trí còn lại II, IV, VI nên cũng có ³! cách. Do đó trong trường hợp này có ³!.³! = 36 cách.

• **Trường hợp thứ hai.** (như trường hợp thứ nhất) Xe màu đỏ đỗ ở các vị trí II, IV, VI nên có ³! cách. Xe màu vàng và màu xanh đỗ ở các vị trí còn lại I, III, V nên cũng có ³! cách. Do đó trong trường hợp này có ³!.³! = 36 cách.

• **Trường hợp thứ ba.** Xe màu đỏ đỗ ở các vị trí I, III, VI nên có ³! cách.

Xe màu vàng và màu xanh nếu đỗ tùy ý ở các vị trí còn lại thì có ³! cách nhưng trong đó có vị trí II(x) – IV(v) – V(v) không thỏa mãn. Do đó trong trường hợp này có ³!.(³! – 2) = 24 cách.

• **Trường hợp thứ tư.** (như trường hợp thứ ba) Xe màu đỏ đỗ ở các vị trí I, IV, VI nên có $3!$ cách.

Xe màu vàng và màu xanh nếu đỗ tùy ý ở các vị trí còn lại thì có $3!$ cách nhưng trong đó có vị trí $II(v) - III(v) - V(x)$ không thỏa mãn. Do đó trong trường hợp này có $3! \cdot (3! - 2) = 24$ cách.

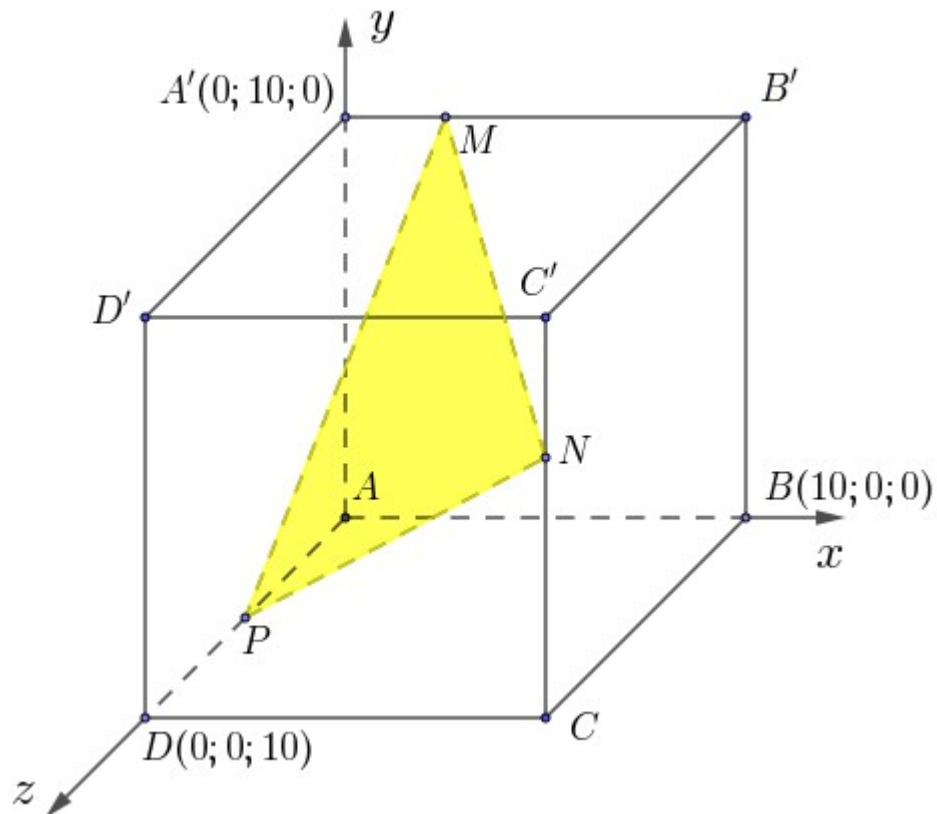
Vậy số cách xếp là: $36 + 24 + 36 + 24 = 120$.

Câu 35: Bên trong một căn nhà bỏ hoang hình lập phương thể tích 1000 m^3 có 3 chú nhện rất hay cãi vã nên phải sống riêng. Mùa đông đến, vì đói rét nên chúng đành quyết định hợp tác với nhau giăng lưới để bắt mồi. Ba chú nhện tính toán sẽ giăng một mảnh lưới hình tam giác theo cách sau: Mỗi chú nhện sẽ đứng ở mép tường bất kì (có thể mép giữa ^{2} bức tường, giữa tường với trần, hoặc giữa tường với nền) rồi phóng những sợi tơ làm khung đến vị trí của ^{2} con nhện còn lại rồi sau đó mới phóng tơ dính đan phần lưới bên trong. Nhưng vì vốn đã có hiềm khích từ lâu, nên trước khi bắt đầu, chúng quy định để tránh xô xát, không có bất kì ^{2} con nhện nào cùng nằm trên một mặt tường, nền hoặc trần nhà. Tính chu vi nhỏ nhất của mảnh lưới được giăng, biết các sợi tơ khung căng và không chùng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

Trả lời: 36,7

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Không mất tính tổng quát, và dựa vào yêu cầu về vị trí ^{3} con nhện ta xác định là các điểm M, N, P nằm trên các cạnh $A'B', CC', AD$ như hình vẽ.



Yêu cầu bài toán là cần tìm tọa độ của 3 điểm M, N, P để chu vi tam giác MNP nhỏ nhất.

Đặt $M(x; 10; 0), P(0; 0; z), N(10; y; 10)$. Chu vi tam giác MNP là:

$$\begin{aligned}
 MN + NP + PM &= \sqrt{(x-10)^2 + (y-10)^2 + 10^2} + \sqrt{10^2 + y^2 + (z-10)^2} + \sqrt{x^2 + 10^2 + z^2} \\
 &= \sqrt{(10-x)^2 + (y-10)^2 + 10^2} + \sqrt{y^2 + (z-10)^2 + 10^2} + \sqrt{z^2 + (-x)^2 + 10^2}
 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức vector :

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow MN + NP + PM &\geq \sqrt{(10-x+y)^2 + (y+z-20)^2 + 20^2} + \sqrt{z^2 + (-x)^2 + 10^2} \\
 &\geq \sqrt{(10-x+y+z)^2 + (y-10+z-10-x)^2 + (10+10+10)^2} \\
 &= \sqrt{2(y+z-x-5)^2 + 450 + (10+10+10)^2} \geq 15\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} y+z-x=5 \\ \frac{10-x}{y} = \frac{y-10}{z-10} = \frac{10}{10} \\ \frac{10-x+y}{z} = \frac{y+z-20}{-x} = \frac{20}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ 2y-x=5 \Leftrightarrow x=y=z=5 \\ x+y=10 \end{cases}$$

Vậy giá trị cần tìm là $15\sqrt{6} \approx 36,7$.

ĐỀ 3

ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI

MÔN: TOÁN 12

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN

1.C	2.A	3.D	4.D	5.B	6.C	7.C	8.A
9.B	10.B	11.C	12.A	13.C	14.B	15.B	16.C
17.A	18.B	19.B	20.B	21.D	22.A	23.B	24.C

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

CÂU 1	CÂU 2	CÂU 3	CÂU 4	CÂU 5
a) Đúng	a) Đúng	a) Đúng	a) Đúng	a) Sai
b) Sai	b) Sai	b) Sai	b) Đúng	b) Đúng
c) Đúng	c) Đúng	c) Sai	c) Sai	c) Sai
d) Đúng	d) Sai	d) Sai	d) Sai	d) Đúng

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu	1	2	3	4	5	6
Chọn	1	4	3,5	2376	474	780

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN: Trong mỗi câu hỏi, hãy chọn 1 đáp án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 3)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

- A. $\frac{8}{3}$.
- B. $\frac{10}{3}$.
- C. $\frac{11}{3}$.
- D. Không tồn tại m .

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 2(m+1)x + m$$

$$y'' = 6x - 2m - 2$$

Hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi

$$\begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 2^2 - 2(m+1) \cdot 2 + m = 0 \\ 6 \cdot 2 - 2m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{8}{3} \\ m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{8}{3}$$

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} - \sqrt{(x+1)(3-x)}$ bằng $\frac{a}{b}$ (với b là số nguyên và

a là số nguyên âm, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T = a + b$.

- A. 2.
- B. -4.
- C. -2.
- D. -3

Lời giải

Chọn D

$$TXĐ: D = [-1; 3]$$

Đặt $t = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}$. Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}$,

ta có $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{3}{2\sqrt{3-x}} > 0, \forall x \in (-1; 3)$, nên hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1; 3]$.

Suy ra $g(-1) = -2 \leq g(x) \leq g(3) = 2, \forall x \in [-1; 3]$, vậy $t \in [-2; 2]$.

Ta có $t = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} \Rightarrow t^2 = 4 - 2\sqrt{(x+1)(3-x)} \Rightarrow -\sqrt{(x+1)(3-x)} = \frac{t^2 - 4}{2}$.

Do đó $y = t + \frac{t^2 - 4}{2} = \frac{1}{2}t^2 + t - 2, y' = t + 1; y' = 0 \Leftrightarrow t = -1 \in [-2; 2]$.

Ta có $y(-2) = -2, y(-1) = -\frac{5}{2}, y(2) = 2$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{2}t^2 + t - 2$ trên $[-2; 2]$ là $-\frac{5}{2}$.

Vậy $\frac{a}{b} = -\frac{5}{2}$, suy ra $a = -5, b = 2 \Rightarrow T = -3$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{-1+2x}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị (C) . Lấy điểm $M(x_0, y_0), (x_0 \leq 0)$ là một điểm trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại A, B thỏa mãn $AI^2 + IB^2 = 24$. Hỏi có tất cả bao nhiêu điểm M thỏa mãn đề bài?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = \frac{-1+2x}{x+1}$ có TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Ta có: $y = \frac{-1+2x}{x+1} = \frac{2x-1}{x+1}$.

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là $x = -1$ và tiệm cận ngang là $y = 2$. Suy ra $I(-1; 2)$.

$y' = \frac{3}{(x+1)^2}$. Phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(x_0, y_0)$ là

$d: y = \frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-1}{x_0+1}$ (với $x_0 \leq 0$).

Gọi A là giao điểm của d và TCD. Suy ra $A\left(-1; \frac{2x_0-4}{x_0+1}\right)$, $\overrightarrow{AI} = \left(0; \frac{6}{x_0+1}\right)$.

Gọi B là giao điểm của d và TCN. Suy ra $B(2x_0+1; 2)$, $\overrightarrow{BI} = (-2-2x_0; 0)$.

$$AI^2 + IB^2 = 24 \Leftrightarrow \left(\frac{6}{x_0+1}\right)^2 + (2x_0+2)^2 = 24 \Leftrightarrow (x_0+1)^4 - 6(x_0+1)^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left((x_0+1)^2 - 3\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 + \sqrt{3} > 0 \\ x_0 = -1 - \sqrt{3} < 0 \end{cases}$$

Vậy có 1 điểm M thỏa mãn đề bài.

Câu 5: Một chú cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách 400 km . Vận tốc dòng nước là 5 km/h . Nếu vận tốc bơi của con cá khi nước đứng yên là $v(\text{km/h})$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun. Giả sử $c = 0,5$ hãy tính năng lượng tiêu hao tối thiểu của chú cá hồi.

A. 40250 jun **B.** 33750 jun **C.** 25960 jun **D.** 36450 jun

Lời giải

Chọn B

Vận tốc của con cá hồi khi bơi ngược dòng là $v-5$ (km/h). Thời gian để con cá vượt

quãng đường 400 km là $t = \frac{400}{v-5}$ ($v > 5$) khi đó năng lượng tiêu hao của con cá hồi khi

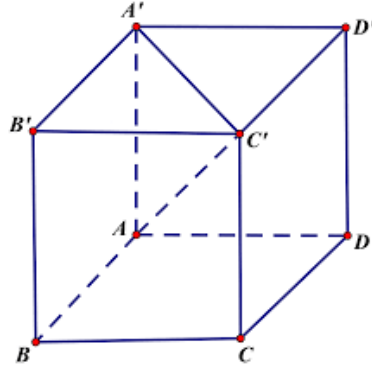
vượt quãng đường đó là $E(v) = 0,5.v^3 \cdot \frac{400}{v-5} = \frac{200v^3}{v-5}$.

Ta có $E'(v) = \frac{600v^2(v-5) - 200v^3}{(v-5)^2} = \frac{400v^3 - 3000v^2}{(v-5)^2} \Rightarrow E'(v) = 0 \Leftrightarrow v = \frac{15}{2}$.

v	5	$\frac{15}{2}$	$+\infty$
$E'(v)$	-	0	+
$E(v)$	$+\infty$	33750	$+\infty$

Vậy năng lượng tiêu hao tối thiểu của con cá hồi là 33750 jun .

Câu 6: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, trong đó mặt đáy là hình bình hành với $\angle DAB = 120^\circ$. Biết độ dài các cạnh $AB = 25\text{ cm}$, $AD = 12\text{ cm}$ và $AA' = 12\text{ cm}$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}|$.



- A. 12 cm B. $\sqrt{469}$ cm C. $\sqrt{613}$ cm D. 25 cm

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$, vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}| = |\overrightarrow{AC'}| = AC'$

Với $AC' = \sqrt{AC^2 + AA'^2}$

Trong đó: $AA' = 12$ cm

Do tổng hai góc kề của một hình bình hành là 180° nên ta có góc $\angle ABC = 60^\circ$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABC , ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 25^2 + 12^2 - 2 \cdot 25 \cdot 12 \cdot \cos 60^\circ = 469$$

$$\text{Vậy } AC' = \sqrt{AC^2 + AA'^2} = \sqrt{469 + 144} = \sqrt{613} \text{ cm}$$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(-1;-1;-3)$ B. $(3;1;1)$ C. $(1;1;3)$ D. $(3;3;-1)$

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{AB} = (2-1; 2-1; 1-(-2)) \text{ hay } \overrightarrow{AB} = (1;1;3)$$

Câu 8: Cho tứ giác $ABCD$ biết $A(0;-2;1)$, $B(1;3;-2)$, $C(1;0;0)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $D(0;-5;3)$ B. $D(0;5;3)$ C. $D(1;5;-3)$ D. $D(0;-5;-3)$

Lời giải

Chọn A

Gọi tọa độ điểm D là: $D(x;y;z)$. Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 5; -3)$, $\overrightarrow{DC} = (1-x; -y; -z)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=1 \\ -y=5 \\ -z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-5 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow D(0; -5; 3)$$

Vậy điểm $D(0; -5; 3)$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 9: Điều tra về chiều cao của học sinh khối lớp 11, ta có kết quả sau:

Nhóm	Chiều cao (cm)	Số học sinh
1	[150;152)	5
2	[152;154)	18
3	[154;156)	40
4	[156;158)	26
5	[158;160)	8
6	[160;162)	3
		$N = 100$

Giá trị đại diện của nhóm thứ tư là

- A.** 156,5. **B.** 157. **C.** 157,5. **D.** 158.

Lời giải

Chọn B

$$\frac{156+158}{2} = 157$$

Giá trị đại diện của nhóm thứ tư là:

Câu 10: Thống kê theo độ tuổi số lượng thành viên của một câu lạc bộ người cao tuổi được mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Độ tuổi	[60;65)	[65;70)	[70;75)	[75;80)	[80;85)	[85;90]
Số thành viên	2	7	9	4	2	1

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng

- A.** 72,5. **B.** 7,5. **C.** 20. **D.** 9,5.

Lời giải

Chọn B

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 là $\frac{x_6 + x_7}{2}$. Do $x_6; x_7$ đều thuộc nhóm thứ hai là $[65;70)$ nên nhóm này chứa Q_1 .

$$Q_1 = a_p + \frac{\frac{n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p) = 65 + \frac{\frac{25}{4} - 2}{7} \cdot (70 - 65) = 68,04$$

Do đó

Tứ phân vị thứ ba Q_3 là $\frac{x_{19} + x_{20}}{2}$. Do $x_{19}; x_{20}$ đều thuộc nhóm thứ 4 là $[75;80)$ nên ta có

$$Q_3 = a_p + \frac{\frac{3n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p) = 75 + \frac{\frac{3 \cdot 25}{4} - (2 + 7 + 9)}{4} \cdot (80 - 75) = 75,54$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta Q = Q_3 - Q_1 = 75,54 - 68,04 = 7,5$

Câu 11: Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{2 \cos x - 1}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \frac{1}{2 \cos x - 1}$ xác định $\Leftrightarrow 2 \cos x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow x \neq \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 12: Tổng các nghiệm trên đoạn $[0; 10\pi]$ của phương trình $3 \tan^2 x - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$ là

- A. 50π . B. $\frac{65\pi}{3}$. C. $\frac{341\pi}{3}$. D. 221π .

Lời giải

Chọn A

$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 ĐKXĐ:

Phương trình tương đương với

$$3 \tan^2 x - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0 \Leftrightarrow 3 \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\cos^2 x} - \frac{7}{\cos x} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\cos x} = 2 \\ \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = 3 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Do $x \in [0; 10\pi]$ nên ta xét 2 trường hợp:

$$\text{TH1: } 0 \leq \frac{\pi}{3} + k2\pi \leq 10\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{29}{6} . \forall k \in \mathbb{Z} \text{ nên } k \in \{0; 1; 2; 3; 4\} .$$

$$\text{Tổng các nghiệm bằng } \sum_{k=0}^4 \left(\frac{\pi}{3} + k2\pi \right) = \frac{65\pi}{3} .$$

$$\text{TH2: } 0 \leq -\frac{\pi}{3} + k2\pi \leq 10\pi \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{31}{6} . \forall k \in \mathbb{Z} \text{ nên } k \in \{1; 2; 3; 4; 5\} .$$

$$\text{Tổng các nghiệm bằng } \sum_{k=1}^5 \left(-\frac{\pi}{3} + k2\pi \right) = \frac{85\pi}{3} .$$

$$\frac{65\pi}{3} + \frac{85\pi}{3} = 50\pi$$

Vậy phương trình đã cho có tổng các nghiệm bằng

Câu 13: Cho các số dương a, b, c và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A.** $\log_a b + \log_a c = \log_a (b+c)$. **B.** $\log_a b + \log_a c = \log_a |b-c|$.
C. $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$. **D.** $\log_a b + \log_a c = \log_a (b-c)$.

Lời giải

Chọn C

Theo tính chất logarit ta có: $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$.

$$4^{x-x^2} = \left(\frac{1}{2} \right)^x$$

Câu 14: Tập nghiệm của phương trình là:

- A.** $\left\{ 0; \frac{2}{3} \right\}$. **B.** $\left\{ 0; \frac{3}{2} \right\}$. **C.** $\left\{ 0; \frac{1}{2} \right\}$. **D.** $\{0; 2\}$.

Lời giải

Chọn B

$$4^{x-x^2} = \left(\frac{1}{2} \right)^x \Leftrightarrow 2^{2x-2x^2} = 2^{-x} \Leftrightarrow 2x-2x^2 = -x \Leftrightarrow 2x^2-3x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Ta có

Câu 15: Cho cấp số cộng (u_n) : $1; 4; 7; 10$. Số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng là

- A.** $u_n = 3n+1$. **B.** $u_n = 3n-2$. **C.** $u_n = n+3$. **D.** $u_n = n-3$.

Chọn B

Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 1$ công sai $d = 4-1 = 3$.

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) là:

$$u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow u_n = 1 + (n-1).3 \Leftrightarrow u_n = 3n-2$$

- Câu 16:** Cho dãy số (u_n) xác định $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Khi đó u_{2018} bằng
- A.** 2018. **B.** 10^{2018} . **C.** $10^{2018} + 2018$. **D.** 2018^{2018} .

Lời giải

Chọn C

Ta thấy $1 - 9n$ là đa thức bậc nhất. Do đó ta cần có sự phân tích

$$u_{n+1} + \underbrace{a(n+1) + b}_{\text{bậc nhất theo } n+1} = 10 \left[u_n + \underbrace{\left(\frac{an+b}{n} \right)}_{\text{bậc nhất theo } n} \right].$$

Đồng nhất với giả thiết, ta tìm được $a = -1, b = 0$. Khi đó

$$u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n \Leftrightarrow u_{n+1} - (n+1) = 10(u_n - n).$$

Đặt $v_n = u_n - n \longrightarrow \begin{cases} v_1 = 10 \\ v_{n+1} = 10v_n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \longrightarrow (v_n)$ là một CSN có $\begin{cases} v_1 = 10 \\ q = 10 \end{cases}$ nên có số hạng tổng quát $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = 10^n$, suy ra $u_n = 10^n + n$. Vậy $u_{2018} = 10^{2018} + 2018$.

- Câu 17:** Giới hạn $\lim_{x \rightarrow m} \frac{x^2 - m^2}{x - m}$ bằng
- A.** $2m$. **B.** $+\infty$. **C.** m . **D.** 0 .

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow m} \frac{x^2 - m^2}{x - m} = \lim_{x \rightarrow m} \frac{(x - m)(x + m)}{x - m} = \lim_{x \rightarrow m} (x + m) = 2m.$$

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m^2 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ liên tục tại}$$

- Câu 18:** Gọi S là tập hợp các số tự nhiên để hàm số $x \rightarrow 1$. Số phần tử của S là:

- A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$f(1) = m^2$$

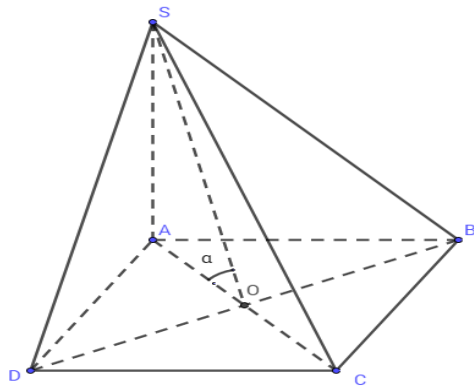
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4$$

Hàm số liên tục tại $x=1$ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$.
 Vậy $S = \{1\}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$,
 $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SBD) bằng
A. 90° . **B.** 45° . **C.** 30° . **D.** 60° .

Lời giải

Chọn B



$(\overline{SBD}), (ABCD)) = (\overline{SO}, \overline{OA}) = 45^\circ$. Vì $\triangle SAO$ vuông cân tại A .

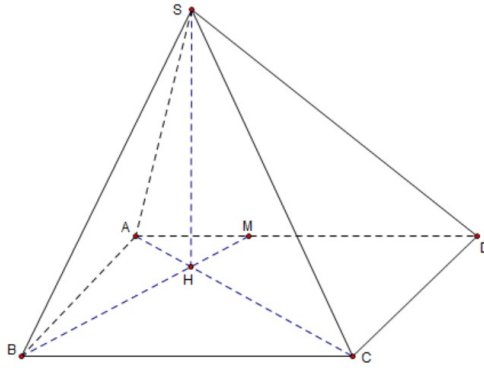
Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. M là điểm trên cạnh AD sao cho BM vuông góc với AC tại H và $AB > AM$, cạnh SH vuông góc với mặt phẳng đáy, góc $\angle BSH = 45^\circ$. Biết $AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$, $BM = a\sqrt{5}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{16a^3}{3\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{32a^3\sqrt{5}}{15}$. **C.** $\frac{32a^3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{8a^3\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $AB = x$, $\triangle ABM$ vuông tại $A \Rightarrow AB^2 + AM^2 = BM^2$.

$$\Rightarrow AM = \sqrt{BM^2 - AB^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - x^2} = \sqrt{5a^2 - x^2}$$

Xét $\triangle ABM$ vuông tại A , đường cao AH có

$$\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{5a^2 - x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{5}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5a^2x^2 + 4a^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = 2a \end{cases}$$

Với $x = a \Rightarrow AM = 2a > AB = a$ không thỏa mãn

Suy ra $AB = 2a \Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \frac{4a}{\sqrt{5}} \Rightarrow SH = \frac{BH}{\tan \angle BSH} = \frac{4a}{\sqrt{5}}$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B , đường cao $BH \Rightarrow \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{BH^2} \Rightarrow BC = \frac{AB \cdot BH}{\sqrt{AB^2 - BH^2}} = 4a$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4a}{\sqrt{5}} \cdot 2a \cdot 4a = \frac{32a^3 \sqrt{5}}{15}$$

Câu 21: Một lớp có 35 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh làm ban sự lớp.

- A. A_{35}^3 . B. C_{15}^3 . C. C_{20}^3 . D. C_{35}^3 .

Lời giải

Chọn D

Câu 22: Trong buổi sinh hoạt nhóm của lớp, tổ một có ^{12} học sinh gồm ^{4} học sinh nữ trong đó có Hoa và ^{8} học sinh nam trong đó có Vinh. Chia tổ thành ^{3} nhóm, mỗi nhóm gồm ^{4} học sinh và phải có ít nhất ^{1} học sinh nữ. Xác suất để Hoa và Vinh cùng một nhóm là

- A. 1470. B. 1471. C. 1472. D. 1473.

Lời giải

Chọn A

Số cách chia 12 học sinh thành 3 nhóm và phải đảm bảo mỗi nhóm có ít nhất 1 học sinh nữ. Giả sử

- Nhóm thứ nhất có 2 nữ và 2 nam, có $C_4^2 \cdot C_8^2$ cách.
- Nhóm thứ hai có 1 nữ và 3 nam, có $C_2^1 \cdot C_6^3$.
- Sau khi chia nhóm thứ nhất và thứ hai xong thì còn lại 1 nữ và 3 nam nên nhóm thứ ba có duy nhất 1 cách.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_4^2 \cdot C_8^2 \cdot C_2^1 \cdot C_6^3 = 6720$.

Gọi A là biến cố "Hoa và Vinh cùng một nhóm". Ta mô tả các khả năng thuận lợi cho biến cố A như sau:

• **Trường hợp thứ nhất.** Hoa và Vinh cùng với 1 bạn nam và 1 bạn nữ thành một nhóm nên có $C_7^1 \cdot C_3^1$ cách. Nhóm thứ hai có 3 bạn nam và 1 bạn nữ nên có $C_6^3 \cdot C_2^1$. Cuối cùng còn lại 3 bạn nam và 1 bạn nữ nên có 1 cách duy nhất cho nhóm thứ ba. Do đó trong trường hợp này có $C_7^1 \cdot C_3^1 \cdot C_6^3 \cdot C_2^1 = 840$ cách.

• **Trường hợp thứ hai.** Hoa và Vinh cùng với 2 bạn nam thành một nhóm nên có C_7^2 cách. Nhóm thứ hai có 2 bạn nam và 2 bạn nữ nên có $C_5^2 \cdot C_3^2$. Cuối cùng còn lại 3 bạn nam và 1 bạn nữ nên có 1 cách duy nhất cho nhóm thứ ba. Do đó trong trường hợp này có $C_7^2 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 = 630$ cách.

• **Trường hợp thứ ba.** Hoa và Vinh cùng với 2 bạn nam thành một nhóm. Nhóm thứ hai có 3 bạn nam và 1 bạn nữ. Suy ra nhóm thứ ba có 2 bạn nam và 2 bạn nữ. Trường hợp này trùng với trường hợp thứ hai nên ta không tính.

Suy ra số cách chọn để Hoa và Vinh cùng một nhóm là $840 + 630 = 1470$.

Câu 23: Trong kỳ thi THPT Quốc Gia, thí sinh An dự thi môn thi trắc nghiệm Toán. Đề thi gồm 50 câu hỏi; mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn; trong đó có 1 phương án đúng, làm đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Bạn An làm chắc chắn đúng 42 câu, trong 8 câu còn lại chỉ có 3 câu bạn loại trừ được mỗi câu một đáp án chắc chắn sai. Do không còn đủ thời gian nên An bắt buộc phải khoanh bừa các câu còn lại. Xác suất bạn An được 9,4 điểm là

- A. $\frac{55}{1536}$. B. $\frac{499}{13824}$. C. $\frac{455}{3456}$. D. $\frac{379}{13824}$.

Lời giải

Chọn B

Ta chỉ quan tâm 8 câu còn lại. Trong 8 câu còn lại mình chia làm 2 loại:

- Loại 1: gồm 3 câu có 3 đáp án A, B, C

→ xác suất chọn đáp án đúng là $\frac{1}{3}$, xác suất chọn đáp án không đúng là $\frac{2}{3}$.

- Loại 2: gồm 5 câu có 4 đáp án A, B, C, D

→ xác suất chọn đáp án đúng là $\frac{1}{4}$, xác suất chọn đáp án không đúng là $\frac{3}{4}$.

Để bạn An đạt được 9,4 điểm (tức cần đúng thêm 5 câu trong 8 câu còn lại) thì xảy ra một trong các khả năng sau

✓ Đúng 0 câu loại 1 & Đúng 5 câu loại 3: → xác suất $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times C_5^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5$.

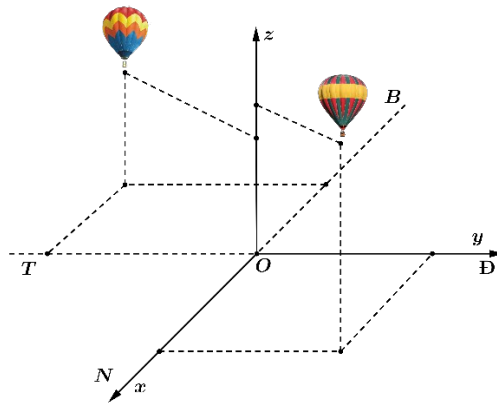
✓ Đúng 1 câu loại 1 & Đúng 4 câu loại 3: → xác suất $C_3^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4}$.

✓ Đúng 2 câu loại 1 & Đúng 3 câu loại 3: → xác suất $C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \times C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$.

✓ Đúng 3 câu loại 1 & Đúng 2 câu loại 3: → xác suất $C_3^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$.

Cộng các xác suất lại ta được xác suất cần tính $P = \frac{499}{13824}$.

Câu 24: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2,5 km về phía nam và 2 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1,5 km về phía bắc và 3 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,6 km. Người ta cần tìm một vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu cho hai khinh khí cầu sao cho tổng khoảng cách từ vị trí đó tới hai khinh khí cầu nhỏ nhất. Giả sử vị trí cần tìm cách địa điểm hai khinh khí cầu bay lên là a km theo hướng nam và b km theo hướng tây. Tính tổng $2a + 3b$.



A. 2.

B. 1.

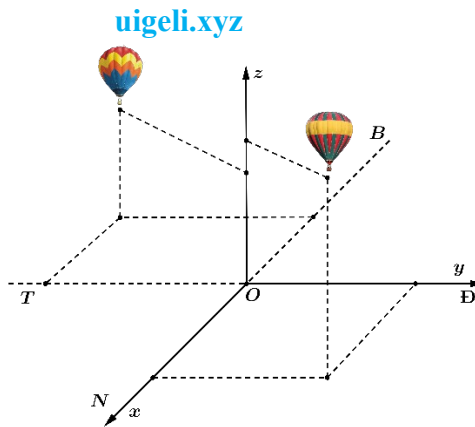
C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (tham khảo hình vẽ), đơn vị đo lấy theo kilômét.



Chiếc khinh khí cầu thứ nhất và thứ hai ở vị trí A, B ta có $A\left(\frac{5}{2}; 2; \frac{4}{5}\right), B\left(-\frac{3}{2}; -3; \frac{3}{5}\right)$.

Gọi C là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oxy) , $C\left(\frac{5}{2}; 2; -\frac{4}{5}\right)$. Khi đó $I = BC \cap (Oxy)$.
 $\overline{BC} = \left(4; 5; -\frac{7}{5}\right)$ $I \in (Oxy) \Rightarrow I(x; y; 0) \Rightarrow \overline{BI} = \left(x + \frac{3}{2}; y + 3; -\frac{3}{5}\right)$

$$\frac{x + \frac{3}{2}}{4} = \frac{y + 3}{5} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{7}{5}} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{14} \\ y = -\frac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{14} \\ b = \frac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow 2a + 3b = 3$$

$\overline{BC}, \overline{BI}$ cùng phương nên

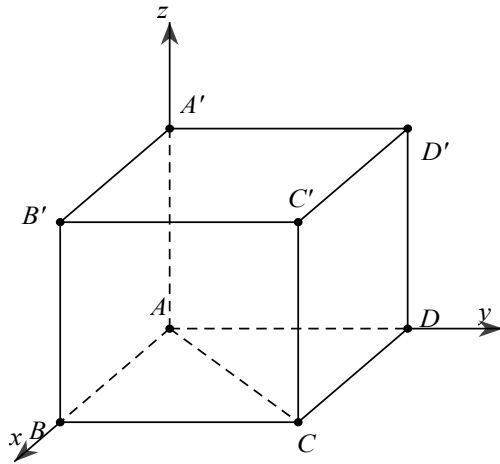
PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI: Trong mỗi ý ở mỗi câu, hãy chọn đúng hay sai

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0); B(2;0;0); D(0;3;0); A'(0;0;4)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Điểm C' có tọa độ là $C'(2;3;4)$.
- Biết điểm E trong không gian thỏa mãn tứ giác $A'C'BE$ là hình bình hành. Khi đó $E\left(0; -\frac{3}{2}; 0\right)$.
- Diện tích của tam giác $A'BD$ bằng $\sqrt{61}$.
- Cosin góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(CB'D')$ bằng $\frac{43}{61}$.

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng



- a) Ta có hình chiếu của điểm C' trên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là B, D, A' nên $C'(2;3;4)$.
Chọn ĐÚNG.

- b) Vì tứ giác $A'C'BE$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{EB}$ mà $\overrightarrow{A'B'}(2;3;0)$ nên suy ra:

$$\begin{cases} 2 - x_E = 2 \\ -y_E = 3 \\ -z_E = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 0 \\ y_E = -3 \\ z_E = 0 \end{cases}$$

Do đó $E(0; -3; 0)$

Chọn SAI.

c).

Ta có: $\overrightarrow{A'B} = (2; 0; -4)$, $\overrightarrow{A'D} = (0; 3; -4)$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'D}] \right| = \sqrt{61}$$

Chọn ĐÚNG.

$$B'(2; 0; 4); D'(0; 3; 4) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB'} = (2; 0; 4) \\ \overrightarrow{AD'} = (0; 3; 4) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}] = (-12; -8; 6);$$

d).

Vậy mặt phẳng $(AB'D')$ có 1 VTPT $\vec{n}_1(-12; -8; 6)$.

$$C(2; 3; 0) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{B'C} = (0; 3; -4) \\ \overrightarrow{D'C} = (2; 0; -4) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{D'C}] = (-12; -8; -6);$$

Vậy mặt phẳng $(CB'D')$ có 1 VTPT $\vec{n}_2(-12; -8; -6)$.

$$\cos((AB'D'), (CB'D')) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{43}{61}$$

Chọn ĐÚNG.

Câu 26: Nhân dịp khám sức khỏe học sinh đầu năm, người ta đo chiều cao của các học sinh (đơn vị: cm) của hai lớp $12A$ và $12B$ được cho như sau:

Chiều cao (cm)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)
Số học sinh lớp 12A	4	5	12	16	3
Số học sinh lớp 12B	2	2	13	18	5

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau

- a) Chiều cao trung bình của học sinh lớp $12A$ là $163,625$.
- b) Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm (làm tròn đến hàng đơn vị) về chiều cao của học sinh lớp $12A$ là $M_e \approx 164$.
- c) Một của mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của học sinh lớp $12B$ (làm tròn đến hàng đơn vị) là $M_o = 166$.
- d) Sự biến động về chiều cao trung bình của học sinh lớp $12A$ nhỏ hơn sự biến động về chiều cao trung bình của lớp $12B$.

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai.

- a) Chọn giá trị đại diện cho nhóm số liệu lớp $12A$, ta có

Giá trị đại diện	152,5	157,5	162,5	167,5	172,5
Số học sinh lớp 12A	4	5	12	16	3

Tổng số học sinh lớp $12A$ là $n_1 = 4 + 5 + 12 + 16 + 3 = 40$.

Chiều cao trung bình của học sinh lớp $12A$ là

$$\bar{x}_1 = \frac{4.152,5 + 5.157,5 + 12.162,5 + 16.167,5 + 3.172,5}{40} = 163,625$$

Chọn ĐÚNG.

- b) Tổng số học sinh lớp $12A$ là $n_1 = 40$.

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{40}$ lần lượt là chiều cao của 40 học sinh lớp $12A$ xếp theo thứ tự không giảm.

Do nhóm chứa trung vị là nhóm $[160;165)$.

Tần số nhóm chứa trung vị là $n_m = 12$.

Ta có: $C = 4 + 5 = 9$.

$$M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m) = 160 + \frac{\frac{40}{2} - 9}{12} \cdot (165 - 160) = \frac{1975}{12} \approx 165$$

Trung vị

Chọn SAI.

c) Nhóm chứa một của mẫu số liệu lớp 12B là $[165;170)$.

Do đó $u_m = 165$, $n_{m-1} = 13$, $n_m = 18$, $n_{m+1} = 5$, $u_{m+1} - u_m = 170 - 165 = 5$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o = 165 + \frac{18-13}{(18-13)+(18-5)} \cdot 5 = \frac{2995}{18} \approx 166$$

Chọn ĐÚNG.

d) Chọn giá trị đại diện cho các nhóm số liệu, ta có

Giá trị đại diện	152,5	157,5	162,5	167,5	172,5
Số học sinh lớp 12A	4	5	12	16	3
Số học sinh lớp 12B	2	2	13	18	5

Tổng số học sinh lớp 12A là $n_1 = 40$.

Tổng số học sinh lớp 12B là $n_2 = 2 + 2 + 13 + 18 + 5 = 40$.

Chiều cao trung bình của học sinh lớp 12A là

$$\bar{x}_1 = \frac{4.152,5 + 5.157,5 + 12.162,5 + 16.167,5 + 3.172,5}{40} = 163,625$$

Chiều cao trung bình của học sinh lớp 12B là

$$\bar{x}_2 = \frac{2.152,5 + 2.157,5 + 13.162,5 + 18.167,5 + 5.172,5}{40} = 165,25$$

Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu về chiều cao trung bình của học sinh lớp 12A là

$$s_1^2 = \frac{1}{40} \cdot (4.152,5^2 + 5.157,5^2 + 12.162,5^2 + 16.167,5^2 + 3.172,5^2) - (\bar{x}_1)^2 = \frac{1879}{64}, s_1 \approx 5,42$$

Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu về chiều cao trung bình của học sinh lớp 12B là

$$s_2^2 = \frac{1}{40} \cdot (2.152,5^2 + 2.157,5^2 + 13.162,5^2 + 18.167,5^2 + 5.172,5^2) - (\bar{x}_2)^2 = \frac{359}{16}, s_2 \approx 4,74$$

Vì chiều cao trung bình của các học sinh lớp 12A thấp hơn chiều cao trung bình của các học sinh lớp 12B, đồng thời, sự biến động về chiều cao trung bình của học sinh lớp 12A lớn hơn so với lớp 12B.

Chọn SAI.

Câu 27: Cho phương trình $\log_2^2 x + 2m \log_2 x - m + 2 = 0$ với m là tham số.

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x > 0$.

b) Với $m = -3$ thì tổng tất cả các nghiệm của phương trình là 6.

c) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-2 < m < 1$.

d) Phương trình có đúng một nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{1}{4}; 8\right)$ khi và chỉ khi $m \in \{-2; 1\}$.

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Sai.

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x > 0$.

Chọn ĐÚNG.

b) Với $m = -3$ thì tổng tất cả các nghiệm của phương trình là 6.

Ta có phương trình:

$$\log_2^2 x - 6 \log_2 x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 32 \end{cases} \Rightarrow 32 + 2 = 34$$

Chọn SAI.

c) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-2 < m < 1$.

Đặt $t = \log_2 x \in \mathbb{R}$, ứng mỗi giá trị của t cho một giá trị của x .

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình ẩn $t: t^2 + 2mt - m + 2 = 0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow m^2 + m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$$

Chọn SAI.

d) Phương trình có đúng một nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{1}{4}; 8\right)$ khi và chỉ khi $m \in \{-1; 2\}$.

Phương trình đã cho có đúng một nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{1}{4}; 8\right)$ khi và chỉ khi phương trình ẩn $t: t^2 + 2mt - m + 2 = 0$ có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(-2; 3)$.

$$t^2 + 2mt - m + 2 = 0 \Leftrightarrow m(1 - 2t) = t^2 + 2 \Leftrightarrow -m = \frac{t^2 + 2}{2t - 1} \left(t \neq \frac{1}{2} \right)$$

Xét hàm số $y = \frac{t^2 + 2}{2t - 1}, t \in (-2; 3) \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow y' = \frac{2t^2 - 2t - 4}{(2t - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$

Ta có BBT :

t	-2	-1	0,5	2	3	
y'	+	0	-	-	0	+
y	-6/5	-1		2	11/5	

Từ BBT, ta được YCBT

$$\Leftrightarrow -m \in \left(-\infty; -\frac{6}{5}\right] \cup \{-1; 2\} \cup \left[\frac{11}{5}; +\infty\right) \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{11}{5}\right] \cup \{-2; 1\} \cup \left[\frac{6}{5}; +\infty\right)$$

Chọn SAI.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Khi đó:

a) $AD \parallel (SBC)$

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB thì $AH \perp BC$

c) Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng: $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AB bằng: $\frac{2a\sqrt{5}}{10}$

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Sai.

a) Ta có: $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$.

Chọn ĐÚNG.

b) Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow AH \perp BC$.

Chọn ĐÚNG.

c) Ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a$. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Suy ra Thể tích khối chóp $S.ABC = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn SAI.

d) Trong mặt phẳng (SAD) , kẻ $AK \perp SD$ tại K. (1)

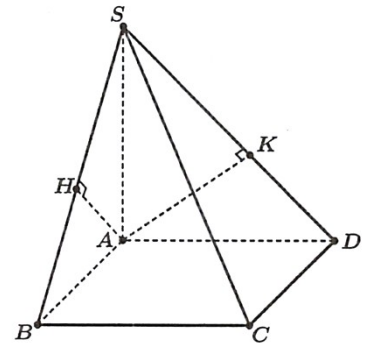
Ta có: $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra AK là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau AB, SD .

Tam giác ACD vuông tại D nên $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{3a^2 - 2a^2} = a$.

Tam giác SAD vuông tại A có đường cao AK nên

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AK = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a \cdot a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$



$$\text{Vậy } d(AB, SD) = AK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn SAI.

Câu 29: Cho một hộp chứa 200 thẻ được đánh số từ 1 đến 200 . Gọi A, B lượt là hai biến cố chọn được thẻ chẵn và thẻ chia hết cho 3

a) A, B là hai biến cố xung khắc.

b) Xác suất của biến cố B bằng $\frac{33}{100}$.

c) Xác suất của biến cố chia hết cho 2 hoặc chia hết cho 3 bằng $\frac{137}{200}$.

d) Xác suất của biến cố chia hết cho 2 và không chia hết cho 3 bằng $\frac{67}{200}$.

Lời giải

Chọn a) Sai | b) ĐÚNG | c) Sai | d) ĐÚNG.

a)

$$A = \{2; 4; 6; \dots; 200\}, B = \{3; 6; 9; \dots; 198\}$$

$$A \cap B = \{6; 12; 18; \dots; 198\} \neq \emptyset$$

Chọn SAI.

b) Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = 200$

Số phần tử của biến cố $B: n(B) = 66$

$$\text{Xác suất của biến cố } B: P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{66}{200} = \frac{33}{100}$$

Chọn ĐÚNG.

$$\text{c) } P(A) = \frac{1}{2}; P(A \cap B) = \frac{33}{200}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{133}{200}$$

Chọn SAI.

d) A, B độc lập, suy ra: $A, \bar{B}$ độc lập

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{67}{100} = \frac{67}{200}$$

Chọn ĐÚNG.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN: Trong mỗi câu, hãy viết phần trả lời ngắn không quá 4 ký tự (phải là số) và để ngoài MathType

Câu 30: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+1)x^2 - (m-2)x + 3$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.

Lời giải

Trả lời: 1

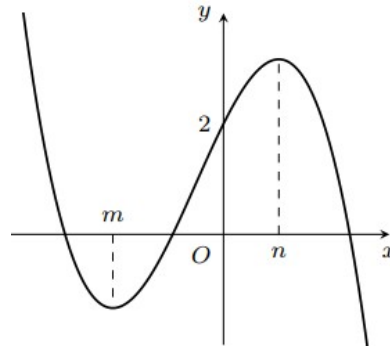
Ta có $y' = x^2 - (m+1)x - m + 2$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} y' &\geq 0, \forall x \in (0; 4) \\ \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x - m + 2 &\geq 0, \forall x \in (0; 4) \\ \Leftrightarrow m &\leq \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}, \forall x \in (0; 4) \\ \Leftrightarrow m &\leq 1. \end{aligned}$$

Có 1 giá trị nguyên dương m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.

Câu 31: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ.



Biết rằng $e > n$. Số điểm cực đại của hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ bằng

Lời giải

Trả lời: 4

Ta có $y' = (f'(x) - 2) \cdot f''(f(x) - 2x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) - 2 = 0 \\ f''(f(x) - 2x) = 0. \end{cases}$$

• $f'(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2$ có 3 nghiệm.

$$\bullet \quad f''(f(x) - 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) - 2x = m \\ f(x) - 2x = n. \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $g(x) = f(x) - 2x \Rightarrow g'(x) = f'(x) - 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < m \\ x = 0 \\ x = x_2 > n. \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$x_1 < m$			0	$n < x_2$			$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$g(x)$	$-\infty$				$g(0)$				$-\infty$

Vì $g(0) = f(0) = e > n$ nên từ bảng biến thiên, suy ra hệ phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt.

Do đó hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ có 7 điểm cực trị.

Mặt khác $y = f(x)$ là hàm bậc 4 với hệ số bậc cao nhất $a < 0$ và $y = f'(x)$ là hàm bậc 3 nên hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ có bậc 12 với hệ số bậc cao nhất âm suy ra hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ có 4 điểm cực đại 3 điểm cực tiểu.

Câu 32: Cho phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2-2x+3}(2|x-m|+2)$, m là tham số thực. Tính tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình có đúng ba nghiệm phân biệt?

Lời giải

Trả lời: 3,5

$$3^{x^2-2x+3-(2|x-m|+2)} = \frac{\ln(2|x-m|+2)}{\ln(x^2-2x+3)}$$

Phương trình tương đương

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+3} \cdot \ln(x^2-2x+3) = 3^{2|x-m|+2} \cdot \ln(2|x-m|+2) \quad (*).$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 3^t \cdot \ln t, t \geq 2$ là hàm số đồng biến nên từ phương trình (*) suy ra $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 2|x-m| + 2 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2x - 2|x-m| + 1 = 0$.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2m + 1 & \text{khi } x \geq m \\ x^2 - 2m + 1 & \text{khi } x < m \end{cases} \Rightarrow g'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{khi } x > m \\ 2x & \text{khi } x < m \end{cases}$$

Có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{khi } x > m \\ x = 0 & \text{khi } x < m \end{cases}$$

và

Xét các trường hợp sau:

TH1: $m \leq 0$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	m	0	2	$+\infty$	
$g'(x)$		-	-	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$					$+\infty$

Phương trình chỉ có tối đa 2 nghiệm nên không có m thỏa mãn.

TH2: $m \geq 2$ tương tự.

TH3: $0 < m < 2$, bảng biến thiên $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	m	2	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$				$+\infty$

$(m+1)^2$

$-2m+1$

$2m-3$

$$\begin{cases} (m-1)^2 = 0 \\ -2m+1 = 0 > 2m-3 \Leftrightarrow \\ -2m+1 < 0 = 2m-3 \end{cases} \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

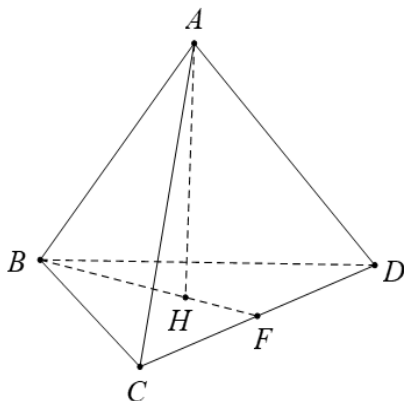
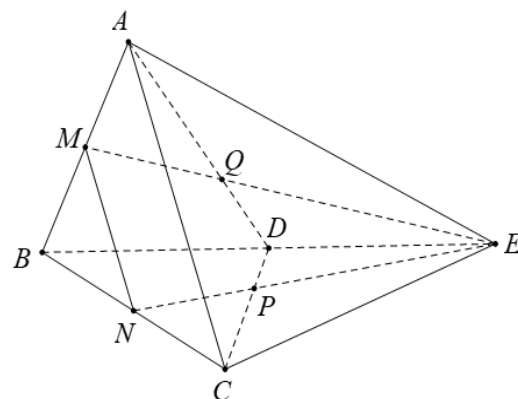
Phương trình có 3 nghiệm khi

Vậy tổng bình phương các giá trị của tham số m bằng 3,5.

Câu 33: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D . Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối chứa điểm A có thể tích V . Khi đó $V = \frac{m\sqrt{2}}{n}$ ($m, n \in \mathbf{Z}, \frac{m}{n}$ tối giản). Tính $m.n$?

Lời giải

Trả lời: 2376



Tính thể tích T của khối tứ diện $ABCD$. Gọi F là trung điểm BC và H trọng tâm tam giác BCD .

Ta có $BF = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $BH = \frac{2}{3}BF = \frac{1}{\sqrt{3}}$ suy ra $BH = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Thể tích tứ diện $ABCD$ là $T = \frac{1}{3}AH.S_{BCD} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{12}$

Gọi diện tích một mặt của tứ diện là S . Gọi P là giao điểm của NE và CD , tương tự cho Q .

Ta thấy P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác BEC và BEA nên $PD = \frac{1}{3}DC, QD = \frac{1}{3}AD$

Sử dụng công thức tỉ số thể tích ta có:

$$\frac{V_{B.ACE}}{V_{B.ACD}} = 2 \text{ nên } V_{B.ACE} = 2T; \frac{V_{E.BMN}}{V_{E.BAC}} = \frac{1}{4} \text{ nên } V_{E.BMN} = \frac{1}{4}.2T = \frac{T}{2}.$$

Nên $V_{E.AMNC} = V_{E.ABC} - V_{E.BMN} = 2T - \frac{T}{2} = \frac{3}{2}T$

Tương tự: $\frac{V_{E.DPQ}}{V_{E.DCA}} = \frac{1}{9}$ nên $V_{E.DPQ} = \frac{1}{9}T$. Nên $V_{E.ACPQ} = T - \frac{1}{9}T = \frac{8}{9}T$

Suy ra $V = V_{E.AMNC} - V_{E.ACPQ} = \frac{3}{2}T - \frac{8}{9}T = \frac{11}{18}T = \frac{11\sqrt{2}}{216}$.

Câu 34: Có bao nhiêu số tự nhiên có ³ chữ số đôi một khác nhau có tích các chữ số của số đó chia hết cho 6?

Lời giải

Trả lời: 474

Gọi $\overline{abc}$ là số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau và tích các chữ số của nó chia hết cho 6.

Ta có: $9.9.8 = 648$ số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau.

Xét trường hợp số tạo thành có tích các chữ số không chia hết cho 6.

TH1: Cả ba chữ số đều lẻ: Có $A_5^3 = 60$.

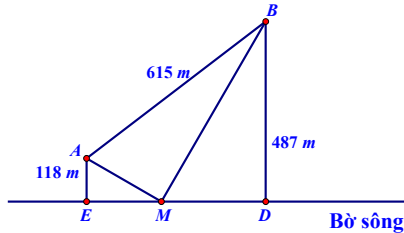
TH2: Trong ba chữ số có hai số lẻ không chia hết cho 3 và một số chẵn khác 0 và 6: Có $C_3^2.C_3^1.3! = 54$.

TH3: Trong ba chữ số có một số lẻ không chia hết cho 3 và hai số chẵn khác 0 và 6: Có $C_3^1.C_3^2.3! = 54$.

TH4: Cả ba chữ số đều chẵn và không có hai chữ số 0, 6: Có $3! = 6$.

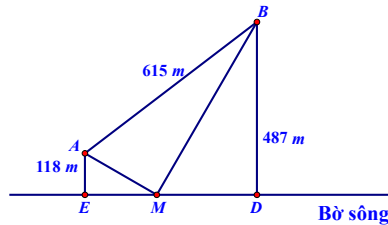
Do đó, có: $648 - (60 + 54 + 54 + 6) = 474$ số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau và tích các chữ số của số đó chia hết cho 6.

Câu 35: Cho hai vị trí A, B cách nhau $615m$, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là $118m$ và $487m$. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B . Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là bao nhiêu mét? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đáp số: 780



Giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về B .

$$BD = 369, ED = 492.$$

Dễ dàng tính được

$$EM = x, \quad MD = 492 - x, \quad AM = \sqrt{x^2 + 118^2}, \quad BM = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}.$$

Ta đặt khi đó ta được

$$f(x)$$

Như vậy ta có hàm số được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} \quad x \in [0; 492]$$

với

$$f'(x)$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M .

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} = \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} = (492 - x)\sqrt{x^2 + 118^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2[(492 - x)^2 + 487^2] = (492 - x)^2(x^2 + 118^2) \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (487x)^2 = (58056 - 118x)^2 \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{58056}{605} \text{ hay } x = -\frac{58056}{369} \Leftrightarrow x = \frac{58056}{605} \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 492]$. So sánh các giá trị của $f(0)$; $f\left(\frac{58056}{605}\right)$; $f(492)$ ta có giá trị nhỏ nhất là

$$f\left(\frac{58056}{605}\right) \approx 780m$$

Khi đó quãng đường đi ngắn nhất là xấp xỉ $780m$.

ĐỀ 4**ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI****MÔN: TOÁN 12****PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN**

1.C	2.B	3.A	4.A	5.C	6.A	7.C	8.B
9.A	10.B	11.D	12.A	13.B	14.B	15.D	16.A
17.A	18.A	19.A	20.D	21.C	22.A	23.D	24.B

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

CÂU 1	CÂU 2	CÂU 3	CÂU 4	CÂU 5
a) Đúng	a) Đúng	a) Sai	a) Đúng	a) Đúng
b) Sai	b) Sai	b) Đúng	b) Đúng	b) Sai
c) Đúng	c) Đúng	c) Đúng	c) Đúng	c) Sai
d) Sai	d) Sai	d) Đúng	d) Sai	d) Sai

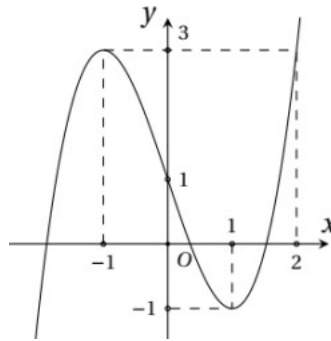
PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu	1	2	3	4	5	6
Chọn	16	6,67	211	5	0,18	26

LỜI GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN: Trong mỗi câu hỏi, hãy chọn 1 đáp án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

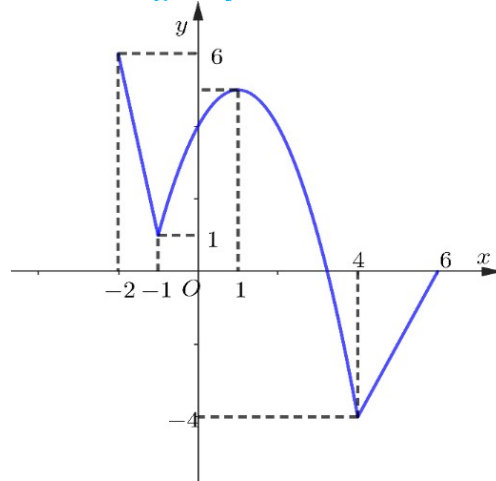
- A. $x = -1$. B. $(1; -1)$. C. $x = 1$. D. $(-1; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị, hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 6]$. Tính giá trị của $T = 2M + 3m$.



A. 16.

B. 0.

C. 7.

D. -2.

Lời giải**Chọn B**

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất là $M = 6$ tại $x = -2$ và giá trị nhỏ nhất là $m = -4$ tại $x = 4$. Vậy $T = 2M + 3m = 0$.

Câu 3: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 2}$ tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích S bằng

A. $S = \frac{2}{3}$.B. $S = \frac{4}{3}$.C. $S = \frac{8}{3}$.D. $S = \frac{1}{3}$.**Lời giải****Chọn A**

Ta có: $y = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 2} = 3x + 2 + \frac{5}{x - 2}$.

Khi đó: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - (3x + 2)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x - 2} = 0 \Rightarrow y = 3x + 2$ là tiệm cận xiên.

Tiệm cận xiên cắt trục Ox tại điểm $A\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$.

Tiệm cận xiên cắt trục Oy tại điểm $B(0; 2)$.

Đường tiệm cận xiên tạo với các trục tọa độ tam giác OAB .

Diện tích tam giác OAB bằng $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	$ $	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	-4	$+\infty$

Phương trình $|f(1-2\sin x)|=3$ có bao nhiêu nghiệm?

- A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

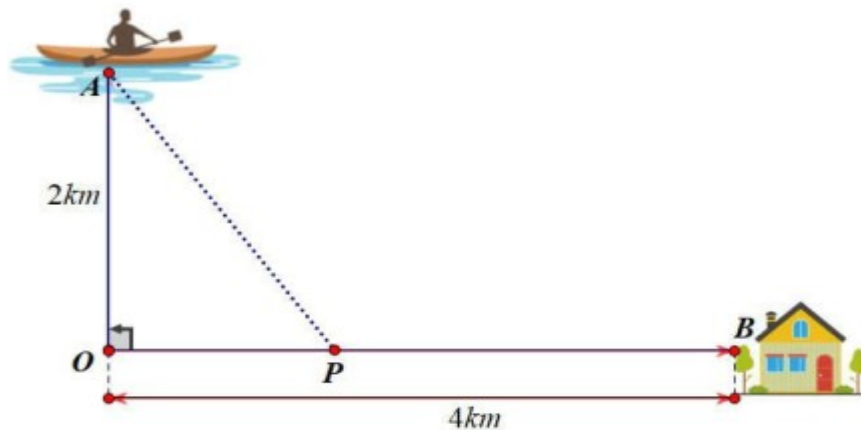
Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=|f(x)|$ là

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	3	x_3	$+\infty$
y	$+\infty$	0	2	$+\infty$	0	4	$+\infty$

Đặt $t=1-2\sin x \Rightarrow t \in [-1;3]$, phương trình trở thành $|f(t)|=3$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra phương trình có 2 nghiệm.

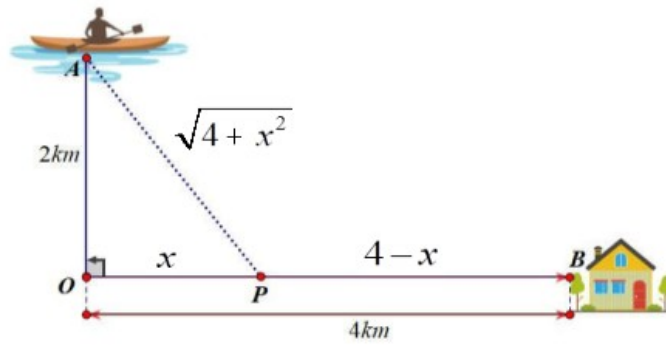
Câu 5: Anh Bình đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông 2 km , anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm B tọa lạc ven bờ sông, B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là 4 km (hình vẽ). Biết rằng anh Bình chèo thuyền với vận tốc 6 km/h và chạy bộ trên bờ với vận tốc 10 km/h . Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Bình từ vị trí xuất phát đến được điểm B là



- A.** 44 phút. **B.** 30 phút. **C.** 40 phút. **D.** 38 phút.

Lời giải

Chọn C



Đặt $OP = x$ ($0 < x < 4$) $\Rightarrow BP = 4 - x$, $AP = \sqrt{4 + x^2}$.

Khoảng thời gian để anh Bình từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

$$t_{(x)} = t_{AP} + t_{PB} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{6} + \frac{4-x}{10} \text{ (h)} \Rightarrow t'_{(x)} = \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{10}$$

$$t'_{(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{4+x^2} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ 4x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{3}{2}$	4	
$t'(x)$		-	0	+
$t(x)$				

Diagram showing the relationship between $t(x)$ and x at the critical point $x = \frac{3}{2}$:

At $x = \frac{3}{2}$, $t'(x) = 0$. The function $t(x)$ is increasing for $x > \frac{3}{2}$ and decreasing for $x < \frac{3}{2}$.

Từ bảng biến thiên suy ra khoảng thời gian ngắn nhất để anh Bình từ vị trí xuất phát đến được

điểm B là: $t_{\min} = \frac{2}{3} \text{ (h)} = \frac{2}{3} \cdot 60 = 40$ (phút).

Câu 6: . Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 0)$ và vector $\overrightarrow{MN} = (1; -1; 0)$. Tìm tọa độ của điểm N .

A. $N(3; -2; 0)$. **B.** $N(-4; -2; 0)$. **C.** $N(-2; 0; 0)$. **D.** $N(2; 0; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $N(x; y; z)$ là điểm cần tìm. Ta có: $\overrightarrow{MN} = (x-2; y+1; z)$.

$$\begin{cases} x-2=1 \\ y+1=-1 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow N(3; -2; 0)$$

Khi đó theo giả thiết ta có

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k} - 4\vec{j}$ và $\vec{b} = (m-n; 4m-6n; n^2-3m+2)$, với m, n là tham số. Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì hiệu $(m-n)$ bằng:

A. 9.

B. -9.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

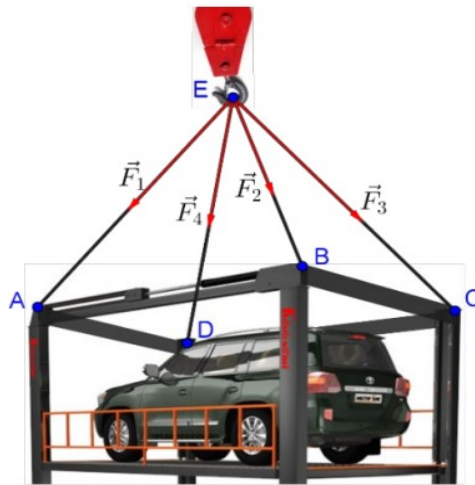
Chọn C+) Ta có: $\vec{a} = (1; -4; 3)$.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} m - n = 1 \\ 4m - 6n = -4 \\ n^2 - 3m + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = 4 \end{cases}.$$

+)

+) Khi đó $m - n = 5 - 4 = 1$.

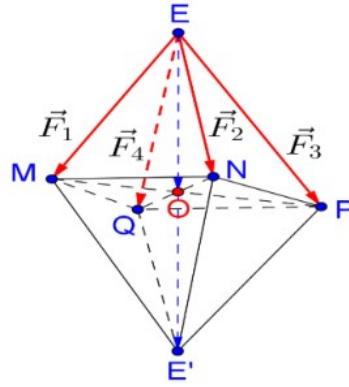
Câu 8: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° (như hình vẽ). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là $5000\sqrt{3}$ (N) và trọng lực của khung sắt là 3000 (N). Trọng lượng của ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị) bằng:



A. 30000 (N). B. 27000 (N). C. 33000 (N). D. 14321 (N).

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm sao cho $\overline{EM} = \overline{F_1}, \overline{EN} = \overline{F_2}, \overline{EP} = \overline{F_3}, \overline{EQ} = \overline{F_4}$. Gọi O là giao điểm của MP và NQ , E' là điểm đối xứng của E qua O , ta có: $|\overline{F_1}| = |\overline{F_2}| = |\overline{F_3}| = |\overline{F_4}| = 5000\sqrt{3}$ (N), các mặt bên của hình chóp $E.MNPQ$ là tam giác cân bằng nhau.

Vì các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° nên các tam giác $\triangle MEP, \triangle NEQ$ là hai tam giác đều bằng nhau. Khi đó:

$$EO = \frac{EM\sqrt{3}}{2} = \frac{5000\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 7500 \quad (\text{N}).$$

Mặt khác: $\overline{P} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} + \overline{F_4} = (\overline{F_1} + \overline{F_3}) + (\overline{F_2} + \overline{F_4}) = \overline{EE'} + \overline{EE'} = 4\overline{EO}$

Suy ra $P = 4EO = 4 \cdot 7500 = 30000$ (N).

Vậy trọng lượng của ô tô là: $30000 - 3000 = 27000$ (N).

Câu 9: Để khảo sát kết quả thi tuyển sinh môn Toán trong kì thi tuyển sinh

đại học năm vừa qua của một trường A , người điều tra chọn một mẫu gồm 100 học sinh tham gia kì thi tuyển sinh đó. Điểm môn Toán (thang điểm 10) của các học sinh này được cho bởi bảng phân bố tần số dưới đây. Hãy tìm một của mẫu số liệu?

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	N=100

A. $M_o = 7$ B. $M_o = 5$ C. $M_o = 8$ D. $M_o = 4$

Lời giải

Chọn A

Từ bảng phân bố tần số ta có tần số lớn nhất là 24.

Mốt của mẫu số liệu là $M_o = 7$.

Câu 10: Điều tra ^{42} học sinh của một lớp ^{11} về số giờ tự học ở nhà, người ta có bảng sau đây:

Lớp (Số giờ tự học)	Tần số
[1; 2)	8
[2; 3)	10
[3; 4)	12
[4; 5)	9
[5; 6)	3

Số trung vị của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào?

- A.** (1; 2) **B.** (3; 4) **C.** (2; 3) **D.** (4; 5)

Lời giải

Chọn B

Cỡ mẫu $n = 42$.

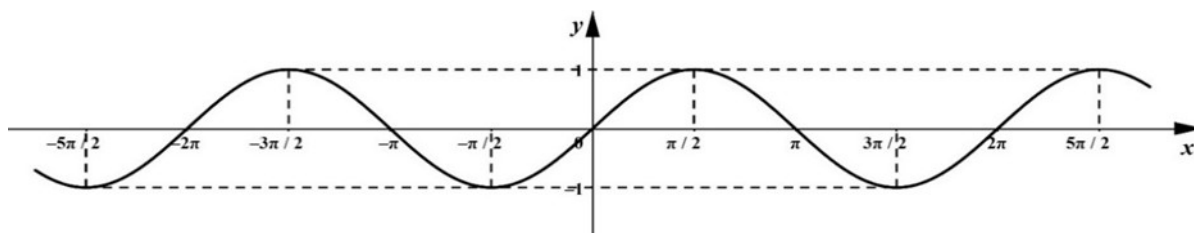
Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{42}$ là mẫu số liệu về số giờ tự học ở nhà của 42 học sinh được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, \dots, x_8 \in [1; 2); x_9, \dots, x_{18} \in [2; 3); x_{19}, \dots, x_{30} \in [3; 4); x_{31}, \dots, x_{39} \in [4; 5); x_{40}, \dots, x_{42} \in [5; 6)$.

Trung vị của mẫu số liệu là $\frac{1}{2} \cdot (x_{21} + x_{22}) \in [3; 4)$. Do đó, trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$M_e = 3 + \left(\frac{\frac{42}{2} - (10 + 8)}{12} \right) \cdot (4 - 3) = 3,25 \quad (\text{h}).$$

Câu 11: Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây? Biết đồ thị hàm số như hình sau



- A.** $(0; \pi)$ **B.** $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ **C.** $(-2\pi; -\pi)$ **D.** $\left(-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right)$

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị, ta thấy hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right)$.

Câu 12: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố X ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm

không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182} (t - 80) \right] + 12, \quad t \in \mathbb{N}, \quad 0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

A. 171.

B. 11.

C. 364.

D. 193.

Lời giải

Chọn A

Vì $-1 \leq \sin \alpha \leq 1, \forall \alpha$ nên ta có:

$$d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] + 12 \leq 3 \cdot 1 + 12 = 15$$

Suy ra $d(t)_{\max} = 15$ đạt được khi $\sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
 $\Leftrightarrow t = 171 + 364k, k \in \mathbb{Z}$.

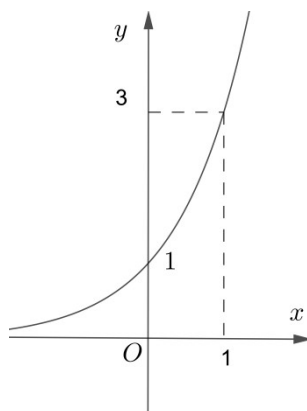
Vì $0 < t \leq 365$ nên ta có:

$$0 < 171 + 364k \leq 365 \Rightarrow \frac{-171}{364} < k \leq \frac{194}{364}$$

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0$.

Vậy vào ngày thứ 171 trong năm thì thành phố X có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất (15 giờ).

Câu 13: Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ B. $y = 3^x$ C. $y = \log_3 x$ D. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Lời giải

Chọn B

Đồ thị trên là đồ thị hàm số $y = a^x$.

Ta thấy đồ thị có hướng đi lên từ trái sang phải nên hàm số đồng biến. Từ đó suy ra $a > 1$. Hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = 3^x$

Câu 14: Chị Lan có 400 triệu đồng mang đi gửi tiết kiệm ở hai loại kì hạn khác nhau đều theo hình thức lãi kép. Chị gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý (3 tháng) với lãi suất 2,1% một quý, 200 triệu đồng còn lại chị gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Sau khi gửi được đúng 1 năm, chị rút ra một nửa số tiền cả gốc và lãi ở loại kì hạn theo quý và gửi vào loại kì hạn theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, chị Lan thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 79760000 đồng. B. 74813000 đồng. C. 65393000 đồng. D. 70656000 đồng.

Chọn B

Gọi T_1 là số tiền cả gốc và lãi gửi theo quý và T_2 là số tiền cả gốc và lãi gửi theo tháng trong năm thứ nhất.

T_3 là số tiền cả gốc và lãi gửi theo quý và T_4 là số tiền cả gốc và lãi gửi theo tháng trong năm thứ hai.

Trong 1 năm đầu ta có:

$$T_1 = 200 \cdot (1 + 0,021)^4 \text{ (triệu đồng)}$$

$$T_2 = 200 \cdot (1 + 0,0073)^{12} \text{ (triệu đồng)}$$

Trong năm thứ 2 ta có:

$$T_3 = \frac{T_1}{2} (1 + 0,021)^4 \text{ (triệu đồng)}$$

$$T_4 = \left(T_2 + \frac{T_1}{2} \right) (1 + 0,0073)^{12} \text{ (triệu đồng)}$$

Sau 2 năm tổng số tiền thu được là: $T = T_3 + T_4 \approx 474.813.000$ (đồng).

Vậy số tiền lãi chị Lan thu được là: $474.813.000 - 400.000.000 = 74.813.000$ (đồng).

Câu 15: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Số hạng tổng quát u_n ($n \geq 2$) bằng
A. $3 \cdot 2^n$. **B.** $3 \cdot 2^{n+2}$. **C.** $3 \cdot 2^{n+1}$. **D.** $3 \cdot 2^{n-1}$.

Lời giải**Chọn D**

Ta có $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Câu 16: Khi một vận động viên nhảy dù nhảy ra khỏi máy bay, giả sử quãng đường người ấy rơi tự do (tính theo feet) trong mỗi giây liên tiếp theo thứ tự trước khi bung dù lần lượt là: 16; 48; 80; 112; 144; ... (các quãng đường này tạo thành cấp số cộng). Tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên là



A. 1600 feet. **B.** 1520 feet. **C.** 3200 feet. **D.** 1760 feet.

Chọn A

Ta có quãng đường vận động viên rơi tự do (tính theo feet) trong mỗi giây liên tiếp theo thứ tự trước khi bung dù lần lượt là: 16; 48; 80; 112; 144; ... lập thành cấp số cộng.

Công sai của cấp số cộng trên là: $d = 32$.

$$S_{10} = \frac{10 \cdot [2 \cdot 16 + (10-1) \cdot 32]}{2} = 1600$$

Chiều dài quãng đường rơi tự do là:

Vậy tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên là 1600 feet.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^5 - 2n^3 + 1}{4n^5 + 2n^2 + 1}$$

Câu 17: Tìm

A. 2.

B. 8.

C. 1.

D. 4.

Lời giải**Chọn A**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^5 - 2n^3 + 1}{4n^5 + 2n^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(8 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^5} \right)}{n^5 \left(4 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^5} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^5}}{4 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^5}} = \frac{8}{4} = 2 \end{aligned}$$

Câu 18: Phương trình $3x^5 + 5x^3 + 10 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng nào sau đây.

A. $(-2; -1)$.

B. $(-10; -2)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-1; 0)$.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Đặt } f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 10$$

$f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên $[-2; -1]$ (1)

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(-2) = -126 \\ f(-1) = 2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } f(-2) \cdot f(-1) = -126 \cdot 2 = -252 < 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-2; -1)$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , $SA = a\sqrt{7}$ và SA vuông góc với đáy. Gọi α là góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\cos \alpha$.

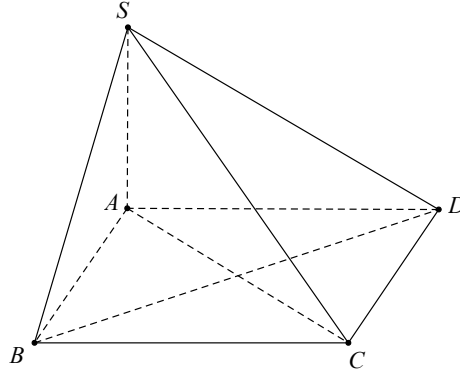
A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải**Chọn A**



Ta có: $SA \perp (ABCD)$ nên A là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Suy ra AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Nên góc tạo bởi SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA}$.

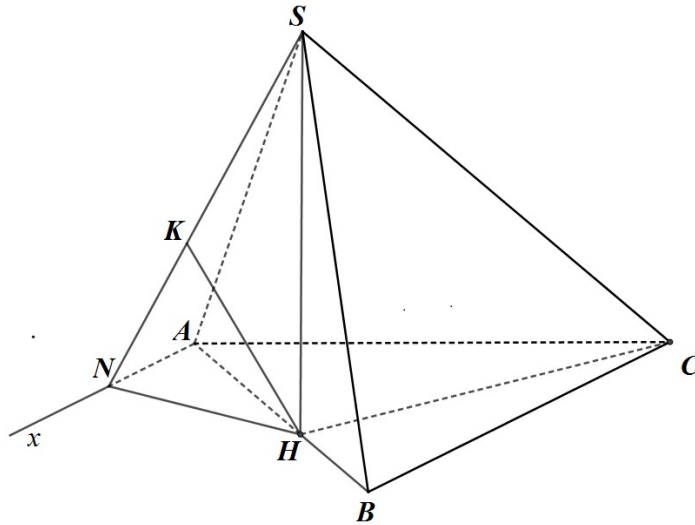
Ta có $AC = a\sqrt{2}, SA = a\sqrt{7} \Rightarrow SC = 3a \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AC}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{3a} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

- A. $\frac{a\sqrt{42}}{10}$. B. $\frac{a\sqrt{42}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{42}}{12}$. D. $\frac{a\sqrt{42}}{8}$.

Lời giải

Chọn D



Áp dụng định lí cosin trong tam giác HBC ta có:

$$HC = \sqrt{HB^2 + BC^2 - 2HB \cdot BC \cos \widehat{HBC}} = \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 + a^2 - 2a \cdot \frac{a}{3} \cos 60^\circ} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° nên $\widehat{SCH} = \widehat{(SC, (ABC))} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông SHC vuông tại H ta có: $SH = HC \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}$.

Kẻ $Ax \perp BC$. Gọi N và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên Ax và SN .

Ta có $BC \perp (SAN)$ và $BA = \frac{3}{2}AH$ nên $d(SA; BC) = d(B, (SAN)) = \frac{3}{2}d(H, (SAN)) = \frac{3}{2}HK$.

Vì $Ax \perp (SHN)$ nên $Ax \perp HK$, do đó $HK \perp (SAN) \Rightarrow d(H, (SAN)) = HK$.

Mà $AH = \frac{2a}{3}$, $HN = AH \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow HK = \frac{SH \cdot HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12}$.

Vậy $d(SA; BC) = \frac{a\sqrt{42}}{8}$.

Câu 21: Trong đội văn nghệ nhà trường có 8 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để biểu diễn 1 tiết mục văn nghệ là đơn ca hoặc song ca nam - nữ.

A. 48. B. 25. C. 62. D. 50.

Lời giải

Chọn C

TH1: Chọn 1 bạn đơn ca có 14 cách.

TH2: Chọn 1 cặp nam nữ song ca, có:

Bước 1: Chọn 1 nam có 8 cách.

Bước 2: Chọn 1 nữ có 6 cách.

Theo quy tắc nhân có $8 \cdot 6 = 48$ cách.

Vậy theo quy tắc cộng có $14 + 48 = 62$ cách.

Câu 22: Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 2 quyển sách Ngữ Văn, 3 quyển sách Tiếng Anh và 5 Quyển sách Toán thành hàng ngang lên một kệ sách để hai quyển sách cùng môn thì không được sắp xếp kề nhau?

A. 63360. B. 120960. C. 14400. D. 144000.

Lời giải

Chọn A

Vì số sách Ngữ Văn, Tiếng Anh và Toán lần lượt là 2; 3; 5 nên ta chỉ cần xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Ở giữa hai quyển sách Toán bất kỳ có đúng một quyển sách ở môn học khác

Bước 1: Hoán vị 5 quyển sách Toán có $5!$ cách.

Bước 2: Sắp xếp 5 quyển sách còn lại vào giữa hai quyển sách Toán và ở một bên ngoài cùng có $2 \cdot 5!$ cách.

Suy ra có $5! \cdot 2 \cdot 5! = 28800$.

Trường hợp 2: Có hai quyển sách Toán mà giữa nó một quyển sách Ngữ Văn và một quyển sách Tiếng Anh.

Bước 1: Hoán vị 5 quyển sách Toán có $5!$ cách.

Bước 2: Chọn một quyển sách Ngữ Văn và một quyển sách Tiếng Anh và sắp xếp vào giữa hai quyển sách Toán có $C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_4^1 \cdot 2!$ cách.

Bước 3: Sắp xếp 3 quyển sách còn lại có $3!$ cách.

Suy ra có $5! \cdot (C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_4^1 \cdot 2!) \cdot 3! = 34560$.

Vậy có tất cả 63360 cách sắp xếp.

Câu 23: Chọn ngẫu nhiên một vé số có 6 chữ số được lập từ các chữ số từ 0 đến 9. Tính xác suất của biến cố “lấy được vé không có chữ số 1 hoặc không có chữ số 5”.

A. 0,72103 B. 0,43005 C. 0,653002 D. 0,800738

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 10^6$.

Gọi A : “lấy được vé không có chữ số 1”, ta có $n(A) = 9^6$, $P(A) = \frac{9^6}{10^6} = 0,9^6$.

B : “lấy được vé không có chữ số 5”, ta có $n(B) = 9^6$, $P(B) = \frac{9^6}{10^6} = 0,9^6$.

$A \cap B$: “lấy được vé không có chữ số 1 và chữ số 5”.

Ta có $n(A \cap B) = 8^6$, $P(A \cap B) = \frac{8^6}{10^6} = 0,8^6$.

$A \cup B$: “lấy được vé không có chữ số 1 hoặc không có chữ số 5”.

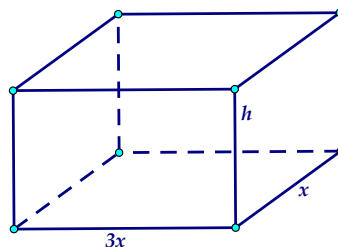
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,800738$.

Câu 24: Người ta cần xây dựng một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật (không nắp) có thể tích là $125m^3$. Đáy bể bơi là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng. Tính chiều rộng của đáy bể bơi để khi thi công tiết kiệm nguyên vật liệu nhất (làm tròn đến hai chữ số thập phân)?

A. 3,12m. B. 3,82m C. 3,62m D. 3,42m

Lời giải

Chọn B



Gọi chiều rộng của đáy bể bơi là $x, x > 0$. Suy ra, chiều dài của đáy bể bơi là $3x$.

Gọi h là chiều cao của bể bơi ($h > 0$).

Theo giả thiết: $V = 125 \Leftrightarrow h \cdot 3x^2 = 125 \Leftrightarrow h = \frac{125}{3x^2}$.

Diện tích bề bơi (không nắp) là $S = S_{xy} + S_{Day} = (2hx + 2 \cdot 3hx) + 3x^2 = 8hx + 3x^2$.

$$S = \frac{1000}{3x} + 3x^2 = \frac{500}{3x} + \frac{500}{3x} + 3x^2 \geq 3\sqrt{\frac{500}{3x} \cdot \frac{500}{3x} \cdot 3x^2} = 3\sqrt{\frac{25 \cdot 10^4}{3}}$$

Vậy $S_{\min} = 3\sqrt{\frac{25 \cdot 10^4}{3}}$, xảy ra khi $\frac{500}{3x} = 3x^2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{500}{9}} \approx 3,82m$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI: Trong mỗi ý ở mỗi câu, hãy chọn đúng hay sai (

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$ và $C(-4; 7; 5)$.

a) Độ dài cạnh AB là $\sqrt{26}$.

b) Độ dài đường cao $AH = \frac{555}{26}$ của tam giác ABC .

c) Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$.

d) Điểm $M(a; b; 0)$ trên mặt phẳng Oxy sao cho $2MA^2 + 3MB^2 + 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thỏa mãn $a + b = -\frac{7}{3}$.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -3; 4)$ nên $AB = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{26}$.

Chọn ĐÚNG.

b) Gọi $H(x; y; z)$ là chân đường cao hạ từ A xuống BC .

Ta lại có $\overrightarrow{BC} = (-6; 8; 2)$, $\overrightarrow{BH} = (x - 2; y + 1; z - 3)$ và $\overrightarrow{AH} = (x - 1; y - 2; z + 1)$.

Khi đó, H là chân đường cao khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \text{ cp } \overrightarrow{BC} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} -6(x - 1) + 8(y - 2) + 2(z + 1) = 0 \\ \frac{x - 2}{-6} = \frac{y + 1}{8} = \frac{z - 3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{26} \\ y = \frac{9}{13} \\ z = \frac{89}{26} \end{cases} \Leftrightarrow H\left(\frac{19}{26}; \frac{9}{13}; \frac{89}{26}\right)$$

Do đó, $AH = \sqrt{\frac{555}{26}}$.

Chọn SAI.

c) Ta có $BA = \sqrt{26}$, $BC = \sqrt{104}$.

Gọi $D(x; y; z)$ là chân đường phân giác trong hạ từ B xuống AC .

$$\overrightarrow{DA} = -\frac{BA}{BC} \cdot \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = -\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{104}} \cdot \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{DC}$$

Khi đó

$$\text{Mà } \overrightarrow{DA} = (1-x; 2-y; -1-z) \text{ và } \overrightarrow{DC} = (-4-x; 7-y; 5-z) \text{ nên } D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right).$$

Chọn ĐÚNG.

d) Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Suy ra $I\left(-\frac{8}{9}; \frac{29}{9}; 3\right)$. Khi đó

$$2MA^2 + 3MB^2 + 4MC^2 = 2IA^2 + 3IB^2 + 4IC^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}) + 9MI^2$$

$$= 2IA^2 + 3IB^2 + 4IC^2 + 9MI^2.$$

Vậy để $2MA^2 + 3MB^2 + 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì MI phải đạt giá trị nhỏ nhất.

Do M nằm trên mặt phẳng Oxy nên M là hình chiếu của I trên Oxy hay $M\left(-\frac{8}{9}; \frac{29}{9}; 0\right)$. Suy ra

$$a = -\frac{8}{9}; b = \frac{29}{9} \Rightarrow a + b = \frac{7}{3}.$$

Chọn SAI.

Câu 26: Kết quả kiểm tra cân nặng của 20 học sinh nam lớp 12^A (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của kilogram) được cho ở Bảng sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[60; 64)	62	8
[64; 68)	66	9
[68; 72)	70	1
[72; 76)	74	1
[76; 80)	78	1
		$n = 20$

Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a)** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 20.
- b)** Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 64.
- c)** 10 học sinh nam trong lớp có cân nặng hơn 64,89 kg.

d) Biết độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là $\frac{a\sqrt{109}}{b}$ kg ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản).

Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = ax^2 + bx + 5$ là $-\frac{5}{4}$.

Lời giải

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là $R = 80 - 60 = 20$.

Chọn ĐÚNG.

b)

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số	Tần số tích lũy
[60;64)	62	8	8
[64;68)	66	9	17
[68;72)	70	1	18
[72;76)	74	1	19
[76;80)	78	1	20
		$n = 20$	

Nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 10.

Xét nhóm 2 là nhóm $[64;68)$ có $r = 64, d = 4, n_2 = 9, cf_1 = 8$.

Trung vị của mẫu số liệu là $M_e = 64 + \left(\frac{10-8}{9}\right) \cdot 4 = \frac{584}{9} \approx 64,89$.

Chọn SAI.

c)

Chọn ĐÚNG.

d) Số trung bình cộng của mẫu số liệu lớp 12A là: $\bar{x} = \frac{8 \cdot 62 + 9 \cdot 66 + 70 + 74 + 78}{20} = \frac{328}{5}$.

Phương sai của mẫu số liệu lớp 12A là:

$$s^2 = \frac{8 \cdot \left(62 - \frac{328}{5}\right)^2 + 9 \cdot \left(66 - \frac{328}{5}\right)^2 + \left(70 - \frac{328}{5}\right)^2 + \left(74 - \frac{328}{5}\right)^2 + \left(78 - \frac{328}{5}\right)^2}{20} = \frac{436}{25}$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là $s = \sqrt{\frac{436}{25}} = \frac{2\sqrt{109}}{5}$.

Suy ra $a = 2, b = 5$, ta có $A = 2x^2 + 5x + 5 \geq \frac{15}{8}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là $\frac{15}{8}$, đạt được khi $x = -\frac{5}{4}$.

Chọn SAI.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x) = \sin x$.

a) Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $[-1;1]$.

b) Hàm số $y = f(2x)$ tuần hoàn với chu kỳ π .

c) Hàm số $y = f(2x)$ là hàm số lẻ.

d) Có tất cả 1012 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2024f\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$.

Lời giải

Chọn a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Đúng.

a) Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $\square$.

Chọn SAI.

b) $y = f(2x) = \sin 2x$. Đặt $g(x) = f(2x) = \sin 2x$

Tập xác định của hàm số là $\square$.

Ta có $g(x+T) = \sin 2(x+T) = \sin(2x+2T) = g(x) = \sin 2x$ với mọi $x \in \square$ khi và chỉ khi $2T = k2\pi \Leftrightarrow T = k\pi, k \in \square$.

Số dương T nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện trên là $T = \pi$

Vậy hàm số $y = f(2x)$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Chọn ĐÚNG.

c) Ta có $g(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -g(x), \forall x \in \square$

Suy ra hàm số $y = f(2x)$ là hàm số lẻ.

Chọn ĐÚNG.

d) $2024f\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = m \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{m}{2024}$

Ta có $x \in \left[0; \frac{4\pi}{3}\right] \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right]$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ trên $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	-1	1	$\frac{1}{2}$

Do đó phương trình $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{m}{2024}$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$ khi và chỉ khi $\frac{1}{2} \leq \frac{m}{2024} < 1 \Leftrightarrow 1012 \leq m < 2024$.

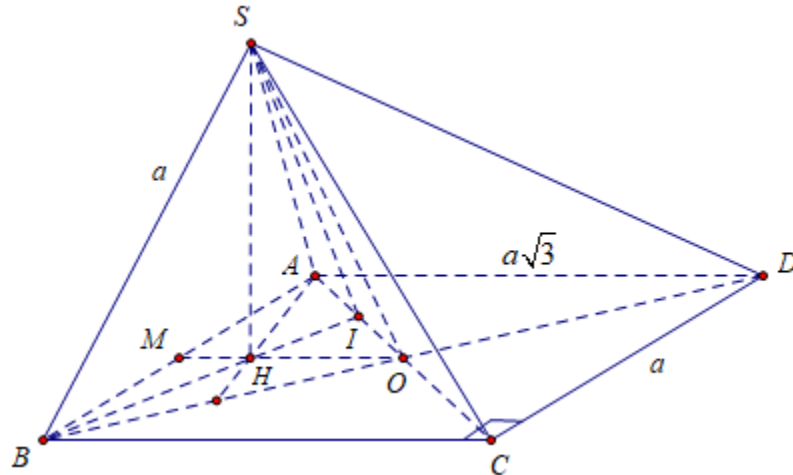
Suy ra có 1012 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Chọn ĐÚNG.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình chữ nhật tâm O với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, biết $SA = SB = SO = a$.

- a) Diện tích đáy chóp bằng $a^2\sqrt{3}$.
- b) Góc giữa hai đường thẳng SB và CD bằng 60° .
- c) Gọi H là trọng tâm tam giác ABO , ta có $\frac{OH}{AD} = \frac{1}{3}$.
- d) Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$, ta có $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải



- a) Diện tích đáy hình chóp là: $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a \cdot a\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$.

Chọn ĐÚNG.

- b) Từ giả thiết ta suy ra tam giác SAB là tam giác đều.

Ta có: $CD \parallel AB$ nên $(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{AB}) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Chọn ĐÚNG.

- c) Ta có $AC = BD = 2a \Rightarrow AO = BO = a$. Do đó tứ diện $S.ABO$ là tứ diện đều cạnh a .

Vì H là trọng tâm tam giác ABO nên ta có $SH \perp (ABO)$ hay $SH \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm AB , ta có $OH = \frac{2}{3}OM$.

Mặt khác, OM là đường trung bình của tam giác ABD nên $OM = \frac{1}{2}AD$.

Suy ra $OH = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}AD = \frac{1}{3}AD \Leftrightarrow \frac{OH}{AD} = \frac{1}{3}$.

Chọn ĐÚNG.

d) Gọi I là trung điểm đoạn AO .

Ta có: $\begin{cases} AO \perp HI \\ AO \perp SH \end{cases} \Rightarrow AO \perp (SHI) \Rightarrow AO \perp SI \Rightarrow AC \perp SI$.

Khi đó: $(\overline{SAC}), (ABCD)) = (\overline{SI}, HI) = \widehat{SIH} = \alpha$.

Xét trong tam giác vuông SHI , có $HI = \frac{1}{3}BI = \frac{1}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$$SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \tan \widehat{SIH} = \frac{SH}{IH} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = 2\sqrt{2}$$

Chọn SAI.

Câu 29: Một nhóm học sinh có 5 học sinh khối 10, 7 học sinh khối 11 và 8 học sinh khối 12. Xét phép thử chọn ngẫu nhiên 6 học sinh từ nhóm học sinh trên.

a) Gọi A là biến cố “chọn được 6 học sinh khối 11” và B là biến cố “chọn được 6 học sinh khối 12”. Khi đó A và B là hai biến cố xung khắc.

b) Số cách chọn ra 6 học sinh trong đó có đúng 3 học sinh ở khối 10 là 10.

c) Xác suất để trong 6 học sinh được chọn có ít nhất 1 học sinh khối 10 là $\frac{505}{1504}$.

d) Tính xác suất để chọn được 6 học sinh có đủ 3 khối và số học sinh khối 11 bằng số học sinh khối 12 ta được kết quả là $\frac{a}{b}$, trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó, $a + b = 1534$.

Lời giải

a) Vì học sinh khối 11 và khối 12 là khác nhau nên A và B là hai biến cố xung khắc.

Suy ra a) đúng.

b) Để chọn ra 6 học sinh trong đó có đúng 3 học sinh ở khối 10 ta thực hiện theo các bước

+) Chọn 3 học sinh ở khối 10: có C_5^3 .

+) Chọn 3 học sinh từ nhóm 15 học sinh của hai khối 11 và 12: có C_{15}^3 cách

Suy ra số cách chọn cần tìm là $C_5^3 \cdot C_{15}^3 = 4550$.

Suy ra b) sai.

c) Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{20}^6 = 15504$.

Gọi E là biến cố “trong 6 học sinh được chọn có ít nhất 1 học sinh khối 10”.

Suy ra $\bar{E}$ là biến cố “trong 6 học sinh được chọn không có học sinh khối 10 nào”.

$$\Rightarrow n(E) = C_{15}^6 = 5005$$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{5005}{15504}$$

Suy ra c) sai.

d) Gọi F là biến cố “chọn được 6 học sinh có đủ 3 khối và số học sinh khối 11 bằng số học sinh khối 12”

TH1. Chọn được 4 học sinh khối 10, 1 học sinh khối 11 và 1 học sinh khối 12: có $C_5^4 \cdot C_7^1 \cdot C_8^1 = 280$ cách.

TH2: Chọn được 2 học sinh khối 10, 2 học sinh khối 11 và 2 học sinh khối 12: có $C_5^2 \cdot C_7^2 \cdot C_8^2 = 5880$ cách.

$$\Rightarrow n(F) = 280 + 5880 = 6160$$

$$P(F) = \frac{6160}{15504} = \frac{385}{969} \Rightarrow a + b = 1354$$

Suy ra d) sai.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN: Trong mỗi câu, hãy viết phần trả lời ngắn không

quá 4 ký tự (phải là số) và để ngoài MathType

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(x) = (x-2)^2(x^2-4x+3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

Trả lời: 16

$$f(x) = (x-2)^2(x^2-4x+3) = (x-2)^2(x-1)(x-3)$$

Theo đề bài

$$Ta\ có\ y' = (2x-10)f'(x^2-10x+m+9)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-10=0 \\ f'(x^2-10x+m+9)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ (x^2-10x+m+7)^2(x^2-10x+m+8)(x^2-10x+m+6)=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{U} \quad & \begin{cases} x^2 - 10x + m + 7 = 0 \\ x^2 - 10x + m + 8 = 0 \quad (1) \\ x^2 - 10x + m + 6 = 0 \quad (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Giả sử x_0 là một nghiệm của (1) $\Rightarrow x_0^2 - 10x_0 + m + 8 = 0$

Do đó $x_0^2 - 10x_0 + m + 6 = -2 \neq 0$, "m", suy ra (1) và (2) không có nghiệm chung.

Hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có năm điểm cực trị khi mỗi phương trình (1), (2) có hai nghiệm phân biệt khác 5

$$\hat{U} \quad \begin{cases} 25 - m - 8 > 0 \\ 25 - m - 6 > 0 \\ m - 17 \neq 0 \\ m - 19 \neq 0 \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} m < 17 \\ m < 19 \\ m \neq 17 \\ m \neq 19 \end{cases} \quad \hat{U} \quad m < 17 \quad \text{và} \quad m \neq \{1; 2; 3; \dots; 15; 16\}$$

Vậy có 16 giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 + 6x^2 + 2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m; 2)$. Gọi S là tập các giá trị thực của m để qua M kẻ được đúng hai tiếp tuyến với đồ thị (C). Tính tổng các phần tử của S (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Trả lời: 6,67

Ta có: $f'(x) = -3x^2 + 12x$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ có dạng: $(\Delta): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Do tiếp tuyến qua $M(m; 2)$ nên ta có:

$$\begin{aligned} 2 &= (-3x_0^2 + 12x_0)(m - x_0) + (-x_0^3 + 6x_0^2 + 2) \Leftrightarrow 2x_0^3 - (3m + 6)x_0^2 + 12mx_0 = 0 \quad (1) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_0^2 - (3m + 6)x_0 + 12m = 0 \quad (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Để kẻ được đúng hai tiếp tuyến từ M thì phương trình (1) có 2 nghiệm.

Trường hợp 1: Phương trình (2) có nghiệm kép khác 0.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (3m + 6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12m = 0 \\ 2 \cdot 0^2 - (3m + 6) \cdot 0 + 12m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 60m + 36 = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Trường hợp 2: Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt và có một nghiệm bằng 0.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (3m+6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12m > 0 \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 60m + 36 > 0 \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy các giá trị thỏa yêu cầu bài toán là $\left\{0; \frac{2}{3}; 6\right\}$.

$$\text{Do đó, tổng các giá trị bằng } 0 + \frac{2}{3} + 6 = \frac{20}{3} \approx 6,67.$$

Câu 32: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\log_3(2x^2 + y^2) = \log_7(x^3 + 2y^3) = \log z$. Có bao giá trị nguyên của z để có đúng hai cặp (x, y) thỏa mãn đẳng thức trên?

Lời giải

Trả lời: 211

$$\text{ĐK } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \\ y \geq 0 \\ z > 0 \end{cases}$$

$$\log_3(2x^2 + y^2) = \log_7(x^3 + 2y^3) = \log z = t \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 3^t & (1) \\ x^3 + 2y^3 = 7^t & (2) \\ z = 10^t & (3) \end{cases}$$

Ta có

$$+ \text{ Nếu } y = 0 \text{ (2)} \Rightarrow x = 7^{\frac{t}{3}} \text{ thay vào (1) ta được } 2 \cdot 7^{\frac{2t}{3}} = 3^t \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{\sqrt[3]{49}}} 2 \text{ do đó } z = 10^{\log_{\frac{3}{\sqrt[3]{49}}} 2}.$$

+ Nếu $y \neq 0$

$$\begin{cases} (2x^2 + y^2)^3 = 27^t \\ (x^3 + 2y^3)^2 = 49^t \end{cases} \Rightarrow \frac{(x^3 + 2y^3)^2}{(2x^2 + y^2)^3} = \left(\frac{49}{27}\right)^t \Leftrightarrow \frac{\left(\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 2\right)^2}{\left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1\right)^3} = \left(\frac{49}{27}\right)^t, (*)$$

Từ (1) & (2) suy ra

$$\frac{x}{y} = u, u \neq -\sqrt[3]{2}$$

Đặt y

$$f(u) = \frac{(u^3 + 2)^2}{(2u^2 + 1)^3} \Rightarrow f'(u) = \frac{6u(u^3 + 2)(u - 4)}{(2u^2 + 1)^4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = -\sqrt[3]{2} \\ u = 4 \end{cases}$$

Xét

Ta có bảng biến thiên

uigeli.xyz

u	$-\infty$	$-\sqrt[3]{2}$	0	4	$+\infty$		
$f'(u)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(u)$	$\frac{1}{8}$			4			$\frac{1}{8}$
						$\frac{4}{33}$	

Nhận xét với mỗi giá trị u tương ứng với duy nhất 1 cặp (x, y) thỏa mãn bài toán do đó

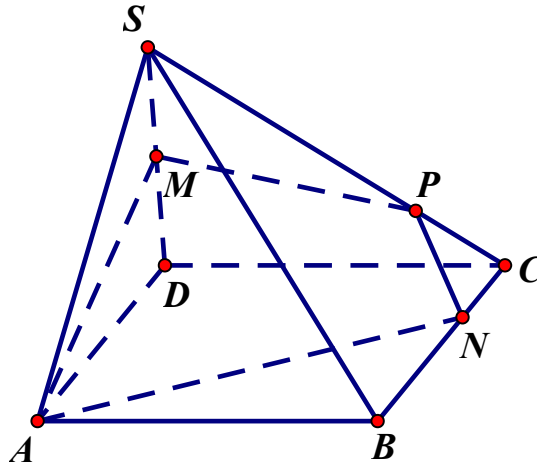
Yêu cầu bài toán tương đương $\frac{4}{33} \leq \left(\frac{49}{27}\right)^t < \frac{1}{8} \Leftrightarrow 10^{\frac{\log_{49} \left(\frac{4}{33}\right)}{27}} \leq z < 10^{\frac{\log_{49} \left(\frac{1}{8}\right)}{27}}$.

Vì z là số nguyên nên có 211 giá trị thỏa mãn.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành, gọi M và N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MS} = \vec{0}$, $\overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P . Đặt $t = \frac{SP}{SC}$, tính giá trị của biểu thức $t^2 + \frac{71}{16}$?

Lời giải

Trả lời: 5



Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{y}$, $\overrightarrow{AS} = \vec{z}$ và $\overrightarrow{SP} = k\overrightarrow{SC}$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AS}) = \frac{1}{2}\vec{y} + \frac{1}{2}\vec{z}$.

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \vec{x} + \frac{2}{3}\vec{y}$.

$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{AS} + k\overrightarrow{SC} \\ &= \overrightarrow{AS} + k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS}) \\ &= \overrightarrow{AS} + k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AS}) \\ &= k\vec{x} + k\vec{y} + (1-k)\vec{z} \end{aligned}$

Vì 3 véc tơ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}$ đồng phẳng nên $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AM} + n\overrightarrow{AN}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} k\vec{x} + k\vec{y} + (1-k)\vec{z} &= m\left(\frac{1}{2}\vec{y} + \frac{1}{2}\vec{z}\right) + n\left(\vec{x} + \frac{2}{3}\vec{y}\right) \\ &= n\vec{x} + \left(\frac{m}{2} + \frac{2n}{3}\right)\vec{y} + \frac{m}{2}\vec{z} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} n = k \\ \frac{m}{2} + \frac{2n}{3} = k \\ \frac{m}{2} = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = k \\ 1 - k + \frac{2k}{3} = k \\ \frac{m}{2} = 1 - k \end{cases}, \text{ từ phương trình } 1 - k + \frac{2k}{3} = k \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}.$$

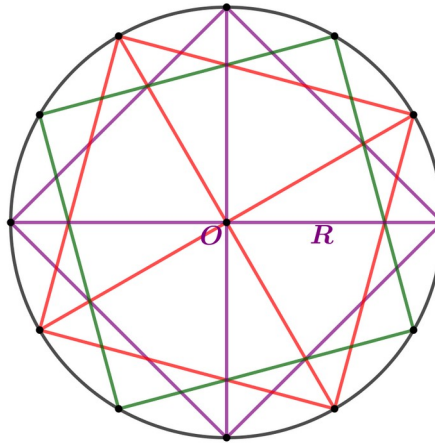
$$\text{Suy ra } t = \frac{SP}{SC} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy } t^2 + \frac{71}{16} = 5.$$

Câu 34: Chọn ngẫu nhiên 2 đỉnh của một hình đa giác đều 12 cạnh nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Tính xác suất để khoảng cách giữa hai đỉnh đó bằng $R\sqrt{2}$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,18



Chọn ngẫu nhiên 2 đỉnh trong 12 đỉnh, ta có $C_{12}^2 = 66$ cách. Suy ra $n(\Omega) = 66$.

Gọi A là biến cố “khoảng cách giữa 2 đỉnh đó bằng $R\sqrt{2}$ ”.

Nhận xét: các cạnh của hình vuông được tạo từ 4 đỉnh trong 12 đỉnh có độ dài bằng $R\sqrt{2}$.

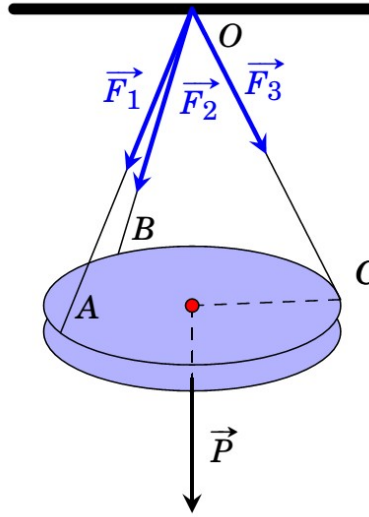
Số hình vuông được lập thành từ 4 đỉnh trong 12 đỉnh là $\frac{12}{4} = 3$ hình vuông.

Suy ra $n(A) = 4 \cdot 3 = 12$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{12}{66} \approx 0,18$$

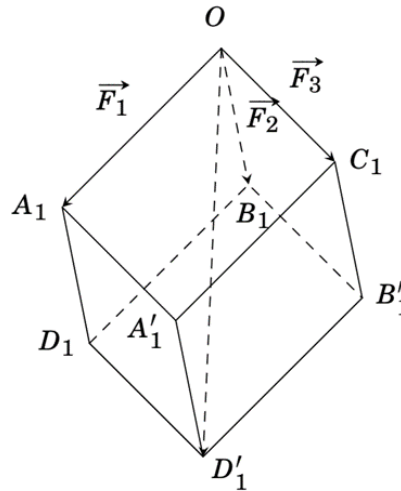
Vậy xác suất của biến cố A là

Câu 35: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15 \text{ (N)}$. Trọng lượng của chiếc đèn tròn đó xấp xỉ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Trả lời: 26



Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\vec{OA_1} = \vec{F_1}, \vec{OB_1} = \vec{F_2}, \vec{OC_1} = \vec{F_3}$. Lấy các điểm D_1, A'_1, B'_1, D'_1 sao cho $OA_1D_1B_1C_1A'_1D'_1B'_1$ là hình hộp (như hình bên). Khi đó, áp dụng quy tắc hình hộp ta có

$$\vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1} = \vec{OD'_1}.$$

Mặt khác, do các lực căng $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ đôi một vuông góc và $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = |\vec{F_3}| = 15 \text{ (N)}$ nên hình hộp $OA_1D_1B_1C_1A'_1D'_1B'_1$ có ba cạnh $\vec{OA_1}, \vec{OB_1}, \vec{OC_1}$ đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế hình hộp đó

là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 15. Suy ra độ dài đường chéo OD_1' của hình lập phương đó bằng $15\sqrt{3}$ (N).

Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{P}$ ở đó $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn.

Suy ra trọng lượng của chiếc đèn là $|\vec{P}| = |\vec{OD}_1'| = 15\sqrt{3} \approx 26$

ĐỀ 5

ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI

MÔN: TOÁN 12

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.A	4.A	5.D	6.A	7.C	8.C
9.B	10.A	11.B	12.B	13.C	14.B	15.B	16.C
17.A	18.B	19.B	20.C	21.B	22.C	23.C	24.D

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

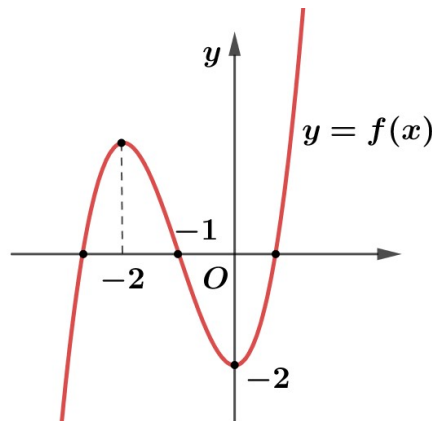
CÂU 1	CÂU 2	CÂU 3	CÂU 4	CÂU 5
a) Đúng	a) Sai	a) Đúng	a) Đúng	a) Sai
b) Đúng	b) Đúng	b) Sai	b) Sai	b) Đúng
c) Sai	c) Sai	c) Sai	c) Sai	c) Sai
d) Đúng	d) Sai	d) Đúng	d) Sai	d) Sai

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu	1	2	3	4	5	6
Chọn	4	95	15	21	0,26	1451

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN: Trong mỗi câu hỏi, hãy chọn 1 đáp án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?



- A. $(-2; 0)$ B. $(-\infty; -2)$ C. $(-2; +\infty)$ D. $(0; +\infty)$

Chọn A

Nhìn vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 2: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

- A.** $m = 1$. **B.** $m = -7$. **C.** $m = 5$. **D.** $m = -1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 4)$.

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ thì $y'(3) = 0$

$$\Leftrightarrow 9 - 6m + m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \end{cases}$$

Thử lại

+ Với $m = 1$ ta có $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 3 \Rightarrow y' = x^2 - 2x - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

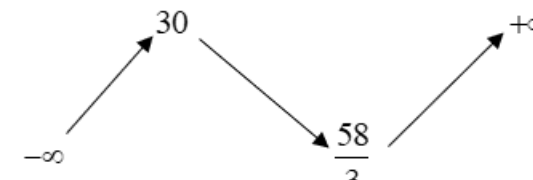
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y						

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ nên $m = 1$ không thỏa mãn

+ Với $m = 5$ ta có $y = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 21x + 3 \Rightarrow y' = x^2 - 10x + 21; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 7 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	3	7	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	 <p>The graph shows a curve starting from $-\infty$ at $x=-\infty$, increasing to a local maximum at $(3, 30)$, decreasing to a local minimum at $(7, \frac{58}{3})$, and then increasing towards $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$.</p>				

Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$ nên $m = 5$ thỏa mãn

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

Câu 3: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - mx - 3m}}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

- A. $\left(0; \frac{1}{2}\right]$ B. $(0; +\infty)$ C. $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$ D. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2 - mx - 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - mx - 3m > 0 \end{cases}$

Ta có $\sqrt{x^2 - mx - 3m} = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx - 3m = 0 \quad (1) \Leftrightarrow x^2 = m(x+3) \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+3} = m$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng -1

Đặt $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$ với $x \in [-1; +\infty)$. Ta có $f'(x) = \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2}$

Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \notin [-1; +\infty) \end{cases}$

Bảng biến thiên

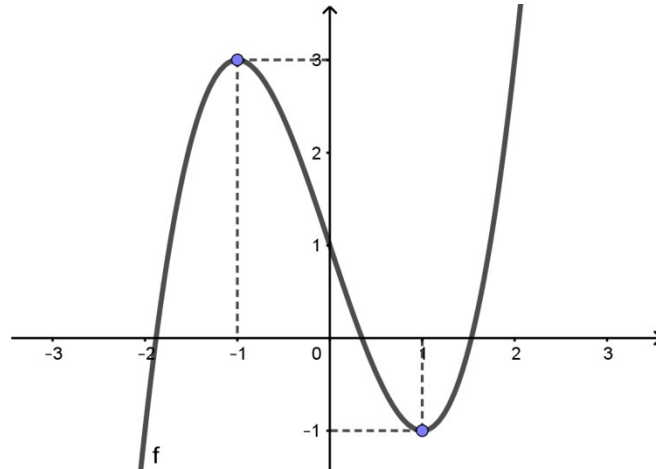
x	-1	0	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$\frac{1}{2}$	0	$+\infty$

The graph shows the function $y = \frac{x^2}{x+3}$ starting at $(-1, \frac{1}{2})$, decreasing to a local minimum at $(0, 0)$, and then increasing towards $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$.

Từ bảng biến thiên, giá trị m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1}{2}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu số nguyên

m để phương trình $f(\sin x - \cos x) = \frac{m}{4}$ có đúng 8 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0; 4\pi]$



A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 13.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u = \sin x - \cos x$ ta có $u' = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$u' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{4}$	4π
u	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1

Đồ thị hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có tọa độ hai điểm cực trị là $(1; -1); (-1; 3)$ nên $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

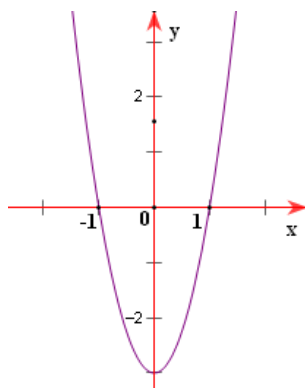
u	$-\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$
$f(u)$	$1 + \sqrt{2}$	3	-1	$1 - \sqrt{2}$

Từ hai BBT ta có phương trình $f(\sin x - \cos x) = \frac{m}{4}$ có đúng 8 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0; 4\pi]$ khi và chỉ khi phương trình $f(u) = \frac{m}{4}$ có 1 nghiệm u thỏa mãn $-1 < u < 1 - \sqrt{2}$ hoặc $1 + \sqrt{2} < u < 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \sqrt{2} < \frac{m}{4} < 3 \\ -1 < \frac{m}{4} < 1 - \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(1 + \sqrt{2}) < m < 12 \\ -4 < m < -4(1 - \sqrt{2}) \end{cases}$$

$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 10; 11\}$, có 7 giá trị nguyên của m .

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới và $f(1) = -5; f(3) = 15$.



Xét hàm số $g(x) = |f(x) + m|$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của tập S có giá trị bằng

- A. 10. B. -8. C. 8. D. -10.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f(x) + m$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$.

Ta có:
$$h'(x) = f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Khi đó $h(1) = m - 5$; $h(3) = m + 15$.

Để hàm số $y = |h(x)|$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1; 3]$ bằng 3 thì đồ thị hàm số $y = h(x)$ phải nằm hoàn toàn phía dưới hoặc phía trên trục hoành (tức không cắt trục hoành) trên $[1; 3]$.

Trường hợp 1: $m + 15 < 0 \Leftrightarrow m < -15$ thì $\min_{[1;3]} |f(x) + m| = |m + 15| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -18 & (tm) \\ m = -12 & (l) \end{cases}$

Trường hợp 2: $m - 5 > 0 \Leftrightarrow m > 5$ thì $\min_{[1;3]} |f(x) + m| = m - 5 = 3 \Leftrightarrow m = 8 \quad (tm)$.

Vậy $S = \{-18; 8\}$. Do đó chọn phương án **D**.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; 3)$, $\vec{b} = (0; -2; 1)$. Côsin của góc giữa hai vectơ đã cho bằng

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{70}}$

B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{\sqrt{70}}$

C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

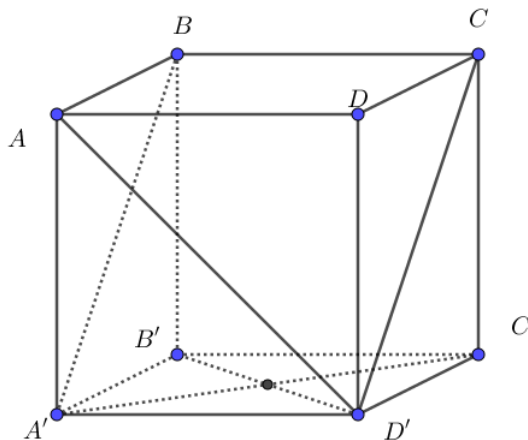
D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 0 - 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{70}}$

Câu 7: Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{BA'}$.



A. $\sqrt{6}a$

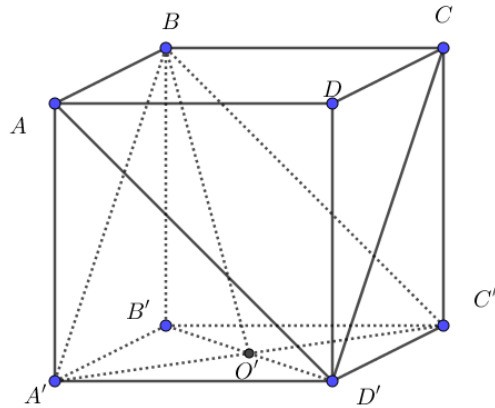
B. $\sqrt{5}a$

C. $2\sqrt{3}a$

D. $3\sqrt{2}a$

Lời giải

Chọn C



Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$.

Ta có $ABC'D'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{BC'}$, do đó $\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{BC'} = 2\overrightarrow{BO'}$.

Tam giác $BA'C'$ là tam giác đều cạnh $2a$ nên $BO' = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2a = \sqrt{3}a$.

Từ đó độ dài của vectơ $\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{BA'}$ bằng $2\sqrt{3}a$.

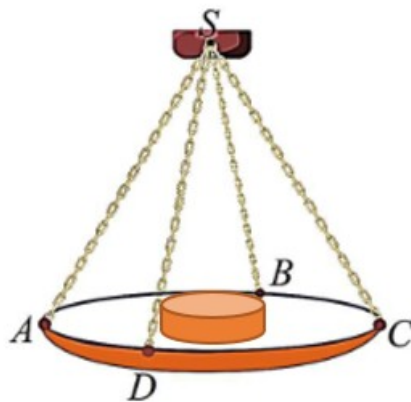
Câu 8: Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng m kg được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\angle ASC = 90^\circ$. Biết độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích là $5\sqrt{2}N$. Lấy $g = 10m/s^2$, khi đó giá trị của m bằng bao nhiêu?

A. 3.

B. 4.

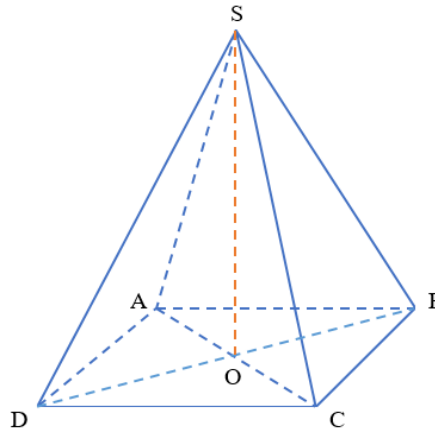
C. 2.

D. 5.



Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = -4\overrightarrow{OS} = 4\overrightarrow{SO} \Rightarrow |\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}| = |4\overrightarrow{SO}| = 4SO$$

Trọng lượng của vật nặng là $P = mg = m.10 = 10m(N)$.

$$\text{Suy ra } 4|\overrightarrow{SO}| = P = 10m(N) \Rightarrow SO = \frac{5}{2}m$$

Lại có tam giác ASC vuông cân tại S nên

$$SO = SA \cdot \sin \angle SAC \Rightarrow SA = \frac{SO}{\sin \angle SAC} = \frac{\frac{5}{2}m}{\sin 45^\circ} = \frac{5\sqrt{2}m}{2}$$

$$\text{Mà } SA = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{2}m}{2} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy $m = 2$.

Câu 9: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về cân nặng và số người như bảng sau.

Cân nặng	[35;42)	[42;49)	[49;56)	[56;63)	[63;70)
Số người	14	3	1	35	31

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là

- A.** 68,8 **B.** 60,8 **C.** 62,8 **D.** 57,8

Lời giải

Chọn B

Cỡ mẫu là $n = 84$.

$$u_4 = 56$$

Nhóm chứa trung vị là nhóm thứ 4,

$$M_e = u_4 + \frac{\frac{n}{2} - (n_1 + n_2 + n_3)}{n_4} (u_5 - u_4) = 60,8$$

Áp dụng công thức tìm trung vị:

Câu 10: Điểm kiểm tra cuối học kỳ môn Toán của hai tổ học sinh lớp 10A như sau:

Tổ 1: 8 6 6 7 3 7 5 9 6

Tổ 2: 4 10 7 3 8 6 4 5 2 6

So sánh khoảng tứ phân vị của tổ 1 (Δ_Q) và khoảng tứ phân vị của tổ 2 (Δ'_Q).

A. $\Delta_Q < \Delta'_Q$. **B.** $\Delta_Q > \Delta'_Q$. **C.** $\Delta_Q = \Delta'_Q$. **D.** Không so sánh được.

Lời giải

Chọn A

Trước hết, ta sẽ sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm như sau:

Tổ 1: 3 5 6 6 6 7 7 8 9

Tổ 2: 2 3 4 4 5 6 6 7 8 10

+) Xét mẫu số liệu về điểm kiểm tra cuối học kỳ môn Toán của tổ 1:

Ta có: $Q_2 = 6$; $Q_1 = \frac{5+6}{2} = 5,5$; $Q_3 = \frac{7+8}{2} = 7,5$.

Khoảng tứ phân vị: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 2$.

+) Xét mẫu số liệu về điểm kiểm tra cuối học kỳ môn Toán của tổ 2:

Ta có: $Q_2 = \frac{5+6}{2} = 5,5$; $Q_1 = \frac{3+4}{2} = 3,5$; $Q_3 = \frac{7+8}{2} = 7,5$.

Khoảng tứ phân vị: $\Delta'_Q = Q_3 - Q_1 = 4$.

Vậy $\Delta_Q < \Delta'_Q$.

Câu 11: Rút gọn $M = \sin(x - y)\cos y + \cos(x - y)\sin y$.

A. $M = \cos x$. **B.** $M = \sin x$.

C. $M = \sin x \cos 2y$.

D. $M = \cos x \cos 2y$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, ta được

$$M = \sin(x - y)\cos y + \cos(x - y)\sin y = \sin[(x - y) + y] = \sin x.$$

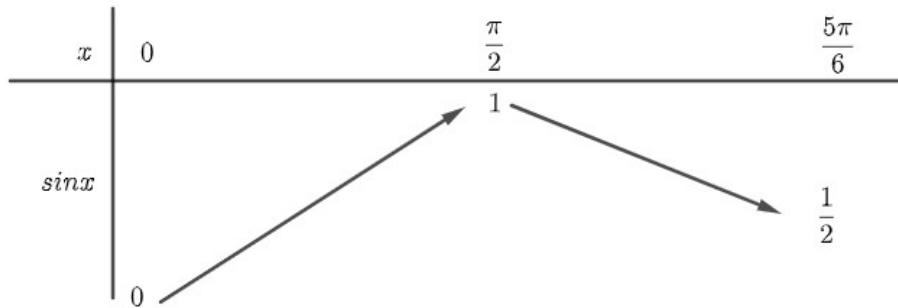
Câu 12: Tập giá trị của tham số m để phương trình $\sin x + 2m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(0; \frac{5\pi}{6}\right)$ là $m \in (a; b)$. Khi đó $a - b$ bằng?

- A. 4. B. $\frac{1}{4}$. C. -4. D. $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\sin x + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 - 2m$. Ta có bảng biến thiên như sau:



Để phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(0; \frac{5\pi}{6}\right)$ thì:

$$\frac{1}{2} < 1 - 2m < 1 \Leftrightarrow 1 < 2 - 4m < 2 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{4} \Leftrightarrow m \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy $a - b = -\frac{1}{4}$.

Câu 13: Cho các số dương a, b, c và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $\log_a b + \log_a c = \log_a (b + c)$. B. $\log_a b + \log_a c = \log_a |b - c|$.
 C. $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$. D. $\log_a b + \log_a c = \log_a (b - c)$.

Lời giải

Chọn C

Theo tính chất logarit ta có: $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$.

$$4^{x-x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Câu 14: Tập nghiệm của phương trình là:

- A. $\left\{0; \frac{2}{3}\right\}$. B. $\left\{0; \frac{3}{2}\right\}$. C. $\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$. D. $\{0; 2\}$.

Lời giải

Chọn B

$$4^{x-x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \Leftrightarrow 2^{2x-2x^2} = 2^{-x} \Leftrightarrow 2x-2x^2 = -x \Leftrightarrow 2x^2-3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Ta có

Câu 15: Cho cấp số cộng (u_n) : 1; 4; 7; 10. Số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng là
A. $u_n = 3n + 1$ **B.** $u_n = 3n - 2$ **C.** $u_n = n + 3$ **D.** $u_n = n - 3$

Chọn B

Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 1$ công sai $d = 4 - 1 = 3$.

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) là:

$$u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow u_n = 1 + (n-1).3 \Leftrightarrow u_n = 3n - 2$$

Câu 16: Cho dãy số (u_n) xác định $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Khi đó u_{2018} bằng
A. 2018. **B.** 10^{2018} . **C.** $10^{2018} + 2018$. **D.** 2018^{2018} .

Lời giải

Chọn C

Ta thấy $1 - 9n$ là đa thức bậc nhất. Do đó ta cần có sự phân tích

$$u_{n+1} + \underbrace{a(n+1) + b}_{\text{bậc nhất theo } n+1} = 10 \left[u_n + \underbrace{\left(\frac{an+b}{\text{bậc nhất theo } n} \right)} \right].$$

Đồng nhất với giả thiết, ta tìm được $a = -1$, $b = 0$. Khi đó

$$u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n \Leftrightarrow u_{n+1} - (n+1) = 10(u_n - n).$$

Đặt $v_n = u_n - n \longrightarrow \begin{cases} v_1 = 10 \\ v_{n+1} = 10v_n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \longrightarrow (v_n)$ là một CSN có $\begin{cases} v_1 = 10 \\ q = 10 \end{cases}$ nên có số hạng tổng quát $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = 10^n$, suy ra $u_n = 10^n + n$. Vậy $u_{2018} = 10^{2018} + 2018$.

Câu 17: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow m} \frac{x^2 - m^2}{x - m}$ bằng

A. $2m$. **B.** $+\infty$. **C.** m . **D.** 0 .

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow m} \frac{x^2 - m^2}{x - m} = \lim_{x \rightarrow m} \frac{(x-m)(x+m)}{x-m} = \lim_{x \rightarrow m} (x+m) = 2m$$

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m^2 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ liên tục tại}$$

Câu 18: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên để hàm số $x = 1$. Số phần tử của S là:

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$f(1) = m^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x = 1 \text{ khi } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{1\}.$$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy,

biết $AB = 4a, SB = 6a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V . Tỷ số $\frac{a^3}{3V}$ là

- A. $\frac{\sqrt{5}}{80}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{40}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{20}$. D. $\frac{3\sqrt{5}}{80}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

+ $\triangle ABC$ vuông cân tại $C, AB = 4a$ suy ra

$$AC = BC = 2a\sqrt{2}.$$

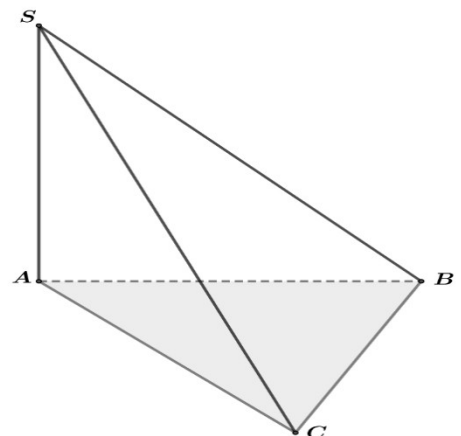
$$\text{Do đó: } S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 4a^2.$$

+ $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB \Rightarrow \triangle SAB$ vuông tại A

$$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{(6a)^2 - (4a)^2} = 2a\sqrt{5}.$$

+ Khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} 4a^2 \cdot 2a\sqrt{5} = \frac{8a^3\sqrt{5}}{3}$$



$$\frac{a^3}{3V} = \frac{a^3}{3.8a^3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{40}.$$

Vậy tỷ số:

3

Câu 20: Người ta dự định đào một hầm rượu có dạng hình chóp cắt đều có hai cạnh đáy là 7m và 5m. Mặt bên tạo với đáy nhỏ thành một góc nhị diện có số đo bằng 120° . Số mét khối đất cần phải di chuyển ra khỏi hầm gần bằng với kết quả nào dưới đây?

A. 60,82.

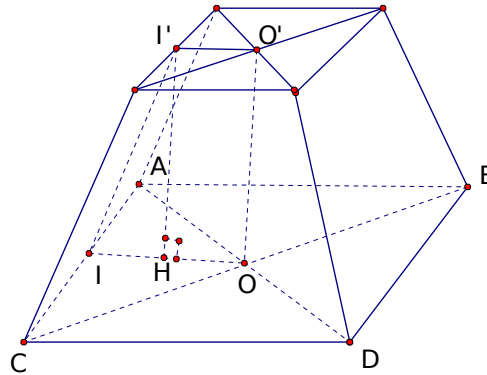
B. 64,24.

C. 62,93.

D. 58,94.

Lời giải

Chọn C



Gọi O, O', I, I' lần lượt là tâm hai đáy và trung điểm 2 cạnh đáy lớn và đáy nhỏ tương ứng.

Vẽ đường cao $I'H$ của hình thang vuông $OII'O'$. Ta có $\widehat{H'O'} = 120^\circ$, $\widehat{PIO} = 60^\circ$

$$OO' = HI = (OI - O'I'). \tan \widehat{PIO} = \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{2} \right) \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + \sqrt{S \cdot S'} + S') = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (7^2 + \sqrt{7^2 \cdot 5^2} + 5^2) = \frac{109}{3} \cdot \sqrt{3}. \text{ hay } V \approx 62,93(m^3)$$

Vậy phải chuyển ra khỏi hầm khoảng $62,93(m^3)$ đất

Câu 21: Có bao nhiêu cách chọn một học sinh từ một nhóm gồm ^{7} học sinh nam và ^{8} học sinh nữ?

A. 8.

B. 15.

C. 56.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Số cách chọn một học sinh từ một nhóm gồm ^{7} học sinh nam và ^{8} học sinh nữ là: 15 cách.

Câu 22: Từ các chữ số $^6, ^7, ^8$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ^{6} chữ số sao cho mỗi chữ số có mặt hai lần và không có chữ số nào giống nhau đứng cạnh nhau.

A. 18.

B. 76.

C. 30.

D. 36.

Lời giải

Chọn C

Cách giải 1:

□ TH1: Xếp 6677

$6x67x7$: Xếp 2 số 8 vào 2 vị trí, có 1 cách,

$x6x7x6x7x$: Xếp 2 số 8 vào 5 vị trí, có $C_5^2 = 10$ cách,

$x6x7x7x6x$: Xếp 2 số 8 vào 5 vị trí, có 4 cách.

Suy ra, trường hợp 1 có $1 + 10 + 4 = 15$ cách.

□ TH2: Xếp 7766

$7x76x6$: Xếp 2 số 8 vào 2 vị trí, có 1 cách,

$x7x6x7x6x$: Xếp 2 số 8 vào 5 vị trí, có $C_5^2 = 10$ cách,

$x7x6x6x7x$: Xếp 2 số 8 vào 5 vị trí, có 4 cách.

Suy ra, trường hợp 2 có $1 + 10 + 4 = 15$ cách.

□ Vậy số cách xếp là: $15 + 15 = 30$.

Cách giải 2:

Bước 1: Xếp 2 chữ số 6: 1 cách, tạo ra 3 khoảng trống: $x6x6x$.

Bước 2: Xếp 2 chữ số 7 và 8:

□ TH1: Xếp 2 chữ số 7 vào 2 khoảng trống liền nhau: 2 cách, tạo ra 5 khoảng trống, xếp 2 chữ số 8 vào 2 trong 5 khoảng trống: C_5^2 cách: $x7x6x7x6x$.

Suy ra, trường hợp 1 có $2 \cdot C_5^2 = 20$ cách.

□ TH2: Xếp 2 chữ số 7 vào 2 khoảng trống đầu và cuối đối với số 66: $x7x6x6x7x$, với 2 chữ số 8 còn lại, 1 chữ số giữa 2 số 6, 1 chữ số còn lại có 4 cách.

Suy ra, trường hợp 2 có 4 cách.

□ TH3: Xếp 2 chữ số 7 vào đầu hoặc cuối so với số 66: $x7x7x6x6x$, có 2 cách; 2 số 8 còn lại chỉ có 1 cách xếp: 1 vào giữa hai số 6, 1 vào giữa hai số 7.

Suy ra, trường hợp 3 có 2 cách.

□ TH4: Xếp 2 chữ số 7 vào giữa 2 chữ số 6, với 2 chữ số 8 còn lại, 1 chữ số xếp vào giữa 2 chữ số 7, 1 chữ số còn lại có 4 cách xếp.

Suy ra, trường hợp 4 có 4 cách.

□ Vậy số cách xếp là: $20 + 4 + 2 + 4 = 30$.

Câu 23: Cho tập $H = \{n \in \mathbb{N}^* | n \leq 100\}$. Chọn ngẫu nhiên ba phần tử thuộc tập H . Tính xác suất để chọn được ba phần tử lập thành một cấp số cộng.

A. $\frac{1}{132}$.

B. $\frac{2}{275}$.

C. $\frac{1}{66}$.

D. $\frac{4}{275}$.

Lời giải

Chọn C

Có $H = \{1; 2; \dots; 100\}$, tập H có 100 phần tử, trong đó có 50 phần tử là số chẵn và 50 phần tử là số lẻ.

Gọi $H_1 = \{1, 3, 5, \dots, 99\}$, $H_2 = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$.

Lấy 3 phần tử từ tập H , có $|\Omega| = C_{100}^3 = 161700$.

Gọi a, b, c là 3 số theo tự lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow \frac{a+c}{2} = b$

Do $a, b, c \in H$ nên a, c cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

+ Trường hợp 1: a, c cùng chẵn. Chọn 2 phần tử thuộc H_2 có: C_{50}^2 (cách). Có duy nhất một cách

chọn $b = \frac{a+c}{2}$.

+ Trường hợp 2: a, c cùng lẻ. Chọn 2 phần tử thuộc H_1 có: C_{50}^2 (cách). Có duy nhất một cách

chọn $b = \frac{a+c}{2}$.

Qua 2 trường hợp có $|\Omega_A| = 1.C_{50}^2 + 1.C_{50}^2 = 2C_{50}^2 = 2450$.

Suy ra xác suất thỏa yêu cầu $p = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{1}{66}$.

Câu 24: Nam bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 4 500 000 đồng một tháng. Cứ sau 3 năm thì Nam được tăng lương 33%. Hỏi sau tròn 25 năm đi làm tổng tiền lương Nam nhận được là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 5 901 519 000

B. 4 315 428 000

C. 3 651 575 000

D. 4 844 125 000

Lời giải

Chọn D

Mức lương 3 năm đầu: 45.10^5	Tổng lương 3 năm đầu: $36.45.10^5$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $45.10^5.(1,33)$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36.45.10^5.(1,33)$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $45.10^5.(1,33)^2$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36.45.10^5.(1,33)^2$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $45.10^5.(1,33)^3$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36.45.10^5.(1,33)^3$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $45.10^5.(1,33)^4$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36.45.10^5.(1,33)^4$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $45.10^5.(1,33)^5$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36.45.10^5.(1,33)^5$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $45.10^5.(1,33)^6$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36.45.10^5.(1,33)^6$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $45.10^5.(1,33)^7$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36.45.10^5.(1,33)^7$

	$36.45.10^5.(1,33)^7$
Mức lương 1 năm tiếp theo: $45.10^5.(1,33)^8$	Tổng lương 1 năm tiếp theo: $12.45.10^5.(1,33)^8$

Tổng lương sau tròn 25 năm là

$$S = 36.45.10^5. \left[1 + 1,33 + (1,33)^2 + \dots + (1,33)^7 \right] + 12.(1,33)^8$$

$$= 36.45.10^5. \frac{1 - (1,33)^8}{1 - 1,33} + 12.45.10^5.(1,33)^8 = 4\,844\,124\,782.$$

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI: Trong mỗi ý ở mỗi câu, hãy chọn đúng hay sai

Câu 25: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(2;3;-1), B(-1;0;2)$ và $C(0;-2;1)$

- a) Tam giác ABC vuông tại B .
- b) Toạ độ điểm D để $ABCD$ là hình chữ nhật là $D(3;1;-2)$.
- c) Có đúng một điểm M thuộc trục Oy để $AM = \sqrt{30}$.
- d) Có đúng một điểm E thuộc trục Oz để $\cos \angle EAC = \frac{2\sqrt{33}}{33}$.

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng

a) $\overrightarrow{AB} = (-3; -3; 3); \overrightarrow{BC} = (1; -2; -1)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -3.1 + (-3).(-2) + 3.(-1) = 0$. Suy ra $AB \perp BC$, do đó tam giác ABC vuông tại B .

Chọn ĐÚNG.

b) Tam giác ABC vuông tại B suy ra để $ABCD$ là hình chữ nhật $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Giả sử $D(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (x - 2; y - 3; z + 1), \overrightarrow{BC} = (1; -2; -1)$

Suy ra
$$\begin{cases} x - 2 = 1 \\ y - 3 = -2 \\ x + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow D(3; 1; -2)$$

Chọn ĐÚNG.

c) M thuộc trục Oy suy ra $M(0; y; 0)$

$AM = \sqrt{(0 - 2)^2 + (y - 3)^2 + (0 + 1)^2} = \sqrt{y^2 - 6y + 14}$

$$AM = \sqrt{30} \Leftrightarrow \sqrt{y^2 - 6y + 14} = \sqrt{30} \Leftrightarrow y^2 - 6y - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Suy ra có hai điểm $M(0; 8; 0), M(0; -2; 0)$.

Chọn SAI.

d) E thuộc trục Oz suy ra $E(0; 0; z)$

$$\overrightarrow{AC} = (-2; -5; 2), \overrightarrow{AE} = (-2; -3; z + 1)$$

$$\angle EAC = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE}) \Rightarrow \cos \angle EAC = \cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE}) = \frac{2z + 21}{\sqrt{33} \cdot \sqrt{z^2 + 2z + 14}} = \frac{2z + 21}{\sqrt{33(z^2 + 2z + 14)}} = \frac{2\sqrt{33}}{33}$$

$$\Leftrightarrow 2z + 21 = 2\sqrt{z^2 + 2z + 14} \Leftrightarrow 4z^2 + 84z + 441 = 4(z^2 + 2z + 14) \Leftrightarrow 76z = -385 \Leftrightarrow z = -\frac{385}{76}$$

$$\text{Vậy } E\left(0; 0; -\frac{385}{76}\right).$$

Chọn ĐÚNG.

Câu 26: Thời gian sử dụng điện thoại trong một ngày của 30 sinh viên được tổng hợp lại ở mẫu số ghép nhóm trong bảng sau (đơn vị: phút).

Thời gian (phút)	[0; 60)	[60; 120)	[120; 180)	[180; 240)	[240; 300)
Số sinh viên	2	7	7	10	4

Với các kết quả tính toán được làm tròn đến hàng phần mười thì:

- a)** Số trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là 150.
- b)** Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\Delta Q = 111,9$.
- c)** Một của mẫu số liệu là 210,5.
- d)** Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 4724.

Lời giải

Chọn a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Sai

a) Cỡ mẫu bằng 30

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{30}$ là mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, x_2 \in [0; 60); x_3, \dots, x_9 \in [60; 120); x_{10}, \dots, x_{16} \in [120; 180);$

$x_{17}, \dots, x_{26} \in [180; 240); x_{27}, \dots, x_{30} \in [240; 300)$

Số trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\frac{1}{2}(x_{15} + x_{16})$. Do x_{15} và x_{16} thuộc nhóm $[120; 180)$ nên trung của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$Me = 120 + \frac{\frac{30}{2} - (2 + 7)}{7} \cdot (180 - 120) = \frac{1200}{7} \approx 171,43.$$

Chọn SAI.

b) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu là $x_8 \in [60; 120)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép

$$\text{nhóm là } Q_1 = 60 + \frac{\frac{30}{4} - 2}{7} \cdot (120 - 60) = \frac{750}{7} \approx 107,14$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là $x_{23} \in [180; 240)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu

$$\text{ghép nhóm là } Q_3 = 180 + \frac{\frac{3 \cdot 30}{4} - (2 + 7 + 7)}{10} \cdot (240 - 180) = 219$$

$$\Rightarrow \Delta Q = Q_3 - Q_1 \approx 219 - 107,14 = 111,86$$

Chọn ĐÚNG.

c) Nhóm chứa một là nhóm thứ tư $[180; 240)$, do đó một của mẫu số liệu ghép nhóm

$$\text{là } M_0 = 180 + \frac{10 - 7}{10 - 7 + 10 - 4} (240 - 180) = 200$$

Chọn SAI.

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 30 + 7 \cdot 90 + 7 \cdot 150 + 10 \cdot 210 + 4 \cdot 270}{30} = 164$$

d)

Phương sai của mẫu số liệu là

$$s^2 = \frac{1}{30} \left[2 \cdot (30 - 164)^2 + 7 \cdot (90 - 164)^2 + 7 \cdot (150 - 164)^2 + 10 \cdot (210 - 164)^2 + 4 \cdot (270 - 164)^2 \right] = 4724$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là $\sqrt{s^2} = \sqrt{4724} \approx 68,7$.

Chọn SAI.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(t) = 92 - 20 \ln(t + 1)$.

a) Tập xác định của hàm số là $D = (-1; +\infty)$.

b) Tập nghiệm của bất phương trình $f(t) \geq 72$ là $S = (-\infty; e - 1]$.

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

d) Một nghiên cứu chỉ ra rằng sau khi tham gia một khoá học, phần trăm kiến thức sinh viên còn nhớ sau t tháng kết thúc khoá học được xác định bởi: $f(t) = 92 - 20 \ln(t + 1)$, trong đó $f(t)$

được tính bằng % và $0 \leq t \leq 24$. Phần trăm kiến thức sinh viên còn nhớ chỉ 50% là $t = 7,2$ giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng

a) Hàm số $y = f(t) = 92 - 20 \ln(t+1)$ xác định khi $t+1 > 0 \Leftrightarrow t > -1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-1; +\infty)$.

Chọn ĐÚNG.

b) $f(t) \geq 72 \Leftrightarrow 92 - 20 \ln(t+1) \geq 72 \Leftrightarrow \ln(t+1) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t > -1 \\ t \leq e-1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < t \leq e-1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-1; e-1]$.

Chọn SAI.

c) $y = f(t) = 92 - 20 \ln(t+1) \Rightarrow f'(t) = \frac{-20}{t+1} < 0, \forall t \in (-1; +\infty)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Chọn SAI.

d) Phần trăm kiến thức sinh viên còn nhớ chỉ 50%

$$\Rightarrow 92 - 20 \ln(t+1) = 50$$

$$\Leftrightarrow \ln(t+1) = \frac{21}{10} \Leftrightarrow t \approx 7,2 \text{ (giờ)}.$$

Chọn ĐÚNG.

Câu 28: Cho hình chóp đều có cạnh đáy bằng a và khoảng cách từ đỉnh đến đáy bằng h .

a) Khi $h = 3a$ thì chiều cao của hình chóp là $3a$.

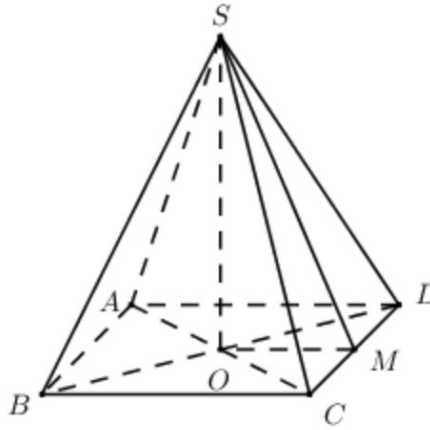
b) Khi $h = 3a$ thì thể tích khối chóp đều trên là $\frac{a^3}{3}$.

c) Khi $h = 3a$ số đo (làm tròn đến hàng đơn vị của độ) góc giữa cạnh bên và mặt đáy là 56° .

d) Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao 98 m và cạnh đáy 180 m. Số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy lớn hơn 50° .

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Sai



Gọi hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ như hình vẽ, $O = AC \cap BD$.

a) Vì khoảng cách từ đỉnh đến đáy bằng $3a$ nên chiều cao của hình chóp là $h = 3a$.

Chọn ĐÚNG.

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot h = \frac{1}{3} a^2 \cdot 3a = a^3$$

b) Thể tích khối chóp đều trên là

Chọn SAI.

c) Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ nên góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy bằng góc $\widehat{SAO}$.

$$\tan \widehat{SAO} = \frac{SO}{AO} = \frac{3a}{a \frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SAO} \approx 77^\circ$$

Chọn SAI.

d) Ta có $a = 180, h = 98$.

Khi đó góc nhị diện tạo bởi mặt bên (SCD) và mặt đáy $(ABCD)$ là $[S, CD, O]$.

Dựng $OM \perp CD, M \in CD$ suy ra $SM \perp CD$.

Suy ra $\widehat{SMO}$ là góc phẳng nhị diện $[S, CD, O]$.

$$\text{Xét tam giác } SMO \text{ ta có } OM = \frac{BC}{2} = 90 \quad (m)$$

$$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{98}{90} = \frac{49}{45} \Rightarrow \widehat{SMO} \approx 47,4^\circ$$

Vậy số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy $\approx 47,4^\circ$.

Chọn SAI.

Câu 29: Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa ^{3} cầu trắng, ^{7} quả cầu đỏ và ^{15} quả cầu xanh. Hộp thứ hai chứa ^{10} cầu trắng, ^{6} quả cầu đỏ và ^{9} quả cầu xanh. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên ra một quả cầu.

a) Số cách lấy được 1 quả cầu từ hộp thứ nhất là 50.

b) A là biến cố “Quả cầu được lấy ra từ hộp thứ nhất là màu trắng”, $P(A) = \frac{3}{25}$.

c) B là biến cố “Quả cầu được lấy ra từ hộp thứ hai là màu trắng”, $P(\overline{B}) = \frac{3}{10}$.

d) Xác suất để hai quả lấy ra có màu giống nhau bằng $\frac{6}{125}$.

Lời giải

Chọn a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Sai.

a) Số cách lấy được 1 quả cầu từ hộp thứ nhất là $3 + 7 + 15 = 25$.

Chọn SAI.

b) $P(A) = \frac{3}{25}$.

Chọn ĐÚNG.

c) $P(B) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \Rightarrow P(\overline{B}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

Chọn SAI.

d) Gọi A là biến cố “Quả cầu được lấy ra từ hộp thứ nhất là màu trắng”,

B là biến cố “Quả cầu được lấy ra từ hộp thứ hai là màu trắng”.

Ta có $P(A) = \frac{3}{25}$, $P(B) = \frac{2}{5}$.

Vì A và B là hai biến cố độc lập.

$$P(AB) = P(A).P(B) = \frac{3}{25} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{125}.$$

Nên xác suất để 2 quả cầu lấy ra đều màu trắng:

Tương tự, xác suất để hai quả cầu lấy ra đều là

$$\text{Màu xanh} \quad \frac{15}{25} \cdot \frac{9}{25} = \frac{27}{125}$$

$$\text{Màu đỏ} \quad \frac{7}{25} \cdot \frac{6}{25} = \frac{42}{625}.$$

$$\text{Vậy xác suất để hai quả lấy ra có màu giống nhau: } \frac{6}{125} + \frac{27}{125} + \frac{42}{625} = \frac{207}{625}.$$

Chọn SAI.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN: Trong mỗi câu, hãy viết phần trả lời ngắn không quá 4 ký tự (phải là số) và để ngoài MathType

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, với $a \neq 0$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$								$+\infty$

$\swarrow$ -4 $\nearrow$ -2 $\searrow$ -7 $\nearrow$

Số điểm cực đại của hàm số $y = g(x) = f(f(x))$ là:

Lời giải

Trả lời: 4

+ Ta có: $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x))$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

+ Các phương trình $f(x) = 1, f(x) = 3, f(x) = 4$ mỗi phương trình đều có hai nghiệm phân biệt nằm ngoài đoạn $[1; 4]$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases}$$

+ Ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{cases}; \quad f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = 3 \\ f(x) = 4 \end{cases}$$

Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y = g(x)$ có 9 cực trị.

$g(x)$ là một đa thức bậc 16 có hệ số $a > 0$ nên hàm số có đúng 4 điểm cực đại. Mặt khác ta có

Câu 31: Để xây dựng một bể chứa nước cho khu tập thể dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $512m^3$, đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 2 lần chiều rộng. Chi phí xây dựng bể (gạch, cát, xi măng, ...) là 300000 đồng/ m^2 (chi phí được tính theo diện tích xây dựng; bao gồm diện tích đáy và diện tích xung quanh của bể; coi như không tính chiều dày của đáy và thành bể). Xác định chi phí thấp nhất để xây dựng bể (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).

Lời giải

Trả lời: 95

Gọi chiều rộng và chiều dài của đáy bể lần lượt là $x(m)$ và $2x(m)$; chiều cao $h(m)$.

Diện tích của đáy bể là: $2x^2(m^2)$. Thể tích: $V = 2x^2h(m^3)$

Khi đó, chiều cao của bể là: $h = \frac{256}{x^2}(m)$.

Diện tích xung quanh của bể là: $6xh = 6x \cdot \frac{256}{x^2} = \frac{1536}{x}(m^2)$.

Để việc xây dựng bể tốn ít chi phí nhất thì tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của bể là nhỏ

nhất. Đặt tổng diện tích này là $f(x)$. Ta có: $f(x) = 2x^2 + \frac{1536}{x}$.

Ta có:

$$f'(x) = 4x - \frac{1536}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - \frac{1536}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{384}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\sqrt[3]{384}$	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	$+\infty$			$+\infty$
		$\frac{2304}{\sqrt[3]{384}}$		

Vậy chi phí thấp nhất để xây dựng bể là: $300000 \cdot \frac{2304}{\sqrt[3]{384}} \approx 95000000$ (đồng).

Câu 32: Xét tất cả các số thực không âm x và y thỏa mãn

$$2x + y \log_2(x + y + 1) = 6. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = x^2 + y^2 + 2x + 8y.$$

Lời giải

Trả lời: 15

$$\text{Ta có } 2x + y \log_2(x + y + 1) = 6 \Leftrightarrow \log_2(x + y + 1)^y = \log_2 4^{3-x}$$

$$(x + y + 1)^y = 4^{3-x} \Leftrightarrow (x + y + 1)^{x+y-x} = (3+1)^{3-x} (*)$$

Xét hàm $f(t) = (t+1)^{t-x}$ ta có $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Từ (*) ta suy ra } f(x+y) = f(3) \Leftrightarrow x+y=3 \quad (1)$$

$$\text{Xét } P = x^2 + y^2 + 2x + 8y \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+4)^2 = P+17 \quad (2).$$

Nếu $P < -17$ thì không tồn tại $(x; y)$ thỏa mãn (2).

Nếu $P = -17$, $(2) \Rightarrow (x; y) = (-1; -4)$, không thỏa mãn (1)

Nếu $P > -17$, xét trong mp (Oxy) tập hợp các điểm $M(x; y)$ thỏa mãn (2) nằm trên đường tròn tâm $I(-1; -4)$ bán kính $R = \sqrt{p+17}$, các điểm thỏa mãn (1) nằm trên đường thẳng $(\Delta): x + y = 3$, để tồn tại $(x; y)$ thì $d(I; \Delta) \leq R \Leftrightarrow \frac{8}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{p+17} \Leftrightarrow p \geq 15$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 2x + 8y$ là 15 đạt được khi $x = 3; y = 0$.

Câu 33: Bên trong một căn nhà bỏ hoang hình lập phương cạnh $5m$ có 3 chú nhện

sinh sống. Mùa đông đến, vì đói rét nên chúng đành quyết định hợp tác với nhau giăng lưới để bắt mồi. Ba chú nhện tính toán sẽ giăng một mảnh lưới hình tam giác theo cách sau: Mỗi chú nhện sẽ đứng ở mép tường bất kì (có thể mép giữa 2 bức tường, giữa tường với trần, hoặc giữa tường với nền) rồi phóng những sợi tơ làm khung đến vị trí của 2 con nhện còn lại rồi sau đó mới phóng tơ dính đan phần lưới bên trong. Chúng quy định không có bất kì 2 con nhện nào cùng nằm trên một mặt tường, nền hoặc trần nhà. Chu vi nhỏ nhất của mảnh lưới được giăng (biết các sợi tơ khung

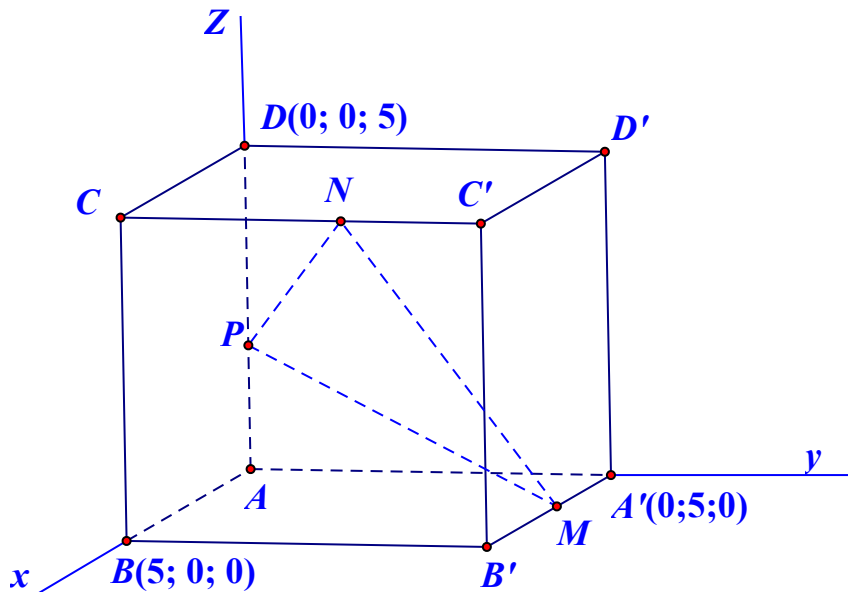
căng và không nhùn) là $\frac{m}{P} \sqrt{n}$ với $m; n; p \in \mathbb{Q}^+; \frac{m}{P}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $m + n + p$.

Lời giải

Trả lời: 21

Bài toán này ta sẽ giải quyết bằng cách ứng dụng phương pháp tọa độ trong không gian.

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Không mất tính tổng quát, và dựa vào yêu cầu về vị trí 3 con nhện ta xác định là các điểm M, N, P nằm trên các cạnh $A'B', CC', AD$ như hình vẽ.



Yêu cầu bài toán là cần tìm tọa độ của 3 điểm M, N, P để chu vi tam giác MNP nhỏ nhất.

Đặt $M(x; 5; 0), P(0; 0; z), N(5; y; 5)$. Chu vi tam giác MNP là:

$$\begin{aligned} MN + NP + PQ &= \sqrt{(x-5)^2 + (y-5)^2 + 5^2} + \sqrt{5^2 + y^2 + (z-5)^2} + \sqrt{x^2 + 5^2 + z^2} \\ &= \sqrt{(5-x)^2 + (y-5)^2 + 5^2} + \sqrt{y^2 + (z-5)^2 + 5^2} + \sqrt{z^2 + (-x)^2 + 5^2} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức vecto :

$$\begin{aligned} \Rightarrow MN + NP + PM &\geq \sqrt{(5-x+y)^2 + (y+z-10)^2 + 10^2} + \sqrt{z^2 + (-x)^2 + 5^2} \\ &\geq \sqrt{(5-x+y+z)^2 + (y-5+z-5-x)^2 + (5+5+5)^2} \\ &= \sqrt{2\left(y+z-x-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{225}{2} + (5+5+5)^2} \geq 15\sqrt{\frac{3}{2}} = 15\frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} y+z-x=\frac{5}{2} \\ \frac{5-x}{y}=\frac{y-5}{z-5}=\frac{5}{5} \\ \frac{5-x+y}{z}=\frac{y+z-10}{-x}=\frac{10}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ 2y-x=\frac{5}{2} \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{5}{2}$$

Vậy giá trị cần tìm là $\frac{15}{2}\sqrt{6} \Rightarrow m+n+p=21$

Câu 34: Cho tập $S = \{1, 2, \dots, 280\}$, chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để số đó không chia hết cho 2, 3 và 5 (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,26

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{280}^1 = 280$.

Gọi A là biến cố: “số được chọn chia hết cho ít nhất một trong các số 2, 3 và 5”.

Khi đó $\bar{A}$ là biến cố: “số được chọn không chia hết cho các số 2, 3 và 5”.

Gọi A_1 là biến cố: “số được chọn chia hết cho 2”, ta có $A_1 = \{2; 4; \dots; 280\} \Rightarrow n(A_1) = 140$.

Gọi A_2 là biến cố: “số được chọn chia hết cho 3”, ta có $A_2 = \{3; 6; \dots; 279\} \Rightarrow n(A_2) = 93$.

Gọi A_3 là biến cố: “số được chọn chia hết cho 5”, ta có $A_3 = \{5; 10; \dots; 280\} \Rightarrow n(A_3) = 56$.

$$A_1 \cap A_2 = \{6; 12; \dots; 276\} \Rightarrow n(A_1 \cap A_2) = 46$$

$$A_2 \cap A_3 = \{15; 30; \dots; 270\} \Rightarrow n(A_2 \cap A_3) = 18$$

$$A_1 \cap A_3 = \{10; 20; \dots; 280\} \Rightarrow n(A_1 \cap A_3) = 28$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{30; 60; \dots; 270\} \Rightarrow n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 9$$

Do đó theo quy tắc cộng mở rộng ta có:

$$n(A) = n(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

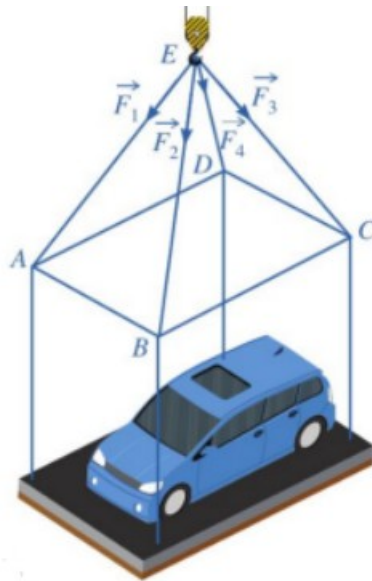
$$= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$= 140 + 93 + 56 - 46 - 28 - 18 + 9 = 206$$

Khi đó $n(\bar{A}) = 280 - 206 = 74$

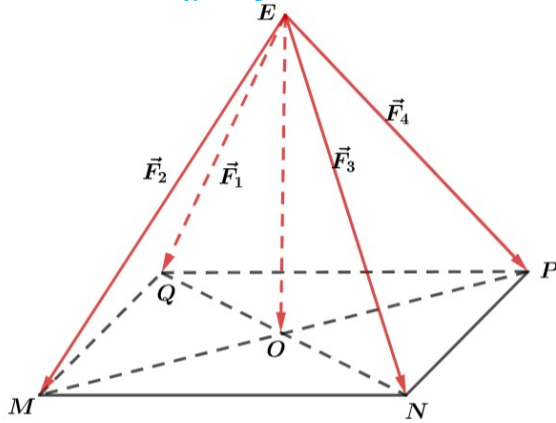
Vậy $P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{74}{280} \approx 0,26$

Câu 35: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính khối lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị) biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là 5200 N và trọng lượng của khung sắt là 3500 N . Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Lời giải

Trả lời: 1451



Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{EM} = \vec{F}_2, \overrightarrow{EN} = \vec{F}_3, \overrightarrow{EP} = \vec{F}_4, \overrightarrow{EQ} = \vec{F}_1$.

Ta có $E.MNPQ$ là hình chóp đều và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = |\vec{F}_4| = 5200 \text{ N}$ nên $EM = EN = EP = EQ = 5200$.

Xét tam giác EMO có: $EO = EM \cdot \sin \angle EMO = 5200 \cdot \sin 60^\circ = 2600\sqrt{3}$.

Theo quy tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EP} = 2\overrightarrow{EO}; \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EQ} = 2\overrightarrow{EO}$.

Do đó $\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{EQ} = 4\overrightarrow{EO}$ hay $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4| = 4|\overrightarrow{EO}| = 10400\sqrt{3}$.

Vì chiếc khung sắt chứa xe ô tô ở vị trí cân bằng nên $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{P}$ với $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên khung sắt chứa xe ô tô, do đó $P = 10400\sqrt{3} \text{ N}$.

Trọng lượng của chiếc xe ô tô là: $10400\sqrt{3} - 3500 (\text{N})$.

Khối lượng của chiếc xe ô tô là: $\frac{10400\sqrt{3} - 3500}{10} \approx 1451 (\text{kg})$.

ĐỀ 6

ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI

MÔN: TOÁN 12

PHẦN I

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	A	A	D	D	C	A	C	B	A	B	B
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
B	A	A	B	B	A	A	D	A	B	A	D

PHẦN II

CÂU 1	CÂU 2	CÂU 3	CÂU 4	CÂU 5
a) Đúng	a) Đúng	a) Đúng	a) Đúng	a) Sai
b) Sai	b) Sai	b) Sai	b) Đúng	b) Sai
c) Đúng	c) Sai	c) Đúng	c) Sai	c) Đúng

d) Sai	d) Đúng	d) Đúng	d) Sai	d) Sai
--------	---------	---------	--------	--------

PHẦN III

Câu	1	2	3	4	5	6
Trả lời	17	9	5	7,07	36	24,5

LỜI GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN: Trong mỗi câu hỏi, hãy chọn 1 đáp án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn D.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Câu 2: Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ là

A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 2$$

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = -2.$$

và

Suy ra đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là $y = 2$ và $y = -2$.

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty$$

Suy ra đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận đứng là $x = 1$ và $x = -1$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tất cả 4 đường tiệm cận.

Câu 3: Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x\sqrt{1-x^2}$. Khi đó $M + m$ bằng?
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định của hàm số đã cho là $D = [-1; 1]$.

$$y' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases},$$

$$y(-1) = 0, y(1) = 0, y\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-1}{2}, y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó } M = \frac{1}{2}, m = \frac{-1}{2}, M + m = 0$$

Câu 4: Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 - (2m+1)x + 5$ nghịch biến trên tập xác định.

$$\text{A. } -\frac{5}{4} \leq m \leq 1 \quad \text{B. } -\frac{2}{7} \leq m < 1 \quad \text{C. } -\frac{7}{2} \leq m < 1 \quad \text{D. } -\frac{2}{7} \leq m \leq 1$$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3(m-1)x^2 + 2(m-1)x - (2m+1)$.

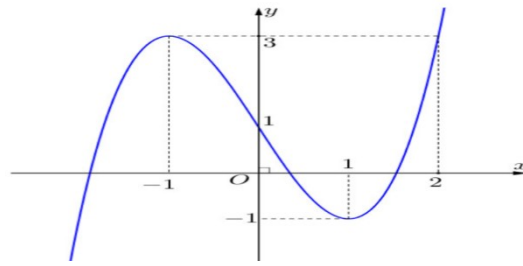
➤ Xét $m = 1$, Ta có $y' = -3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên nghịch biến trên tập xác định.

➤ Xét $m \neq 1$. Để hàm số trên nghịch biến trên tập xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m-1 < 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 + 3(m-1)(2m+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 7m^2 - 5m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{7} \leq m < 1$$

Vậy với $-\frac{2}{7} \leq m \leq 1$ thì hàm số $y = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 - (2m+1)x + 5$ nghịch biến trên tập xác định.

Câu 5: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(2f(x)+1)=3$ là

A. 9. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy:

$$f(2f(x)+1)=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(x)+1=-1 \\ 2f(x)+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=-1 \\ f(x)=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Căn cứ vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có:

+phương trình $f(x)=-1$ có hai nghiệm thực phân biệt.

+ Phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thực phân biệt.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u}=(-1;3;2)$, $\vec{v}=(-3;-1;2)$. Khi đó $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1)(-3) + 3(-1) + 2 \cdot 2 = 4$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(2;2;-2)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB . Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

A. $T=\frac{13}{2}$. **B.** $T=2$. **C.** $T=6$. **D.** $T=\frac{29}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{OA}=(1;2;3), \vec{OB}=(2;2;-2) \Rightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$.

Do đó tam giác OAB vuông tại O nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là trung điểm của AB , tâm $I\left(\frac{3}{2}; 2; \frac{1}{2}\right)$.
 Vậy $T = \frac{13}{2}$.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $3\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AD}$, $3\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$. Tính vector $\overrightarrow{MN}$ theo các vector $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$.

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MQ}$

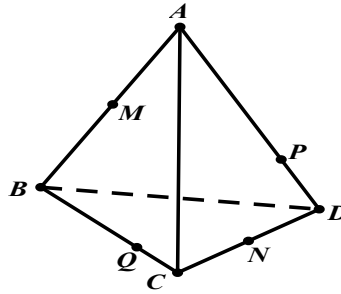
B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MQ}$

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MQ}$

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MP} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MQ}$

Lời giải

Chọn C



Ta có:

$$3\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MD} - 3\overrightarrow{MP} \quad (1)$$

$$3\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MQ} \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta có:

$$2(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) - 3(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MN} - 3(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MQ}$$

Câu 9: Thời gian xem tivi mỗi buổi tối của một số học sinh tính theo phút được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[6, 5; 9, 5)	[9, 5; 12, 5)	[12, 5; 15, 5)	[15, 5; 18, 5)	[18, 5; 21, 5)	[21, 5; 24, 5)	[24, 5; 27, 5)
Số học sinh	2	3	12	15	24	2	2

Số trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này là:

- A. 15,1 B. 18,1 C. 18,5 D. 15,5

Lời giải

Chọn B

Cỡ mẫu: $n = 2 + 3 + 12 + 15 + 24 + 2 + 2 = 60$

Nhóm chứa trung vị: $[15, 5; 18, 5)$. Suy ra: $u_m = 15,5$ và $u_{m+1} = 18,5$.

Tần số của nhóm chứa trung vị: $n_m = 15$.

$C = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 3 + 12 = 17$

$$M_e = 15,5 + \frac{\frac{60}{2} - 17}{15} \cdot (18,5 - 15,5) = 18,1$$

Vậy trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là:

Câu 10: Một lớp học có 30 học sinh, được chia thành 3 nhóm với các điểm số trung bình và phương sai của từng nhóm như sau:

* Nhóm 1: $n_1 = 10$, điểm trung bình $\overline{X}_1 = 7,0$, phương sai $S_1^2 = 1,2$.

* Nhóm 2: $n_2 = 10$, điểm trung bình $\overline{X}_2 = 6,8$, phương sai $S_2^2 = 1,0$.

* Nhóm 3: $n_3 = 10$, điểm trung bình $\overline{X}_3 = 7,2$, phương sai $S_3^2 = 1,4$.

Hãy tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm $S_{\text{ghép}}^2$ cho cả lớp (làm tròn đến hàng phần chục).

- A. $S_{\text{ghép}}^2 = 1,2$ B. $S_{\text{ghép}}^2 = 1,3$ C. $S_{\text{ghép}}^2 = 1,4$ D. $S_{\text{ghép}}^2 = 1,5$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm

$$S_{\text{ghép}}^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2 + (n_3 - 1)S_3^2}{n_1 + n_2 + n_3 - 3}$$

Tính tổng $(n_i - 1) \times S_i^2$ cho mỗi nhóm:

$$(n_1 - 1)S_1^2 = (10 - 1) \times 1,2 = 9 \times 1,2 = 10,8$$

$$(n_2 - 1)S_2^2 = (10 - 1) \times 1,0 = 9 \times 1,0 = 9,0$$

$$(n_3 - 1)S_3^2 = (10 - 1) \times 1,4 = 9 \times 1,4 = 12,6$$

Tính tổng các giá trị vừa tính được: $10,8 + 9,0 + 12,6 = 32,4$

Tính số lượng quan sát trừ đi 3: $n_1 + n_2 + n_3 - 3 = 30 - 3 = 27$

Tính phương sai ghép nhóm: $S_{\text{ghép}}^2 = \frac{32,4}{27} = 1,2$

Câu 11: Phương trình $2 \cos x - \sqrt{2} = 0$ có tất cả các nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$
- B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$
- C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$
- D. $\begin{cases} x = \frac{7\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải

Chọn B

$$2 \cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 12: Tính giá trị của biểu thức $A = \sin 3x \cdot \cos x + \cos 5x \cdot \sin x$, biết $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- A. $\frac{15}{32}$
- B. $-\frac{15}{32}$
- C. $\frac{17}{32}$
- D. $-\frac{17}{32}$

Lời giải

Chọn B

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{4}$$

$$A = \sin 3x \cdot \cos x + \cos 5x \cdot \sin x$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 4x) + \frac{1}{2}[\sin(-4x) + \sin 6x]$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 6x) = \sin 4x \cdot \cos 2x = 2 \sin 2x \cdot \cos^2 2x$$

$$= 2 \sin 2x(1 - \sin^2 2x) = -\frac{15}{32}$$

Câu 13: Cho $a = \log_2 5$, $b = \log_2 9$. Biểu diễn của $P = \log_2 \frac{40}{3}$ theo a và b là:

A. $P = 3 + a - 2b$. B. $P = 3 + a - \frac{1}{2}b$. C. $P = \frac{3a}{2b}$. D. $P = 3 + a - \sqrt{b}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P = \log_2 \frac{40}{3} = \log_2 40 - \log_2 3 = \log_2 8 + \log_2 5 - \frac{1}{2} \log_2 9 = 3 + a - \frac{1}{2}b$.

Câu 14: Phương trình $\frac{1}{5 - \log_2 x} + \frac{2}{1 + \log_2 x} = 1$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ là

A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{33}{64}$. C. 5 . D. 66 .

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x \in (0; +\infty) \setminus \left\{32, \frac{1}{2}\right\}$.

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow t \neq 5; t \neq -1$, phương trình có dạng

$$\frac{1}{5-t} + \frac{2}{1+t} = 1 \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{8}$$

Câu 15: Cho một cấp số nhân có các số hạng đều không âm thỏa mãn $u_2 = 6, u_4 = 24$. Tính tổng của 12 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

A. $3 \cdot 2^{12} - 3$. B. $2^{12} - 1$. C. $3 \cdot 2^{12} - 1$. D. $3 \cdot 2^{12}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{cases} u_2 = 6 \\ u_4 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q = 6 \\ u_1 q^3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow S_{12} = 3 \cdot \frac{1-2^{12}}{1-2} = 3 \cdot 2^{12} - 3$$

Câu 16: Cho dãy số (u_n) xác định $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 + 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Hỏi u_{50} bằng

A. 38119 . B. 40522 . C. 40524 . D. 42811 .

Lời giải

Chọn B

Bài này hệ số của u_{n+1} và u_n bằng nhau nên ta phân tích

$$u_{n+1} + \underbrace{a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1)} = u_n + \underbrace{an^3 + bn^2 + cn}.$$

Đồng nhất với giả thiết, ta tìm được $a = -\frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{13}{6}$. Khi đó

$$u_{n+1} = u_n + n^2 + 2 \Leftrightarrow u_{n+1} - \frac{1}{3}(n+1)^3 + \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{13}{6}(n+1) = u_n - \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{13}{6}n.$$

Đặt
$$v_n = u_n - \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{13}{6}n \longrightarrow \begin{cases} v_1 = -3 \\ v_{n+1} = v_n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \longrightarrow v_n = -3.$$

Suy ra $u_n = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{13}{6}n - 3$. Vậy $u_{50} = 40522$.

Câu 17: Giá trị của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n}{\sqrt{n+1}}$ bằng:

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Với mọi $M > 0$ lớn tùy ý, ta chọn $n_M > \left(\frac{1}{a} + 3\right)^2 - 1$

Ta có: $\frac{n-2}{\sqrt{1+n}} = \sqrt{n+1} - \frac{3}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{1+n} - 3 > M \quad \forall n > n_M$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n}{\sqrt{n+1}} = -\infty$.

Câu 18: Cho $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - (m+2)x + 2m}{x-2} = 5$. Tính $T = m^5 - 4m^3 + 1$.

- A.** $T = -134$. **B.** $T = 136$. **C.** $T = 1$. **D.** $T = -3$.

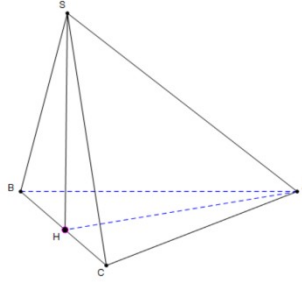
Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - (m+2)x + 2m}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-m)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-m) = 2-m = 5$
 $\Leftrightarrow m = -3$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC . Biết tam giác SBC là tam giác đều. Số đo của góc giữa SA và (ABC) bằng

- A.** 45° . **B.** 30° . **C.** 75° . **D.** 60° .

Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} SH \perp (ABC) \\ AH \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow SH \perp AH$$

$$\text{Lại có: } SH = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

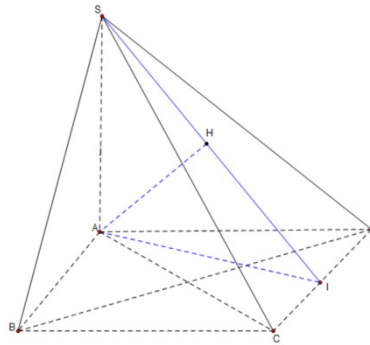
Nên $\triangle SHA$ vuông cân tại H .

$$\text{Suy ra } (\overline{SA}, (ABC)) = (\overline{AS}, AH) = 45^\circ$$

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng 1, $\angle BAD = 120^\circ$. Biết $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng

A. $\frac{\sqrt{39}}{13}$ **B.** $\frac{2\sqrt{39}}{13}$ **C.** $\frac{\sqrt{57}}{19}$ **D.** $\frac{2\sqrt{57}}{19}$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Vì } AB \parallel (SCD) \text{ nên } d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$$

$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm của } CD, \text{ vì tam giác } ACD \text{ đều nên } AI = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ và } AI \perp CD.$$

$$\text{Kê } AH \perp SI \text{ thì } AH \perp (SCD) \text{ nên } AH = d(A, (SCD)).$$

$$\text{Trong tam giác vuông } ASI \text{ ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{57}}{19}.$$

Câu 21: Giá trị của tổng $T = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2 C_5^2 + 2^3 C_5^3 + 2^4 C_5^4 + 2^5 C_5^5$ bằng

- A.** 3^5 . **B.** 5^5 . **C.** 6^5 . **D.** 4^5 .

Lời giải

Chọn A

Xét khai triển $(1+x)^5 = C_5^0 + xC_5^1 + x^2 C_5^2 + x^3 C_5^3 + x^4 C_5^4 + x^5 C_5^5$.

Cho $x=2$, thay vào kiểm tra ta được: $3^5 = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2 C_5^2 + 2^3 C_5^3 + 2^4 C_5^4 + 2^5 C_5^5$.

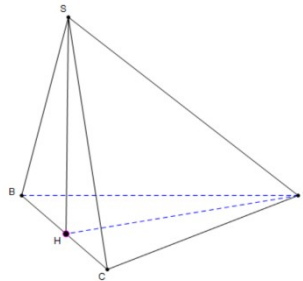
Vậy $T = 3^5$.

Câu 22: Trong một đề thi trắc nghiệm môn Toán có loại câu hỏi trả lời dạng đúng sai. Một câu hỏi có 4 ý hỏi, mỗi ý hỏi học sinh chỉ cần trả lời đúng hoặc chỉ trả lời sai. Nếu 1 ý trả lời đúng đáp án thì được 0,1 điểm, đúng 2 ý được 0,25 điểm, đúng 3 ý được 0,5 điểm và đúng cả 4 ý được 1 điểm. Giả sử một thí sinh làm bài bằng cách chọn phương án ngẫu nhiên để trả lời cho 2 câu hỏi loại đúng sai này. Hỏi có bao nhiêu cách chọn phương án để học sinh đó được 1 điểm ở phần trả lời 2 câu hỏi này.

- A.** 17. **B.** 18. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B



Xét biến cố A "Học sinh đó được 1 điểm"

Để đạt 1 điểm sẽ có các trường hợp sau xảy ra:

TH1: Đúng cả 4 ý của 1 câu hỏi và sai cả 4 ý câu hỏi còn lại hoặc ngược lại có số cách chọn phương án là: $2 \cdot C_4^4 \cdot C_4^0$.

TH2: Mỗi câu hỏi đúng 3 ý và sai 1 ý có số cách chọn phương án là: $C_4^3 \cdot C_4^3$.

Vậy: $n(A) = 2 \cdot C_4^4 \cdot C_4^0 + C_4^3 \cdot C_4^3 = 18$.

Câu 23: Lớp 12A1 có 48 bạn đều giỏi ít nhất một trong hai môn Toán và Lý, trong đó có 36 bạn giỏi Toán, 24 bạn giỏi Lý. Chọn ngẫu nhiên 1 bạn. Xác suất chọn được bạn giỏi Toán, biết bạn đó giỏi Lý là bao nhiêu?

- A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Xét các biến cố: A: "Chọn được bạn giỏi Toán".

B : "Chọn được bạn giỏi Lý".

Khi đó:

Xác suất chọn được bạn giỏi toán là: $P(A) = \frac{36}{48} = 0,75$.

Xác suất chọn được bạn giỏi lý là: $P(B) = \frac{24}{48} = 0,5$.

Xác suất chọn được bạn giỏi toán hoặc lý là: $P(A \cup B) = 1$.

Suy ra $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,75 + 0,5 - 1 = 0,25$

Vậy $P(A|B) = \frac{0,25}{0,5} = \frac{1}{2}$.

Câu 24: Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Toàn mỗi người lần lượt nhận ^{32} lít và ^{72} lít xăng trong một tháng. Biết rằng trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là bao nhiêu (biết số lít xăng tiêu thụ trong các ngày là như nhau).

A. 18.

B. 22.

C. 21.

D. 20.

Lời giải

Chọn D

Gọi x (lít) ($0 < x < 10$) là số xăng An sử dụng trong 1 ngày.

Khi đó: $10 - x$ (lít) là số xăng Toàn sử dụng trong 1 ngày.

Suy ra $f(x) = \frac{32}{x} + \frac{72}{10-x}$, $x \in (0;10)$ là tổng số ngày An và Toàn sử dụng hết số xăng được khoán.

Ta có: $f'(x) = -\frac{32}{x^2} + \frac{72}{(10-x)^2}$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{32}{x^2} + \frac{72}{(10-x)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -20 \notin (0;10) \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = \frac{32}{x} + \frac{72}{10-x}$, $x \in (0;10)$

x	0	4	10		
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$		20		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có ít nhất 20 ngày thì An và Toàn sử dụng hết lượng xăng được khoán.

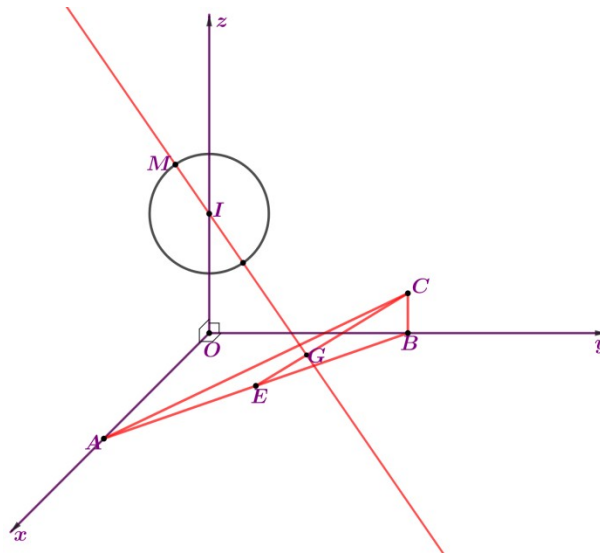
PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI: Trong mỗi ý ở mỗi câu, hãy chọn đúng hay sai

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(3;0;0)$, $B(0;5;0)$, $C(0;5;1)$. Các phát biểu sau đây đúng hay sai?

- a) Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(1; \frac{10}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
- b) Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \sqrt{34}$.
- c) Đường thẳng CG cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm $E(a;b;c)$, khi đó $a+b+c=4$.
- d) Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{49}{20}$ sao cho biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị lớn nhất, khi đó $x+y+z = \frac{41}{10}$.

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai.



a) Mệnh đề đúng, vì

$$\text{Trọng tâm } G\left(\frac{3+0+0}{3}; \frac{0+5+5}{3}; \frac{0+0+1}{3}\right) = \left(3; \frac{10}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

b) Mệnh đề sai, vì

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (-3; 5; 0) \Rightarrow AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{34} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{BC} = (0; 0; 1) \Rightarrow BC = |\overrightarrow{BC}| = 1.$$

$$\text{Do } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow AB \perp BC \text{ nên diện tích } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

c) Mệnh đề đúng, vì

$$\text{Gọi } E(a;b;0) \in (Oxy)$$

$$\text{Do } \frac{d(G, (Oxy))}{d(C, (Oxy))} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3} \text{ nên } \frac{EG}{EC} = \frac{1}{3}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 3(3-a) \\ 5-b = 3\left(\frac{10}{3}-b\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Từ đó suy ra $\overline{EC} = 3\overline{EG}$

$$\text{Vậy } E\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 0\right) \rightarrow a+b+c=4$$

d) Mệnh đề sai, vì

$$(S): x^2 + z^2 + (z-3)^2 = \frac{49}{20} \text{ có tâm } I(0;0;3), \text{ bán kính } R = \frac{7\sqrt{5}}{10}$$

$$\text{Gọi } G(x; y; z) \text{ là điểm thỏa } \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0} \Rightarrow G\left(3; \frac{10}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overline{MG} + \overline{GA})^2 + (\overline{MG} + \overline{GB})^2 + (\overline{MG} + \overline{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + 2\overline{MG}(\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}) + \underbrace{GA^2 + GB^2 + GC^2}_a \\ &= 3MG^2 + a. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } (MA^2 + MB^2 + MC^2)_{\max} \Leftrightarrow MG \text{ lớn nhất}$$

T đạt giá trị lớn khi M là một trong hai giao điểm của đường thẳng IG và mặt cầu (S)

$$\text{Phương trình đường thẳng } IG: \begin{cases} x = 9t \\ y = 10t \\ z = 3-8t \end{cases}, \text{ với VTCP } \overline{IG} = \left(3; \frac{10}{3}; -\frac{8}{3}\right) = \frac{1}{3}(9; 10; -8).$$

$$M = IG \cap (S) \text{ nên tọa độ } M \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x = 9t \\ y = 10t \\ z = 3-8t \\ x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{49}{20} \end{cases} \Rightarrow t = \pm \frac{1}{10}$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{1}{10} \Rightarrow M\left(\frac{9}{10}; 1; \frac{11}{5}\right) \text{ (loại)}.$$

$$+ \text{ Với } t = -\frac{1}{10} \Rightarrow M\left(-\frac{9}{10}; -1; \frac{19}{5}\right) \text{ (chọn)}.$$

$$\text{Vậy } x+y+z = \frac{19}{10}.$$

Câu 26: Tại một trường THPT, để khảo sát năng lực học môn Toán của hai lớp 12A và 12B, giáo viên đã cho học sinh ở hai lớp làm bài kiểm tra khảo sát đầu năm, thống kê điểm của học sinh được cho trong bảng sau:

Điểm thi toán của lớp 12A

Lớp điểm thi	$[0; 2)$	$[2; 4)$	$[4; 6)$	$[6; 8)$	$[8; 10]$
Tần số	2	4	9	28	7

Điểm thi toán của lớp 12B

Lớp điểm thi	$[0; 2)$	$[2; 4)$	$[4; 6)$	$[6; 8)$	$[8; 10]$
Tần số	6	5	19	16	4

- a) Dựa vào điểm trung bình môn Toán ta đánh giá được lớp 12A học tốt môn toán hơn lớp 12B.
 b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu thống kê điểm của lớp 12B bằng 2.
 c) Điểm học sinh đạt được nhiều nhất ở cả hai lớp là như nhau.
 d) Dựa vào độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê ghép nhóm, ta thấy rằng lớp 12A học đều hơn lớp 12B.

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng

a) $\overline{x_A} = \frac{1}{50}(2.1 + 4.3 + 12.5 + 28.7 + 4.9) = 6,36$

$\overline{x_B} = \frac{1}{50}(6.1 + 5.3 + 19.5 + 16.7 + 4.9) = 5,28$

Chọn ĐÚNG.

b) Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm $[4; 6)$

$$Q_1 = 4 + \frac{\frac{50}{4} - 11}{19} \cdot (6 - 4) = \frac{79}{19} \approx 4,16$$

Nhóm chứa tứ phân vị thứ 3 là nhóm $[6; 8)$

$$Q_3 = 6 + \frac{3 \cdot \frac{50}{4} - 20}{16} \cdot (8 - 6) = \frac{131}{16} \approx 8,19$$

Khoảng tứ phân vị là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 8,19 - 4,16 = 4,03$

Chọn SAI.

c) Điểm học sinh đạt được nhiều nhất ở mỗi lớp là một của mẫu số liệu ghép nhóm được cho bảng trên.

Nhóm chứa một của mẫu số liệu thống kê ghép nhóm ở lớp 12A là nhóm $[6; 8)$

$$M_o = 6 + \frac{28 - 9}{28 - 9 + 28 - 7} \cdot (8 - 6) = 6,95$$

Nhóm chứa một của mẫu số liệu thống kê ghép nhóm ở lớp 12B là nhóm [6;8)

$$M_o = 6 + \frac{16-19}{16-19+16-4} \cdot (8-6) \approx 5,33$$

Chọn SAI.

d)

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của lớp 12A

$$S_A^2 = \frac{1}{50} (2.1^2 + 4.3^2 + 9.5^2 + 28.7^2 + 7.9^2) - 6.36^2 \approx 3,59$$

$$\Rightarrow s_A = \sqrt{S_A^2} \approx 1,89$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của lớp 12B

$$S_B^2 = \frac{1}{50} (6.1^2 + 5.3^2 + 19.5^2 + 16.7^2 + 4.9^2) - 5,28^2 \approx 4,8$$

$$\Rightarrow s_B = \sqrt{S_B^2} \approx 2,19$$

Ta thấy độ lệch chuẩn ở mẫu số liệu lớp 12A nhỏ hơn độ lệch chuẩn của mẫu số liệu lớp 12B. Do đó lớp 12A học đều hơn

Chọn ĐÚNG.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x) = \log_{2025}(4-x^2)$

a) Tập xác định của hàm số chứa 3 giá trị nguyên.

$$y' = \frac{1}{(4-x^2)\ln 2025}$$

b) Hàm số có đạo hàm

c) Cho $C(1; -3)$ và A, B là giao điểm của $y = f(x)$ và trục hoành. Diện tích tam giác ABC bằng $3\sqrt{3}$.

d) Tập hợp các giá trị thực của tham số m để $y = f(x)$ cắt $y = \log_{2025}(2x+m-1)$ tại hai điểm phân biệt là $(a; b)$. Giá trị $a+b=11$.

Lời giải

a) ĐKXD: $4-x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Vậy TXĐ: $D = (-2; 2)$ chứa 3 giá trị nguyên.

Chọn ĐÚNG.

$$y' = \frac{-2x}{(4-x^2)\ln 2025}$$

b) Ta có

Chọn SAI.

c) Xét phương trình $\log_{2025}(4-x^2) = 0 \Leftrightarrow 4-x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Giả sử $A(-\sqrt{3}; 0), B(\sqrt{3}; 0) \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}; d(C, Ox) = 3$.

Vậy $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot d(C, Ox) = 3\sqrt{3}$

Chọn ĐÚNG.

d) Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\log_{2025}(4 - x^2) = \log_{2025}(2x + m - 1)^{(1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x^2 > 0 \\ 4 - x^2 = 2x + m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x^2 + 2x = 5 - m \end{cases} (*)$$

Xét $g(x) = x^2 + 2x$ trên $(-2; 2)$ ta có bảng biến thiên

x	-2	-1	2
$g(x)$	0	-1	8

Để hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi pt (1) có hai nghiệm phân biệt hay hệ (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -1 < 5 - m < 0 \Leftrightarrow 5 < m < 6$ hay $a = 5, b = 6 \Rightarrow a + b = 11$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật,

$AB = a, AD = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh SD , H là trung điểm cạnh AB . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

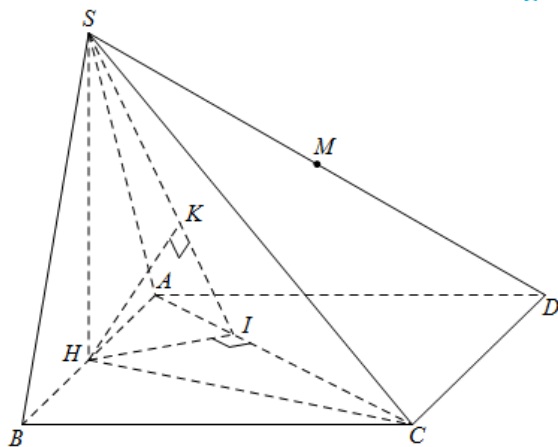
a) $SH \perp (ABCD)$

b) $V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$

c) Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc SCA

d) Khoảng cách từ điểm M đến mp(SAC) bằng $\frac{2\sqrt{57}a}{19}$.

Lời giải



a) Vì tam giác SAB đều nên H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ SH \perp AB \end{array} \right. \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Ta có

Chọn ĐÚNG.

b) Do $\triangle SAB$ đều cạnh a nên ta có $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Ta có } S_{ABCD} = 2a^2 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn ĐÚNG.

c) Vì $SH \perp (ABCD)$ nên HC là hình chiếu vuông góc của SC trên $mp(ABCD) \Rightarrow (SC, (ABCD)) = \angle SCH$

Chọn SAI.

$$\text{d) Ta có } SD \cap mp(SAC) = S \text{ nên } \frac{d(M, (SAC))}{d(D, (SAC))} = \frac{MS}{DS} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d(M, (SAC)) = \frac{1}{2} d(D, (SAC)) = \frac{1}{2} d(B, (SAC)).$$

$$\frac{d(B, (SAC))}{d(H, (SAC))} = \frac{BA}{HA} = 2 \Rightarrow d(B, (SAC)) = 2 d(H, (SAC)) \Rightarrow d(M, (SAC)) = d(H, (SAC)).$$

Mặt khác

Gọi I là hình chiếu của H trên AC

$$\left\{ \begin{array}{l} AC \perp HI \\ AC \perp SH \end{array} \right. \Rightarrow AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK.$$

Ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} HK \perp SI \\ HK \perp AC \end{array} \right. \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow d(H, (SAC)) = HK.$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$$

$$\Delta AIH \sim \Delta ABC (g - g) \Rightarrow \frac{AI}{AB} = \frac{IH}{BC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow IH = \frac{BC \cdot AH}{AC} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$$HK = \frac{SH \cdot HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{5}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{57}}{19}$$

ΔSHI có

$$d(M, (SAC)) = d(H, (SAC)) = HK = \frac{a\sqrt{57}}{19}$$

Vậy

Chọn SAI.

Câu 29: Gieo hai con súc sắc I và II cân đối, đồng chất một cách độc lập. Xét các biến cố A, B, C sau đây:

A : “Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm”

B : “Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con là 7”

C : “Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con lớn hơn hoặc bằng 8”

a) Số phần tử của không gian mẫu bằng 12.

$$P(B) = \frac{1}{18}$$

b) .

c) Hai biến cố A và B không độc lập.

$$P(C) = \frac{19}{36}$$

d) .

Lời giải

a) Gieo hai con súc sắc I và II cân đối, đồng chất một cách độc lập thì số phần tử của không gian mẫu là

$$n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$$

Chọn SAI.

$$B = \{(1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1)\} \quad n(B) = 6$$

b) , nên

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Chọn SAI.

c) Gọi $\bar{A}$ là biến cố đối của biến cố A

$\bar{A}$: “Không có con súc sắc nào xuất hiện mặt 6 chấm”

$$n(\bar{A}) = 5 \cdot 5 = 25$$

Do đó

$$P(\bar{A}) = \frac{25}{36} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{11}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{216}$$

Xét biến cố AB : “Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con là 7, trong đó có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm”.

$$AB = \{(1;6), (6;1)\} \quad P(AB) = \frac{2}{36}$$

Ta có . Do đó

$$\Rightarrow P(AB) \neq P(A) \cdot P(B) \quad A, B \text{ không độc lập.}$$

Chọn Đúng.

d) Biến cố C xảy ra khi và chỉ khi một trong các biến cố sau xảy ra

C_1 : “Con súc sắc I ra mặt 2 chấm và con súc sắc II ra mặt 6 chấm”.

$$P(C_1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

C_2 : “Con súc sắc I ra mặt 3 chấm và con súc sắc II ra mặt 5 hoặc 6 chấm”.

$$P(C_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{36}$$

C_3 : “Con súc sắc I ra mặt 4 chấm và con súc sắc II ra mặt 4,5 hoặc 6 chấm”.

$$P(C_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{36}$$

C_4 : “Con súc sắc I ra mặt 5 chấm và con súc sắc II ra mặt 3,4,5 hoặc 6 chấm”.

$$P(C_4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{36}$$

C_5 : "Con súc sắc I ra mặt 6 chấm và con súc sắc II ra mặt 2,3,4,5 hoặc 6 chấm".

$$P(C_5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

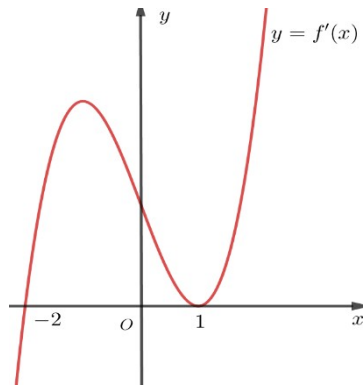
Theo quy tắc cộng xác suất ta được:

$$P(C) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) + P(C_4) + P(C_5) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{15}{36}$$

Chọn SAI.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN: Trong mỗi câu, hãy viết phần trả lời ngắn không quá 4 ký tự (phải là số) và để ngoài MathType

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $[-15; 15]$ của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x + m)$ có 3 điểm cực trị?



Lời giải

Trả lời: 17

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$ và nghiệm $x = 1$ là nghiệm bội chẵn.

Lại có, $g'(x) = (2x - 4)f'(x^2 - 4x + m)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x + m = -2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + m = 1 \end{cases} \quad (2)$$

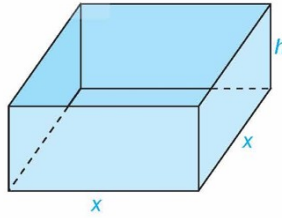
Các phương trình (1), (2) không có nghiệm chung từng đôi một và phương trình (2) cho các nghiệm là nghiệm bội chẵn.

Suy ra $g(x)$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m - 2 > 0 \\ m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m < 2$$

Vì m là số nguyên thuộc $[-15; 15]$ và $m < 2$ nên có 17 giá trị m cần tìm.

Câu 31: Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và tổng diện tích bề mặt bằng 108cm^2 như hình.



Biết khi $x = x_0; h = h_0$ thì thể tích của hộp là lớn nhất. Khi đó $x_0 + h_0$ bằng bao nhiêu (tính theo đơn vị cm)?

Lời giải

Trả lời: 9

Ta có: Hình hộp trên có độ dài cạnh đáy là $x(\text{cm}, x > 0)$ và chiều cao là $h(\text{cm}, h > 0)$

Diện tích bề mặt của hình hộp là 108cm^2 nên $x^2 + 4xh = 108 \Rightarrow h = \frac{108 - x^2}{4x}(\text{cm})$

Thể tích của khối hộp là: $V = x^2 \cdot h = x^2 \cdot \frac{108 - x^2}{4x} = \frac{108x - x^3}{4}(\text{cm}^3)$

Ta có: $V' = \frac{-3x^2 + 108}{4}; V' = 0 \Leftrightarrow x = 6$ (do $x > 0$)

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-6	0	6	$+\infty$
V'	$-$	0	$+$	0	$-$
V	$+\infty$	108	0	108	$-\infty$

Do đó, thể tích của hình hộp là lớn nhất khi độ dài cạnh đáy $x = 6\text{cm}$

Khi đó, chiều cao của hình hộp là: $\frac{108 - 6^2}{4 \cdot 6} = 3(\text{cm})$

Vậy $x_0 + h_0 = 9$.

Câu 32: Cho hai số thực x, y thỏa mãn đồng thời $x^2 + y^2 \geq 16$, $\log_{x^2 + 2y^2 + 1}(y^2 + 8x + 1) \geq 1$. Biết rằng tồn tại ít nhất một cặp số thực (x, y) thỏa mãn $mx + 3y + 3m - 12 = 0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán?

Lời giải

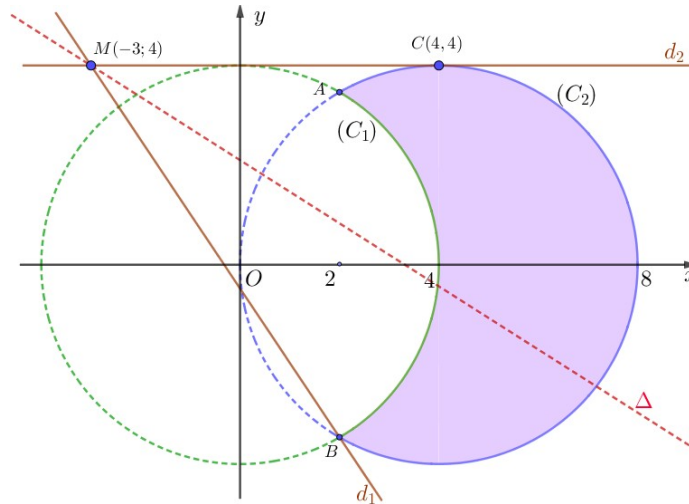
Trả lời: 5

Ta có: $x^2 + y^2 \geq 16$ suy ra tập hợp các điểm có tọa độ $(x; y)$ nằm trên hay phía ngoài đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 16$.

Do $(x; y) = (0; 0)$ không thỏa mãn điều kiện đề bài nên $x^2 + 2y^2 + 1 > 1$.

Khi đó $\log_{x^2 + 2y^2 + 1}(y^2 + 8x + 1) \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 + 1 \leq y^2 + 8x + 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x \leq 0$ suy ra tập hợp các điểm có tọa độ $(x; y)$ nằm trong hoặc trên đường tròn $(C_2): x^2 + y^2 - 8x = 0$.

Vậy tập hợp bộ số $(x; y)$ thỏa mãn đề bài là các điểm nằm trong miền tô đậm.



Nhận xét:

Đường tròn (C_1) cắt đường tròn (C_2) tại hai điểm phân biệt $A(2; 2\sqrt{3}), B(2; -2\sqrt{3})$.

Đường thẳng $\Delta: mx + 3y + 3m - 12 = 0$ luôn đi qua điểm cố định $M(-3; 4)$ và có hệ số góc $k_{\Delta} = -\frac{m}{3}$.

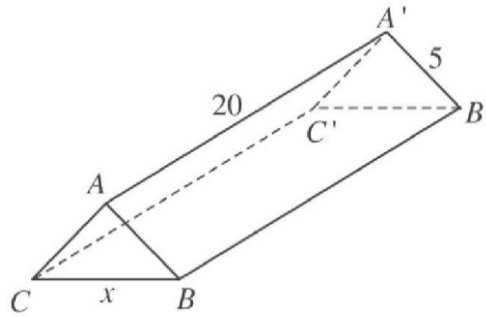
Gọi d_1 là đường thẳng đi qua điểm M và B suy ra $\overline{MB} = (5; -2\sqrt{3} - 4)$ nên hệ số góc của đường thẳng $d_1: k_{d_1} = \frac{-2\sqrt{3} - 4}{5}$; d_2 là tiếp tuyến của đường tròn (C_2) đi qua $M(-3; 4)$ và tiếp xúc với (C_2) tại điểm $C(4; 4)$ nên hệ số góc của đường thẳng $d_2: k_{d_2} = 0$.

Để tồn tại ít nhất một cặp $(x; y)$ thì $k_{d_1} \leq k_{\Delta} \leq k_{d_2} \Leftrightarrow \frac{-2\sqrt{3} - 4}{5} \leq -\frac{m}{3} \leq 0$
 $\Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{12 + 6\sqrt{3}}{5}$.

Do m là số nguyên nên $m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 33: Một hành lang giữa hai toà nhà có hình dạng của một hình lăng trụ đứng. Hai mặt bên $ABB'A'$ và $ACC'A'$ là hai tấm kính hình chữ nhật dài 20m, rộng 5m. Gọi x (mét) là độ dài cạnh BC . Tìm x sao cho hình lăng trụ có thể tích lớn nhất (làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Trả lời: 7,07

Ta có, $S_{ABC} = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{25 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{4} \sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$.

Thể tích của hình lăng trụ: $V = S_{ABC} \cdot AA' = 5x \sqrt{100 - x^2}$ (m³).

Xét hàm số $f(x) = 100x^2 - x^4 \Rightarrow f'(x) = 200x - 4x^3$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$ (do $0 < x < 10$).

Bảng biến thiên

x	0	$5\sqrt{2}$	10
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	2500	0

Vậy khi $x = 5\sqrt{2} \approx 7,07$ thì thể tích lăng trụ là lớn nhất và $V_{\max} = 2500$ (m³).

Câu 34: Trung tâm y tế dự phòng của huyện A có 3 bác sĩ, 4 kỹ thuật viên và 12 y tá. Để đảm bảo công tác phòng chống dịch Covid-19, lãnh đạo cấp trên yêu cầu trung tâm A phải đảm bảo trong một ngày có 3 ca trực sao cho ca 1 có 7 người và hai ca còn lại mỗi ca có 6 người. Biết là số cách phân chia sao cho mỗi ca có một bác sĩ và ít nhất một kỹ thuật viên là $\overline{abcdefg}$, tính $a+b+c+d+e+f+g$.

Lời giải

36

Trả lời: .

TH 1: Ca 1 có hai kỹ thuật viên:

$$C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{12}^4 = 8.910$$

Số cách sắp xếp 7 người vào ca 1: (cách).

$$C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_8^4 = 280$$

Số cách sắp xếp 6 người vào ca 2: (cách).

Số cách sắp xếp 6 người còn lại vào ca 3: (cách).

$$8910 \times 280 = 2.494.800$$

→ Số cách sắp xếp của TH 1 là: (cách).

TH 2: Ca 2 có hai kỹ thuật viên:

$$C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_{12}^5 = 9.504$$

Số cách sắp xếp 7 người vào ca 1: (cách).

$$C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_7^3 = 210$$

Số cách sắp xếp 6 người vào ca 2: (cách).

Số cách sắp xếp 6 người còn lại vào ca 3: (cách).

$$9504 \times 210 = 1.995.840$$

→ Số cách sắp xếp của TH 2 là: (cách).

TH 3: Ca 3 có hai kỹ thuật viên:

$$1.995.840$$

Tương tự TH 2, nên số cách sắp xếp của TH 3 là: (cách).

$$2.494.800 + 1.995.840 \times 2 = 6.486.480$$

Vậy số cách sắp xếp theo ycbt là: (cách).

$$\Rightarrow a + b + c + d + e + f + g = 6 + 4 + 8 + 6 + 4 + 8 + 0 = 36$$

Câu 35: Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột AB tạo với mặt đất phẳng một góc 60° . Tại một thời điểm dưới ánh sáng mặt trời, bóng BC của cây cột trên mặt đất dài $20m$ và tạo với cây cột một góc bằng 90° . Biết góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên là 45° . Tính khoảng cách từ đầu A của cây cột đến mặt đất (làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

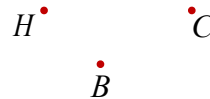
$$24,5$$

Trả lời:

Đặt $AB = x(m)$.

Gọi H là hình chiếu của A trên mặt đất, khi đó BH, CH lần lượt là hình chiếu của AB, AC trên mặt đất và khoảng cách từ đầu A của cây cột đến mặt đất là AH .

A .



Vì $AH \perp (HBC)$ nên góc giữa AB và mặt phẳng (HBC) bằng góc $\widehat{ABH} \Rightarrow \widehat{ABH} = 60^\circ$.

Tương tự góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời bằng $\widehat{ACH} \Rightarrow \widehat{ACH} = 45^\circ$.

Xét $\triangle ABH, \widehat{H} = 90^\circ$, ta có: $AH = AB \cdot \sin B = x \cdot \sin 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác vuông $\triangle ABC$, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = x^2 + 400. \text{ Suy ra } AC = \sqrt{x^2 + 400} (m).$$

Xét $\triangle ACH$, $\angle H = 90^\circ$, $\angle ACH = 45^\circ$, ta có:

$$AC = AH\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 400} = x \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 400 = \frac{3}{2} \cdot x^2$$

$$\Leftrightarrow x = 20\sqrt{2} (m)$$

$$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 20\sqrt{2} = 10\sqrt{6} (m)$$

Vậy khoảng cách từ đầu A của cây cột đến mặt đất là $AH = 10\sqrt{6} \approx 24,5 (m)$.

ĐỀ 7

ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI

MÔN: TOÁN 12

PHẦN I

1	2	3	4
C	A	D	A

PHẦN II

CÂU 5	CÂU 6
a) Đúng	a) Đúng
b) Sai	b) Sai
c) Sai	c) Sai
d) Đúng	d) Sai

PHẦN III

Câu	7	8	9	10
Trả lời	6,9	6	0	0,69

LỜI GIẢI CHI TIẾT

I. TRẮC NGHIỆM (10 điểm)

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN: (2 điểm) Trong mỗi câu hỏi, hãy chọn 1 đáp án.

Câu 17: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 3}{x + 2}$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng
A. 0. **B.** 1,8. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$y' = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2}$$

Ta có:

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-1; 3] \\ x = -5 \notin [-1; 3] \end{cases}$$

Xét

Vì hàm số liên tục trên $[-1; 3]$ nên ta xét $y(1) = 1; y(-1) = 5; y(3) = \frac{9}{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = 1$ tại $x = 1$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+7}{5} = \frac{z-3}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + z = 0$.

Đường thẳng đối xứng của d qua (P) có phương trình là

A. $\frac{x+4}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{1}$.

B. $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

C. $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

D. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

Lời giải

Chọn A

Lấy điểm $A(-1; -7; 3) \in d$

Gọi $B(t-1; 5t-7; -t+3)$ là giao điểm giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

Khi đó $2(t-1) + 5t-7 -t+3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow B(0; -2; 2)$

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) , A' là điểm đối xứng của A qua (P) . Khi đó H là trung điểm của AA' .

Đường thẳng AH đi qua A và nhận $(2; 1; 1)$ là vectơ chỉ phương. Khi đó, phương trình tham số

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -7 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \Rightarrow H(-1 + 2t; -7 + t; 3 + t)$$

của AH là

Khi đó $2(-1 + 2t) - 7 + t + 3 + t = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(1; -6; 4)$

Vậy $A'(3; -5; 5)$, $\overrightarrow{BA'} = (3; -3; 3) \Rightarrow \vec{u} = (1; -1; 1)$

Phương trình đường thẳng đối xứng của d qua $(P): \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

Với đường thẳng $\frac{x+4}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{1}$, ta thấy hai điểm A', B đều thỏa mãn.

Câu 19: Bảng dưới đây ghi tốc độ của một số xe ô tô khi đi qua điểm đo tốc độ.

Tốc độ (km/giờ)	[50;52)	[52;54)	[54;56)	[56;58)	[58;60)
Số xe ô tô	40	32	25	20	8

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A.** 55,675 **B.** 52,26 **C.** 54,87 **D.** 55,74

Lời giải

Chọn D

Ta có: $n = 125$. Do đó tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là $x_{94} \in [54;56)$

Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

$$Q_3 = 54 + \frac{3 \cdot \frac{125}{4} - (40 + 32)}{25} (56 - 54) = 55,74$$

Câu 20: Một công ty có 55% thành viên là nam và tỷ lệ thành viên nam, thành viên nữ có bằng đại học lần lượt là 25%, 30%. Chọn ngẫu nhiên 1 thành viên của công ty đó, xác suất để thành viên này có bằng đại học là

- A.** 0,2725 **B.** 0,25 **C.** 0,1375 **D.** 0,2775

Lời giải

Chọn A

Tỷ lệ thành viên nam của công ty có bằng đại học là: $55\% \cdot 25\% = 13,75\%$

Tỷ lệ thành viên nữ của công ty có bằng đại học là: $45\% \cdot 30\% = 13,5\%$

Suy ra tỷ lệ thành viên của công ty có bằng đại học là: $13,75\% + 13,5\% = 27,25\%$

Hay xác suất để 1 thành viên công ty có bằng đại học là: 0,2725

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI: (4 điểm) Trong mỗi ý ở mỗi câu, hãy chọn đúng hay sai

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$. Cho biết tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Hàm số đó có đạo hàm là $y' = f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$ (với $x \neq 1$).

b) Đường thẳng $y = x - 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đó.

c) Giá trị cực tiểu của hàm số đó bằng 1.

d) Phương trình $|f(x)| = \frac{1}{x}$ có đúng 1 nghiệm.

Lời giải

$$y' = \frac{(2x+1)(x-1) - (x^2+x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

a) Ta có:

Chọn ĐÚNG.

b) Ta có: $y = f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1} = x+2 + \frac{1}{x-1}$

Và $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$

Suy ra đường thẳng $y = x+2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đó.

Chọn SAI.

c) $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

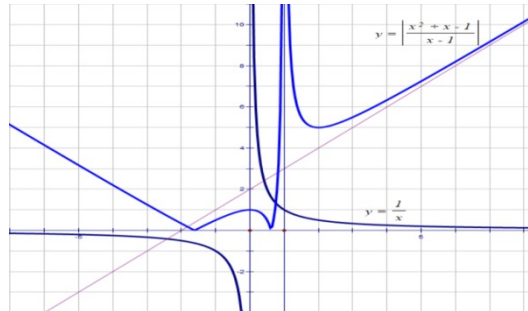
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	$-\infty$	5	$+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đó bằng 5.

Chọn SAI.

d) Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = \frac{1}{x}$ là số giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = |f(x)|, y = \frac{1}{x}$

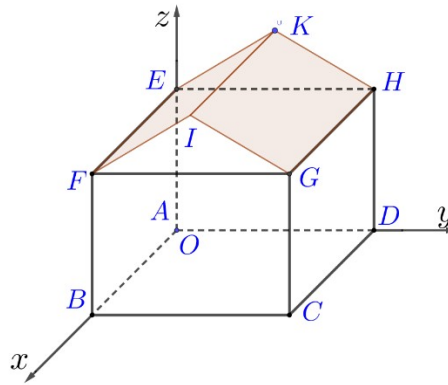


Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ cắt đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ tại 1 điểm duy nhất nên phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm.

Chọn ĐÚNG.

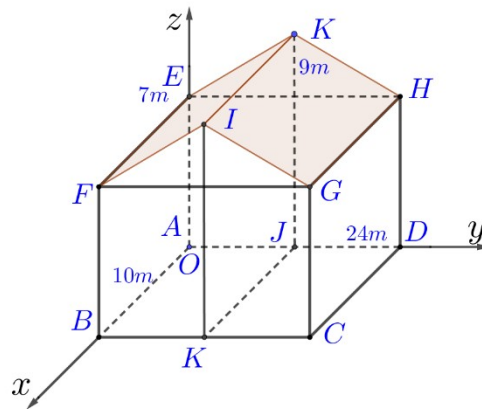
Câu 22: Một nhà kho được minh họa như hình bên, trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), biết nhà kho có chiều cao bằng 9 m , hai mái $EFIK, HGIK$ là hai hình chữ nhật có kích thước bằng nhau, các bức tường tạo thành hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$, $AB = 10\text{ m}$, $AD = 24\text{ m}$, $AE = 7\text{ m}$.

Cho biết tính đúng, sai của các mệnh đề sau:



- a) Tọa độ của các điểm $E(0;0;7)$, $F(10;0;7)$, $I(10;12;9)$.
- b) Mặt phẳng $(EFIK)$ có phương trình là $y - 6x + 42 = 0$.
- c) Mặt phẳng $(HGIK)$ có phương trình là $x + 2y - 34 = 0$.
- d) Đường thẳng AG có phương trình là $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$.

Lời giải



- a) Theo hình A là gốc tọa độ, các điểm B, D, E lần lượt nằm trên các trục Ox, Oy, Oz .

Ta có: $AE = 7\text{ m}$ thuộc trục Oz nên $E(0;0;7)$,

$AB = 10\text{ m}$ thuộc trục Ox nên $B(10;0;0)$,

$AD = 24\text{ m}$ thuộc trục Oy nên $D(0;24;0)$.

Điểm C thuộc mặt phẳng (Oxy) , $CB \perp Ox$, $CD \perp Oy$ nên $C(10;24;0)$.

Gọi K là trung điểm của $BC \Rightarrow K(10;12;0)$.

Điểm K là hình chiếu của điểm I trên mặt phẳng (Oxy) và nhà kho có chiều cao bằng $KI = 9\text{ m}$ nên $I(10;12;9)$.

Chọn ĐÚNG.

- b) Điểm F thuộc mặt phẳng (Oxz) , $FB \perp Ox$, $FE \perp Oz$ nên $F(10;0;7)$.

Ta có $E(0;0;7)$, $F(10;0;7)$, $I(10;12;9) \Rightarrow \overrightarrow{EF} = (10;0;0)$, $\overrightarrow{EI} = (10;12;2)$

Vector pháp tuyến của mặt phẳng $(EFIK)$ bằng $\vec{n} = \frac{1}{20} [\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EI}] = \frac{1}{20} (0; -20; 120) = (0; -1; 6)$

Phương trình mặt phẳng $(EFIK)$ là $y - 6z + 42 = 0$.

Chọn SAI.

c) Ta có $H(0;24;7)$, $G(10;24;7)$, $I(10;12;9) \Rightarrow \overrightarrow{HI} = (10; -12; 2)$, $\overrightarrow{HG} = (10; 0; 0)$

Vector pháp tuyến của mặt phẳng $(HGIK)$ bằng $\vec{n} = \frac{1}{20} [\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HG}] = \frac{1}{20} (0; 20; 120) = (0; 1; 6)$

Phương trình mặt phẳng $(HGIK)$ là $y + 6z - 66 = 0$.

Chọn SAI.

d) Mệnh đề sai, vì

Ta có $A(0;0;0)$, $G(10;24;7)$

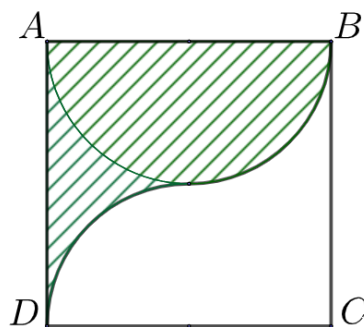
Vector chỉ phương của đường thẳng AG là $\overrightarrow{u_{AG}} = \overrightarrow{AG} = (10; 24; 7)$.

Phương trình của đường thẳng AG là $\frac{x}{10} = \frac{y}{24} = \frac{z}{7}$.

Chọn SAI.

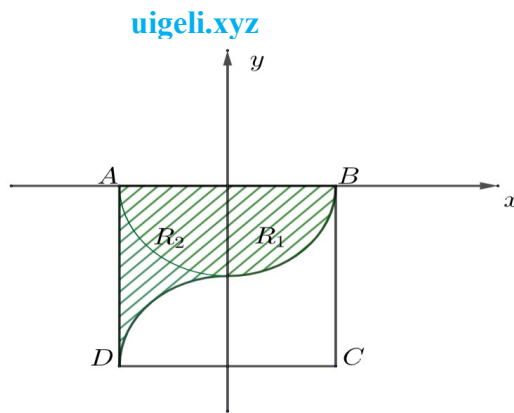
PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN: (4 điểm) Trong mỗi câu, hãy viết phần trả lời ngắn không quá 4 ký tự (phải là số) và để ngoài MathType

Câu 23: Một vật trang trí có dạng một khối trụ tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo ở hình bên) quanh trục AB . Miền (R) được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình vuông $ABCD$ và các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD . Tính thể tích của vật trang trí đó, làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Lời giải

Trả lời: 6,9



Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng AB và A, B nằm trên trục Ox .

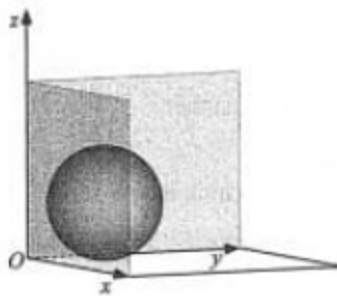
Ta chia (R) thành hai miền:

(R_1) là $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm O bán kính bằng 1. Quay (R_1) quanh trục AB ta được nửa khối cầu có thể tích $V_1 = \frac{2}{3}\rho$.

(R_2) là hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = -1, x = 0$, trục Ox và đường tròn có phương trình $y = \sqrt{1 - x^2} - 2$. Quay (R_2) quanh trục AB ta được khối tròn xoay có thể tích $V_2 = \rho \int_{-1}^0 (\sqrt{1 - x^2} - 2)^2 dx$.

Vậy $V = V_1 + V_2 = 6,9$.

Câu 24: Hai quả bóng có dạng hình cầu, có bán kính khác nhau. Nếu lần lượt đặt hai quả bóng đó vào góc một căn phòng sao cho quả bóng tiếp xúc với hai bức tường và nền căn phòng thì trên quả bóng đó tồn tại một điểm có khoảng cách đến hai bức tường và nền căn phòng lần lượt là $2dm, 3dm, 1dm$. Tính tổng độ dài các bán kính của hai quả bóng đó.



Lời giải

Trả lời: 6

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình

Gọi $I(a; a; a)$ là tâm mặt cầu (S_1) , ta có phương trình (S_1) là $(x - a)^2 + (y - a)^2 + (z - a)^2 = a^2$

Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm trên mặt cầu (S_1) sao cho

$$d(M, (Oxy)) = z_0 = 1$$

$$d(M, (Oyz)) = x_0 = 3 \Rightarrow M(3; 2; 1)$$

$$d(M, (Oxz)) = y_0 = 2$$

$$M \in (S_1) \Rightarrow (3 - a)^2 + (2 - a)^2 + (1 - a)^2 = a^2 \Rightarrow \begin{cases} R_1 = 3 + \sqrt{2} \\ R_2 = 3 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Vì hai mặt cầu có tính chất như nhau nên ta có $R_1 = 3 + \sqrt{2}, R_2 = 3 - \sqrt{2}$

$$\text{Vậy } R_1 + R_2 = 6$$

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = \frac{5}{x^3} + \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$. Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-\infty; 2100)$ thỏa mãn $f(a - 2025) + f(5a - 29) = 0$?

Lời giải

Trả lời: 0

Tập xác định: $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

$$f'(x) = -\frac{15}{x^4} - \frac{4}{(x-2)^2} \left(\frac{x-2}{x+2} \right) = -\frac{15}{x^4} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} < 0, \forall x \in D$$

Suy ra hàm số $f(x) = \frac{5}{x^3} + \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$ nghịch biến trên D .

Dễ nhận thấy $f(x)$ là hàm số lẻ nên ta có: $f(a - 2025) + f(5a - 29) = 0$

$$\Leftrightarrow f(a - 2025) = -f(5a - 29) \Leftrightarrow f(a - 2025) = f(29 - 5a)$$

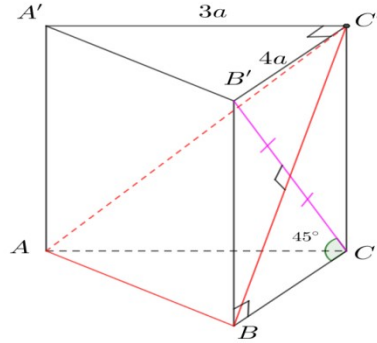
$$\Leftrightarrow a - 2025 = 29 - 5a \Leftrightarrow a = \frac{1027}{3} \quad (\text{do } f(x) \text{ nghịch biến trên } D).$$

Khi đó không có giá nguyên nào của a thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 26: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = 3a, BC = 4a$ với $a > 0$, biết đáy ABC là tam giác vuông tại C và góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Tính $\sin$ của góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng (ABC')

Lời giải

Trả lời: 0,69

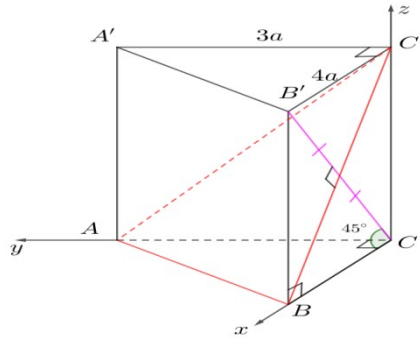


Ta có: BC là hình chiếu của $B'C$ lên mặt phẳng (ABC) .

Khi đó $\widehat{(B'C, (ABC))} = \widehat{(B'C, BC)} = 45^\circ$.

Suy ra tam giác $BB'C$ vuông cân tại B ; $BB' = BC = 4a$.

Đưa hình lăng trụ vào hệ trục $Oxyz$.



Cho $a = 1$, ta có: $C \equiv O, B(4; 0; 0), A(0; 3; 0), C'(0; 0; 4), B'(4; 0; 4)$.

Khi đó mặt phẳng (ABC') : $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$.

Khi đó: $\begin{cases} \overrightarrow{B'C} = (0; 4; 0) \\ VTPT \overrightarrow{n_{(ABC')}} = (3; 4; 3) \end{cases}$.

Suy ra $\sin$ của góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng (ABC') là:

$$\sin \widehat{(B'C, (ABC'))} = \frac{|\overrightarrow{B'C} \cdot \overrightarrow{n_{(ABC')}}|}{|\overrightarrow{B'C}| \cdot |\overrightarrow{n_{(ABC')}}|} = \frac{2\sqrt{34}}{17} \approx 0,69$$

II. TỰ LUẬN (10 điểm)

Bài 1. (5 điểm)

Câu 27: Tìm tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 9$ và tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị đó.

Câu 28: Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x - \cos x - 1 = 0$.

Lời giải

Câu 29: Tập xác định: $D = \square$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y			9		5	
	$-\infty$					$+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số đã cho có điểm cực đại là $A(0;9)$ và điểm cực tiểu là $B(2;5)$.

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là: $AB = \sqrt{(2-0)^2 + (5-9)^2} = 2\sqrt{5}$.

Câu 30: Ta có: $2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x - \cos x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (2\sin^2 x - 1) - \sin 2x + \sin x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = \sin x - \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \pi - x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Họ nghiệm $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ có nghiệm dương nhỏ nhất là $x = \frac{3\pi}{2}$.

Họ nghiệm $x = \frac{p}{3} + k \frac{2p}{3}, k \in \mathbb{Z}$ có nghiệm dương nhỏ nhất là $x = \frac{p}{3}$.

Vậy nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $\frac{\pi}{3}$.

Bài 2. (3 điểm)

Câu 31: Cho hàm số $f(x) = \ln\left(\frac{2024x}{x+2}\right)$. Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số đã cho.

Chứng minh $f'(1) + f'(2) + f'(3) + \dots + f'(2024) < \frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = \frac{2}{x(x+2)} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)$.

Do đó

$$\begin{aligned} f'(1) + f'(2) + f'(3) + \dots + f'(2024) &= \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2024} - \frac{1}{2026}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2026}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2026}\right) < \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Câu 32: Có bao nhiêu cách xếp 6 quyển sách khác vào ba ngăn tủ khác nhau sao cho mỗi ngăn tủ có ít nhất một quyển sách (biết mỗi ngăn tủ có thể chứa được từ 1 đến 6 quyển sách và không kể thứ tự giữa các quyển sách trong mỗi ngăn tủ).

Lời giải

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

Xếp 6 quyển sách vào 6 ô liên tiếp ta có $6!$ cách; giữa hai ô liên tiếp có một vách ngăn (có 5 vách ngăn); Cứ chọn 2 vách ngăn trong 5 vách ngăn tương ứng ta có một cách xếp các quyển sách vào ba ngăn tủ tương ứng thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Vậy số cách xếp thỏa mãn yêu cầu là $6!C_5^2 = 7200$.

Bài 3. (2 điểm)

Câu 33: Chứng minh C_{2n}^n là số chẵn, với mọi số nguyên dương n .

Câu 34: Cho hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn $f(f(2a) + f(b)) = 2a + b$, với mọi số hữu tỷ a, b (ký hiệu tập hợp các số hữu tỷ là $\mathbb{Q}$). Chứng minh f là hàm số lẻ.

Lời giải

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2n \cdot (2n-1)!}{n \cdot (n-1)! \cdot n!} = \frac{2 \cdot (2n-1)!}{(n-1)! \cdot n!} = 2C_{2n-1}^{n-1}$$

Câu 35: Xét số nguyên dương n , ta có:

Mà $C_{2n}^n, C_{2n-1}^{n-1} \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy C_{2n}^n là số chẵn, với mọi số nguyên dương n .

Câu 36: Ta có hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(f(2a) + f(b)) = 2a + b, \forall a, b \in \mathbb{R}$ (1).

Thay $a = b = 0$ vào (1), ta được: $f(f(0) + f(0)) = f(2f(0)) = 0$.

Đặt $c = 2f(0) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(c) = 0$.

Thay $a = \frac{c}{2}$ và $b = c$ vào (1), ta được: $f(f(c) + f(c)) = f(2f(c)) = 2c \Leftrightarrow f(0) = 2c$
 $\Leftrightarrow f(0) = 4f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Thay $a = 0$ và $b = a$ vào (1), ta được: $f(f(0) + f(a)) = f(f(a)) = a, \forall a \in \mathbb{R}$.

Với $a, b \in \mathbb{R}$ mà $f(a) = f(b) \Rightarrow f(f(a)) = f(f(b)) \Leftrightarrow a = b$ (2).

Với $a \in \mathbb{R}$, thay a bởi $\frac{a}{2} \in \mathbb{R}$ và $b = -a$ vào (1), ta được: $f(f(a) + f(-a)) = 0$
 $\Leftrightarrow f(f(a) + f(-a)) = f(0) \Rightarrow f(a) + f(-a) = 0 \Leftrightarrow f(-a) = -f(a), \forall a \in \mathbb{R}$.

Mặt khác $a \in \mathbb{R} \Rightarrow -a \in \mathbb{R}$. Vậy f là hàm số lẻ.

ĐỀ 8

ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI

MÔN: TOÁN 12

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.D	4.C	5.D	6.B	7.D	8.C
9.B	10.A	11.C	12.D				

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

CÂU 1	CÂU 2	CÂU 3	CÂU 4
a) Đúng	a) Đúng	a) Đúng	a) Sai
b) Sai	b) Đúng	b) Đúng	b) Sai
c) Sai	c) Sai	c) Sai	c) Đúng
d) Đúng	d) Đúng	d) Sai	d) Sai

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu	1	2	3	4	5	6
-----	---	---	---	---	---	---

Chọn	15	16,2				
------	----	------	--	--	--	--

PHẦN I. CẤU TRÚC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN: Trong mỗi câu hỏi, hãy chọn 1 đáp án.

Câu 1: Một đường tròn có đường kính 30cm . Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo 68° (lấy 2 chữ số thập phân).

- A. $35,6(\text{cm})$. B. $35,61(\text{cm})$. C. $17,8(\text{cm})$. D. $17,81(\text{cm})$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $68^\circ = \frac{17}{45}\pi$.

Độ dài cung tròn là $l = \frac{17}{45}\pi \cdot 30 = 35,6 (\text{cm})$.

Câu 2: Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1 = 5$ và $u_5 = 13$. Tìm u_n ?

- A. $u_n = 5n - 3$. B. $u_n = 3n + 2$. C. $u_n = 2n + 3$. D. $u_n = 5n$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_5 = 13 \Leftrightarrow u_1 + 4d = 13 \Leftrightarrow 5 + 4d = 13 \Leftrightarrow d = 2$.

Khi đó $u_n = 5 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 3$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{2023x + 2024}{x^2 - 6x + 8} + \sqrt{x-3}$. Khi đó hàm số $y = f(x)$ liên tục trong khoảng nào sau đây?

- A. $(2; 4)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(3; 4)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số là $[3; +\infty) \setminus \{4\}$.

Khi đó hàm số $y = f(x)$ liên tục trong khoảng $(3; 4)$.

Câu 4: Một ghế Massage Elipsport cao cấp năm 2024 được định giá 40 triệu đồng, mỗi năm giá trị ghế Massage giảm 5% so với năm trước và bắt đầu từ năm thứ 8 trở đi, mỗi năm giá ghế Massage giảm 12% so với năm trước. Hỏi bắt đầu từ năm nào thì giá trị ghế Massage nhỏ hơn 20 triệu đồng?

- A. 2031 . B. 2033 . C. 2035 . D. 2032 .

Lời giải

Chọn C

+ Xét từ năm đầu tiên đến năm thứ 7, kể từ năm thứ mỗi năm giá trị giảm 5% so năm liền trước tức còn 95%=0,95 giá trị của năm liền trước. Từ đó giá trị của máy từng năm là cấp số nhân với $u_1 = 40$ triệu và $q = 0,95$.

Giá trị máy đến năm thứ 7 là $u_7 = u_1 \cdot q^6 = 40 \cdot 0,95^6$ (triệu).

+ Xét từ năm thứ 8 trở đi, do giá trị máy giảm 12% so năm liền trước tức còn 88%=0,88 giá trị năm liền trước. Từ đó giá trị của máy từng năm trong thời gian này là cấp số nhân với $v_1 = u_7 = 40 \cdot 0,95^6$ triệu và $q' = 0,88$. Khi đó $v_n = v_1 (q')^{n-1} = u_7 (q')^{n-1} = 40 \cdot 0,95^6 \cdot 0,88^{n-1}$ theo đề

bài thì $v_n < 20 \Leftrightarrow 40 \cdot 0,95^6 \cdot 0,88^{n-1} < 20 \Leftrightarrow 0,88^{n-1} < \frac{1}{2 \cdot 0,95^6} \Leftrightarrow n-1 > \log_{0,88} \frac{1}{2 \cdot 0,95^6}$
 $\Rightarrow n-1 > 3,01 \Leftrightarrow n > 4,01$, mà n nguyên nên chọn n nhỏ nhất là $n = 5$.

Tức ứng với v_5 mà $v_1 = u_7$ là năm thứ 7.

Vậy sau 11 năm tức năm 2035 thì giá trị giảm đi còn dưới 20 triệu.

Câu 5: Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2024$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

A. $m = 0$. B. $m = -2$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = 4(m-1)x^3 - 2(m^2-2)x$$

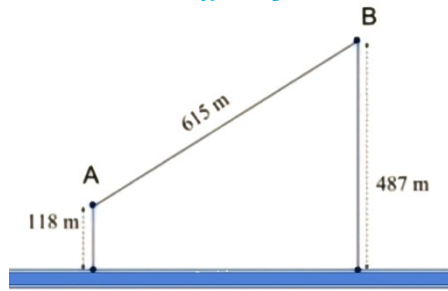
$$y'' = 12(m-1)x^2 - 2(m^2-2)$$

Điều kiện để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ là

$$\begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y''(-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4(m-1) + 2(m^2-2) = 0 \\ 12(m-1) - 2(m^2-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 4m = 0 \\ -2m^2 + 12m - 8 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \\ -2m^2 + 12m - 8 > 0 \end{cases} (*) \Leftrightarrow m = 2. \text{ (do } m = 0 \text{ không thỏa mãn bất phương trình } (*))$$

Câu 6: Cho hai vị trí A, B cách nhau $615m$, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là $118m$ và $487m$. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B . Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là (Kết quả được làm tròn đến hàng phần chục).



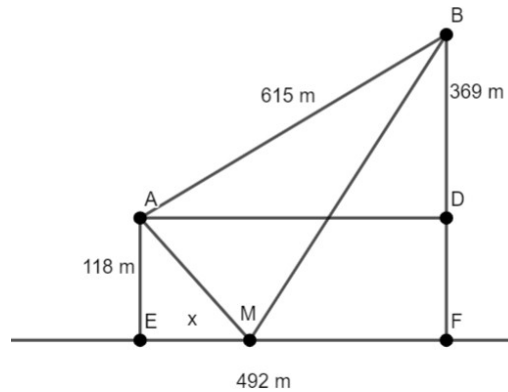
A. 741,2m

B. 779,8m

C. 569,5m

D. 671,4m

Lời giải

Chọn B

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A, B trên bờ sông.

Giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về B .

Ta có $BD = 369m$, $EF = \sqrt{615^2 - 369^2} = 492m$. Đặt $EM = x$.

Khi đó, ta có $MF = 492 - x$, $AM = \sqrt{x^2 + 118^2}$, $BM = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}$.

Gọi là hàm số thể hiện tổng quãng đường AM và BM

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}$$

Ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} = \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} \Leftrightarrow x\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} = (492 - x)\sqrt{x^2 + 118^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2[(492 - x)^2 + 487^2] = (492 - x)^2(x^2 + 118^2) \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (487x)^2 = (492 - x)^2 118^2 \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{58056}{605} \\ x = \frac{-58056}{369} \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{58056}{605}$$

Vì hàm số liên tục trên $[0; 492]$ nên so sánh $f(0) \approx 8103$, $f(492) \approx 993$, $f\left(\frac{58056}{605}\right) \approx 779,8$, ta được giá trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{58056}{605}\right) \approx 779,8m$

Câu 7: Trong hình dưới đây, chiếc laptop được mở gọi nên hình ảnh của một góc nhị diện. Ta gọi số đo góc nhị diện đó là độ mở của laptop. Tính độ mở của laptop biết $BC = 40cm$.



- A. $106,27^\circ$ B. $1,51^\circ$ C. $105,26^\circ$ D. $106,26^\circ$

Lời giải

Chọn D

Laptop có độ dài cạnh $AB = AC = 25cm$.

Số đo góc nhị diện là độ mở của laptop bằng số đo góc $\widehat{BAC}$.

Trong $\triangle ABC$ có $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{25^2 + 25^2 - 40^2}{2 \cdot 25 \cdot 25} = -\frac{7}{25}$.

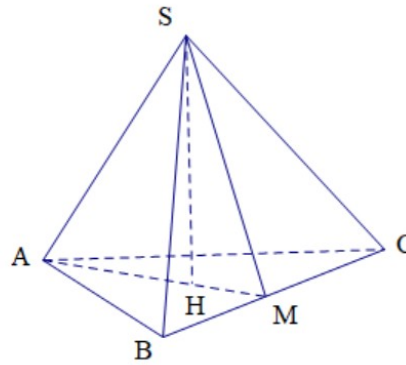
Suy ra độ mở của laptop là $106,26^\circ$.

Câu 8: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a . Độ dài cạnh bên của hình chóp bằng bao nhiêu để góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° .

- A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ B. $\frac{a}{6}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{2a}{3}$

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC , M là trung điểm của BC

$$\Rightarrow AH = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Do $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SH \perp (ABC)$, suy ra hình chiếu vuông góc của SA trên (ABC) là $HA \Rightarrow (SA; (ABC)) = (SA; HA) = \angle SAH = 60^\circ$

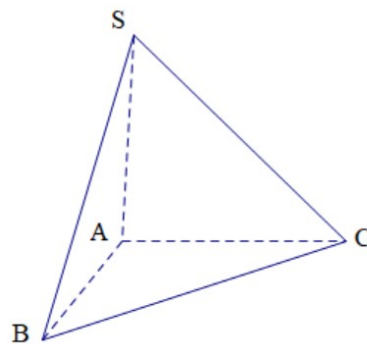
Xét $\triangle SAH$ vuông tại H , ta có: $\cos 60^\circ = \frac{HA}{SA} \Rightarrow SA = HA \cdot \cos 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Biết $SA = 4a$, tam giác ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 2a$, góc $\angle ACB = 30^\circ$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{4a^3}{3}$ B. $V = \frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $V = 8a^3\sqrt{3}$ D. $V = \frac{8a^3}{3}$

Lời giải

Chọn B



Xét tam giác ABC : $\tan \angle ACB = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AB}{\tan \angle ACB} = \frac{2a}{\tan 30^\circ} = 2a\sqrt{3}$

Do đó $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot 4a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} a^3$

Câu 10: Cân nặng của học sinh khối 10 của trường THPT Quỳnh Lưu 1 vào đầu năm được cho như trong bảng dưới đây

Cân nặng	[37,5;42,5)	[42,5;47,5)	[47,5;52,5)	[52,5;57,5)	[57,5;62,5)	[62,5;67,5)
Số học sinh	27	123	150	272	45	10

Trung vị của mẫu số liệu gần với kết quả nào dưới đây?

- A.** 52,75 **B.** 53,75 **C.** 54,24 **D.** 53,18

Lời giải

Chọn A

Ta có cỡ mẫu là $n = 627$; nhóm chứa trung vị là nhóm thứ 4: [52,5;57,5)

$$M_e = 52,5 + \frac{\frac{627}{2} - (27 + 123 + 150)}{272} (57,5 - 52,5) \approx 52,75$$

Số trung vị

Câu 11: Có 10 đội bóng thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt, thắng được 3 điểm, hoà được 1 điểm, thua được 0 điểm. Kết thúc giải đấu, tổng cộng số điểm của tất cả 10 đội là 130 . Hỏi có bao nhiêu trận hoà?

- A.** 7 **B.** 8 **C.** 5 **D.** 6

Lời giải

Chọn C

Tổng số trận đấu của giải là $C_{10}^2 = 45$.

Giả sử có x trận hoà, khi đó có $45 - x$ trận có thắng thua.

Ta có $2x + 3(45 - x) = 130 \Leftrightarrow x = 5$. Vậy có 5 trận hoà.

Câu 12: Cho tập $S = \{1; 2; 3; \dots; 17\}$ gồm 17 số nguyên dương đầu tiên. Chọn ngẫu nhiên 3 phần tử của tập S . Tính xác suất để 3 số được chọn có tổng chia hết cho 3 .

- A.** $\frac{12}{47}$ **B.** $\frac{23}{18}$ **C.** $\frac{43}{68}$ **D.** $\frac{23}{68}$

Lời giải

Chọn D

Số cách chọn ba số bất kì là $C_{17}^3 = 680$.

Tập S được chia thành ba nhóm: nhóm gồm 5 số chia hết cho 3 ; nhóm gồm 6 số chia 3 dư 1 ; nhóm gồm 6 số chia 3 dư 2 .

Để chọn được ba số có tổng là một số chia hết cho 3 thì ba số được chọn ở cùng một nhóm, hoặc mỗi số ở một nhóm. Do đó số cách chọn là $C_5^3 + C_6^3 + C_6^3 + 5.6.6 = 230$.

Vậy xác suất cần tính là $\frac{230}{680} = \frac{23}{68}$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI: Trong mỗi ý ở mỗi câu, hãy chọn đúng hay sai

Câu 13: Bác An gửi 200 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép với hai quyền sở tiết kiệm như sau :

Quyền 1 bác gửi 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng với lãi suất không đổi 6,8% / năm

Quyền 2 bác gửi 100 triệu đồng kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi 6% / năm

a) Sau 2 năm, số tiền tiết kiệm ở quyền 1 (cả vốn và lãi) làm tròn đến hàng triệu là 114 triệu đồng.

b) Sau 2 năm, bác An rút hết tiền ở cả hai quyền sở tiết kiệm thì được nhiều hơn 225 triệu đồng nhưng ít hơn 230 triệu đồng.

c) Nếu bác An muốn rút về 300 triệu đồng để sửa nhà thì bác cần gửi ít nhất 8 năm.

d) Nếu sau 1 năm, bác An rút một nửa số tiền ở quyền 1 (cả vốn và lãi) rồi chuyển sang quyền 2 và tiếp tục gửi thì sau 2 năm (tính từ thời điểm bắt đầu gửi) bác An rút hết tiền về sẽ có lợi hơn là giữ nguyên hai quyền sở như gửi ban đầu.

Lời giải

Đặt $a = 100$ (triệu đồng); $r_1 = 6,8\%$; $r_2 = 6\%$

a) Sau 2 năm, số tiền tiết kiệm ở quyền 1 bác An nhận được là

$$P_2 = a(1 + r_1)^2 = 100(1,068)^2 \approx 114 \text{ (triệu đồng)}.$$

Suy ra a đúng.

b) Sau 2 năm, số tiền tiết kiệm ở quyền 2 bác An nhận được là

$$Q_2 = a(1 + r_2)^4 = 100(1,06)^4 \approx 126,2 \text{ (triệu đồng)}$$

Vậy sau 2 năm, tổng số tiền ở cả 2 quyền sở tiết kiệm bác An nhận được là

$$T_2 = P_2 + Q_2 = 114 + 126,2 = 240,2 \text{ (triệu đồng)}$$

Suy ra b sai.

c) Sau n năm, tổng số tiền ở cả 2 quyền sở tiết kiệm bác An nhận được là

$$T_n = 100(1,068)^n + 100(1,068)^{2n}$$

Do đó, sau 8 năm tổng số tiền ở cả 2 quyền sở tiết kiệm bác An nhận được là

$$T_8 = 100(1,068)^8 + 100(1,068)^{16} \approx 423,3 \text{ (triệu đồng)}$$

Suy ra c sai.

d) Sau 1 năm, số tiền tiết kiệm ở quyền 1 bác An nhận được là

$$P_1 = 100(1,068) = 106,8 \text{ (triệu đồng)}$$

Sau 1 năm, số tiền tiết kiệm ở quyền 2 bác An nhận được là

$$Q_1 = a(1 + r_2)^2 = 100(1,06)^2 = 112,36 \text{ (triệu đồng)}$$

*) Tổng số tiền sau 2 năm bác An nhận được nếu gửi tiết kiệm theo cách thứ 1 là

$$S_1 = 100(1,068)^2 + 100(1,06)^4 = 240,3 \text{ (triệu đồng)}$$

*) Tổng số tiền sau 2 năm bác An nhận được nếu gửi tiết kiệm theo cách thứ 2 là

$$S_2 = 53,4.(1,068) + 165,76.(1,06)^2 = 243,3 \text{ (triệu đồng)}$$

Suy ra d đúng.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O và $AB = a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SB tạo với đáy góc 60° . Vẽ các đường cao AH của tam giác SAB , AK của tam giác SAD và AE của tam giác SAO .

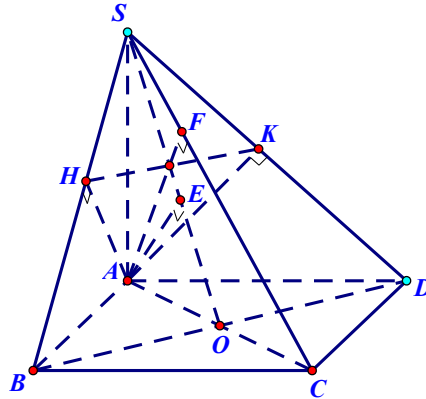
a) $AB \parallel (SCD)$.

b) $AE \perp (SBD)$.

c) Thể tích khối chóp $S.ABO$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

d) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AHK) bằng $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải



a) Vì $AB \parallel CD, CD \subset (SCD), AB \not\subset (SCD)$. Suy ra $AB \parallel (SCD)$.

Suy ra a đúng.

b) $\left. \begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} BD \perp AE \\ AE \perp SO \end{array} \right\} \Rightarrow AE \perp (SBD)$

Suy ra b đúng.

c) Vì $SA \perp (ABCD)$ suy ra góc giữa SB và $(ABCD)$ bằng $\angle SBA$.

$$\Rightarrow \angle SBA = 60^\circ \Rightarrow SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$V_{S.ABO} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABO} = \frac{1}{3} SA \cdot \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Suy ra c sai.

d) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AHK) bằng $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

$$\text{Gọi } F = SC \cap (AHK).$$

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow BC \perp AH \\ AH \perp SB \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp SC$$

Tương tự $AK \perp SC$.

$$\text{Suy ra } SC \perp (AHK) \Rightarrow AF \perp SC, d(C, (AHK)) = CF$$

$$CF \cdot SC = AC^2 \Rightarrow CF = \frac{AC^2}{SC} = \frac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Vậy } d(C, (AHK)) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Suy ra d đúng.

Câu 15: Một đội bóng 11 người thì có 7 cầu thủ chủ chốt gồm A, B, C, D, E, F, G . Đối với những trận bóng không quan trọng thì huấn luyện viên quyết định chỉ tung một số cầu thủ trong 7 cầu thủ chủ chốt trên với nguyên tắc

- (1) Nếu A ở trên sân thì D và E cũng phải ở trên sân.
 - (2) Nếu B ở trên sân thì F ngồi dự bị.
 - (3) Nếu E dự bị thì F ở trên sân.
 - (4) Nếu C ở trên sân thì B hoặc G hoặc cả hai đều ở trên sân.
 - (5) Nếu cả C và G đều ở trên sân thì D ngồi dự bị.
- a) Phương án A, C, D, E huấn luyện viên có thể sử dụng trong một trận **không** quan trọng.
 - b) Nếu cả C và F đều ở trên sân, thì ba trong số bảy cầu thủ chủ chốt ở trên sân.
 - c) Nếu chỉ có 1 cầu thủ chủ chốt ở trên sân thì có thể là B .
 - d) A và F đều có mặt trên sân.

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Sai.

a) Mệnh đề đúng vì: thỏa mãn cả 5 nguyên tắc trên (Với nguyên tắc 4, xét B ở trên sân còn G dự bị).

b) Mệnh đề đúng vì: Nếu F ở trên sân thì B phải dự bị. Từ đó kết hợp với C ở trên sân thì G phải có ở trên sân. Như vậy có 3 cầu thủ C, F, G trong số 7 cầu thủ chủ chốt ở trên sân.

c) Mệnh đề sai vì: Nếu chỉ có 1 cầu thủ chủ chốt B ở trên sân thì F ngồi dự bị. Theo nguyên tắc 3 thì E phải ở trên sân. Khi đó có 2 cầu thủ B và E trên sân.

d) Mệnh đề sai vì:

Nếu A ở trên sân thì D và E cũng phải ở trên sân (*).

Nếu xét F dự bị thì E phải ở trên sân (thỏa mãn (*)).

Câu 16: Nếu đoạt giải trong cuộc thi Sao Mai, bạn sẽ được tuyển thẳng vào Nhạc viện. Nếu như mệnh đề trên là đúng thì điều nào sau đây cũng đúng?

(I) Nếu bạn không đoạt giải trong cuộc thi Sao Mai, bạn không được tuyển thẳng vào Nhạc viện.

(II) Nếu bạn muốn được tuyển thẳng vào Nhạc viện, bạn phải đoạt giải trong cuộc thi Sao Mai.

(III) Nếu như bạn không được tuyển thẳng vào Nhạc viện thì bạn không đoạt giải trong cuộc thi Sao Mai.

a) Chỉ (I) đúng.

b) Chỉ (II) đúng.

c) Chỉ (III) đúng.

d) Chỉ (I) và (II) đúng.

Lời giải

a)) Chỉ (I) đúng.

Chọn SAI.

b) Chỉ (II) đúng.

Chọn SAI.

c) Chỉ (III) đúng.

Chọn ĐÚNG.

d) Chỉ (I) và (II) đúng.

Chọn SAI.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN: Trong mỗi câu, hãy viết phần trả lời ngắn không quá 4 ký tự (phải là số) và để ngoài MathType

Câu 17: Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa, và cả các suối nước đổ về hồ. Từ lúc $8h$ sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống

$$h(t) = 24t + 5t^2 - \frac{t^3}{3}$$

theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức . Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy định trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước muộn nhất là lúc mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

Lời giải

Trả lời: 15

$$h'(t) = 24 + 10t - t^2 \Rightarrow h'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 12 \end{cases}$$

Ta có

Bảng biến thiên:

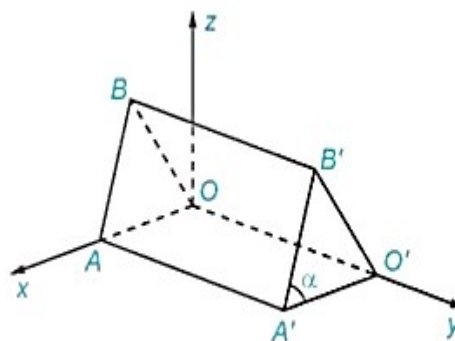
t	0	12	$+\infty$	
$h'(t)$		+	0	-
$h(t)$	0	432	$-\infty$	

Vậy mức nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ. Vậy phải thông báo cho dân di dời vào 15 giờ chiều cùng ngày

Câu 18: Những căn nhà gỗ trong Hình 2.47a được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như hình 2.47b. Với hệ tọa độ $Oxyz$ thể hiện như Hình 2.47b (đơn vị đo lấy theo cm), tọa độ hai điểm $A'(240;450;0)$ và $B'(120;450;300)$. Thể tích mỗi căn gỗ bằng bao nhiêu m^3



a)



b)

Lời giải

Trả lời: 16,2

Quan sát hệ trục tọa độ $Oxyz$ ở Hình 2.47b ta có $A'(240;450;0) \Rightarrow O'(0;450;0), A(240;0;0)$

$$\text{Khi đó, } V_{OAB.O'A'B'} = AA'.S_{O'A'B'} = \frac{1}{2} AA'. \left[\overline{O'A'}, \overline{O'B'} \right]$$

$$\text{Ta có: } AA' = 450, \overline{O'A'} = (240;0;0), \overline{O'B'} = (120;0;300) \Rightarrow \left[\overline{O'A'}, \overline{O'B'} \right] = (0;72000;0)$$

$$\Rightarrow \left[\overline{O'A'}, \overline{O'B'} \right] = 72000 \Rightarrow S_{O'A'B'} = \frac{1}{2} \left[\overline{O'A'}, \overline{O'B'} \right] = 36000$$

$$\text{Vậy } V_{OAB.O'A'B'} = 450.36000 = 16200000 \text{ cm}^3 = 16,2 \text{ m}^3$$

PHẦN: Tự luận

Câu 19: (^{3,5} điểm)

a) (2.0 điểm) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$

Biết $f(0)=1; f(2)=-2$. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số

$$y = \frac{(m+1)f(x)-20}{f(x)-m}$$

nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{(m+1)f(x)-20}{f(x)-m}$ Đk: $f(x) \neq m, \forall x \in (0;2)$

có $y' = f'(x) \cdot \left[\frac{-m(m+1)+20}{(f(x)-m)^2} \right]$

Do $f'(x) < 0 \forall x \in \square \Rightarrow f'(x) < 0 \forall x \in (0;2)$.

Và khi $x \in (0;2) \Rightarrow f(x) \in (-2;1)$.

Hàm số $y = \frac{(m+1)f(x)-20}{f(x)-m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

$\Leftrightarrow y' < 0 \forall x \in (0;2)$ và $m \neq f(x) \forall x \in (0;2)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 < m < 4 \\ -m(m+1)+20 > 0 \\ m \notin (-2;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-5;-2] \cup [1;4)$$

Do m thuộc đoạn $[-10;10]$ và m nguyên nên $m \in \{-4;-3;-2;1;2;3\}$. Vậy có 6 giá trị m nguyên thỏa mãn.

b) (1,5 điểm) Cho hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 3$ thỏa mãn điều kiện $\min_{(0;2)} f(x) = f(1) = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})$ trên đoạn $[-1;1]$

Lời giải

Hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 3$ thỏa mãn điều kiện $\min_{(0;2)} f(x) = f(1) = 1$. Suy ra hàm số đạt cực

tiểu tại điểm $x = 1$ và $f(1) = 1$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 2b + c = 0 \\ 1 + b + c + 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -3 \end{cases}$$

Ta có:

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 3$$

$$y = f(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})$$

Xét

$$t = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}, x \in [-1; 1] \quad t' = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} \Leftrightarrow x = 0$$

đặt ;

x	-1	0	1
t'	+	0	-
t	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$

$$t \in [\sqrt{2}; 2]$$

Từ bảng biến thiên suy ra

$$y = f(t), t \in [\sqrt{2}; 2]$$

Xét

$$f'(t) = 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \notin [\sqrt{2}; 2] \\ t = -1 \notin [\sqrt{2}; 2] \end{cases}$$

$$f(2) = 5; f(\sqrt{2}) = 3 - \sqrt{2} \Rightarrow \text{GTLN của } y = f(t), t \in [\sqrt{2}; 2] \text{ là } f(2) = 5$$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $f(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 5

Câu 20: (2.0 điểm) Ba bạn Nhung, Nhâm, Việt mỗi bạn viết lên bảng một số tự nhiên nhỏ hơn 32 . Tính xác suất để tích ba số tự nhiên được viết lên bảng chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 16 .

Lời giải

Tập các số tự nhiên nhỏ hơn 32 là $X = \{0; 1; 2; \dots; 31\}$

Số phần tử của Không gian mẫu $n(\Omega) = 32^3$.

Chia X thành 4 tập nhỏ:

$X_1 = \{0; 16\}$ là các số chia hết cho 16, tập X_1 có 2 số.

$X_2 = \{4; 8; 12; 20; 24; 28\}$ là các số chia hết cho 4 và không chia hết cho 16, tập X_2 có 6 số.

$X_3 = \{2; 6; 10; 14; 18; 22; 26; 30\}$ tập X_3 có 8 số.

$X_4 = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; 25; 27; 29; 31\}$ tập X_4 có 16 số.

Gọi A là biến cố “Tích ba số tự nhiên được viết lên bảng chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 16”.

Các trường hợp để biến cố A xảy ra:

TH1: 1 số thuộc X_2 , 1 số thuộc X_3 , 1 số thuộc X_4 . Có $6.8.16.3! = 4608$.

TH2: 1 số thuộc X_2 , 2 số thuộc X_4 . Có $6.16.16.3! = 9216$.

TH3: 2 số thuộc X_3 , 1 số thuộc X_4 . Có $8.8.16.3! = 6144$.

Số phần tử của biến cố $n(A) = 4608 + 9216 + 6144 = 19968$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{19968}{32^3} = \frac{39}{64}$$

Xác suất của biến cố

Câu 21: (2.0 điểm) Một tỉnh A đưa ra nghị quyết về giảm biên chế cán bộ công chức, viên chức hưởng lương từ ngân sách nhà nước trong giai đoạn 2024-2030 (6 năm) là $10,6\%$ so với số lượng hiện có năm 2024 theo phương thức “ra 2 vào 1” (tức là khi giảm đối tượng hưởng lương từ ngân sách nhà nước 2 người thì được tuyển mới 1 người). Giả sử tỉ lệ giảm và tuyển dụng mới hàng năm so với năm trước đó là như nhau. Tính tỉ lệ tuyển dụng mới hàng năm (làm tròn đến $0,01\%$).

Lời giải

Gọi $x (x \in N^*)$ là số cán bộ công chức tỉnh A năm 2024.

Gọi r là tỉ lệ giảm hàng năm.

Số người mất việc năm thứ nhất là: $x.r$.

Số người còn lại sau năm thứ nhất là: $x - x.r = x(1-r)$.

Tương tự, số người mất việc sau năm thứ hai là: $x(1-r).r$.

Số người còn lại sau năm thứ hai là: $x(1-r) - x(1-r).r = x(1-r)^2$.

Suy ra số người mất việc sau năm thứ sáu là: $x(1-r)^5.r$.

Tổng số người mất việc là: $x.r + x(1-r).r + x(1-r)^2.r + \dots + x(1-r)^5.r = 10,6\%x$

$$\Leftrightarrow r + (1-r).r + (1-r)^2.r + \dots + (1-r)^5.r = 10,6\%$$

$$\Leftrightarrow r \frac{1-(1-r)^6}{1-(1-r)} = 0,106 \Rightarrow r \approx 0,0185$$

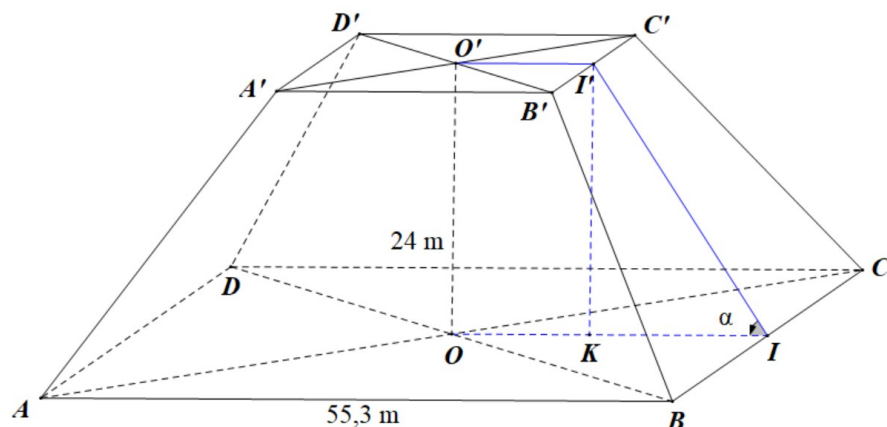
Vì tỉ lệ giảm hàng năm bằng với tỉ lệ tuyển dụng mới nên tỉ lệ tuyển dụng mới hàng năm là 1,85%

Câu 22: (2.0 điểm) Hình bên là hình chụp đền Kukulcan, là một kim tự tháp Trung Mỹ nằm ở khu di tích Chichen Itza, Mexico, được người Maya xây vào khoảng từ thế kỉ IX đến thế kỉ XII. Phần thân của đền, không bao gồm đền nằm phía trên, có dạng một khối chóp cụt tứ giác đều (không tính cầu thang và coi các mặt bên là phẳng) với độ dài đáy dưới là $55,3(m)$, chiều cao là $24(m)$, góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy là α . Tính thể tích của phần thân ngôi đền có dạng khối chóp cụt tứ giác đều đó theo đơn vị mét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) biết rằng $\tan \alpha = \frac{320}{211}$.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Lời giải



Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$ và K là hình chiếu vuông góc của I' trên OI .

Ta có $OO' = I'K = 24 \text{ m}, OI = \frac{1}{2}AB = 27,65 \text{ m}$

Xét tam giác $I'KI$ vuông tại K có $\tan \alpha = \frac{I'K}{KI} = \frac{320}{211} \Rightarrow KI = \frac{211}{320} \cdot 24 = \frac{633}{40} = 15,825 \text{ m}$

$$\Rightarrow OK = O'I' = OI - IK = 27,65 - \frac{633}{40} = 11,825 \text{ m} \Rightarrow A'B' = 23,65 \text{ m}$$

$$\text{Suy ra } S = S_{ABCD} = 55,3^2 = 3058,09 \text{ m}^2, \quad S' = S_{A'B'C'D'} = 23,65^2 = 559,3225 \text{ m}^2$$

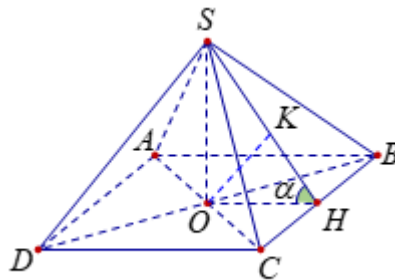
$$V = \frac{1}{3}(S + \sqrt{S.S'} + S').OO' = 39402,06 \text{ m}^3$$

Vậy thể tích của khối chóp cắt là:

Câu 23: Ông An muốn thiết kế một mái che giếng trời hình chóp di động để có thể tùy thích lấy ánh sáng cho ngôi nhà của mình. Biết rằng đáy của hình chóp là hình chữ nhật có độ dài ^{2} cạnh đáy là ^3m và ^2m và các cạnh bên bằng nhau (hình vẽ minh họa). Ông An mong muốn góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng nằm ngang (ABC) là α thỏa mãn $30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$, đồng thời khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SBC) là lớn nhất, tính khoảng cách lớn nhất đó.



Lời giải



Ta gọi hình chóp là $S.ABCD$ có giao điểm hai đường chéo là O , H là trung điểm BC

Ta có O là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Ta có góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\angle SHO = \alpha$, $30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$

Mặt phẳng $(SHO) \perp (SBC)$, gọi K là hình chiếu của O trên SH thì khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng $d(O, (SBC)) = OK$

Do đó $d(A, (SBC)) = 2d(O, (SBC)) = 2OK$

Xét tam giác OHK ta có $OK = OH \sin \alpha = \frac{AB}{2} \sin \alpha = \frac{3}{2} \sin \alpha$

Nên $d(A, (SBC)) = 3 \sin \alpha$

Mà $30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$ suy ra $\frac{3}{2} \leq d(A, (SBC)) \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SBC) đạt giá trị lớn nhất là $\frac{3\sqrt{2}}{2} m$.

ĐỀ 9**ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI****MÔN: TOÁN 12****PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN**

1.A	2.A	3.C	4.D	5.B	6.A	7.C	8.C
9.A	10.B	11.C	12.A	13.D	14.C	15.C	16.B
17.D	18.D	19.B	20.B	21.D	22.A	23.B	24.C

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

CÂU 1	CÂU 2	CÂU 3	CÂU 4	CÂU 5
a) Đúng	a) Đúng	a) Sai	a) Đúng	a) Đúng
b) Sai	b) Sai	b) Đúng	b) Đúng	b) Sai
c) Sai	c) Sai	c) Đúng	c) Sai	c) Sai
d) Đúng	d) Đúng	d) Sai	d) Sai	d) Đúng

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu	1	2	3	4	5	6
Chọn	5	4045	259	0,29	0,02	109

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN: Trong mỗi câu hỏi, hãy chọn 1 đáp án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và có đạo hàm

$f'(x) = (3-x)(1-x)^2(x+1)^3(x^2+3x+6)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;3)$. B. $(-\infty;1)$. C. $(3;+\infty)$. D. $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn A

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (3-x)(1-x)^2(x+1)^3(x^2+3x+6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

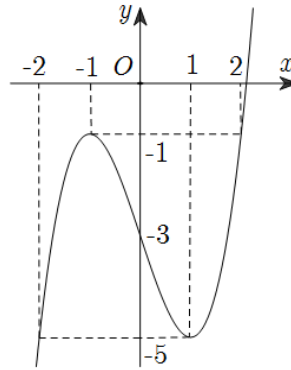
Ta có:

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;3)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\square$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi m , M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$. Giá trị của $m + M$ là



A. $m + M = -6$ **B.** $m + M = 0$ **C.** $m + M = -1$ **D.** $m + M = -5$

Lời giải

Chọn A

Nhìn vào đồ thị ta thấy:

$$M = \max_{[-2;2]} f(x) = -1 \text{ khi } x = -1 \text{ hoặc } x = 2.$$

$$m = \min_{[-2;2]} f(x) = -5 \text{ khi } x = -2 \text{ hoặc } x = 1.$$

Do đó, $m + M = -6$.

Câu 3: Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m trong $[-10;10]$ để đồ thị hàm số

$$y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2-(m+3)x+m+2}$$

có đúng một đường tiệm cận đứng là

A. 8. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 19.

Lời giải

Chọn C

Ta thấy:

$$y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2-(m+3)x+m+2} = \frac{-x+1}{(x-1)(x-m-2)(x+1+\sqrt{x^2+3x})} = \frac{-1}{(x-m-2)(x+1+\sqrt{x^2+3x})}$$

Với $m = -1$ thì $D = (-\infty; -3] \cup [0; +\infty) \setminus \{1\}$.

$$y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2-2x+1} = \frac{-1}{(x-1)(x+1+\sqrt{x^2+3x})}$$

Khi đó, ta có hàm số

Vì phương trình $x+1+\sqrt{x^2+3x} = 0$ vô nghiệm và $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x = 1 \Rightarrow m = -1$ thỏa mãn.

Với $m \neq -1$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-m-2)(x+1+\sqrt{x^2+3x})} = \frac{1}{4(m+1)}$$

$\Rightarrow x = 1$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Để đường $x = m+2$ là tiệm cận đứng thì $\begin{cases} m+2 \leq -3 \\ m+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -5 \\ m \geq -2 \end{cases}$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow (m+2)^+} y = \pm\infty$ (tùy theo m) nên $x = m+2$ là tiệm cận đứng khi $\begin{cases} m \geq -2 \\ m \leq -5 \\ m \neq -1 \end{cases}$.

Kết hợp cả hai trường hợp và $m \in [-10; 10]$, ta được $m \in \{-10, -9, \dots, -5, -2, -1, \dots, 10\}$. Tổng tất cả các giá trị của m là 7.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	0	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	+	0	-	+
y	$+\infty$	-1	4	-1	$+\infty$

Phương trình $f(x^2 - 2x) = 3$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A. 3. B. 8. C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn D

$$f(t) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a < -1 \\ t = b \in (-1; 0) \\ t = c \in (0; 1) \\ t = d \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

Đặt $t = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 > -1, \forall x \neq -1$. Phương trình trở thành

Nhật xét: với mỗi $t \leq -1$ phương trình vô nghiệm, với mỗi $t > -1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $(x-1)^2 = t+1 \Leftrightarrow 1 \pm \sqrt{t+1}$.

Phương trình $t = a$ vô nghiệm vì $a < -1$, mỗi phương trình $t = b, t = c, t = d$ đều có hai nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm thực phân biệt.

Câu 5: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B đồng thời cùng với điểm $I(1; 1)$ tạo thành một tam giác nội tiếp đường tròn có đường kính bằng $2\sqrt{5}$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m+1 \\ x = m-1 \end{cases}.$$

Gọi hai điểm A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $\Rightarrow \begin{cases} A(m+1; -2m-2) \\ B(m-1; -2m+2) \end{cases} \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$.

$DABI$ nội tiếp đường tròn có bán kính $R = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{AB}{\sin \angle AIB} = 2R \Leftrightarrow \sin \angle AIB = 1 \Leftrightarrow IA \perp IB$.

$$\overline{IA} \cdot \overline{IB} = 0 \Leftrightarrow m(m-2) + (2m+3)(2m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

Do đó, ta có:

Vậy có 2 số m thỏa mãn bài toán.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có $|\vec{u}| = 2\sqrt{5}, |\vec{v}| = \sqrt{5}$ và $|\vec{u} - 2\vec{v}| = 2\sqrt{5}$. Tìm số đo góc tạo bởi hai vector $\vec{u}$ và $(\vec{u} - \vec{v})$.

A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } (2\sqrt{5})^2 = |\vec{u} - 2\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 4|\vec{v}|^2 - 4\vec{u}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\vec{v} = 5.$$

$$\text{Suy ra } |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u} - \vec{v}|^2} = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\vec{v}} = \sqrt{15}.$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{u} - \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v})}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u} - \vec{v}|} = \frac{\vec{u}^2 - \vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u} - \vec{v}|} = \frac{|\vec{u}|^2 - \vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u} - \vec{v}|} = \frac{(2\sqrt{5})^2 - 5}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{15}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Khi đó

$$\text{Vậy } (\vec{u}, \vec{u} - \vec{v}) = 30^\circ.$$

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$.

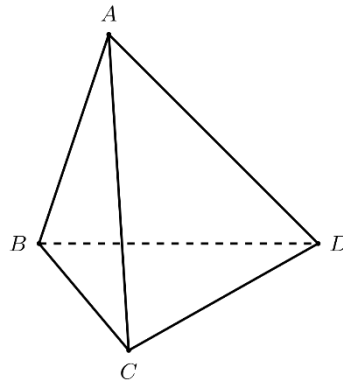
B. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$.

D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CB} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}.$$

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 5; 2)$, $\vec{c} = (4; -1; 3)$ và $\vec{x} = (-3; 22; 5)$

A. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$.

B. $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.

C. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

D. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $\vec{x} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} + p \cdot \vec{c}$, $m, n, p \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow (-3; 22; 5) = m \cdot (2; 3; 1) + n \cdot (-1; 5; 2) + p \cdot (4; -1; 3) \Rightarrow \begin{cases} 2m - n + 4p = -3 \\ 3m + 5n - p = 22 \\ m + 2n + 3p = 5 \end{cases} \quad (I)$$

Giải hệ phương trình (I) ta được: $\begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ p = -1 \end{cases}$.

Vậy $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

Câu 9: Cô Hà thống kê lại đường kính thân gỗ của một số cây xoan đào 6 năm tuổi được trồng ở một lâm trường ở bảng sau.

Đường kính (cm)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)
Tần số	5	20	18	7	3

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- A.** 25. **B.** 30. **C.** 6. **D.** 69,8.

Lời giải

Chọn A

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $65 - 40 = 25(cm)$.

Câu 10: Một công ty cung cấp nước sạch thống kê lượng nước các hộ gia đình trong một khu vực tiêu thụ

Lượng nước tiêu thụ (m^3)	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)
Số hộ gia đình	24	57	42	29	8

Công ty muốn gửi một thông báo khuyến nghị tiết kiệm nước đến ^{25%} các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ cao nhất. Vậy công ty nên gửi thông báo tiết kiệm nước đến các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ từ bao nhiêu m^3 nước trở lên?

- A.** $11 (m^3)$ **B.** $11,79 (m^3)$ **C.** $10,56 (m^3)$ **D.** $12,17 (m^3)$

Lời giải

Chọn D

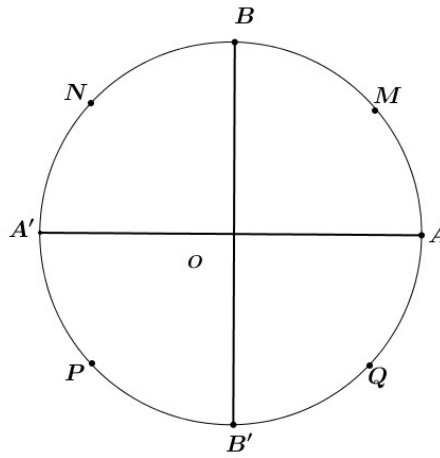
^{25%} các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ cao nhất có lượng nước tiêu thụ lớn hơn hoặc bằng Q_3 , với Q_3 là tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu. Cỡ mẫu $n = 160$.

Nhóm $[9; 12)$ là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy $\geq \frac{3 \cdot 160}{4} = 120$, suy ra tứ phân vị thứ ba của mẫu

số liệu là $Q_3 = 9 + \frac{\frac{160 \cdot 3}{4} - (24 + 57)}{42} \cdot (12 - 9) \approx 11,79 (m^3)$.

Vậy công ty nên gửi thông báo tiết kiệm nước đến các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ từ $11,79 m^3$ nước trở lên.

Câu 11: Trên đường tròn lượng giác gốc A như hình vẽ bên dưới:



Góc lượng giác $-\frac{33\pi}{4}$ có điểm biểu diễn là điểm nào dưới đây?

- A.** P . **B.** M . **C.** Q . **D.** N .

Lời giải

Chọn C

$-\frac{33\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} - 8\pi$, suy ra góc lượng giác $-\frac{33\pi}{4}$ có điểm biểu diễn là điểm Q .

Câu 12: Số nghiệm của phương trình $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ trên khoảng $(0; 3\pi)$ là

- A.** 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

TH1: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; x \in (0; 3\pi) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{12} + k\pi < 3\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{12} < k\pi < \frac{35\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} < k < \frac{35}{12}$.

Do $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2\}$.

TH 2: $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, x \in (0; 3\pi) \Rightarrow 0 < -\frac{\pi}{12} + k\pi < 3\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} < k\pi < \frac{37\pi}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{12} < k < \frac{37}{12}$.

Do $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{1; 2; 3\}$.

Vậy trên $(0; 3\pi)$ phương trình có 6 nghiệm.

Câu 13: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x^2 - 4x) \leq 1$ là

- A.** $(-1; 0) \cup (4; 5)$. **B.** $[-1; 5]$. **C.** $[-1; 0] \cup [4; 5]$. **D.** $[-1; 0) \cup (4; 5]$.

Lời giải

Chọn D

$$x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 0 \end{cases} (*)$$

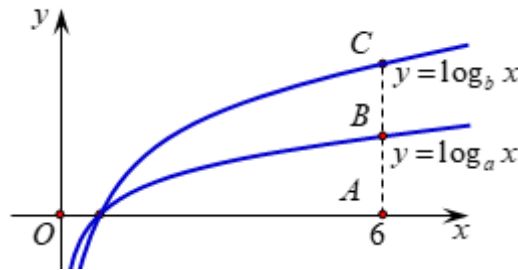
Điều kiện:

$$\log_5(x^2 - 4x) \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x \leq 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[-1; 0) \cup (4; 5]$.

Câu 14: Cho các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x = 6$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại A, B và C thỏa mãn $2AB = 3BC$ và $a.b^5 = 16$. Tổng $a + b^{10}$ bằng

- A. 10. B. 62. C. 66. D. 68.



Lời giải

Chọn C

Điều kiện: a, b là các số dương và khác 1.

Từ các đồ thị hàm số đã cho trên hình ta có $A(6; 0)$, $B(6; \log_a 6)$, $C(6; \log_b 6)$,
 $AC = y_C - y_A = \log_b 6$, $AB = y_B - y_A = \log_a 6$.

$$\text{Ta có } 2AB = 3BC \Leftrightarrow 5AB = 3AC \Leftrightarrow 5\log_a 6 = 3\log_b 6 \Leftrightarrow 5\log_6 b = 3\log_6 a \Leftrightarrow b^5 = a^3$$

$$a.b^5 = 16 \Leftrightarrow a^4 = 16 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow b^5 = 8$$

$$\text{Vậy } a + b^{10} = 2 + 64 = 66$$

Câu 15: Dãy số nào sau đây **không phải** là cấp số nhân?

- A. $1; 1; 1; 1; 1; \dots$ B. $1; -2; 4; -8; 16; -32; \dots$
 C. $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$ D. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \dots$

Lời giải

Chọn C

Dãy $1; 1; 1; 1; 1; \dots$ là cấp số nhân với công bội $q = 1$.

Dãy $1; -2; 4; -8; 16; -32; \dots$ là cấp số nhân với công bội $q = -2$.

Dãy $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$ không phải là cấp số nhân vì $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}; \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{4}$.

Câu 16: Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC . Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$?

- A. $S = \frac{15\pi}{4}$. B. $S = 4\pi$. C. $S = \frac{9\pi}{2}$. D. $S = 5\pi$.

Lời giải

Chọn B

Vì dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ là các tam giác đều nên bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác bằng cạnh $\times \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Với $n=1$ thì tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng 3 nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ có bán kính $R_1 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_1 = \pi \left(3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2$.

Với $n=2$ thì tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{3}{2}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ có bán kính $R_2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_2 = \pi \left(3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2$.

Với $n=3$ thì tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng $\frac{3}{4}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_3B_3C_3$ có bán kính $R_3 = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_3 = \pi \left(3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2$.

Như vậy tam giác đều $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$ có bán kính $R_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_n = \pi \left(3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2$.

Khi đó ta được dãy $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = S_1 = 3\pi$ và công bội $q = \frac{1}{4}$.

Do đó tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \frac{u_1}{1-q} = 4\pi$.

- Câu 17:** Cho $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \frac{a}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $P = 3a - 2b$.
- A. 9. B. -18. C. 16. D. -9.

Lời giải

Chọn D

Ta có:
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=6 \end{cases}$$

Vậy $P = 3.1 - 2.6 = -9$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{mx^2 - (m-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 8 + m^2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

- Câu 18:** Cho hàm số liên tục tại $x=1$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của m để hàm số liên tục tại $x=1$?
- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = [-3; +\infty)$.

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^2 - (m-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(mx+2)(x-1)}{\sqrt{x+3} - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(mx+2)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} [(mx+2)(\sqrt{x+3}+2)] = 4(m+2)$$

Mặt khác $f(1) = 8 + m^2$.

Do đó, hàm số đã cho liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 4(m+2) = 8 + m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=4 \end{cases}$$

- Câu 19:** Tính thể tích V của một khối lăng trụ biết đáy có diện tích $S = 10\text{cm}^2$, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° và độ dài cạnh bên bằng 10cm .
- A. $V = 100\text{cm}^3$. B. $V = 50\sqrt{3}\text{cm}^3$. C. $V = 50\text{cm}^3$. D. $V = 100\sqrt{3}\text{cm}^3$.

Chọn B

Xét khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC .

Gọi H là hình chiếu của A' trên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow A'H \perp (ABC)$. Suy ra AH là hình

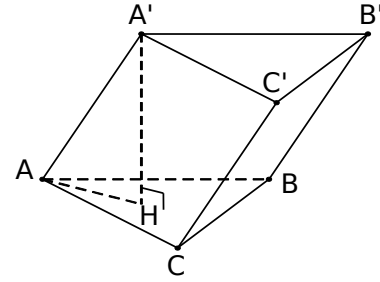
chiếu của AA' trên mặt phẳng (ABC) . Do đó

$$60^\circ = \widehat{AA', (ABC)} = \widehat{AA', AH} = \widehat{AAH}.$$

Tam giác $A'AH$ vuông tại H , có

$$A'H = AA' \cdot \sin \widehat{AAH} = 5\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } V = S_{\Delta ABC} \cdot A'H = 50\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$



Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và $C'D'$ bằng a .
Tính thể tích V của khối lập phương đã cho.

- A.** $V = 8a^3$. **B.** $V = 2\sqrt{2}a^3$. **C.** $V = 3\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = 27a^3$.

Lời giải

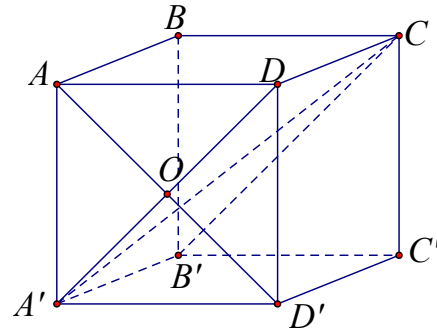
Chọn B

Đặt cạnh hình lập phương là x .

Gọi $O = AD' \cap A'D$, ta có $D'O \perp (DCB'A')$.

Ta có: $A'C \subset (DCB'A') // C'D'$ nên
 $d(C'D'; A'C) = d(C'D'; (DCB'A'))$

$$= d(D'; (DCB'A')) = D'O = \frac{x\sqrt{2}}{2} = a$$



Do đó, $x = a\sqrt{2}$. Thể tích khối lập phương là: $V = x^3 = 2\sqrt{2}a^3$.

Câu 21: Trong một hộp bánh có ^{6} loại bánh nhân thịt và ^{4} loại bánh nhân đậu xanh. Có bao nhiêu cách lấy ra ^{6} bánh để phát cho các em thiếu nhi?

- A.** A_{10}^6 . **B.** $6!$. **C.** 10^6 . **D.** C_{10}^6 .

Lời giải

Chọn D

Vì chỉ cần chọn ra 6 bánh từ 10 bánh nên ta có: C_{10}^6 cách

Câu 22: Cho một đa giác đều 48 đỉnh. Lấy ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác. Tính số tam giác tạo thành từ ba đỉnh đó là một tam giác nhọn.

- A.** 4048. **B.** 1101. **C.** 4049. **D.** 4050.

Lời giải

Chọn A

Số cách chọn ra 3 đỉnh tùy ý từ 48 đỉnh của đa giác là C_{48}^3 .

* Tính số tam giác tù

+ Chọn đỉnh thứ nhất có 48 cách chọn.

+ Để tạo thành tam giác tù thì ba đỉnh của tam giác phải thuộc cùng một nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác. Trong 47 đỉnh còn lại sẽ có 23 đỉnh cùng với đỉnh đã chọn thuộc cùng một nửa đường tròn ngoại tiếp. Nên số tam giác tù tạo thành là $48C_{23}^2$ (tam giác).

* Tính số tam giác vuông tạo thành

+ Có 24 đường chéo đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

+ Mỗi đường chéo trên cùng với 46 đỉnh còn lại tạo thành 46 tam giác vuông. Nên số tam giác vuông tạo thành là $24 \cdot 46 = 1104$ (tam giác).

Do đó số tam giác nhọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $C_{48}^3 - 48C_{23}^2 - 1104 = 4048$.

Câu 23: Một lớp có ^{25} học sinh nam và ^{20} học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Tính xác suất chọn được một học sinh nữ.

A. $\frac{4}{5}$.

B. $\frac{4}{9}$.

C. $\frac{1}{9}$.

D. $\frac{1}{20}$.

Lời giải

Chọn B

Chọn ngẫu nhiên 1 bạn từ 45 bạn, $n(\Omega) = C_{45}^1 = 45$

A là biến cố: “chọn được một học sinh nữ”, $n(A) = C_{20}^1 = 20$

Xác suất của biến cố A : $P(A) = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$.

Câu 24: Có ba lực cùng tác động vào một vật. Lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ tạo với nhau một góc 120° và có độ lớn lần lượt là 20 N và 15 N. Lực $\vec{F}_3$ vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn bằng 4 N. Độ lớn của hợp lực của ba lực trên bằng (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

A. 18,40 N.

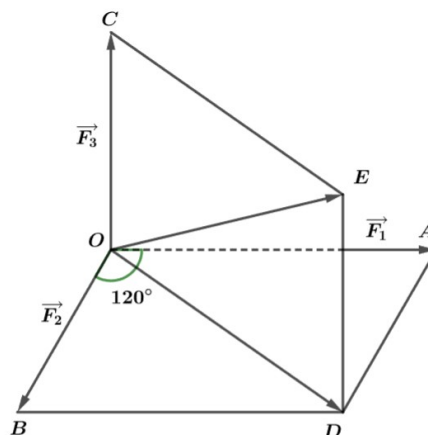
B. 18,50 N.

C. 18,47 N.

D. 18,46 N.

Lời giải

Chọn C



Vẽ $\vec{OA} = \vec{F}_1$, $\vec{OB} = \vec{F}_2$, $\vec{OC} = \vec{F}_3$.

Dựng hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

Hợp lực tác động vào vật là $\vec{F} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD} + \vec{OC} = \vec{OE}$.

Áp dụng định lí côsin trong tam giác OBD , ta có

$$OD^2 = BD^2 + OB^2 - 2 \cdot BD \cdot OB \cdot \cos \angle OBD = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 120^\circ$$

Vì $OC \perp (OADB)$ nên $OC \perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó, tam giác ODE vuông tại D .

Ta có $OE^2 = OC^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 120^\circ$.

Suy ra $OE = \sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 120^\circ}$

$$= \sqrt{4^2 + 20^2 + 15^2 + 2 \cdot 20 \cdot 15 \cdot \cos 120^\circ} \approx 18,47$$

Vậy độ lớn của hợp lực là $F = OE \approx 18,47 \text{ N}$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI: Trong mỗi ý ở mỗi câu, hãy chọn đúng hay sai

Câu 25: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đỉnh C có toạ độ là $C(3; 3; 0)$.

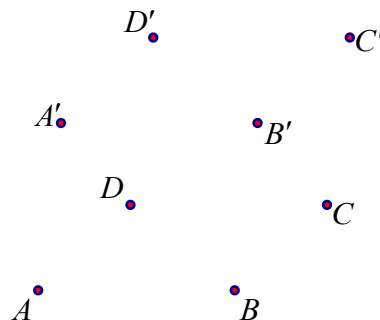
b) Chu vi tam giác ABD bằng $6 + 3\sqrt{3}$.

c) $|\vec{AC'} - 2\vec{AD'}| = 2\sqrt{3}$.

d) Gọi điểm $M(x; y; z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 + MB^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó toạ độ điểm là $M(0; 1; 0)$.

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng.



a) Ta có $\vec{AB} = (3; 0; 0)$. Gọi $C(x; y; z) \Rightarrow \vec{DC} = (x; y - 3; z)$

$$ABCD \text{ là hình bình hành} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow C(3; 3; 0)$$

Chọn ĐÚNG.

b) $\overrightarrow{AB} = (3; 0; 0) \Rightarrow AB = 3$

$\overrightarrow{BD} = (-3; 3; 0) \Rightarrow BD = 3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AD} = (0; 3; 0) \Rightarrow AD = 3$

Chu vi tam giác ABD là: $P = AB + BD + AD = 6 + 3\sqrt{2}$.

Chọn SAI.

c) $|\overrightarrow{AC'} - 2\overrightarrow{AD'}| = |\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD'}| = |\overrightarrow{AD'} - 2\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD'}| = D'B$

$\overrightarrow{D'B} = (3; -3; 3) \Rightarrow D'B = 3\sqrt{3}$.

Chọn SAI.

d) Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa
$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 3x = 0 \\ 3 - 3y = 0 \\ -3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow I(1; 1; 0)$$

$$MA^2 + MB^2 + MD^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2$$
$$= 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + ID^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}) = 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + ID^2$$

Mà $M \in (Oyz) \Rightarrow MA^2 + MB^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI đạt min $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên $(Oyz) \Leftrightarrow M(0; 1; 0)$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 26: Đo chiều cao của 40 học sinh lớp 12A cho trong bảng sau:

Chiều cao (cm)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)	[175;180)
Số học sinh	5	11	12	9	2	1

a) Giá trị đại diện của nhóm $[150;155)$ là 152,5.

b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho ở bảng trên xấp xỉ là 6,8 cm.

c) Một của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là $36,14$ cm.

d) Chiều cao của lớp 12B đồng đều hơn lớp 12A. Biết rằng người ta tính được phương sai của mẫu số liệu lớp 12B xấp xỉ là $34,1$.

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng.

a) Giá trị đại diện của nhóm $[150;155)$ là $\frac{150+152}{2} = 152,5$.

Chọn ĐÚNG.

b)

Số phần tử của mẫu số liệu là $n = 40$

Tứ phân vị thứ nhất là $\frac{1}{2}(x_{10} + x_{11}) \in [155; 160)$ nên ta có tứ phân vị thứ nhất là

$$Q_1 = 155 + \frac{\frac{40}{4} - 5}{11} \cdot 5 = \frac{1730}{11} \approx 157,3 \quad (\text{cm})$$

Tứ phân vị thứ ba là $\frac{1}{2}(x_{30} + x_{31}) \in [165; 170)$

$$\text{Áp dụng công thức, ta có tứ phân vị thứ ba là } Q_3 = 165 + \frac{\frac{3 \cdot 40}{4} - 28}{9} \cdot 5 = \frac{1495}{9} \approx 166,1 \quad (\text{cm})$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho ở bảng trên là

$$\Delta Q = Q_3 - Q_1 \approx 166,1 - 157,3 = 8,8 \quad (\text{cm}).$$

Chọn SAI.

c)

Nhóm chứa một là $[160, 165)$. Khi đó một được xác định là

$$M_0 = 160 + \frac{12 - 11}{(12 - 11) + (12 - 9)} \cdot 5 \approx 161,25$$

Chọn SAI.

d)

Số trung bình cộng của bảng số liệu ghép nhóm ở trên là

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 152,5 + 11 \cdot 157,5 + 12 \cdot 162,5 + 9 \cdot 167,5 + 2 \cdot 172,5 + 1 \cdot 177,5}{40} = \frac{1295}{8} \approx 161,9$$

Phương sai của mẫu số liệu đã cho ở bảng trên là

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{5 \cdot (152,5 - 161,9)^2 + 11 \cdot (157,5 - 161,9)^2 + 12 \cdot (162,5 - 161,9)^2 + 9 \cdot (167,5 - 161,9)^2 + 2 \cdot (172,5 - 161,9)^2 + 1 \cdot (177,5 - 161,9)^2}{40} \\ &= \frac{7047}{200} \approx 35,24 \end{aligned}$$

Phương sai của mẫu số liệu đã cho ở bảng trên xấp xỉ là 35,2

Vậy chiều cao của lớp 12B đồng đều hơn lớp 12A.

Chọn ĐÚNG.

Câu 27: Cho phương trình: $\frac{\cos 2x - m \cos x + 1}{2 \cos x + 1} = 0$

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Khi $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

c) Khi $m = -1$, tổng các nghiệm của phương trình trên $\left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ bằng 0.

d) Phương trình đã cho có 4 nghiệm trên $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi $m \in (-2; -1)$.

Lời giải

Chọn a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai.

$$\frac{\cos 2x - m \cos x + 1}{2 \cos x + 1} = 0 \quad (1)$$

a) Đkxđ: $2 \cos x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

Chọn SAI.

b) Khi $m = 0$, phương trình $(1) \Leftrightarrow \cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Chọn ĐÚNG.

c) Khi $m = -1$, phương trình $(1) \Leftrightarrow \cos 2x + \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (L) \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Vì $x \in \left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ nên phương trình có hai nghiệm $x = -\frac{\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{2}$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 0.

Chọn ĐÚNG.

$$(1) \Leftrightarrow \cos 2x - m \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - m \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 & (2) \\ \cos x = \frac{m}{2} & (3) \end{cases}$$

d)

$(2) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Vì $x \in \left(0; \frac{3\pi}{2}\right]$ nên phương trình có hai nghiệm $x = \frac{\pi}{2}$ và $x = \frac{3\pi}{2}$.

Phương trình đã cho có 4 nghiệm trên $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi phương trình (3) có hai nghiệm khác

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \frac{m}{2} < -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} < \frac{m}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < -1 \\ -1 < m < 0 \end{cases}$$

Chọn SAI.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với đáy, với $SA = \frac{a}{2}$. Khi đó các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $BC \perp SA$.

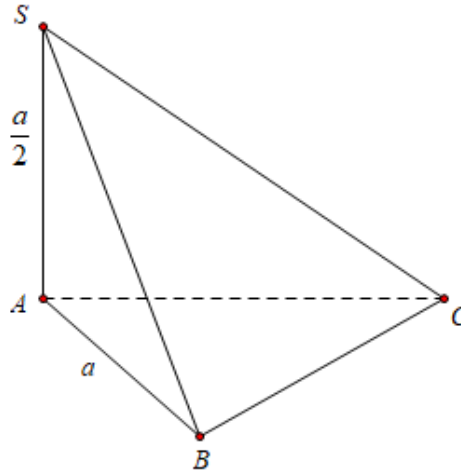
b) Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

c) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng 60° .

d) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm SB, SC . Thể tích khối chóp $A.BCQP$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Sai



a) Theo giả thiết $SA \perp (ABC)$ nên ta suy ra $SA \perp BC$.

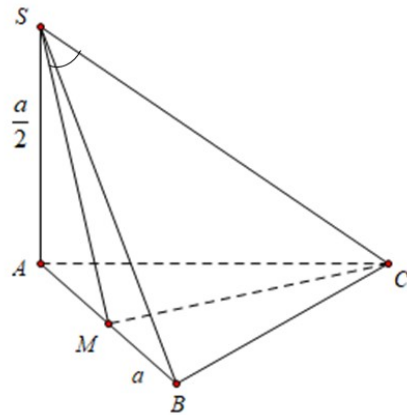
Chọn ĐÚNG.

b) Vì tam giác ABC là tam giác đều cạnh a nên có diện tích là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Chọn ĐÚNG.

c)



Gọi M là trung điểm cạnh AB , ta có: $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB)$
 $\Rightarrow (\overline{SC}, (SAB)) = \overline{SM}$

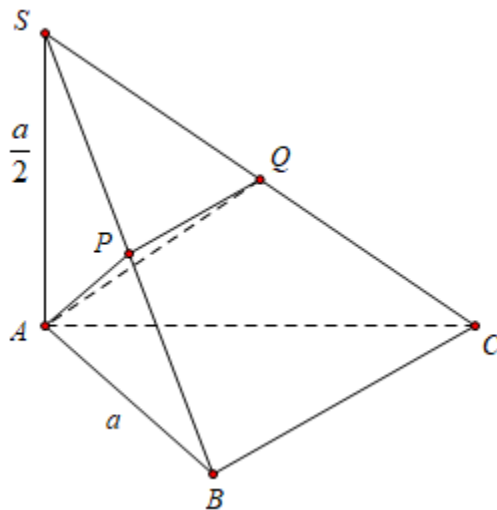
Xét trong tam giác vuông SCM , có:

$$CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \tan \widehat{SCM} = \frac{CM}{SM} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \widehat{SCM} \approx 50^\circ 46'$$

Chọn SAI.

d)



Ta có: $\frac{V_{S.APQ}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SP}{SB} \cdot \frac{SQ}{SC} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Suy ra $V_{S.APQ} = \frac{1}{4} V_{S.ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{24} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{96}$

$$\text{Do đó: } V_{A.BCQP} = V_{S.ABC} - V_{S.APQ} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24} - \frac{a^3\sqrt{3}}{96} = \frac{a^3\sqrt{3}}{32}.$$

Chọn SAI.

Câu 29: Hai hộp bi I và II, mỗi hộp chứa 7 bi trắng, 3 bi đỏ. An lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp I và Bình lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp II. Gọi A_i là biến cố “An lấy được i bi đỏ” và B_j là biến cố “Bình lấy được j bi đỏ”, $i, j \in \{0; 1; 2; 3\}$. Khi đó:

a) A_i và B_j là hai biến cố độc lập.

b) Số phần tử của không gian mẫu của phép thử là 240.

c) Xác suất của biến cố “An và Bình đều không lấy được viên bi đỏ nào” là $\frac{7}{24}$.

d) Xác suất của biến cố “An và Bình lấy được số bi đỏ bằng nhau” là $\frac{1409}{3600}$.

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng

a) A_i và B_j là hai biến cố độc lập, $\forall i, j \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Chọn ĐÚNG.

b) Mỗi hộp có 10 viên bi. An lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp I và Bình lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp II nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{10}^3 \cdot C_{10}^3 = 14400$.

Chọn SAI.

c) Gọi C là biến cố “An và Bình đều không lấy được viên bi đỏ nào”. Khi đó An lấy được 3 viên bi trắng và Bình cũng lấy được 3 viên bi trắng nên $n(C) = C_7^3 \cdot C_7^3 = 1225$.

$$\text{Vậy xác suất của biến cố } C \text{ là: } P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{1225}{14400} = \frac{49}{576}.$$

Chọn SAI.

d) Gọi D là biến cố “An và Bình lấy được số bi đỏ bằng nhau”.

A_0B_0 là biến cố “An và Bình đều không lấy được viên bi đỏ nào”, A_0 và B_0 là hai biến cố độc lập

$$\text{nên } P(A_0B_0) = P(A_0) \cdot P(B_0) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} \cdot \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \left(\frac{7}{24}\right)^2.$$

A_1B_1 là biến cố “An và Bình đều lấy được 1 viên bi đỏ”, A_1 và B_1 là hai biến cố độc lập nên

$$P(A_1B_1) = P(A_1) \cdot P(B_1) = \frac{C_3^1 C_7^2}{C_{10}^3} \cdot \frac{C_3^1 C_7^2}{C_{10}^3} = \left(\frac{21}{40}\right)^2.$$

A_2B_2 là biến cố “An và Bình đều lấy được 2 viên bi đỏ”, A_2 và B_2 là hai biến cố độc lập nên

$$P(A_2B_2) = P(A_2).P(B_2) = \frac{C_3^2 C_7^1}{C_{10}^3} \cdot \frac{C_3^2 C_7^1}{C_{10}^3} = \left(\frac{7}{40}\right)^2$$

A_3B_3 là biến cố “An và Bình đều lấy được 3 viên bi đỏ”, A_3 và B_3 là hai biến cố độc lập nên

$$P(A_3B_3) = P(A_3).P(B_3) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} \cdot \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \left(\frac{1}{120}\right)^2$$

Khi đó:

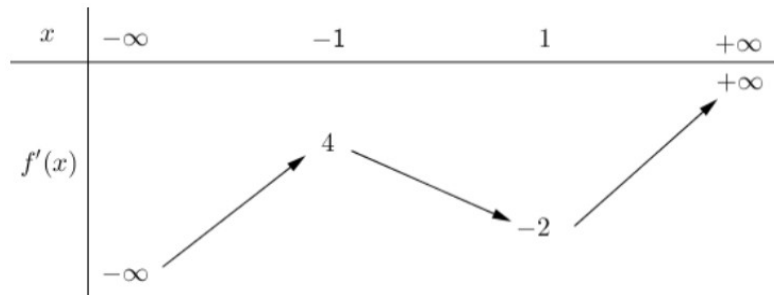
$D = A_0B_0 \cup A_1B_1 \cup A_2B_2 \cup A_3B_3$ và các biến cố $A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3$ đôi một xung khắc.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } P(D) &= P(A_0B_0) + P(A_1B_1) + P(A_2B_2) + P(A_3B_3) \\ &= \left(\frac{7}{24}\right)^2 + \left(\frac{21}{40}\right)^2 + \left(\frac{7}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{120}\right)^2 = \frac{1409}{3600} \end{aligned}$$

Chọn ĐÚNG.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN: Trong mỗi câu, hãy viết phần trả lời ngắn không quá 4 ký tự (phải là số) và để ngoài MathType

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$.

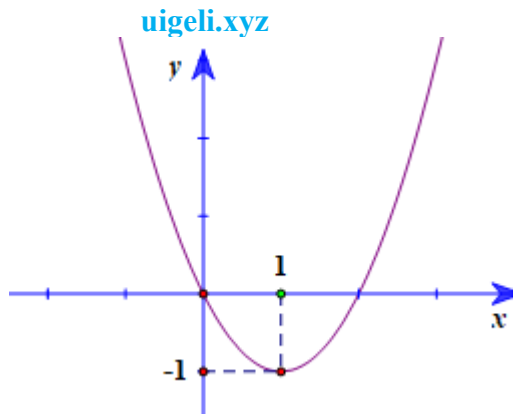
Lời giải

Trả lời: 5

Ta có

$$g'(x) = (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = a \quad (a < -1) & (1) \\ x^2 - 2x = b \quad (b \in (-1; 1)) & (2) \\ x^2 - 2x = c \quad (c > 1) & (3) \end{cases}$$

Đồ thị $y = x^2 - 2x$ như sau:



Từ đó, ta có phương trình (1) vô nghiệm, (2) có hai nghiệm phân biệt và (3) có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của (2).

Vậy $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm đơn nên hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 31: Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ không lớn hơn 2020?

Lời giải

Trả lời: 4045

Với $u = x^3 - 3x^2 + m$ có $u' = 3x^2 - 6x$

Khi đó $u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Do đó $\begin{cases} \min_{[1;3]} u = \min \{u(1); u(3); u(2)\} = \min \{m-2; m; m-4\} = m-4 \\ \max_{[1;3]} u = \max \{u(1); u(3); u(2)\} = \max \{m-2; m; m-4\} = m \end{cases}$

Nếu $m-4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 4 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = m-4 \leq 2020 \Leftrightarrow m \leq 2024 \Rightarrow m \in \{4, \dots, 2024\}$.

Nếu $m \leq 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = -m \leq 2020 \Leftrightarrow -2020 \leq m \Rightarrow m \in \{-2020; \dots; 0\}$.

Nếu $0 < m < 4$ khi đó $\min_{[1;3]} u < 0; \max_{[1;3]} u > 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $m \in \{-2020; \dots; 2024\}$ có tất cả 4045 số nguyên thỏa mãn.

Câu 32: Bất phương trình $\log_2 \frac{4(x+1)}{\sqrt{x}+2} > 2(x-\sqrt{x})$ có tập nghiệm là $S = \left[a; \frac{b+\sqrt{c}}{2} \right)$, trong đó a, b, c là các số nguyên không âm. Tính $a + b^2 + 2c^3$.

Lời giải

Trả lời: 259

Điều kiện xác định: $x \geq 0$

$$\log_2 \frac{4(x+1)}{\sqrt{x}+2} > 2(x-\sqrt{x}) \Leftrightarrow \log_2 4(x+1) - \log_2 (\sqrt{x}+2) > 2(x-\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow 2 + \log_2 (x+1) > \log_2 (\sqrt{x}+2) + 2(x-\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x+1) - 2x > \log_2 (\sqrt{x}+1+1) - 2(\sqrt{x}+1)$$

Xét hàm số $f(x) = \log_2 (x+1) - 2x$, $x \in [0; +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 2} - 2 < 0 \forall x \in [0; +\infty)$$

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[0; +\infty)$.

Mặt khác ta có:

$$\log_2 (x+1) - 2x > \log_2 (\sqrt{x}+1+1) - 2(\sqrt{x}+1)$$

$$\Leftrightarrow f(x) > f(\sqrt{x}+1) \Leftrightarrow x < \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow x-1 < \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 0 \\ x \geq 1 \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

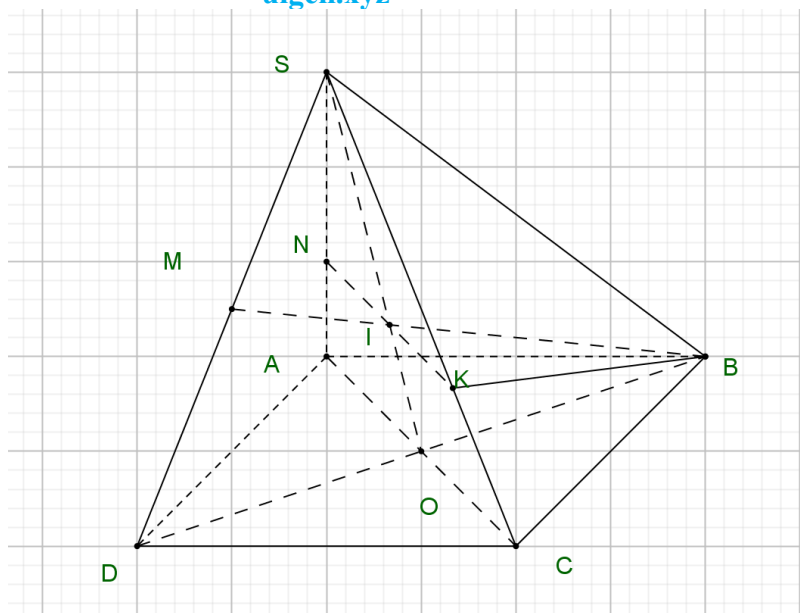
$$\text{Do đó } S = \left[0; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right). \text{ Suy ra } a=0, b=3, c=5.$$

$$\text{Vậy } a+b^2+2c^3 = 0+3^2+2.5^3 = 259.$$

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$ và M là trung điểm cạnh SD . Tính cosin góc giữa đường thẳng AC và đường thẳng BM (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,29



Gọi $O = AC \cap BD$, $I = SO \cap BM$.

Trong mặt phẳng (SAC) kẻ $NK \parallel AC$, $NK \cap SA = N$, $NK \cap SC = K$.

Ta có I là trọng tâm của tam giác SBD .

$$SO^2 = SA^2 + AO^2 = a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Ta có

$$\text{Tam giác } SBD \text{ đều cạnh } a\sqrt{2} \Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow BI = \frac{2}{3}MB = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{IK}{OC} = \frac{2}{3} \Rightarrow IK = \frac{2}{3}OC = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{SK}{SC} = \frac{2}{3} \Rightarrow SK = \frac{2}{3}SC = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$$

$$\text{Tam giác } SBC \text{ vuông tại } B \Rightarrow \cos \angle SBC = \frac{SB}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ta có

$$KB^2 = SK^2 + SB^2 - 2SK \cdot SB \cdot \cos \angle BSK = \left(\frac{2}{3}a\sqrt{3}\right)^2 + 2a^2 - 2 \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2}{3}a^2$$

$$\cos \angle KIB = \frac{IK^2 + IB^2 - KB^2}{2IK \cdot IB} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \frac{2a^2}{3}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0,29$$

Vậy cosin góc giữa 2 đường thẳng AC và đường thẳng BM bằng $\frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0,289$.

Câu 34: Cho tập hợp A gồm 99 số tự nhiên liên tiếp khác nhau $A = \{1; 2; 3; \dots; 99\}$. Chọn ba số khác nhau từ tập hợp A . Tính xác suất để ba số đó lập thành cấp số cộng (làm tròn đến chữ số hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,02Số phần tử không gian mẫu $n(W) = C_{99}^3$.

Gọi biến cố B là biến cố: “Trong ba số được chọn lập thành cấp số cộng”

Gọi a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng ($a, b, c \in A$).Khi đó $b - a = c - b$ hay $2b = a + c$.Do đó a và c phải cùng là số chẵn hoặc cùng là số lẻ nên số cách chọn hai số a, c cùng chẵn hoặc cùng lẻ là $C_{49}^2 + C_{50}^2 = 1176 + 1225 = 2401$.Vì ứng với mỗi cách chọn hai số a, c có duy nhất một cách chọn số b .Vậy số cách chọn ba số khác nhau từ tập hợp A để ba số đó lập thành cấp số cộng là 2401
 $n(B) = 2401$ Xác suất của biến cố B là:
$$P(B) = \frac{n(B)}{n(W)} = \frac{2401}{C_{99}^3} = \frac{49}{3202} \approx 0,015 \approx 0,02$$

Câu 35: Trong 18 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 18t^2 + t + 3$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu mét trên giây trong 18 giây đầu tiên đó?

Lời giải**Trả lời: 109**Ta có $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 36t + 1 \Rightarrow v'(t) = -6t + 36$.Cho $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$ (nhận)

Bảng biến thiên

t	0	6	18
$v'(t)$		+	-
$v(t)$	1	109	-323

Vậy vận tốc tức thời lớn nhất bằng 109 m/s.

ĐỀ 10**ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI****MÔN: TOÁN 12****PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 24. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(0; 2)$. **B.** $(-\infty; -2)$. **C.** $(-2; 2)$. **D.** $(-2; 0)$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên cho thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Câu 2: Nồng độ của một chất hóa học trong máu sau t giờ kể từ lúc tiêm vào cơ thể người được tính bởi

công thức $C = \frac{3t^2 + t}{t^3 + 50}$. Nồng độ chất hóa học đó thay đổi thế nào khi t đủ lớn?

- A.** Nồng độ dần về không.
B. Nồng độ còn lại một nửa.
C. Nồng độ dần về giá trị $0,06$.
D. Nồng độ ổn định với giá trị bằng 3 .

Lời giải

Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} C = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3t^2 + t}{t^3 + 50} = 0$. Do đó nồng độ dần về không khi t đủ lớn.

Câu 3: Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x}$?

- A.** $y = x^3 - 2 \ln|x|$. **B.** $y = 6x - 2 \ln|x|$.
C. $y = x^3 + \frac{2}{x^2}$. **D.** $y = 6x + \frac{2}{x^2}$.

Lời giải

$$\int \left(3x^2 - \frac{2}{x} \right) dx = x^3 - 2 \ln|x| + C.$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_{-1}^8 f(x) dx = -1$ và $\int_4^8 f(x) dx = 4$. Giá trị của

$$P = \int_{-1}^4 f(x) dx$$

bằng bao nhiêu?

- A.** $P = 3$. **B.** $P = -3$. **C.** $P = -5$. **D.** $P = 5$.

Lời giải

$$P = \int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^8 f(x) dx - \int_4^8 f(x) dx = -1 - 4 = -5$$

Áp dụng tính chất ta có:

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 4; -5)$ trên trục Oy là điểm nào dưới đây?

- A.** $M(3; 0; -5)$. **B.** $N(3; -4; -5)$. **C.** $P(0; 4; 0)$. **D.** $Q(3; 0; 0)$.

Chọn C

Lí thuyết.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, vector $\vec{n} = (1; -1; 1)$ **KHÔNG** là vector pháp tuyến của mặt phẳng nào dưới đây?

A. $(P): 2x + y - z - 3 = 0$

B. $(Q): x - y + z - 3 = 0$

C. $(R): \frac{x}{3} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{3} = 1$

D. $(T): -(x-1) + (y+1) - (z-1) = 0$

Lời giải**Chọn A**

Mặt phẳng (P) có một vec tơ pháp tuyến là $(2; 1; -1)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 3y - z - 4 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $I(-1; 0; 2)$ và vuông góc với (P) ?

A. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2 - t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

Lời giải**Chọn B**

Đường thẳng vuông góc với (P) nhận $\vec{n}_p(2; -3; -1)$ làm một vec tơ chỉ phương, qua điểm

$I(-1; 0; 2)$ có dạng: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2 - t \end{cases}$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$. Tâm của (S) là điểm nào dưới đây?

A. $M(-1; -2; -1)$ **B.** $N(-1; -2; 1)$ **C.** $P(1; 2; -1)$ **D.** $Q(1; 2; 1)$

Lời giải**Chọn B**

Lí thuyết.

Câu 9: Bảng dưới đây thống kê kết quả điểm khảo sát môn Tiếng Anh của học sinh khối 12 trong một trường A :

Điểm	$[10; 20)$	$[20; 30)$	$[30; 40)$	$[40; 50)$	$[50; 60)$	$[60; 70)$	$[70; 80)$	$[80; 90)$	$[90; 100)$
Tần số	2	7	9	22	35	41	26	8	2

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng bao nhiêu?

- A.** 90 . **B.** 100 . **C.** 110 . **D.** 152 .

Lời giải

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng: $R = 100 - 10 = 90$

Câu 10: Cho hai biến cố A và B , trong đó $P(A) > 0$. Xác suất của biến cố B với điều kiện A bằng biểu thức nào dưới đây?

- A.** $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. **B.** $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. **C.** $\frac{P(A)}{P(A \cap B)}$. **D.** $\frac{P(B)}{P(A)}$.

Lời giải

Ta có:
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Câu 11: Cho hàm số $y = 2^{x^2-1}$. Phương án nào dưới đây đúng?

- A.** $y' = (2x-1) \cdot 2^{x^2-1} \ln 2$. **B.** $y' = 2x2^{x^2-1} \ln 2$.
C. $y' = 2^{x^2-1} \ln 2$. **D.** $y' = (2x-1)2^{x^2-1}$.

Lời giải

Ta có:
$$y' = (x^2 - 1)' \cdot 2^{x^2-1} \ln 2 = 2x \cdot 2^{x^2-1} \ln 2$$

Câu 12: Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Giá trị $\log_a \sqrt{a}$ bằng bao nhiêu?

- A.** 2 . **B.** -2 . **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

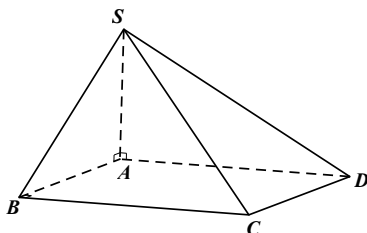
Ta có:
$$\log_a \sqrt{a} = \log_a a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai đường thẳng SB và AD bằng bao nhiêu?

- A.** 60° . **B.** 45° . **C.** 90° . **D.** 30° .

Lời giải

Chọn C

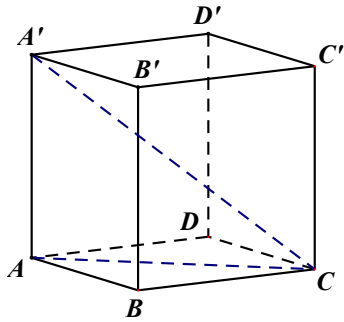


Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD$ và $AB \perp AD$ nên $AD \perp (SAB) \Rightarrow SB \perp AD$.

- Câu 14:** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a, AB = a, AD = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng bao nhiêu?
- A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 30° .

Lời giải

Chọn D



Do khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ nên $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow$ Hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên $(ABCD)$ là AC . Suy ra góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\varphi = (A'C; AC)$.

Xét tam giác vuông $A'AC$ có $AA' = a$ và $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{3}$.

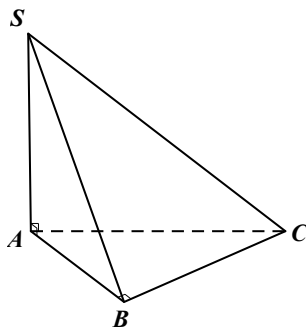
Khi đó: $\tan \varphi = \tan (A'C; AC) = \tan \angle A'CA = \frac{AA'}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$

- Câu 15:** Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) , tam giác ABC vuông tại B . Phương án nào dưới đây SAI?

- A. (SAB) vuông góc với (ABC) . B. (SAC) vuông góc với (ABC) .
C. (SAB) vuông góc với (SBC) . D. (SBC) vuông góc với (ABC) .

Lời giải

Chọn D



$$SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC); (SAC) \perp (ABC)$$

Tam giác ABC vuông tại B suy ra $BC \perp AB$ và $SA \perp (ABC)$ nên $BC \perp (SAB)$
 $\Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$.

Vậy đáp án sai là **D**.

Câu 16: Cho $F(x) = 3x^2 + 1$ và $G(x) = 4x^3 + 2x$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$ và $g(x)$. Xét $H(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $h(x) = f(x)g(x)$. Phương án nào dưới đây ĐÚNG?

- A. $H(x) = (3x^2 + 1)(4x^3 + 2x)$ B. $H(x) = (x^3 + x)(x^4 + x^2)$
C. $H(x) = 6x(12x^2 + 2)$ D. $H(x) = 6(x^2 - 1)(3x^2 + 4)$

Lời giải

Chọn D

Do $F(x) = 3x^2 + 1$ và $G(x) = 4x^3 + 2x$ suy ra $f(x) = 6x$ và $g(x) = 12x^2 + 2$.

Ta có $\int h(x) dx = \int f(x)g(x) dx = \int 6x(12x^2 + 2) dx = \int (72x^3 + 12x) dx = 18x^4 + 6x^2 + C$.

Chọn D

Câu 17: Một bệnh viện thống kê chiều cao của 50 trẻ sơ sinh 12 ngày tuổi một cách ngẫu nhiên. Kết quả thu được như sau:

Độ cao (cm)	[40; 42)	[42; 44)	[44; 46)	[46; 48)	[48; 50)	[50; 52)	[52; 54)
Tần số	4	4	5	10	14	8	5

Bộ giá trị nào sau đây là tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên?

- A. $Q_1 = 45; Q_2 = 47; Q_3 = 51$. B. $Q_1 = 45,5; Q_2 = 47,5; Q_3 = 51,5$.
C. $Q_1 = 45,3; Q_2 = 48,3; Q_3 = 53,3$. D. $Q_1 = 45,8; Q_2 = 48,3; Q_3 = 50,1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có cỡ mẫu $N = 50$

$$Q_2 = M_e = 48 + \frac{\frac{50}{2} - (4 + 4 + 5 + 10)}{14} \cdot 2 = 48,3$$

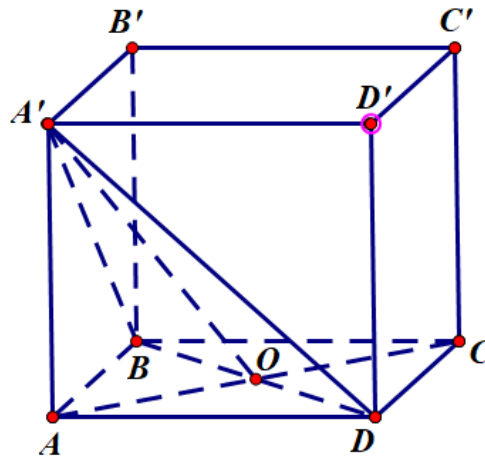
$$Q_1 = 44 + \frac{\frac{50}{4} - (4 + 4)}{5} \cdot 2 = 45,8; \quad Q_3 = 50 + \frac{\frac{3 \cdot 50}{4} - (4 + 4 + 5 + 10 + 14)}{8} \cdot 2 = 50,1$$

Câu 18: Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ đứng đã cho bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ B. $6\sqrt{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $2\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Ta có $BD \perp (A'AC)$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ là $\angle A'OA \Rightarrow \angle A'OA = 60^\circ$ (Vì $\triangle A'AC$ vuông tại A)

$$\text{Ta có } AO = 1, \tan 60^\circ = \frac{A'A}{AO} = \sqrt{3} \Rightarrow A'A = \sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow V_{ABCD A'B'C'D'} = A'A \cdot AB \cdot AD = 2\sqrt{3}.$$

Câu 19: Biết rằng có $0,5\%$ dân số nhiễm virus X. Ông A muốn biết mình có bị nhiễm virus X hay không nên đã đến một bệnh viện để thực hiện một xét nghiệm phát hiện virus. Cho biết xét nghiệm này có sai số là 1% (tức là nếu ông A thực sự bị nhiễm virus X thì xác suất ông A nhận kết quả không bị nhiễm là 1% ; ngược lại, nếu ông A thực sự không bị nhiễm virus X thì xác suất ông A nhận kết quả bị nhiễm là 1%). Xác suất ông A nhận kết quả bị nhiễm virus X từ xét nghiệm này là bao nhiêu?

- A. 0,005. B. 0,01. C. 0,0149. D. 0,0198.

Lời giải

Chọn C

Gọi A là biến cố: “Ông A nhiễm virus X”

B là biến cố: “Ông A nhận kết quả bị nhiễm virus X khi đi xét nghiệm”

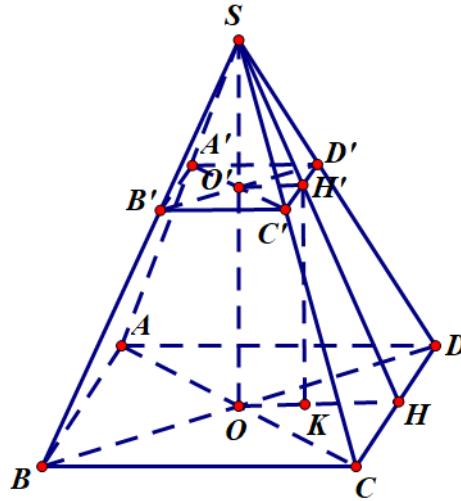
$$\text{Ta có: } P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) = 0,005 \cdot 0,99 + 0,995 \cdot 0,01 = 0,0149.$$

Câu 20: Cho khối chóp cụt tứ giác đều có các cạnh đáy lần lượt bằng 6 và 8 , chiều cao của mặt bên bằng 5 . Thể tích của chóp cụt đã cho bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{148\sqrt{26}}{3}$. B. $\frac{740}{3}$. C. $\frac{296\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{148\sqrt{21}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Xét chóp cắt tứ giác đều $ABCA'B'C'D'$, gọi O, O' lần lượt là tâm của 2 đáy H, H' lần lượt là trung điểm cạnh $CD, C'D'$; K là hình chiếu của H' lên mp $(ABCD)$

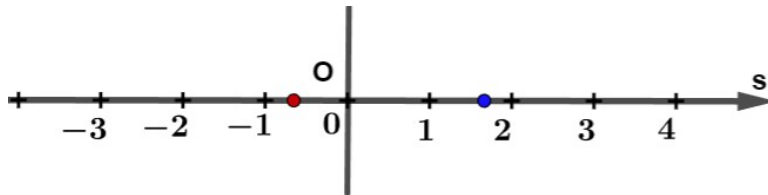
Ta có tứ giác $O'OH H'$ là hình thang vuông đỉnh O', O ; có $H'K$ là đường cao

Từ giả thiết ta có $O'H' = 3; OH = 4; HH' = 5 \Rightarrow H'K = \sqrt{HH'^2 - HK^2} = \sqrt{24}$

Thể tích của chóp cắt cần tính $V_{ABCA'B'C'D'} = \frac{h}{3} (S_{ABCD} + S_{A'B'C'D'} + \sqrt{S_{ABCD} \cdot S_{A'B'C'D'}}) = \frac{296\sqrt{6}}{3}$.

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trên trục Ox , cho hai chất điểm chuyển động có tọa độ theo thời gian t (giây) lần lượt là $s_1 = 2 \sin t$ và $s_2 = \sin 2t$ (tham khảo hình vẽ minh họa).



Những phương án nào dưới đây đúng?

- a) Trong 4 giây đầu tiên, khoảng cách giữa hai chất điểm lớn nhất là 2,60 (làm tròn đến hàng phần trăm).
- b) Trong 2 giây đầu tiên, khi s_1 lớn nhất thì s_2 bằng 0.
- c) Trong 2 giây đầu tiên, khi s_2 lớn nhất thì s_1 bằng 2.
- d) Trong 4 giây đầu tiên, s_1 và s_2 bằng nhau tại 4 thời điểm.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng

Xét hàm số $S = 2 \sin t - \sin 2t$

$S' = 2 \cos t - 2 \cos 2t$

$$S' = 0 \Leftrightarrow \cos t = \cos 2t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2k\pi \\ t = \frac{k2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{Mà } 0 \leq t \leq 4 \Rightarrow t \in \left\{0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$$

$$\text{Ta có } S(0) = 0; S\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}; S\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Do đó } \max S = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,6$$

Vậy trong 4 giây đầu tiên, khoảng cách giữa hai chất điểm lớn nhất là 2,60 (làm tròn đến hàng phần trăm).

b) Đúng

$$\text{Ta có } s_1 = 2 \sin t \leq 2 \Rightarrow \max(s_1) = 2$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \sin t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Mà } 0 \leq t \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi \leq 2 \Leftrightarrow \frac{-1}{4} \leq k \leq \frac{2 - \frac{\pi}{2}}{2\pi}$$

$$\text{Kết hợp điều kiện } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Khi } t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow s_2 = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin \pi = 0$$

c) Sai

$$\text{Ta có } s_1 = \sin 2t \leq 1 \Rightarrow \max(s_1) = 1$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \sin 2t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Mà } 0 \leq t \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \leq 2 \Leftrightarrow \frac{-1}{4} \leq k \leq \frac{2 - \frac{\pi}{4}}{\pi}$$

$$\text{Kết hợp điều kiện } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Khi } t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow s_1 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

d) Sai

$$s_1 = s_2 \Leftrightarrow 2 \sin t = \sin 2t \Leftrightarrow 2 \sin t (1 - \cos t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = 0 \\ \cos t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = k\pi$$

$$0 \leq t \leq 4 \Rightarrow 0 \leq k\pi \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{4}{\pi}$$

Mà

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1\} \Rightarrow \begin{cases} t = 0(s) \\ t = \pi(s) \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện

Do đó trong 4 giây đầu tiên, s_1 và s_2 bằng nhau tại 2 thời điểm.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, xét đường thẳng Δ đi qua $M(2; -1; 1)$ và cắt cả hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$, $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Những phương án nào dưới đây đúng?

a) Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (0; 1; 1)$.

b) Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$.

c) Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm $A(2; 0; 1)$.

d) Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

Giả sử Δ cắt d_1 tại $A \Rightarrow A(2+t; 1-2t; 1+2t)$

Δ cắt d_2 tại $B \Rightarrow B(2+2t'; -3+t'; 1-t')$

$\overrightarrow{MA} = (t; -2t+2; 2t)$; $\overrightarrow{MB} = (2t'; t'-2; -t')$

Vì A, B, M thẳng hàng nên $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ cùng phương nên $\Rightarrow \begin{cases} t = k \cdot (2t') \\ 2-2t = k(t'-2) \\ 2t = k \cdot (-t') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = 0 \\ k = -1 \end{cases}$.

$\Rightarrow A(2; 1; 1), B(2; -3; 1)$

a) Sai

Ta có $\overrightarrow{MA} = (0; 2; 0)$ nên đường thẳng Δ có một vector chỉ phương $\vec{u} = (0; 1; 0)$.

b) Đúng

Phương trình tham số của Δ là
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$$

c) Đúng

Đường thẳng Δ cắt $(Oxz) \Rightarrow y = 0 \Leftrightarrow 1 + t = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

$\Rightarrow \Delta$ cắt (Oxz) tại điểm có tọa độ $(2; 0; 1)$

d) Sai

Đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}' = (2; 1; -1)$

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 1 \neq 0$ nên đường thẳng d và Δ không vuông góc với nhau.

Câu 3: Có hai hộp đựng câu hỏi thi (phiếu), mỗi phiếu ghi một câu hỏi. Hộp thứ nhất có 15 phiếu và hộp thứ hai có 9 phiếu. Biết rằng sinh viên A đi thi chỉ thuộc 10 câu ở hộp thứ nhất và 8 câu ở hộp thứ hai. Thầy giáo rút ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một phiếu thi, sau đó cho sinh viên A rút ngẫu nhiên ra 1 phiếu từ 2 phiếu mà thầy giáo đã rút. Gọi E_1 là biến cố sinh viên A rút ra phiếu từ hộp thứ nhất, E_2 là biến cố sinh viên A rút ra phiếu từ hộp thứ hai. Những phương án nào dưới đây đúng?

a) Xác suất của biến cố E_1 bằng $\frac{1}{2}$.

b) Gọi B là biến cố sinh viên A rút được phiếu đã học thuộc thì $B = (B \cap E_1) \cap (B \cap E_2)$.

c) Xác suất có điều kiện $P(B|E_1) = \frac{8}{9}$.

d) Nếu sinh viên A rút được phiếu đã học thuộc thì xác suất phiếu đó thuộc hộp thứ nhất bằng $\frac{3}{7}$.

Lời giải

Các phương án đúng: a, d.

a. Đúng. Xác suất của biến cố E_1 bằng $\frac{1}{2}$.

b. Sai. Gọi B là biến cố sinh viên A rút được phiếu đã học thuộc thì $B = (B \cap E_1) \cup (B \cap E_2)$.

c. Sai. Xác suất có điều kiện $P(B|E_1)$ là xác suất của biến cố sinh viên đó rút được phiếu đã học thuộc trong điều kiện đó là phiếu từ hộp thứ nhất.

Điều kiện phiếu rút được là từ hộp thứ nhất, ta có trong hộp thứ nhất có 15 phiếu, số cách để thầy giáo rút 1 phiếu từ 15 phiếu là 15 cách.

Để thầy rút được phiếu mà sinh viên đó học thuộc là 10 cách.

Suy ra $P(B|E_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

d. Đúng.

Xác suất nếu sinh viên A rút được phiếu đã học thuộc trong điều kiện phiếu đó thuộc hộp thứ nhất là xác suất $P(E_1|B)$.

Xác suất có điều kiện $P(B|E_2)$ là xác suất của biến cố sinh viên đó rút được phiếu đã học thuộc trong điều kiện đó là phiếu từ hộp thứ hai, suy ra $P(B|E_2) = \frac{8}{9}$.

Theo công thức xác suất toàn phần $P(B) = P(E_1) \cdot P(B|E_1) + P(E_2) \cdot P(B|E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9} = \frac{7}{9}$.

Vậy, theo công thức Bayes, ta có $P(E_1|B) = \frac{P(E_1) \cdot P(B|E_1)}{P(B)} = \frac{3}{7}$.

Câu 4: Xét phương trình $\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{3}{a} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^b$ trên khoảng $(-2; 2)$, với a và b là hai số nguyên dương đều bé hơn 20 . Những phương án nào dưới đây đúng?

- a) Nếu b chẵn thì phương trình có nhiều nhất 2 nghiệm phân biệt trên khoảng $(-2; 2)$.
- b) Nếu b lẻ thì phương trình có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $(-2; 2)$.
- c) Có 38 cặp $(a; b)$ sao cho phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt trên khoảng $(-2; 2)$.
- d) Nếu $a = 1$ thì có đúng 9 giá trị của b sao cho phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt trên khoảng $(-2; 2)$.

Lời giải

Các phương án đúng: a, d).

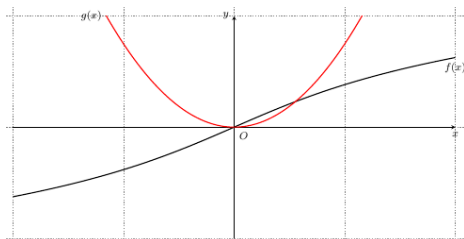
Xét hàm số $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ và $g(x) = \frac{3}{a} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^b$.

Ta có $f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{(x + \sqrt{x^2 + 1}) \ln 10} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot \ln 10} > 0, \forall x$; $g'(x) = \frac{3b}{2a} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{b-1}$.

a. Đúng.

Nếu b chẵn, suy ra $g'(x) = 0$ có một nghiệm đơn $x = 0$.

Vẽ đồ thị hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ lên cùng một mặt phẳng tọa độ ta được

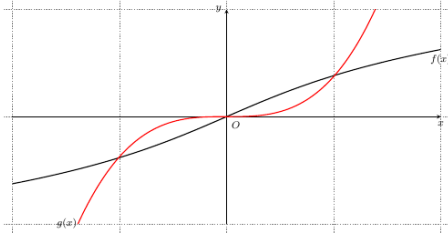


Suy ra phương trình có nhiều nhất 2 nghiệm phân biệt trên khoảng $(-2; 2)$.

b. Sai.

Nếu b lẻ, suy ra $g'(x) = 0$ có một nghiệm kép $x = 0$.

Vẽ đồ thị hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ lên cùng một mặt phẳng tọa độ ta được



Suy ra phương trình có nhiều nhất 3 nghiệm phân biệt trên khoảng $(-2; 2)$.

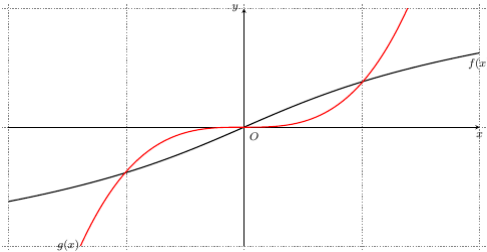
c. Sai.

Phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt trên khoảng $(-2; 2)$ khi b lẻ và

$$g(2) > f(2) \Leftrightarrow \frac{3}{a} > \log(2 + \sqrt{5}) \Leftrightarrow a < 4,78$$

Nếu $b = 1$, ta có $a = 4$, phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt trên khoảng $(-2; 2)$.

Nếu b lẻ và lớn hơn 1, ta vẽ đồ thị hai hàm số lên cùng một mặt phẳng tọa độ



Suy ra $b \in \{3; 5; \dots; 19\}$, $a \in \{1; 2; 3; 4\}$ do đó có 36 cặp $(a; b)$.

Vậy có tất cả 37 cặp $(a; b)$ để phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm phân biệt trên khoảng $(-2; 2)$.

d. Đúng. Nếu $a = 1$ thì có đúng 9 giá trị của b sao cho phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt trên khoảng $(-2; 2)$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $AB = 1$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) và $SA = \sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC . Những phương án nào sau đây đúng?

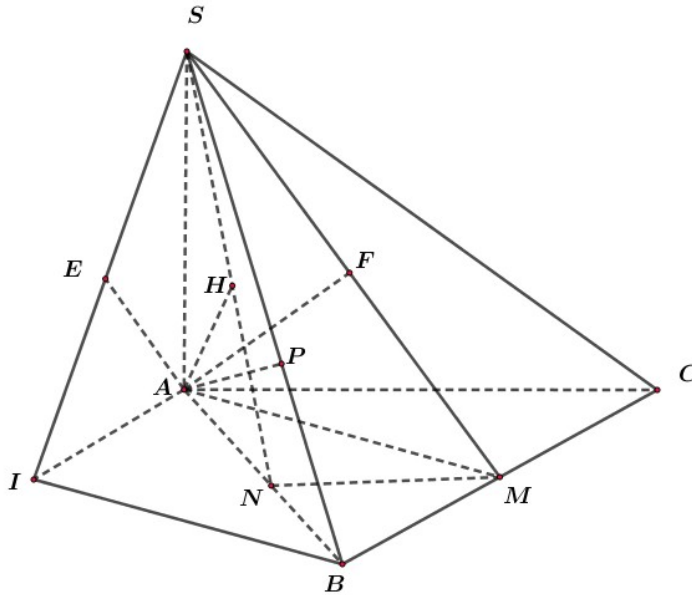
a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SB bằng $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

- c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Các phương án đúng: a;b)



a.ĐÚNG. Gọi N là trung điểm của $AB \Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (SMN)$.

$\Rightarrow d(AC, SM) = d(AC, (SMN)) = d(A, (SMN)) = AH$ (với H là hình chiếu của A lên SN).

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AN^2} \Rightarrow AH = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + 2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Mà

b.ĐÚNG. Kẻ $Bx \parallel AM \Rightarrow AM \parallel (SBx)$.

$$\Rightarrow d(AM, SB) = d(AM, (SBx)) = d(A, (SBx)) = AE$$

Gọi I là hình chiếu của A lên Bx , E là hình chiếu của A lên SI ,

Ta thấy tứ giác $AMBN$ là hình vuông $\Rightarrow AI = BN = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow AE = \frac{\frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}{\sqrt{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

c.SAI. Ta có $\begin{cases} AM \perp SA \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow d(SA, BC) = AM = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

d.SAI. Gọi P là hình chiếu của A lên $SB \Rightarrow AP \perp SB$ (1)

$$\text{Ta có } \begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp SA \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SAB) \Rightarrow AC \perp AP \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } d(SB, AC) = AP = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Xét hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = x^2 - c^2$ và $y = c^2 - x^2$. Tìm hằng số dương c sao cho diện tích hình phẳng đó bằng 10 (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Đáp án: 1,55

Xét phương trình $x^2 - c^2 = c^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm c$.

$$\text{Vậy } 10 = 2 \int_{-c}^c (c^2 - x^2) dx \Leftrightarrow 5 = c^2 x \Big|_{-c}^c - \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-c}^c \Leftrightarrow \frac{4c^3}{3} = 5 \Rightarrow c \approx 1,55$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax + by + cz + 9 = 0$ chứa hai điểm $A(3; 2; 1)$, $B(-3; 5; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + y + z - 5 = 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.

Lời giải

Đáp án: 4

Theo yêu cầu bài toán ta có

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = -9 \\ -3a + 5b + 2c = -9 \\ 3a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -9 \\ c = 15 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 4.$$

Câu 3: Theo nhận định của một chuyên gia, khả năng công ty của ông A mở được một chi nhánh mới ở thành phố X là 40% có thể xảy ra. Nếu đúng như vậy thì khả năng ông A được bổ nhiệm làm giám đốc cho chi nhánh mới này là 80% có thể xảy ra. Xác suất để ông A trở thành giám đốc cho chi nhánh ở thành phố X là bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

Đáp án: 0,32

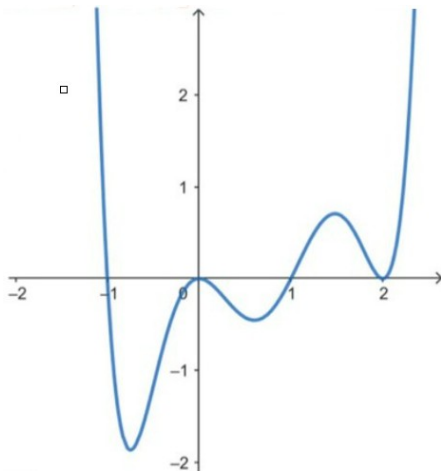
Gọi A: “ Ông A mở được một chi nhánh mới ở thành phố X”

B: “ Ông A được bổ nhiệm làm giám đốc cho chi nhánh mới này”

Khi đó $P(A) = 0,4$ và $P(B|A) = 0,8$.

Vậy xác suất cần tính $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = 0,4 \cdot 0,8 = 0,32$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Biết $f(-1) = -2$. Gọi S là tập hợp các giá trị m nguyên bé hơn 100 để bất phương trình $f(x) - \frac{5}{3}x^3 < m - x^5$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 1)$. Tính tổng các phần tử của S .



Đáp án: 4949

Lời giải

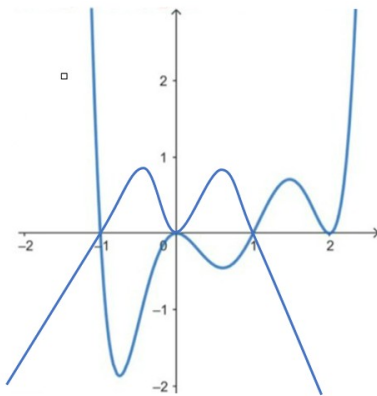
$$f(x) - \frac{5}{3}x^3 < m - x^5 \Leftrightarrow f(x) - \frac{5}{3}x^3 + x^5 < m$$

Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{5}{3}x^3 + x^5$ trên khoảng $(-1; 1)$.

$$g'(x) = f'(x) - (5x^2 - 5x^4)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 5x^2 - 5x^4$$

Đồ thị hàm số $y = 5x^2 - 5x^4$ đi qua các điểm $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$.



$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

x	-1	0	1
$g'(x)$	-	0	-
$g(x)$	$-\frac{4}{3}$		

$$\text{Vậy } m \geq -\frac{4}{3}.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}, m < 100$ nên $m \in \{-1, 0, 1, 2, \dots, 99\} \Rightarrow$ tổng giá trị của m là 4949.

Câu 5: Số lượng cá tính từ lúc thả trong một cái ao sau thời gian (tính bằng tháng) được cho bởi công thức $P(t) = \frac{1000}{1+9e^{-t}}$. Sau n tháng (n là số tự nhiên) thì số lượng cá trong ao vượt hơn 500 con. Số n nhỏ nhất là bao nhiêu?

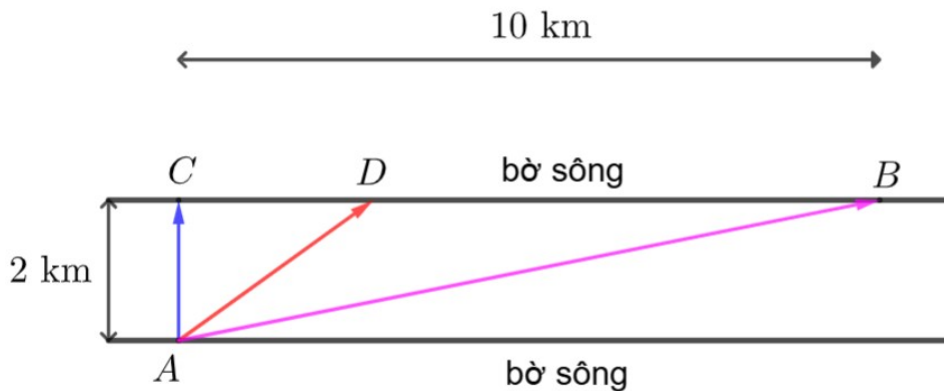
Đáp án:

Giải

Theo giả thiết, ta có $\frac{1000}{1+9e^{-n}} > 500 \Leftrightarrow n > 2$.

Vậy sau 2 tháng số cá trong ao vượt quá 500 con.

Câu 6: Một người chèo một chiếc thuyền xuất phát từ điểm A trên bờ một con sông thẳng rộng 2 km, và muốn đến điểm B cách bờ đối diện 10 km. Người này có thể chỉ chèo thuyền hoặc kết hợp chèo thuyền với chạy bộ, càng nhanh càng tốt. Chẳng hạn, anh ta có thể chèo thuyền qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến điểm B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D nào đó ở giữa C và B rồi chạy bộ đến B , xem hình vẽ minh họa dưới đây. Biết rằng vận tốc chèo thuyền của anh ta là 6 km/h (đã tính vận tốc dòng nước), vận tốc chạy bộ của anh ta là 10 km/h. Trong tất cả các phương án đến B bằng cách chèo thuyền hoặc chèo thuyền rồi chạy bộ, phương án nhanh nhất có tổng thời gian là bao nhiêu giờ? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Lời giải

Đáp án: 1,27

Đặt $BD = x$ (km) là quãng đường người đó chạy bộ với $x \in [0; 10]$.

Khi đó $CD = BC - BD = 10 - x$ (km).

Quãng đường người đó chèo thuyền là $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2}$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{2^2 + (10-x)^2} = \sqrt{(x-10)^2 + 4} \text{ (km)} \text{ (định lý Pythagore)}$$

Gọi t_1, t_2 (giờ) lần lượt là thời gian người đó chèo thuyền và thời gian người đó chạy bộ.

Ta có $t_1 = \frac{AD}{v_1} = \frac{\sqrt{(x-10)^2 + 4}}{6}$ (h) và $t_2 = \frac{BD}{v_2} = \frac{x}{10}$ (h).

Suy ra thời gian người đó đến B là $t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{(x-10)^2 + 4}}{6} + \frac{x}{10}$ (h).

Xét $f(x) = \frac{\sqrt{(x-10)^2 + 4}}{6} + \frac{x}{10}$ với $x \in [0; 10]$.

Ta có $f'(x) = \frac{x-10}{6\sqrt{(x-10)^2 + 4}} + \frac{1}{10}, \forall x \in (0; 10)$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-10}{6\sqrt{(x-10)^2 + 4}} = -\frac{1}{10} \Leftrightarrow 10(x-10) = -6\sqrt{(x-10)^2 + 4}$

$\Leftrightarrow 5(x-10) = -3\sqrt{(x-10)^2 + 4}$ (1) $\Rightarrow 25(x-10)^2 = 9[(x-10)^2 + 4]$

$\Rightarrow 16(x-10)^2 = 36 \Rightarrow (x-10)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \begin{cases} x-10 = \frac{3}{2} \\ x-10 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{2} \notin (0; 10) \\ x = \frac{17}{2} \in (0; 10) \end{cases}$

Thử lại: Thay $x = \frac{17}{2}$ vào phương trình (1) ta thấy thỏa nên nhận $x = \frac{17}{2}$.

Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 10]$ nên có giá trị nhỏ nhất trên $[0; 10]$.

Mà $f(0) = \frac{\sqrt{26}}{3} \approx 1,7$; $f\left(\frac{17}{2}\right) = \frac{19}{15} \approx 1,27$ và $f(10) = \frac{4}{3} \approx 1,33$ nên $\min_{[0; 10]} f(x) = f\left(\frac{17}{2}\right) = \frac{19}{15}$.

Vậy trong tất cả các phương án đến B bằng cách chèo thuyền hoặc chèo thuyền rồi chạy bộ,

phương án nhanh nhất có tổng thời gian là $\frac{19}{15}$ giờ $\approx 1,27$ giờ.

Câu 7: Cho $f(x)$ là hàm số bậc hai thỏa mãn $f(0) = 1$ và $\int \frac{f(x)}{x^2(x+1)^3} dx$ là một họ hàm số có dạng $\frac{P(x)}{Q(x)}$, trong đó $P(x), Q(x)$ là các đa thức. Tính $f'(0)$.

Lời giải

Đáp án: 3

Nhận xét: $x^2(x+1)^3$ là đa thức bậc 5 và $f(x)$ là đa thức bậc hai nên $\frac{f(x)}{x^2(x+1)^3}$ là hàm phân thức

hữu tỉ có bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu. Vì họ nguyên hàm $\int \frac{f(x)}{x^2(x+1)^3} dx$ có dạng $\frac{P(x)}{Q(x)}$ là hàm phân

thức tỷ nên ta có thể phân tích $\frac{f(x)}{x^2(x+1)^3} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3}$

$$\Rightarrow f(x) = a(x+1)^3 + bx^2(x+1) + cx^2$$

$$\Rightarrow f(x) = a(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + b(x^3 + x^2) + cx^2$$

$$\Rightarrow f(x) = (a+b)x^3 + (3a+b+c)x^2 + 3ax + a$$

$$\text{Vì } f(x) \text{ là đa thức bậc hai và } f(0)=1 \text{ nên } \begin{cases} a+b=0 \\ 3a+b+c \neq 0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c \neq -2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } f(x) = (c+2)x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2(c+2)x + 3. \text{ Vậy } f'(0) = 3.$$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1)$, $B(-1;1;0)$ và điểm C nằm trên tia Ox . Biết rằng đường phân giác trong xuất phát từ A vuông góc với đường trung tuyến xuất phát từ B của tam giác ABC . Tìm hoành độ của điểm C . Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

Do điểm C nằm trên tia Ox nên $C(x;0;0)$ với $x > 0$.

Ta có: $\overrightarrow{AC} = (x-1;0;-1)$, $\overrightarrow{BC} = (x+1;-1;0)$, $\overrightarrow{AB} = (-2;1;-1)$ và $\overrightarrow{BA} = (2;-1;1)$.

Gọi $\overrightarrow{u_1}$ là vector chỉ phương của đường phân giác xuất phát từ A , khi đó:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u_1} &= \frac{1}{AB} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{AC} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{\sqrt{6}} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+1}} \overrightarrow{AC} \\ &= \left(\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+1}} - \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{(x-1)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \end{aligned}$$

Gọi $\overrightarrow{u_2}$ là vector chỉ phương của đường trung tuyến xuất phát từ B , khi đó:

$$\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = (x+3;-2;1)$$

Do đường phân giác trong xuất phát từ A vuông góc với đường trung tuyến xuất phát từ B của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$

$$\Leftrightarrow (x+3) \left[\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+1}} - \frac{2}{\sqrt{6}} \right] - 2 \frac{1}{\sqrt{6}} + \left[\frac{-1}{\sqrt{(x-1)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right] = 0 \Rightarrow x \approx 5,8$$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;3;3)$, $B(0;5;5)$, $C(1;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua C sao cho (P) cách A một đoạn bằng 3 và cách B một đoạn bằng 5. Tính khoảng cách từ O đến (P) . Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

Gọi $(P): ax + by + cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Do cần tính khoảng cách O đến (P) , ta chỉ cần xét trường hợp $O \notin (P)$ hay $d \neq 0$.

Ta chọn $d = 1$, khi đó $(P): ax + by + cz + 1 = 0$.

Do (P) đi qua C nên $a + b + c + 1 = 0$.

Ta có:
$$d(A, (P)) = \frac{|2a + 3b + 3c + 1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 3 \quad \text{và} \quad d(B, (P)) = \frac{|5b + 5c + 1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 5$$

Khi đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ |2a + 3b + 3c + 1| = 3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ |5b + 5c + 1| = 5\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 1 - a \\ |4 - a| = 3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ |6 - 5a| = 5\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 1 - a \\ |4 - a| = 3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ 5|4 - a| = 3|6 - 5a| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 1 - a \\ \begin{cases} a = \frac{-1}{5} \\ a = \frac{19}{10} \end{cases} \\ |4 - a| = 3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = \frac{6}{5} \\ a = \frac{-1}{5} \\ b^2 + c^2 = \frac{48}{25} \\ b + c = \frac{-9}{10} \\ a = \frac{19}{10} \\ b^2 + c^2 = \frac{-78}{25} \end{cases}$$

$$d(O, (P)) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{48}{25}}} = \frac{5}{7} \approx 0,71$$

Khi đó,

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho đường tròn (C) là giao tuyến của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 3 = 0$. Xét mặt cầu (T) đi qua (C) và tiếp xúc mặt phẳng $(Q): 2x + y - 2z + 1 = 0$. Tính bán kính của (T) . Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

+) Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R = 2$.

$$d(O; (P)) = \frac{|2 \cdot 0 + 0 - 2 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 1$$

+) Ta có:

Gọi r là bán kính của đường tròn (C) suy ra $r = \sqrt{R^2 - d^2(O; (P))} = \sqrt{3}$

+) Gọi d là đường thẳng đi qua O và vuông góc với (α) , $\vec{u}_d = \vec{n}_{(\alpha)} = (2; 1; -2)$.

Phương trình tham số của d là:

$$\begin{cases} x = 2m \\ y = m \\ z = -2m \end{cases}, m \in \mathbb{R}$$

+) Gọi I là tâm của mặt cầu (T) , R' là bán kính của mặt cầu (T) .

Do (T) chứa (C) nên $I \in d$ suy ra $I(2m; m; -2m)$.

Ta có $\sqrt{r^2 + d^2(I; (P))} = R' = d(I; (Q)) \Leftrightarrow r^2 + d^2(I; (P)) = d^2(I; (Q))$

$$\Leftrightarrow 3 + \frac{(2 \cdot 2m + m - 2 \cdot (-2m) - 3)^2}{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \frac{(2 \cdot 2m + m - 2 \cdot (-2m) + 1)^2}{2^2 + 1^2 + (-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 27 + (9m - 3)^2 = (9m + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 27 + 81m^2 - 54m + 9 = 81m^2 + 18m + 1$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{35}{72}$$

Khi đó $I\left(\frac{35}{36}; \frac{35}{72}; -\frac{35}{36}\right)$. Suy ra $R' = d(I; (Q)) = \frac{\left|2 \cdot \frac{35}{36} + \frac{35}{72} - 2 \cdot \left(-\frac{35}{36}\right) + 1\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{43}{24} \approx 1.79$!