

A. Kiến thức cần nhớ**1. Số hữu tỉ**

- Số hữu tỉ là số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.
- Tập hợp các số hữu tỉ được kí hiệu là $\mathbb{Q}$.

2. Biểu diễn các số hữu tỉ trên trục số.

- Mọi số hữu tỉ đều có thể biểu diễn trên trục số.
- Trên trục số, điểm biểu diễn số hữu tỉ x được gọi là điểm x .

3. So sánh hai số hữu tỉ

- Để so sánh hai số hữu tỉ, ta viết chúng dưới dạng phân số rồi so sánh hai phân số đó.
- Số hữu tỉ lớn hơn 0 gọi là số hữu tỉ dương;
- Số hữu tỉ nhỏ hơn 0 gọi là số hữu tỉ âm;
- Số hữu tỉ 0, không là số hữu tỉ dương cũng không là số hữu tỉ âm.

- Số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ là số hữu tỉ dương nếu a và b cùng dấu, là số hữu tỉ âm nếu a, b khác dấu, bằng 0 nếu $a = 0$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Điền các kí hiệu $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ vào ô trống cho hợp nghĩa (điền tất cả các khả năng có thể):

$$-9 \in \square; \quad 2020 \in \square; \quad \frac{9}{205} \in \square; \quad -\frac{21}{10} \in \square$$

Giải

✓ Tìm cách giải. Khi điền vào ô trống, ta căn cứ vào định nghĩa tập hợp:

- $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$
- $\mathbb{Q} = \left\{ x / x = \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

✓ Trình bày lời giải.

- $-9 \in \mathbb{Z}; -9 \in \mathbb{Q}$
- $2020 \in \mathbb{N}; 2020 \in \mathbb{Z}; 2020 \in \mathbb{Q}$

- $\frac{9}{205} \hat{=} Q$
- $-\frac{21}{10} \hat{=} Q$

✓ **Nhận xét.** Chúng ta lưu ý rằng $N \hat{=} Z \hat{=} Q$, nếu không ý thứ nhất và ý thứ hai của ví dụ dễ bị sót.

Ví dụ 2: Cho số hữu tỉ $x = \frac{a-10}{2020}$. Với giá trị nào của a thì:

- x là số dương;
- x là số âm;
- x không là số dương cũng không là số âm.

Giải

✓ **Tìm cách giải.** Khi xác định dấu của số hữu tỉ, ta lưu ý $\frac{a}{b}$ là số hữu tỉ dương nếu a và b cùng dấu, là số hữu tỉ âm nếu a, b khác dấu. Chú ý rằng $2020 > 0$, ta có lời giải sau:

✓ **Trình bày lời giải.**

a) $x = \frac{a-10}{2020} > 0 \hat{=} a-10$ và 2020 cùng dấu.

Mà $2020 > 0$ nên $a-10 > 0$ suy ra $a > 10$. Vậy với $a > 10$ thì x là số hữu tỉ dương.

b) $x = \frac{a-10}{2020} > 0 \hat{=} a-10$ và 2020 khác dấu.

Mà $2020 > 0$ nên $a-10 < 0$ suy ra $a < 10$. Vậy với $a < 10$ thì x là số hữu tỉ âm.

c) x không là số dương cũng không là số âm tức là $x = 0$ hay $\frac{a-10}{2020} = 0$ suy ra $a = 10$.

Vậy với $a = 10$ thì x không là số dương cũng không là số âm.

Ví dụ 3. So sánh các số hữu tỉ sau:

a) $x = -\frac{25}{35}$ hay $y = -\frac{444}{777}$;

b) $x = -2\frac{1}{5}$ và $y = \frac{110}{-50}$;

c) $x = \frac{17}{20}$ và $y = 0,75$.

Giải

✓ **Tìm cách giải.** Trước khi so sánh hai số hữu tỉ, chúng ta thường thực hiện:

- Đưa các số hữu tỉ về dạng phân số tối giản;
- Quy đồng mẫu số, chú ý để mẫu số dương;
- Sau đó so sánh hai phân số.

✓ **Trình bày lời giải.**

Rút gọn ta có:

$$a) \quad x = \frac{-25}{35} = \frac{-5}{7}; y = \frac{444}{-777} = \frac{-4}{7} \text{ nên } x < y$$

$$b) \quad x = -2\frac{1}{5} = \frac{-11}{5}; y = \frac{110}{-50} = \frac{-11}{5} \text{ nên } x = y$$

$$c) \quad x = \frac{17}{20} \text{ và } y = 0,75 = \frac{75}{100} = \frac{15}{20} < \frac{17}{20} \text{ nên } x > y$$

Ví dụ 4. Viết tập hợp các số nguyên n sao cho số hữu tỉ sau có giá trị là số nguyên.

$$a) \quad \frac{7}{n-5};$$

$$b) \quad \frac{n-2}{5}$$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$) có giá trị là số nguyên khi và chỉ khi a chia hết cho b hay $b \mid a$. Từ đó chúng ta có lời giải sau.

✓ *Trình bày lời giải.*

$$a) \quad \frac{7}{n-5} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n-5 \mid 7 \Leftrightarrow U(7); \text{ mà } U(7) = \{1; 7; -1; -7\} \text{ suy ra bảng giá trị sau:}$$

$n-5$	1	7	-1	-7
n	6	12	4	-2

Vậy với $n \in \{6; 12; 4; -2\}$ thì $\frac{7}{n-5}$ có giá trị là số nguyên.

$$b) \quad \frac{n-2}{5} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n-2 \mid 5 \Leftrightarrow n-2 = 5k \quad (\text{với } k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow n = 5k + 2.$$

Vậy với $n = 5k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $\frac{n-2}{5}$ có giá trị là số nguyên.

Ví dụ 5. Tìm các số nguyên n để số hữu tỉ $\frac{n-21}{n+10}$ có giá trị là số nguyên.

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Đưa về ví dụ 4, bằng cách tách ra một số hạng nguyên.

✓ *Trình bày lời giải.*

$$\frac{n-21}{n+10} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n-21 \mid n+10 \Leftrightarrow (n+10) - 31 \mid n+10$$

$$\Leftrightarrow 31 \mid n+10 \Leftrightarrow n+10 \in U(31) \text{ mà } U(31) = \{1; 31; -1; -31\}.$$

Suy ra ta có bảng giá trị sau:

$n+10$	1	31	-1	-31
n	-9	21	-11	-41

Với $n \in \{-9; 21; -11; -41\}$ thì số hữu tỉ $\frac{n-21}{n+10}$ có giá trị là một số nguyên.

Ví dụ 6. Chứng tỏ rằng số hữu tỉ $x = \frac{3n+2}{4n+3}$ là phân số tối giản, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Để chứng minh $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản ($a, b \in \mathbb{Z}$) chúng ta chứng tỏ ƯCLN ($a; b$) = 1

✓ *Trình bày lời giải.*

Đặt ƯCLN $(3n+2; 4n+3) = d$ (với $d \in \mathbb{N}$) suy ra:

$$3n+2 \equiv 0 \pmod{d} \quad 12n+8 \equiv 0 \pmod{d}$$

$$4n+3 \equiv 0 \pmod{d} \quad 12n+9 \equiv 0 \pmod{d}$$

$$\Rightarrow (12n+9) - (12n+8) \equiv 0 \pmod{d} \Rightarrow 1 \equiv 0 \pmod{d} \Rightarrow d=1$$

Suy ra: ƯCLN $(3n+2; 4n+3) = 1$

Vậy $x = \frac{3n+2}{4n+3}$ là phân số tối giản, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 7. Tìm các số hữu tỉ.

a) Có mẫu là 15, lớn hơn $\frac{-7}{10}$ và nhỏ hơn $\frac{-9}{20}$;

b) Có tử là 4, lớn hơn $\frac{2}{5}$ và nhỏ hơn $\frac{6}{7}$.

Giải

a) Gọi số hữu tỉ cần tìm là $\frac{x}{15}$ với $x \in \mathbb{Z}$.

Theo đề bài, ta có: $\frac{-7}{10} < \frac{x}{15} < \frac{-9}{20} \Leftrightarrow \frac{-42}{60} < \frac{4x}{60} < \frac{-27}{60}$

$$\Leftrightarrow -42 < 4x < -27$$

$$\Leftrightarrow 4x \in \{-40; -36; -32; -28\} \Leftrightarrow x \in \{-10; -9; -8; -7\}$$

Vậy các số hữu tỉ cần tìm là: $\frac{-10}{15}; \frac{-9}{15}; \frac{-8}{15}; \frac{-7}{15}$.

b) Gọi số hữu tỉ cần tìm là $\frac{4}{y}$ với $y \in \mathbb{Z}$

Theo đề bài ta có: $\frac{2}{5} < \frac{4}{y} < \frac{6}{7} \Leftrightarrow \frac{12}{30} < \frac{12}{3y} < \frac{12}{14}$

$$\Leftrightarrow 30 > 3y > 14 \Leftrightarrow 3y \in \{15; 18; 21; 24; 27\} \Leftrightarrow y \in \{5; 6; 7; 8; 9\}$$

Vậy các số hữu tỉ cần tìm là $\frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \frac{4}{9}$.

C. Bài tập vận dụng

1.1. Trong các phân số sau, những phân số nào biểu diễn số hữu tỉ $-\frac{2}{5}$?

$$-\frac{4}{10}; -\frac{8}{12}; -\frac{10}{25}; -\frac{6}{15}; -\frac{9}{15}.$$

1.2. Viết các số hữu tỉ sau dưới dạng phân số với mẫu số dương.

$$\frac{2}{-3}; \frac{8}{-11}; -\frac{21}{10}$$

1.3. Cho ba số hữu tỉ $\frac{6}{5}, \frac{7}{4}, \frac{2}{3}$

a) Viết ba số hữu tỉ bằng mỗi số hữu tỉ trên và có mẫu là số dương.

b) Viết ba số hữu tỉ bằng mỗi số hữu tỉ trên và có mẫu là số dương bằng nhau.

1.4. Cho số hữu tỉ $x = \frac{m+10}{21}$. Với giá trị nào của m thì:

a) x là số dương.

b) x là số âm.

c) x không là số dương cũng không là số âm.

1.5. Cho số hữu tỉ $x = \frac{14m+10}{-2019}$. Với giá trị nào của m thì:

a) x là số dương.

b) x là số âm.

1.6. Viết tập hợp các số nguyên n sao cho số hữu tỉ sau có giá trị là một số nguyên.

a) $\frac{5}{n+1};$

b) $\frac{n+6}{3}$

1.7. Tìm số nguyên a để số hữu tỉ $x = \frac{-2019}{a+6}$ là một số nguyên.

1.8. Tìm các số nguyên x để số hữu tỉ $t = \frac{3x-8}{x-5}$ có giá trị là một số nguyên.

1.9. Chứng tỏ số hữu tỉ $x = \frac{2n+9}{7n+31}$ là phân số tối giản, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

1.10.

a) Cho hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d} (b > 0; d > 0)$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ khi và chỉ khi $ad < bc$.

b) Áp dụng kết quả trên, so sánh các số hữu tỉ sau: $\frac{12}{13}$ và $\frac{22}{25}$; $-\frac{6}{11}$ và $-\frac{8}{15}$.

1.11.

a) Cho hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ ($b > 0; d > 0$). Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

b) Hãy viết ba số hữu tỉ xen giữa hai số hữu tỉ $\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{4}$.

1.12. Cho a, b, m là các số nguyên và $b > 0; m > 0$.

a) So sánh $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+1}{b+1}$. b) So sánh $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+m}{b+m}$.

c) So sánh $\frac{2}{7}$ và $\frac{3}{8}$; $\frac{9}{11}$ và $\frac{7}{9}$.

1.13. Cho các số hữu tỉ a, b, c thỏa mãn $1 < a < b + c < a + 1$ và $b < c$. Chứng minh rằng $b < a$.

1.14. Tìm các số hữu tỉ:

a) Có mẫu số là 20, lớn hơn $\frac{-5}{14}$ và nhỏ hơn $\frac{-3}{14}$;

b) Có tử là 2, lớn hơn $\frac{-5}{8}$ và nhỏ hơn $\frac{-5}{12}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1.1. Những phân số biểu diễn số hữu tỉ $\frac{2}{-5}$ là $\frac{-4}{10}; \frac{-10}{25}; \frac{6}{-15}$.

1.2. $\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}; \frac{8}{-11} = \frac{-8}{11}; \frac{21}{-10} = \frac{21}{10}$

1.3.

a) Ba số hữu tỉ bằng mỗi số hữu tỉ trên và có mẫu là số dương.

$$\frac{6}{5} = \frac{12}{10} = \frac{18}{15} = \frac{24}{20}; \frac{7}{-4} = \frac{-7}{4} = \frac{-14}{8} = \frac{-21}{12}; \frac{2}{-3} = \frac{-2}{3} = \frac{-4}{6} = \frac{-6}{9}$$

b) Ba số hữu tỉ bằng mỗi số hữu tỉ trên và có mẫu là các số dương bằng nhau.

$$\frac{6}{5} = \frac{72}{60}; \frac{7}{-4} = \frac{-105}{60}; \frac{2}{-3} = \frac{-40}{60}$$

1.4.

a) $x > 0 \hat{=} \frac{m+10}{21} > 0 \hat{=} m+10 > 0 \hat{=} m > -10$

Vậy với $m > -10$ thì số hữu tỉ x là số dương.

b) $x < 0 \hat{=} \frac{m+10}{21} < 0 \hat{=} m+10 < 0 \hat{=} m < -10$

Vậy với $m < -10$ thì số hữu tỉ x là số âm.

c) x không là số dương cũng không là số âm

$$\hat{=} x = 0 \hat{=} \frac{m+10}{21} = 0 \hat{=} m+10 = 0 \hat{=} m = -10$$

Vậy với $m=10$ thì số hữu tỉ x không là số dương cũng không là số âm.

1.5.

$$a) \quad x > 0 \hat{=} \frac{14m+10}{-2019} > 0 \hat{=} 14m+10 < 0 \hat{=} 14m < -10 \hat{=} m < -\frac{5}{7}$$

Vậy với $m < -\frac{5}{7}$ thì số hữu tỉ x là số dương.

$$b) \quad x < 0 \hat{=} \frac{14m+10}{-2019} < 0 \hat{=} 14m+10 > 0 \hat{=} 14m > -10 \hat{=} m > -\frac{5}{7}$$

Vậy với $m > -\frac{5}{7}$ thì số hữu tỉ x là số âm.

1.6.

$$a) \text{ Ta có } \frac{5}{n+1} \hat{=} Z \hat{=} n+1 \hat{=} U(5) \text{ mà } U(5) = \{1; 5; -1; -5\}$$

Suy ra bảng giá trị sau:

$n+1$	1	5	-1	-5
n	0	4	-2	-6

Vậy với $n \hat{=} \{0; 4; -2; -6\}$ thì $\frac{5}{n+1} \hat{=} Z$

$$b) \text{ Ta có: } \frac{n+6}{3} \hat{=} Z \hat{=} n+6 \hat{=} n \hat{=} n=3k(k \hat{=} Z)$$

Vậy với $n=3k(k \hat{=} Z)$ thì $\frac{n+6}{3} \hat{=} Z$

$$1.7. \quad \frac{-2019}{a+6} \hat{=} Z \hat{=} a+6 \hat{=} U(-2019)$$

$$\text{Mà } U(-2019) = \{1; 3; 673; 2019; -1; -3; -673; -2019\}$$

Suy ra bảng giá trị sau:

$a+6$	1	3	673	2019	-1	-3	-673	-2019
a	-5	-3	667	2013	-7	-9	-679	-2025

Vậy với $a \hat{=} \{-5; -3; 667; 2013; -7; -9; -679; -2025\}$ thì $\frac{-2019}{a+6}$ là một số nguyên.

$$1.8. \quad \frac{3x-8}{x-5} \hat{=} Z \hat{=} 3x-8 \hat{=} 5 \hat{=} 3(x-5)+7 \hat{=} 5$$

$$\hat{=} 7 \hat{=} 5 \hat{=} x-5 \hat{=} U(7) \text{ mà } U(7) = \{1; 7; -1; -7\}$$

Suy ra bảng giá trị sau:

$x-5$	1	7	-1	-7
x	6	12	4	-2

Vậy với $x \in \{6; 12; 4; -2\}$ thì $t = \frac{3x-8}{x-5} \in \mathbb{Z}$

1.9. Đặt $\text{ƯCLN}(2n+9; 7n+31) = d (d \in \mathbb{N})$

$$\text{Đ} \quad 2n+9 \text{M} \text{Đ} \quad 14n+63 \text{M}$$

$$\text{Đ} \quad 7n+31 \text{M} \text{Đ} \quad 14n+62 \text{M}$$

$$\text{Đ} \quad (14n+63) - (14n+62) \text{M} \text{Đ} \quad 1 \text{M} \text{Đ} \quad d=1$$

Suy ra: $\text{ƯCLN}(2n+9; 7n+31) = 1$. Vậy $x = \frac{2n+9}{7n+31}$ là phân số tối giản với mọi $n \in \mathbb{N}$.

1.10.

a) Quy đồng mẫu hai phân số, ta có: $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}; \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$. Vì $b > 0, d > 0$ nên $bd > 0$, do đó:

• Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{ad}{bd} < \frac{bc}{bd}$ suy ra $ad < bc$

• Nếu $ad < bc$ thì $\frac{ad}{bd} < \frac{bc}{bd}$ suy ra $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

b) Ta có: $\frac{12}{13} > \frac{22}{25}$ vì $12 \cdot 25 > 13 \cdot 22$

Ta có: $-\frac{8}{15} = \frac{-8}{15}$. Vì $(-6) \cdot 15 < 11 \cdot (-8)$, suy ra: $-\frac{6}{11} < \frac{-8}{15}$ Đ $-\frac{6}{11} < -\frac{8}{15}$

1.11.

a) Theo bài , ta có: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, suy ra $ad < bc$ (1).

Từ (1) ta có: $ab + ad < ab + bc$ Đ $a(b+d) < (a+c)b$ hay $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ (2)

Mặt khác, từ (1) ta lại có: $ad + cd < bc + cd$ Đ $d(a+c) < c(b+d)$ hay $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

b) Theo câu a) ta có:

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4} \quad \frac{2}{3} < \frac{5}{7} < \frac{3}{4};$$

$$\frac{2}{3} < \frac{5}{7} \quad \frac{2}{3} < \frac{7}{10} < \frac{5}{7};$$

$$\frac{5}{7} < \frac{3}{4} \text{ suy ra } \frac{5}{7} < \frac{8}{11} < \frac{3}{4};$$

$$\text{Vậy ta có: } \frac{2}{3} < \frac{7}{10} < \frac{5}{7} < \frac{8}{11} < \frac{3}{4}.$$

1.12.

a) Trường hợp 1. Xét $a > b \Rightarrow ab + a > ab + b$

$$\Leftrightarrow a(b+1) > b(a+1) \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1}$$

Trường hợp 2. Xét $a < b \Rightarrow ab + a < ab + b$

$$\Leftrightarrow a(b+1) < b(a+1) \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$$

$$\text{Vậy: Nếu } a > b \text{ thì } \frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1}$$

$$\text{Nếu } a < b \text{ thì } \frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$$

b) Trường hợp 1. Xét $a > b \Rightarrow ab + am > ab + bm$

$$\Leftrightarrow a(b+m) > b(a+m) \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$$

Trường hợp 2. Xét $a < b \Rightarrow ab + am < ab + bm$

$$\Leftrightarrow a(b+m) < b(a+m) \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$$

$$\text{c) Áp dụng câu a), ta có } 2 < 7 \text{ nên } \frac{2}{7} < \frac{2+1}{7+1} = \frac{3}{8}$$

$$\text{Áp dụng câu b), } 7 < 9 \Rightarrow \frac{7}{9} < \frac{7+2}{9+2} \text{ hay } \frac{7}{9} < \frac{9}{11} \text{ suy ra } \frac{-7}{9} < \frac{-9}{11}$$

1.13. Ta có $b < c$ và $b+c < a+1 \Rightarrow 2b < a+1$

$$\text{Vì } 1 < a \text{ nên } a+1 < 2a \Rightarrow 2b < 2a \Rightarrow b < a.$$

1.14.

a) Gọi số hữu tỉ cần tìm là $\frac{x}{20}$ với $x \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Theo đầu bài, ta có: } \frac{-5}{14} < \frac{x}{20} < \frac{-3}{14} \Leftrightarrow \frac{-50}{140} < \frac{7x}{140} < \frac{-30}{140}$$

$$\Leftrightarrow -50 < 7x < -30 \Leftrightarrow x \in \{-7; -6; -5\}$$

$$\text{Vậy các số hữu tỉ cần tìm là: } \frac{-7}{20}; \frac{-6}{20}; \frac{-5}{20}$$

b) Gọi số hữu tỉ cần tìm là: $\frac{2}{y}$ với $y \in \mathbb{Z}, y \neq 0$.

Theo đầu bài, ta có: $-\frac{5}{8} < \frac{2}{y} < -\frac{5}{12} \Leftrightarrow -\frac{5}{8} < -\frac{2}{y} < -\frac{5}{12}$

$\Leftrightarrow -\frac{10}{16} < -\frac{10}{5y} < -\frac{10}{24} \Leftrightarrow 16 < -5y < 24 \Leftrightarrow y = -4$

Vậy số hữu tỉ cần tìm là: $-\frac{2}{4}$

Chuyên đề 2. CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ HỮU TỈ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Với $x = \frac{a}{m}, y = \frac{b}{m} (a, b, m \in \mathbb{Z}, m > 0)$ ta có:

$$x + y = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}; x - y = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}$$

2. Với $x = \frac{a}{b}; y = \frac{c}{d}$ ta có:

$$x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; x : y = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \text{ (với } y \neq 0 \text{)}.$$

3. Các phép toán trong $\mathbb{Q}$ cũng có những tính chất giao hoán, kết hợp và phân phối của phép nhân đối với phép cộng như trong tập hợp $\mathbb{Z}$. Ngoài ra các quy tắc bỏ dấu ngoặc, quy tắc chuyển vế cũng như trong tập hợp $\mathbb{Z}$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính:

a) $\frac{1}{18} - \frac{1}{9} - \frac{1}{6} - \frac{1}{30}$;

b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{23} + \frac{1}{6}$;

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Khi thực hiện các phép tính chỉ có phép cộng và trừ, ta có thể thực hiện trong ngoặc trước, thực hiện từ trái qua phải. Tuy nhiên nếu có nhiều dấu (-) ta có thể giảm bớt dấu (-) bằng cách bỏ ngoặc. Ngoài ra có thể dùng tính chất giao hoán và kết hợp nhằm giải bài toán được nhanh hơn.

✓ *Trình bày lời giải.*

a) $\frac{1}{18} - \frac{1}{9} - \frac{1}{6} - \frac{1}{30} = \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} = \frac{1}{18} + \frac{2}{18} + \frac{3}{18} + \frac{1}{30} = \frac{6}{18} + \frac{1}{30} = \frac{2}{3} + \frac{1}{30} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$;

b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{23} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{23} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{23} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} + \frac{1}{23} + \frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{23} = 1\frac{1}{23}$

Ví dụ 2. Thực hiện các phép tính

$$a) \frac{1}{2} - \frac{13}{14} + \frac{2}{21} - \frac{1}{7} = -\frac{10}{21} + \frac{2}{21} - \frac{1}{7} = -\frac{8}{21} - \frac{1}{7} = -\frac{8}{21} - \frac{3}{21} = -\frac{11}{21}$$

$$b) \frac{3}{4} + \frac{5}{13} - \frac{2}{7} - \frac{1}{4} - \frac{8}{13} - \frac{2}{7} = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{5}{13} - \frac{8}{13}\right) - \frac{2}{7} - \frac{2}{7} = \frac{2}{4} - \frac{3}{13} - \frac{4}{7} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} - \frac{4}{7} = \frac{13}{26} - \frac{6}{26} - \frac{16}{13} = \frac{7}{26} - \frac{16}{13} = \frac{7}{26} - \frac{32}{26} = -\frac{25}{26}$$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Vì phép chia là phép nhân số bị chia với số nghịch đảo của số chia nên ta có thể vận dụng tính chất phân phối:

$$a : m + b : m = (a + b) : m$$

$$a : m - b : m = (a - b) : m$$

✓ *Trình bày lời giải*

$$a) \frac{1}{2} - \frac{13}{14} + \frac{2}{21} - \frac{1}{7} = -\frac{10}{21} + \frac{2}{21} - \frac{1}{7} = -\frac{8}{21} - \frac{1}{7} = -\frac{8}{21} - \frac{3}{21} = -\frac{11}{21}$$

$$b) \frac{3}{4} + \frac{5}{13} - \frac{2}{7} - \frac{1}{4} - \frac{8}{13} - \frac{2}{7} = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{5}{13} - \frac{8}{13}\right) - \frac{2}{7} - \frac{2}{7} = \frac{2}{4} - \frac{3}{13} - \frac{4}{7} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} - \frac{4}{7} = \frac{13}{26} - \frac{6}{26} - \frac{16}{13} = \frac{7}{26} - \frac{32}{26} = -\frac{25}{26}$$

Ví dụ 3. Tìm x.

$$a) \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}x = -\frac{3}{65}; \quad b) \frac{2}{9}x - \frac{4}{9} + \frac{-4}{7} : x = 0;$$

$$c) \frac{x+5}{2015} + \frac{x+6}{2014} + \frac{x+7}{2013} + \frac{x+8}{2012} + \frac{x+9}{2011} = -5;$$

$$d) \frac{x+2}{338} + \frac{x+3}{337} + \frac{x+4}{336} + \frac{x+5}{335} + \frac{x+360}{5} = 0.$$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Khi tìm x ta có thể vận dụng các tính chất sau:

- $ax + bx = (a + b)x$

- $\frac{k}{a} = k \cdot \frac{1}{a}$ nên $\frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c} = k \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

- $A \cdot B = 0$ thì $A = 0$ hoặc $B = 0$

✓ *Trình bày lời giải.*

$$a) \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}x = -\frac{3}{65} \Leftrightarrow \frac{5}{10}x + \frac{6}{10}x = -\frac{3}{65} \Leftrightarrow \frac{11}{10}x = -\frac{3}{65} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{65} : \frac{11}{10}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{6}{143}$$

$$b) \frac{2}{9}x - \frac{4}{9} + \frac{-4}{7} : x = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{9}x - \frac{4}{9} = 0 \quad \text{hoặc} \quad \frac{1}{3} + \frac{-4}{7} : x = 0 \quad \text{suy ra}$$

$$\frac{2}{9}x = \frac{4}{9} \quad \text{hoặc} \quad \frac{-4}{7} : x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{hoặc} \quad x = \frac{12}{7}.$$

Vậy $x \equiv 2 \pmod{7}$

$$c) \frac{x+5}{2015} + 1 + \frac{x+6}{2014} + 1 + \frac{x+7}{2013} + 1 + \frac{x+8}{2012} + 1 + \frac{x+9}{2011} + 1 = 0$$

$$\hat{U} \frac{x+2020}{2015} + \frac{x+2020}{2014} + \frac{x+2020}{2013} + \frac{x+2020}{2012} + \frac{x+2020}{2011} = 0$$

$$\hat{U} (x+2020) \left(\frac{1}{2015} + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2013} + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2011} \right) = 0$$

$$Vi \frac{1}{2015} + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2013} + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2011} > 0 \quad \text{nên } x+2020 = 0$$

$$P \quad x = -2020$$

$$d) \frac{x+2}{338} + 1 + \frac{x+3}{337} + 1 + \frac{x+4}{336} + 1 + \frac{x+5}{335} + 1 + \frac{x+360}{5} - 4 = 0$$

$$\hat{U} \frac{x+340}{338} + \frac{x+340}{337} + \frac{x+340}{336} + \frac{x+340}{335} + \frac{x+340}{5} = 0$$

$$\hat{U} (x+340) \left(\frac{1}{338} + \frac{1}{337} + \frac{1}{336} + \frac{1}{335} + \frac{1}{5} \right) = 0$$

$$Mà \frac{1}{338} + \frac{1}{337} + \frac{1}{336} + \frac{1}{335} + \frac{1}{5} > 0. \text{ Suy ra } x = -340.$$

Ví dụ 4. Tìm số nguyên x, y biết: $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Đối với dạng toán này, chúng ta chú ý $ab = k(a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$ thì $a \mid U(k), b \mid U(k)$.

Do vậy chúng ta quy đồng mẫu số, chuyển x, y về một vế, vế còn lại là một số nguyên.

✓ *Trình bày lời giải.*

$$\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8} \hat{U} \frac{5}{x} = \frac{1}{8} - \frac{y}{4} \hat{U} \frac{5}{x} = \frac{1-2y}{8} \hat{U} (1-2y) \cdot x = 40$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1-2y$ là ước lẻ của 40 mà ước lẻ của 40 là: 1; 5; -1; -5 nên ta có bảng giá trị:

$1-2y$	1	5	-1	-5
y	40	8	-40	-8

Từ đó suy ra $(x, y) \in \{(40; 0), (8; -2), (-40; 1), (-8; 3)\}$

Ví dụ 5. Rút gọn biểu thức:

$$a) A = \frac{5 - \frac{5}{13} + \frac{5}{19} - \frac{5}{27}}{11 - \frac{11}{3} + \frac{11}{19} - \frac{11}{27}} + \frac{\frac{6}{101} + \frac{6}{123} - \frac{6}{134}}{\frac{11}{101} + \frac{11}{123} - \frac{11}{134}};$$

$$B = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{39} + \frac{1}{51}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{52} + \frac{1}{68}}$$

b)

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Những biểu thức phức tạp, nếu thực hiện theo thứ tự sẽ dài và có thể dẫn đến sai lầm. Quan sát kĩ, ta thấy có những phần giống nhau cả số và dấu vì vậy ta nên vận dụng tính chất phân phối

$$\frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c} = k \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \text{ để rút gọn.}$$

✓ *Trình bày lời giải.*

$$A = \frac{5 - \frac{5}{13} + \frac{5}{19} - \frac{5}{27}}{11 - \frac{11}{3} + \frac{11}{19} - \frac{11}{27}} + \frac{6 - \frac{6}{101} + \frac{6}{123} - \frac{6}{134}}{11 - \frac{11}{101} + \frac{11}{123} - \frac{11}{134}}$$

a) Ta có:

$$= \frac{5 \left(1 - \frac{1}{13} + \frac{1}{19} - \frac{1}{27} \right)}{11 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{19} - \frac{1}{27} \right)} + \frac{6 \left(1 - \frac{1}{101} + \frac{1}{123} - \frac{1}{134} \right)}{11 \left(1 - \frac{1}{101} + \frac{1}{123} - \frac{1}{134} \right)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{5}{11} + \frac{6}{11} = 1$$

$$B = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{39} + \frac{1}{51}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{52} + \frac{1}{68}} = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} \right)}{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} \right)} = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$$

b) Ta có:

Ví dụ 6. Cho 2021 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ thỏa mãn:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2021}} = 1011$$

. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2 trong số 2021 số nguyên dương đã cho bằng nhau.

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Dạng toán này chúng ta không chỉ ra được cụ thể từng minh đó là hai giá trị nào, mà chỉ cần chỉ ra tồn tại ít nhất hai số trong các số đã cho bằng nhau mà thôi. Đối với dạng toán này thông thường chúng ta dùng phương pháp phản chứng:

- *Bước 1.* Phủ định kết luận. Tức là giả sử không có hai số nguyên dương nào bằng nhau.
- *Bước 2.* Lập luận logic, chứng tỏ mâu thuẫn với đề bài đã cho hoặc một điều hiển nhiên.
- *Bước 3.* Chứng tỏ giả sử là sai. Vậy kết luận của đề bài là đúng.

✓ *Trình bày lời giải.*

Giả sử trong 2021 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ thỏa mãn: không có hai số nào bằng nhau.

Khi đó $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2021}} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2021}$

$$< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = \frac{1}{1} + 1010 = 1011$$

mâu thuẫn với đề bài.

Vậy có ít nhất 2 trong số 2021 số nguyên dương đã cho bằng nhau

✓ **Nhận xét.** Trong lời giải bài toán trên, sau khi giả sử 2021 số nguyên dương khác nhau chúng ta đã so sánh chúng với 2021 số nguyên dương nhỏ nhất. Từ đó nhận thấy 2021 số nguyên dương nhỏ nhất cũng không thỏa mãn đầu bài. Suy ra 2021 số nào đó cũng không thỏa mãn đề bài và dẫn đến mâu thuẫn với giả thiết.

Ví dụ 7. Cho $a + b + c = 2070$ và $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{90}$

Tính giá trị: $S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

Giải

✓ **Tìm cách giải.** Với điều kiện đề bài, chúng ta không thể tính được giá trị của a, b, c . Do vậy

chúng ta cần biến đổi S nhằm xuất hiện $a + b + c$ và $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$. Quan sát kỹ chúng ta thấy

phân kết luận $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$, mỗi phân số đều có tổng tử và mẫu bằng nhau và bằng $a + b + c$.

Do đó chúng ta cộng mỗi phân số với 1, và có lời giải sau:

✓ **Trình bày lời giải.**

Ta có
$$S = \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 - 3$$

$$\hat{=} S = \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3$$

$$\hat{=} S = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3$$

$$\hat{=} S = 2070 \cdot \frac{1}{90} - 3 = 23 - 3 = 20$$

Ví dụ 8. Tìm x , biết:

a) $(x-1)(x-2) > 0$;

b) $(2x-4)(9-3x) > 0$

Giải

✓ **Tìm cách giải.** Đối với dạng toán này chúng ta chú ý kiến thức sau:

- $A \cdot B > 0 \hat{=} A$ và B cùng dấu.
- $A \cdot B < 0 \hat{=} A$ và B khác dấu.

✓ *Trình bày lời giải*

a) $(x-1)(x-2) > 0 \hat{=} x-1$ và $x-2$ cùng dấu.

mà $x-2 < x-1$ nên suy ra: $x-2 > 0$ hoặc $x-1 < 0 \hat{=} x > 2$ hoặc $x < 1$.

Vậy với $x > 2$ hoặc $x < 1$ thì $(x-1)(x-2) > 0$

b) $2x-4$ và $9-3x$ cùng dấu, nên ta có trường hợp sau:

$$\bullet \text{ Trường hợp 1: } \begin{cases} 2x-4 > 0 \\ 9-3x > 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} 2x > 4 \\ 3x > 9 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} x > 2 \\ x < 3 \end{cases};$$

$$\bullet \text{ Trường hợp 2: } \begin{cases} 2x-4 < 0 \\ 9-3x < 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} x < 2 \\ 3x > 9 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} x < 2 \\ x > 3 \end{cases} \text{ loại.}$$

Vậy với $2 < x < 3$ thì $(2x-4)(9-3x) > 0$

✓ **Nhận xét.** Ngoài cách giải trên của câu b, chúng ta có thể lập luận theo cách sau:

$$(2x-4)(9-3x) > 0 \hat{=} -6(x-2)(x-3) > 0 \hat{=} (x-2)(x-3) < 0$$

$\hat{=} x-2$ và $x-3$ khác dấu.

Mà $x-3 < x-2$ nên suy ra: $x-2 > 0$ và $x-3 < 0 \hat{=} x > 2$ và $x < 3$.

Vậy với $2 < x < 3$ thì $(2x-4)(9-3x) > 0$

Ví dụ 9. Chứng tỏ rằng:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}$$

Giải

Xét về trái, ta có: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200}$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{100}$$

$$= \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}.$$

Về trái bằng về phải; Điều phải chứng minh.

✓ **Nhận xét.** Nếu vận dụng so sánh số hữu tỷ, ta có:

$$= \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} > \frac{1}{200} + \frac{1}{200} + \dots + \frac{1}{200} = \frac{1}{2}.$$

Chứng tỏ rằng:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} > \frac{1}{2}$$

C. Bài tập vận dụng

2.1. Viết số hữu tỉ $-\frac{14}{45}$ thành:

- a) tích của hai số hữu tỉ theo sáu cách khác nhau.
b) thương của hai số hữu tỉ theo sáu cách khác nhau.

2.2. Thực hiện phép tính (tính nhanh nếu có thể).

a) $\frac{5}{8} + \frac{1}{5} - \frac{2}{9} - \frac{1}{2} - \frac{3}{35} + \frac{5}{6} - \frac{2}{7} - \frac{1}{18}$;

b) $\frac{1}{3} - \frac{3}{4} - \frac{3}{5} + \frac{1}{64} - \frac{2}{9} - \frac{1}{36} + \frac{1}{15}$;

c) $-\frac{5}{7} - \frac{5}{67} + \frac{13}{30} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{3}{14} - \frac{2}{5}$;

d) $\frac{3}{5} : \frac{1}{15} - \frac{1}{6} + \frac{3}{5} : \frac{1}{3} - \frac{1}{15}$;

e) $\frac{7}{13} \cdot \frac{5}{9} - \frac{5}{9} : \frac{2}{13} + \frac{5}{9} \cdot \frac{18}{13}$.

2.3. Thực hiện các phép tính sau:

a) $D = \frac{54}{64} - \frac{4}{9} : \frac{8}{27} - \frac{1}{3} - \frac{81}{128}$;

b) $E = \frac{193}{17} : \frac{2}{193} - \frac{3}{386} + \frac{11}{34} : \frac{7}{1931} + \frac{11}{3862} : \frac{1931}{25} + \frac{9}{2}$.

$A = \frac{3}{2} - \frac{2}{5} + \frac{1}{10} - \frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{12}$.

2.4. Rút gọn:

(Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán, lớp 7, tỉnh Bắc Giang, năm học 2012 - 2013)

2.5. Tìm x, biết:

a) $\frac{3}{5} + x = -\frac{7}{13}$;

b) $\frac{3}{2} - x - \frac{5}{6} = \frac{8}{9}$;

c) $(4x - 9) : 2,5 + \frac{7}{3}x = 0$;

d) $\frac{x+5}{2015} + \frac{x+6}{2014} = \frac{x+7}{2013} + \frac{x+8}{2012}$.

2.6. Tính:

$$P = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{16}(1+2+3+\dots+16)$$

2.7. Tìm giá trị nguyên dương của x và y, sao cho: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$

2.8. Tìm số nguyên x, y biết:

$$\text{a) } \frac{1}{x} = \frac{1}{6} + \frac{y}{3}; \quad \text{b) } \frac{x}{6} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}; \quad \text{c) } \frac{x}{4} - \frac{1}{y} = \frac{3}{4}.$$

2.9. Tính tổng $M = x + y + z$, biết:

$$\frac{19}{x+y} + \frac{19}{y+z} + \frac{19}{z+x} = \frac{7x}{y+z} + \frac{7y}{z+x} + \frac{7z}{x+y} = \frac{133}{10}$$

2.10. Tìm các số hữu tỉ x, y, z thỏa mãn: $x+y = \frac{1}{2}; y+z = \frac{1}{3}; z+x = \frac{1}{6}$

2.11. Cho biểu thức $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}$. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } A = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}; \quad \text{b) } \frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$$

2.12. Cho 100 số hữu tỉ, trong đó tích 3 số bất kì là một số âm. Chứng minh rằng:

a) Tích của 100 số đó là một số dương.

b) Tất cả 100 số đó đều là số âm.

2.13. Cho 20 số nguyên khác 0: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ có các tính chất sau:

+ a_1 là số dương.

+ Tổng của ba số viết liền nhau bất kì là một số dương.

+ Tổng của 20 số đó là số âm.

Chứng minh rằng: $a_1 \cdot a_{14} + a_{14} \cdot a_{12} < a_1 \cdot a_{12}$

2.14. Đặt $A = \frac{1}{1011} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2019}$ và

$$B = \frac{1}{1010} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2020}$$

So sánh A và B.

2.15. Cho 100 số tự nhiên $a_1; a_2; \dots; a_{100}$ thỏa mãn $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{100}} = \frac{101}{2}$.

Chứng minh rằng ít nhất hai trong 100 số tự nhiên trên bằng nhau.

(Thi học sinh giỏi toán 7, huyện Yên Lạc, Vĩnh Phúc 2012 - 2013)

2.16. Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của c.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

2.1.

$$\text{a) } \frac{-17}{60} = \frac{-1}{30} + \frac{-1}{4} = \frac{-1}{20} + \frac{-7}{30} = \frac{-1}{12} + \frac{-1}{5}$$

$$\text{b) } \frac{-17}{60} = \frac{-1}{3} - \frac{1}{20} = \frac{-11}{30} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{2} - \frac{13}{60}$$

$$c) \frac{-17}{60} = \frac{-1}{3} + \frac{1}{20} = \frac{-2}{15} + \frac{7}{60} = \frac{-9}{20} + \frac{1}{6}$$

$$d) \frac{-17}{60} = \frac{-1}{6} - \frac{7}{60} = \frac{-2}{5} - \frac{1}{12} = \frac{-1}{4} - \frac{1}{30}$$

2.2.

$$a) 5 + \frac{1}{5} - \frac{2}{9} - 2 + \frac{1}{23} + 2\frac{3}{35} - \frac{5}{6} - 8 - \frac{2}{7} + \frac{1}{18}$$

$$= (5 - 2 + 2 - 8) + \frac{1}{5} + \frac{3}{35} - \frac{2}{9} + \frac{1}{23} - \frac{5}{6} - \frac{2}{7} + \frac{1}{18}$$

$$= -3 + 0 - 1 + \frac{1}{23} = -3\frac{22}{23}$$

$$b) \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{64} - \frac{2}{9} - \frac{1}{36} + \frac{1}{15}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{1}{15} - \frac{3}{4} + \frac{2}{9} + \frac{1}{36} - \frac{1}{64} = 1 - 1 + \frac{1}{64} = \frac{1}{64}$$

$$c) -\frac{5}{7} + \frac{5}{67} + \frac{13}{30} + \frac{1}{2} - 1\frac{5}{6} + 1\frac{3}{14} + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{13}{30} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} + \frac{2}{5} + (1 - 1) + \frac{3}{14} - \frac{5}{7} + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{5} - \frac{5}{7} + \frac{2}{5} = \frac{5}{7}$$

$$d) \frac{3}{5} - \frac{7}{30} + \frac{3}{5} - \frac{7}{5} = \frac{3}{5} - \frac{30}{7} + \frac{3}{5} - \frac{5}{7} = \frac{3}{5} - \frac{30}{7} + \frac{3}{5} - \frac{5}{7} = \frac{3}{5} - \frac{35}{7} = -3$$

$$e) \frac{5}{9} - \frac{7}{13} + \frac{2}{13} - \frac{18}{13} = \frac{5}{9} - \frac{9}{13} = \frac{-5}{13}$$

2.3.

$$a) D = \frac{27}{32} - \frac{27}{8} - \frac{1}{3} - \frac{81}{128}$$

$$D = \frac{27}{32} - \frac{3}{8} - \frac{1}{3} - \frac{128}{81}$$

$$D = \frac{27}{32} + \frac{9}{8} - \frac{128}{81}$$

$$D = \frac{27 + 36}{32} - \frac{128}{81} = \frac{9}{32} - \frac{128}{81} = \frac{-4}{9}$$

$$b) E = \frac{193}{17} - \frac{2}{193} - \frac{3}{386} + \frac{11}{34} - \frac{7}{1931} + \frac{11}{3862} - \frac{1931}{25} + \frac{9}{2}$$

$$E = \frac{2}{17} + \frac{3}{34} + \frac{11}{34} + \frac{7}{25} + \frac{11}{50} + \frac{9}{25}$$

$$E = \frac{2}{17} + \frac{7}{17} + \frac{14}{50} + \frac{11}{50} + \frac{9}{25}$$

$$E = \frac{5}{17} + \frac{9}{25} = \frac{5}{17} : 5 = \frac{1}{17}$$

$$A = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

2.4.

$$A = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

2.5.

$$a) \quad x = \frac{-7}{13} - \frac{3}{5} \quad \hat{=} \quad x = \frac{-35}{65} - \frac{39}{65} = \frac{-74}{65}$$

$$b) \quad \frac{3}{2} - x + \frac{5}{6} = \frac{8}{9} \quad \hat{=} \quad \frac{3}{2} + \frac{5}{6} - \frac{8}{9} = x \quad \hat{=} \quad x = \frac{27}{18} + \frac{15}{18} - \frac{16}{18} = \frac{26}{18} = \frac{13}{9}$$

$$c) \quad 4x - 9 = 0 \quad \text{hoặc} \quad 2,5 + \frac{-7}{3} = 0$$

$$\text{suy ra } 4x = 9 \quad \text{hoặc} \quad \frac{-7}{3}x = -2,5$$

$$x = \frac{9}{4} \quad \text{hoặc} \quad x = \frac{-5}{2} : \frac{-7}{3} = \frac{15}{14}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{9}{4}; \frac{15}{14} \right\}$$

$$d) \quad \frac{x+5}{2015} + 1 + \frac{x+6}{2014} + 1 = \frac{x+7}{2013} + 1 + \frac{x+8}{2012} + 1$$

$$\hat{=} \quad \frac{x+2020}{2015} + \frac{x+2020}{2014} = \frac{x+2020}{2013} + \frac{x+2020}{2012}$$

$$\hat{=} \quad \frac{x+2020}{2015} + \frac{x+2020}{2014} - \frac{x+2020}{2013} - \frac{x+2020}{2012} = 0$$

$$\hat{=} \quad (x+2020) \left(\frac{1}{2015} + \frac{1}{2014} - \frac{1}{2013} - \frac{1}{2012} \right) = 0$$

$$\text{Mà } \frac{1}{2015} + \frac{1}{2014} - \frac{1}{2013} - \frac{1}{2012} < 0 \quad \text{nên } x+2020 = 0 \quad \text{hay } x = -2020$$

$$2.6. \text{ Theo công thức: } 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Suy ra: } P = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} + \dots + \frac{1}{16} \cdot \frac{16 \cdot 17}{2}$$

$$P = 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{17}{2}$$

$$P = \frac{1}{2}(1+2+3+\dots+17) - \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{17 \cdot 18}{2} - \frac{1}{2} = 76$$

2.7. Vì x và y có vai trò như nhau, không giảm tính tổng quát, giả sử

$$x^3 \cdot y^3 \mid P \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{5} \leq \frac{2}{y} \Rightarrow y \leq 10$$

Mặt khác $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{5} \Rightarrow y > 5 \Rightarrow 5 < y \leq 10 \Rightarrow y \in \{6; 7; 8; 9; 10\}$

+ Với $y = 6 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{6} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30} \Rightarrow x = 30$

+ Với $y = 7 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{7} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$ loại.

+ Với $y = 8 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{8} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{3}{40}$ loại.

+ Với $y = 9 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{9} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$ loại.

+ Với $y = 10 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} \Rightarrow x = 10$

Vậy cặp $(x; y)$ là $(30; 6); (6; 30); (10; 10)$

2.8.

a) $\frac{1}{x} = \frac{1+2y}{6} \Rightarrow x(1+2y) = 6$

vì $x; y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1+2y$ là ước lẻ của 6 mà ước lẻ của 6 là: 1; 3; -1; -3 nên ta có bảng giá trị

$1+2y$	1	3	-1	-3
x	6	2	-6	-2

Từ đó suy ra $(x; y) \in \{(6; 0); (2; 1); (-6; -1); (-2; -2)\}$

b) $\frac{x}{6} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{x-3}{6} = \frac{1}{y} \Rightarrow (x-3) \cdot y = 6$

$\Rightarrow x-3$ và y là ước của 6, mà $U(6) = \{1; 2; 3; 6; -1; -2; -3; -6\}$

Từ đó ta có bảng sau:

$x-3$	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6
y	6	3	2	1	-6	-3	-2	-1

Từ đó suy ra $(x, y) \in \{(4, 6), (5, 3), (6, 2), (9, 1), (2, -6), (1, -3), (0, -2), (-3, -1)\}$

$$c) \frac{x-3}{4} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{x-3}{4} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow (x-3)y = 4$$

$\Rightarrow x-3$ và y là ước của 4, mà $U(4) = \{1, 2, 4, -1, -2, -4\}$ nên ta có bảng giá trị:

$x-3$	1	2	4	-1	-2	-4
y	4	2	1	-4	-2	-1

Từ đó suy ra $(x, y) \in \{(4, 4), (5, 2), (7, 1), (2, -4), (1, -2), (-1, -1)\}$

2.9. Từ đề bài suy ra: $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = \frac{133}{10}; 19 = \frac{17}{10}$

Từ đề bài, ta có: $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = \frac{133}{10}; 7$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = \frac{19}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z} + 1 + \frac{y}{z+x} + 1 + \frac{z}{x+y} + 1 = \frac{19}{10} + 3$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z}{y+z} + \frac{x+y+z}{z+x} + \frac{x+y+z}{x+y} = \frac{49}{10}$$

$$\Rightarrow (x+y+z) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right) = \frac{49}{10}$$

$$(x+y+z) \cdot \frac{7}{10} = \frac{49}{10} \Rightarrow x+y+z = 7 \text{ hay } M = 7$$

2.10. Ta có:

$$(x+y) + (y+z) + (z+x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \Leftrightarrow 2(x+y+z) = 1 \Leftrightarrow x+y+z = \frac{1}{2}$$

Suy ra: $\frac{1}{2} + z = \frac{1}{2} \Rightarrow z = 0$ mà: $y+z = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}; z+x = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{6}$

Vậy $(x, y, z) = \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; 0 \right)$.

2.11. a) Xét biểu thức ta có:

$$A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{1}{100}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{50}$$

$$= \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}$$

Về trái bằng về phải. Điều phải chứng minh.

b) Ta có:

$$\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100} < \left(\underbrace{\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50}}_{25 \text{ phân số}} \right) + \left(\underbrace{\frac{1}{75} + \frac{1}{75} + \dots + \frac{1}{75}}_{25 \text{ phân số}} \right)$$

$$\text{Hay } A < \frac{25}{50} + \frac{25}{75} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \text{ p } A < \frac{5}{6} \quad (1)$$

$$\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100} > \underbrace{\left(\frac{1}{75} + \frac{1}{75} + \dots + \frac{1}{75} \right)}_{25 \text{ phân số}} + \underbrace{\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100} \right)}_{25 \text{ phân số}}$$

$$\text{Hay } A > \frac{25}{75} + \frac{25}{100} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \text{ p } A > \frac{7}{12} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$. Điều phải chứng minh.

2.12. Đặt 100 số hữu tỉ đó là $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{100}$

a) Theo đề bài ta có: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 < 0$ p trong ba số $a_1; a_2; a_3$ tồn tại ít nhất một số âm.

Giả sử $a_1 < 0$

$$\text{Xét } a_1; a_2; a_3; \dots; a_{100} = a_1(a_2 \cdot a_3 \cdot a_4)(a_5 \cdot a_6 \cdot a_7) \dots (a_{98} \cdot a_{99} \cdot a_{100})$$

Ta có: $a_1 < 0$ theo đề bài: $a_2 a_3 a_4 < 0; a_5 a_6 a_7 < 0; \dots; a_{98} a_{99} a_{100} < 0$

(có 33 nhóm) nên $a_1(a_2 \cdot a_3 \cdot a_4)(a_5 \cdot a_6 \cdot a_7) \dots (a_{98} \cdot a_{99} \cdot a_{100}) > 0$

b) Theo đề bài ta có $a_2 a_3 a_4 < 0$ p trong ba số $a_2; a_3; a_4$ tồn tại ít nhất một số âm.

Giả sử $a_2 < 0$. Xét $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 < 0$ mà $a_1 a_2 > 0$ nên $a_3 < 0$

Xét $a_1 \cdot a_2 \cdot a_k < 0$ với $k = \overline{4, 100}$ mà $a_1 a_2 > 0$ p $a_k < 0$

Vậy tất cả 100 số đó đều là số âm.

2.13. Ta có:

$$a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + \dots + (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + a_{14} + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0$$

Mà $a_1 > 0; a_2 + a_3 + a_4 > 0; \dots; a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0; a_{15} + a_{16} + a_{17} > 0; a_{18} + a_{19} + a_{20} > 0$ p $a_{14} < 0$

Cũng như vậy:

$$(a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_{10} + a_{11} + a_{12}) + (a_{13} + a_{14}) + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0 \text{ p } a_{13} + a_{14} < 0$$

Mặt khác. $a_{12} + a_{13} + a_{14} > 0$ p $a_{12} > 0$

Từ các điều kiện $a_1 > 0; a_{12} > 0; a_{14} < 0 \Rightarrow a_1 \cdot a_{14} + a_{14} \cdot a_{12} < a_1 \cdot a_{12}$ (điều phải chứng minh).

2.14. Đặt $C = 1011.A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2019}$;

$$D = 1010.B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2020}$$

Ta có $C > 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2020} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2020}$

$$\Rightarrow C > \frac{1}{2} + D \quad (1)$$

Mặt khác $D = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2020} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = \frac{1010}{2}$

$$\frac{D}{1010} < \frac{1}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow C > \frac{D}{1010} + D = \frac{1011.D}{1010} \Rightarrow \frac{C}{1011} > \frac{D}{1010}$ hay $A > B$

2.15. Giả sử trong 100 số nguyên dương $a_1; a_2; \dots; a_{100}$ thỏa mãn: Không có hai số nào bằng nhau.

Khi đó $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{100}} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{100}$

$$< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = \frac{1}{1} + \frac{99}{2} = \frac{101}{2} \text{ mâu thuẫn với giả thiết.}$$

Vậy có ít nhất 2 trong số 100 số nguyên dương đã cho bằng nhau.

2.16. Vì $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ nên $a+b+c \leq c+2+c+1+c$

$$\Rightarrow 1 \leq 3c+3 \text{ (vì } a+b+c=1) \text{ hay } 3c^3 - 2 \geq c^3 - \frac{2}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của c là: $-\frac{2}{3}$ khi đó $a = \frac{4}{3}; b = \frac{1}{3}$

Chuyên đề 3. GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ. CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ THẬP PHÂN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Giá trị tuyệt đối của số hữu tỉ x, kí hiệu $|x|$ là khoảng cách từ điểm x tới điểm 0 trên trục số.

Ta có: $|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Với mọi $x \in \mathbb{Q}$, ta luôn có: $|x| \geq 0; |x| = |-x|; |x| \geq x$.

2. Để cộng, trừ, nhân, chia các số thập phân, ta có thể viết chúng dưới dạng phân số thập phân rồi làm theo quy tắc các phép tính đã biết về phân số.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Tìm x , biết:

a) $|1,74 - |3,5 - x|| = 1,24$; b) $|2x - 5| - 0,12 = 1,88$;

c) $|3,54x - 2| = -1,6$; d) $\left| \left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \right| - \frac{3}{4} \right| = \frac{4}{5}$.

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Khi tìm x chứa dấu giá trị tuyệt đối, ta lưu ý:

- $|A| = m > 0$ thì $A = m$ hoặc $A = -m$.
- $|A| = 0$ thì $A = 0$.
- $|A| = m < 0$ thì không tồn tại.

✓ *Trình bày lời giải*

a) $|1,74 - |3,5 - x|| = 1,24 \hat{=} |3,5 - x| = 0,5$

suy ra $3,5 - x = 0,5$ hoặc $3,5 - x = -0,5$

do đó $x \in \{3; 4\}$.

b) $|2x - 5| - 0,12 = 1,88 \hat{=} |2x - 5| = 2 \hat{=} 2x - 5 = 2$ hoặc $2x - 5 = -2$.

Vậy $x \in \left\{ \frac{7}{2}; -\frac{3}{2} \right\}$

c) $|3,54x - 2| = -1,6 < 0$ suy ra không tồn tại x .

d) $\left| \left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \right| - \frac{3}{4} \right| = \frac{4}{5} \hat{=} \left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \right| - \frac{3}{4} = \frac{4}{5}$ hoặc $\left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \right| - \frac{3}{4} = -\frac{4}{5}$

$\hat{=} \left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \right| = \frac{31}{20}$ hoặc $\left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{20}$.

- Trường hợp 1. $\left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \right| = \frac{31}{20} \hat{=} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = \frac{31}{20}$ hoặc $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = -\frac{31}{20}$

$x = \frac{53}{30}$ hoặc $x = -\frac{133}{30}$

- Trường hợp 2. $\left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{20} \hat{=} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = \frac{1}{20}$ hoặc $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = -\frac{1}{20}$

$x = -\frac{37}{30}$ hoặc $x = -\frac{43}{30}$

Vậy $x \in \left\{ \frac{53}{30}; -\frac{133}{30}; -\frac{43}{30}; -\frac{37}{30} \right\}$.

Ví dụ 2. Tìm $x; y; z$ thỏa mãn:

a) $|3x+9|+|5y-7|=0$; b) $\left|x-1\frac{2}{3}\right|+\left|4y+\frac{5}{6}\right|+\left|3\frac{1}{4}-\frac{1}{2}z\right|=0$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Khi tìm x, y mà tổng các giá trị tuyệt đối bằng 0 ta lưu ý:

$|A|+|B|=0$ thì $A=0$ và $B=0$.

✓ *Trình bày lời giải*

a) Ta có $|3x+9| \geq 0; |5y-7| \geq 0$ nên từ $|3x+9|+|5y-7|=0$

suy ra $|3x+9|=0$ và $|5y-7|=0 \Rightarrow 3x+9=0$ và $5y-7=0$

suy ra $x=-3; y=\frac{7}{5}$.

b) Ta có $\left|x-1\frac{2}{3}\right| \geq 0; \left|4y+\frac{5}{6}\right| \geq 0; \left|3\frac{1}{4}-\frac{1}{2}z\right| \geq 0$;

nên từ $\left|x-1\frac{2}{3}\right|+\left|4y+\frac{5}{6}\right|+\left|3\frac{1}{4}-\frac{1}{2}z\right|=0$

suy ra $\left|x-1\frac{2}{3}\right|=0; \left|4y+\frac{5}{6}\right|=0; \left|3\frac{1}{4}-\frac{1}{2}z\right|=0$

do đó: $x=1\frac{2}{3}; y=-\frac{5}{24}; z=6\frac{1}{2}$.

Ví dụ 3. Tìm x , biết:

$\left|x+\frac{1}{2021}\right|+\left|x+\frac{2}{2021}\right|+\left|x+\frac{3}{2021}\right|+\dots+\left|x+\frac{2020}{2021}\right|=2021x$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Đối với dạng toán $|A(x)|+|B(x)|+\dots+|C(x)|=D(x)$ (1), chúng ta nhận thấy rằng

vế trái là tổng các giá trị tuyệt đối. Do vậy có điều kiện: $D(x) \geq 0$ từ đó chúng ta bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Khi đó (1) trở thành: $A(x)+B(x)+\dots+C(x)=D(x)$. Và lời giải trở nên đơn giản.

✓ *Trình bày lời giải.*

Điều kiện $x \geq 0$ suy ra:

$x+\frac{1}{2021}+x+\frac{2}{2021}+x+\frac{3}{2021}+\dots+x+\frac{2020}{2021}=2021x$

$$\hat{U} \quad 2020x + \frac{1+2+3+2020}{2021} = 2021x$$

$$\hat{U} \quad 2020x + \frac{2020 \cdot 2021}{2 \cdot 2021} = 2021x \quad \hat{U} \quad x = 1010$$

Ví dụ 4. Tìm x , biết:

a) $\left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{3}{4}x + \frac{5}{6} \right|;$

b) $\left| \frac{1}{2}x + \frac{5}{6} \right| - \left| \frac{7}{8}x - \frac{8}{9} \right| = 0$

Giải

✓ Tìm cách giải. Chúng ta biết rằng hai số bằng nhau hoặc đối nhau thì có giá trị tuyệt đối bằng nhau và ngược lại. Do vậy giải dạng toán này, chúng ta lưu ý: $|A| = |B| \hat{U} A = B$ hoặc $A = -B$.

✓ Trình bày lời giải.

a) $\left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{3}{4}x + \frac{5}{6} \right| \hat{U} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{6}$ hoặc $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{6}$

- Trường hợp 1. Giải $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{6} \hat{U} \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x = \frac{5}{6} - \frac{2}{3}$

$$\hat{U} -\frac{1}{4}x = \frac{1}{6} \hat{U} x = -\frac{2}{3}$$

- Trường hợp 2. Giải:

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{6} \hat{U} \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x = -\frac{5}{6} - \frac{2}{3} \hat{U} \frac{5}{4}x = -\frac{3}{2} \hat{U} x = -\frac{6}{5}$$

Vậy $x \in \left\{ -\frac{2}{3}; -\frac{6}{5} \right\}$

b) $\left| \frac{1}{2}x + \frac{5}{6} \right| - \left| \frac{7}{8}x - \frac{8}{9} \right| = 0 \hat{U} \left| \frac{1}{2}x + \frac{5}{6} \right| = \left| \frac{7}{8}x - \frac{8}{9} \right| \hat{U} \frac{1}{2}x + \frac{5}{6} = \frac{7}{8}x - \frac{8}{9}$

hoặc $\frac{1}{2}x + \frac{5}{6} = -\frac{7}{8}x + \frac{8}{9}$

- Trường hợp 1. Giải $\frac{1}{2}x + \frac{5}{6} = \frac{7}{8}x - \frac{8}{9}$

$$\hat{U} \frac{1}{2}x - \frac{7}{8}x = -\frac{8}{9} - \frac{5}{6} \hat{U} -\frac{3}{8}x = -\frac{31}{18} \hat{U} x = \frac{124}{27}$$

- Trường hợp 2. Giải:

$$\frac{1}{2}x + \frac{5}{6} = -\frac{7}{8}x + \frac{8}{9} \hat{U} \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}x = \frac{8}{9} - \frac{5}{6}$$

$$\hat{U} \frac{11}{8}x = \frac{1}{18} \hat{U} x = \frac{4}{99}$$

Vậy $x \in \left\{ \frac{124}{27}; \frac{4}{99} \right\}$

Ví dụ 5. Tìm x biết:

a) $|3x-5|+|3x+1|=6$;

b) $|x+1|+|2x-3|=|3x-2|$;

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Để giải dạng toán tổng giá trị tuyệt đối, chúng ta có thể:

- *Hướng 1.* Xét dấu, bỏ dấu giá trị tuyệt đối.
- *Hướng 2.* Vận dụng bất đẳng thức $|A| \geq A$, dấu bằng xảy ra khi $A \geq 0$.
- *Hướng 3.* Vận dụng bất đẳng thức $|A|+|B| \geq |A+B|$, dấu bằng xảy ra khi $AB \geq 0$.

✓ *Trình bày lời giải.*

a) Ta có: $|3x-5|=|5-3x| \geq 5-3x$; $|3x+1| \geq 3x+1$ nên

$$|3x-5|+|3x+1| \geq 5-3x+3x+1=6$$

Do vậy dấu bằng chỉ xảy ra khi $5-3x \geq 0$ và $3x+1 \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{5}{3}$; $x \geq -\frac{1}{3}$.

Vậy $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$.

b) Ta có: $|x+1|+|2x-3| \geq |x+1+2x-3|=|3x-2|$. Dấu bằng chỉ xảy ra khi

$$(x+1)(2x-3) \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \text{ hoặc } x \geq \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=|x-2019|+|x-2020|+|y-2021|+|x-2022|+2016$$

Giải

Ta có: $|x-2019| \geq x-2019$, $|x-2022| \geq |2022-x| \geq 2022-x$

Suy ra $|x-2019|+|2022-x| \geq x-2019+2022-x=3$

Mặt khác, ta có: $|x-2020| \geq 0$; $|y-2021| \geq 0$

Suy ra: $A \geq 2016+3=2019$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2019 khi $x=2020$; $y=2021$

Ví dụ 7. Thực hiện phép tính một cách hợp lí.

$$A = \frac{0,375-0,3+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}}{-0,625+0,5-\frac{5}{11}-\frac{5}{12}} + \frac{1,5+1-0,75}{2,5+\frac{5}{3}-1,25};$$

$$B = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{13}}{\frac{2}{3} - \frac{2}{7} - \frac{2}{13}} \cdot \frac{\frac{1}{3} - 0,25 + 0,2}{1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} + \frac{6}{7}$$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Khi thực hiện các phép tính có biểu thức chứa các số thập phân và phân số, ta nên viết chúng dưới dạng phân số rồi thực hiện các phép tính. Quan sát kĩ sau khi viết dưới dạng phân số, ta thấy có những phần giống nhau cả số và dấu vì vậy ta nên vận dụng tính chất phân phối

$$\frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c} = k \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ để rút gọn.}$$

✓ *Trình bày lời giải*

$$A = \frac{\frac{3}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{11} - \frac{3}{12}}{-\frac{5}{8} + \frac{5}{10} - \frac{5}{11} + \frac{5}{12}} + \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4}}$$

$$A = \frac{3\frac{1}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{11} - \frac{3}{12}}{-5\frac{1}{8} + \frac{5}{10} - \frac{5}{11} + \frac{5}{12}} + \frac{3\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{10}{4}}{5\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{10}{4}}$$

$$A = \frac{-3}{5} + \frac{3}{5} = 0$$

$$B = \frac{1\frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{13}}{2\frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{13}} \cdot \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} + \frac{6}{7}$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}}{7\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}} + \frac{6}{7} = \frac{1}{7} + \frac{6}{7} = 1$$

Ví dụ 8. Tính bằng cách hợp lí:

a) $(-4,135) + (-21,5) + (+4,135)$;

b) $(+45,13) + (+7,87) + (-2110)$;

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Tính tổng các số thập phân ta có thể vận dụng tính chất giao hoán và kết hợp để tính hợp lí hơn.

✓ *Trình bày lời giải*

a) $(-4,135) + (+4,135) + (-21,5) = -21,5$;

b) $(+45,13) + (+7,87) + (-2110) = 53 + (-2110) = -2057$

C. Bài tập vận dụng

3.1. Tìm x , biết:

a) $6,5 - \frac{9}{4} : \left| x + \frac{1}{3} \right| = 2$;

b) $\frac{11}{4} + \frac{3}{2} : \left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{7}{2}$;

c) $\frac{15}{4} - 2,5 : \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = 3$;

d) $\frac{21}{5} + 3 : \left| \frac{x}{4} - \frac{2}{3} \right| = 6$.

3.2. Tìm x , biết:

a) $\left| 2x - 1 \right| + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$;

b) $\left| x^2 + 3 \right| x - \frac{1}{2} \left\| = x^2 + 3 \right.$.

3.3. Tìm x , biết:

a) $\left| \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right| = |4x - 1|$;

c) $\left| \frac{5}{4}x - \frac{7}{2} \right| - \left| \frac{5}{8}x + \frac{3}{5} \right| = 0$;

b) $\left| \frac{7}{5}x + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{4}{3}x - \frac{1}{4} \right|$;

d) $\left| \frac{7}{8}x + \frac{5}{6} \right| - \left| \frac{1}{2}x + 5 \right| = 0$.

3.4. Tìm x, y thỏa mãn:

a) $\left| 5 - \frac{2}{3}x \right| + \left| \frac{2}{3}y - 4 \right| = 0$;

b) $\left| \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x \right| + \left| 15 - \frac{3}{4} - \frac{3}{2}y \right| = 0$

c) $|x - 2020| + |y - 2021| = 0$

d) $|x - y| + \left| y + \frac{21}{10} \right| = 0$

3.5. Tìm x , biết:

a) $\left| x + \frac{1}{1.2} \right| + \left| x + \frac{1}{2.3} \right| + \left| x + \frac{1}{3.4} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{2019.2020} \right| = 2020x$;

b) $\left| x + \frac{1}{1.3} \right| + \left| x + \frac{1}{3.5} \right| + \left| x + \frac{1}{5.7} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{197.199} \right| = 100x$;

c) $\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 11x$.

3.6. Tìm cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn:

a) $|x + 4| + |y - 2| = 3$;

b) $|2x + 1| + |y - 1| = 4$.

c) $|3x| + |y + 5| = 5$;

d) $|5x| + |2y + 3| = 7$.

3.7. Tìm x , biết:

a) $|x + 5| + |4 - x| = 9$;

b) $\left| x - \frac{2}{3} \right| + \left| x - \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{12}$;

c) $2|x - 3| + |2x + 5| = 11$;

d) $|x - 3| + |5 - x| + 2|x - 4| = 2$.

3.8. Tìm cặp (x, y) thỏa mãn: $|x - 1| + |x - 2| + |y - 3| + |x - 4| = 3$.

3.9. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn:

a) $(2-x)(x+1) = |y+1|;$

b) $(x+3)(1-x) = |y|;$

c) $(x-2)(5-x) = |2y+1|+2.$

3.10. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn:

a) $|x-5|+|1-x| = \frac{12}{|y+1|+3};$

b) $|x-2y-1|+5 = \frac{10}{|y-4|+2};$

c) $|x+3|+|x-1| = \frac{16}{|y-2|+|y+2|};$

d) $|x-1|+|3-x| = \frac{6}{|y+3|+3}.$

3.11. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $A = \frac{2}{3} + \left| \frac{3}{4} - x \right|;$

b) $B = \left| x + \frac{5}{6} \right| - \frac{21}{10};$

c) $C = \frac{11}{12} + \left| \frac{9}{10} - x \right|;$

d) $D = \left| 3x + \frac{9}{10} \right| - \frac{73}{79};$

e) $E = |4x-3| + \left| 5y + \frac{15}{16} \right| + \frac{21}{10}$

3.12. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |x-2019| + |x-2020| + |x-2021|$

3.13. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x+1000| + |2x-2020|$ với x là số nguyên.

$$A = \frac{0,34 - \frac{1}{25} \cdot \frac{5}{2}}{0,8 : \frac{4}{5} \cdot 1,25 : \frac{0}{5}} - (1,2,0,35) : \frac{4}{5} \cdot \frac{0}{5}$$

3.14. Thực hiện phép tính:

3.15. Thực hiện phép tính

a) $7,3 \cdot 10,5 + 7,3 \cdot 15 + 2,7 \cdot 10,5 + 15 \cdot 2,7;$

b) $5,4 - 15 - (7,2 - 1)$

3.16. Tìm x , biết:

a) $x + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \left| \frac{1}{2} - \frac{7}{10} \right| - \frac{3}{4};$

b) $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} + \frac{7}{8} - x = 10 - \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right|.$

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

3.1. a) $6,5 - \frac{9}{4} : \left| x + \frac{1}{3} \right| = 2 \hat{=} \frac{9}{4} : \left| x + \frac{1}{3} \right| = 4,5 \hat{=} \left| x + \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \hat{U} \quad & \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{1}{6} \\ \frac{x}{3} = -\frac{5}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $\hat{x} = \begin{cases} \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6} \end{cases}$

$$b) \quad \frac{11}{4} + \frac{3}{2} : \left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{7}{2} \quad \hat{U} \quad \frac{3}{2} : \left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{3}{4} \quad \left| 4x - \frac{1}{5} \right| = 2$$

$$\hat{U} \quad \begin{cases} 4x - \frac{1}{5} = 2 \\ 4x - \frac{1}{5} = -2 \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{11}{20} \\ \frac{x}{5} = -\frac{9}{20} \end{cases}$$

Vậy $\hat{x} = \begin{cases} \frac{11}{20} \\ -\frac{9}{20} \end{cases}$

$$c) \quad \frac{15}{4} - 2,5 : \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = 3 \quad \hat{U} \quad 2,5 : \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{4} \quad \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = \frac{10}{3}$$

$$\hat{U} \quad \begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{10}{3} \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = -\frac{10}{3} \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} \frac{3}{4}x = \frac{17}{6} \\ \frac{3}{4}x = -\frac{23}{6} \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{34}{9} \\ \frac{x}{4} = -\frac{46}{9} \end{cases}$$

Vậy $\hat{x} = \begin{cases} \frac{34}{9} \\ -\frac{46}{9} \end{cases}$

$$d) \quad 3 : \left| \frac{x}{4} - \frac{2}{3} \right| = \frac{9}{5} \quad \hat{U} \quad \left| \frac{x}{4} - \frac{2}{3} \right| = \frac{5}{3} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \\ \frac{x}{4} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3} \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{7}{3} \\ \frac{x}{4} = -1 \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{28}{3} \\ \frac{x}{4} = -4 \end{cases}$$

Vậy $\hat{x} = \begin{cases} \frac{28}{3} \\ -4 \end{cases}$

3.2.

$$a) \quad \left| 2x - 1 \right| + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \quad \hat{U} \quad \left| 2x - 1 \right| + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \quad (\text{vì } \left| 2x - 1 \right| + \frac{1}{2} > 0)$$

$$\hat{U} \quad \left| 2x - 1 \right| = \frac{1}{4} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} 2x - 1 = \frac{1}{4} \\ 2x - 1 = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{5}{4} \\ \frac{x}{2} = \frac{3}{4} \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{5}{8} \\ \frac{x}{2} = \frac{3}{8} \end{cases}$$

Vậy $S = \begin{cases} \frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} \end{cases}$

b) $x^2 + 3 > 0$, nên suy ra: $x^2 + 3 \left| x - \frac{1}{2} \right| = x^2 + 3$

$$\hat{U} \quad 3 \left| x - \frac{1}{2} \right| = 3 \hat{U} \quad \left| x - \frac{1}{2} \right| = 1 \hat{U} \quad \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 1 \\ x - \frac{1}{2} = -1 \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $S = \left\{ \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\}$

3.3.

a) $\left| \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right| = |4x - 1|$

✓ Trường hợp 1. $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 4x - 1 \hat{U} \quad \frac{3}{2}x - 4x = -1 - \frac{1}{2}$

$\hat{U} \quad -\frac{5}{2}x = -\frac{3}{2} \hat{U} \quad x = \frac{3}{5}$

✓ Trường hợp 2. $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 1 - 4x$

$\frac{11x}{2} = \frac{1}{2} \hat{U} \quad x = \frac{1}{11}$. Vậy $S = \left\{ \frac{1}{11}; \frac{3}{5} \right\}$

b) $\left| \frac{7}{5}x + \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{4}{3}x - \frac{1}{4} \right|$

Trường hợp 1. $\frac{7}{5}x + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}x - \frac{1}{4} \hat{U} \quad \frac{7}{5}x - \frac{4}{3}x = -\frac{1}{4} - \frac{2}{3}$

$\hat{U} \quad \frac{11}{5}x = -\frac{3}{4} \hat{U} \quad x = -\frac{45}{44}$

Trường hợp 2. $\frac{7}{5}x + \frac{2}{3} = \frac{1}{4} - \frac{4}{3}x \hat{U} \quad \frac{7}{5}x - \frac{4}{3}x = \frac{1}{4} - \frac{2}{3}$

$\frac{31}{15}x = -\frac{1}{4} \hat{U} \quad x = -\frac{15}{124}$

Vậy $S = \left\{ -\frac{45}{44}; -\frac{15}{124} \right\}$

c) $\left| \frac{5}{4}x - \frac{7}{2} \right| - \left| \frac{5}{8}x + \frac{3}{5} \right| = 0 \hat{U} \quad \left| \frac{5}{4}x - \frac{7}{2} \right| = \left| \frac{5}{8}x + \frac{3}{5} \right|$

Trường hợp 1. $\frac{5}{4}x - \frac{7}{2} = \frac{5}{8}x + \frac{3}{5} \hat{U} \quad \frac{5}{4}x - \frac{5}{8}x = \frac{3}{5} + \frac{7}{2}$

$\hat{U} \quad \frac{5}{8}x = \frac{41}{10} \hat{U} \quad x = \frac{164}{25}$

Trường hợp 2. $\frac{5}{4}x - \frac{7}{2} = -\frac{5}{8}x - \frac{3}{5} \hat{=} \frac{5}{4}x + \frac{5}{8}x = -\frac{3}{5} + \frac{7}{2}$

$$\hat{=} \frac{15}{8}x = \frac{29}{10} \hat{=} x = \frac{116}{75}$$

Vậy $S = \left\{ \frac{164}{25}; -\frac{116}{75} \right\}$

d) $\left| \frac{7}{8}x + \frac{5}{6} \right| - \left| \frac{1}{2}x + 5 \right| = 0 \hat{=} \left| \frac{7}{8}x + \frac{5}{6} \right| = \left| \frac{1}{2}x + 5 \right|$

Trường hợp 1. $\frac{7}{8}x + \frac{5}{6} = \frac{1}{2}x + 5 \hat{=} \frac{7}{8}x - \frac{1}{2}x = 5 - \frac{5}{6} \hat{=} x = \frac{100}{9}$

Trường hợp 2. $\frac{7}{8}x + \frac{5}{6} = -\frac{1}{2}x - 5 \hat{=} \frac{7}{8}x + \frac{1}{2}x = -5 - \frac{5}{6} \hat{=} x = -\frac{280}{66}$

Vậy $S = \left\{ \frac{100}{9}; -\frac{280}{66} \right\}$

3.4.

a) Vì $\left| 5 - \frac{2}{3}x \right|^3 \geq 0; \left| \frac{2}{3}y - 4 \right|^3 \geq 0$ nên đẳng thức chỉ xảy ra khi:

$$5 - \frac{2}{3}x = 0; \frac{2}{3}y - 4 = 0 \hat{=} \frac{2}{3}x = 5; \frac{2}{3}y = 4 \hat{=} x = \frac{15}{2}, y = 6$$

Vậy $(x; y) = \left(\frac{15}{2}; 6 \right)$

b) $\left| \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x \right| + \left| 1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{2}y \right| = 0 \hat{=} \left| \frac{1}{6} + \frac{3}{4}x \right| + \left| \frac{3}{4} - \frac{3}{2}y \right| = 0$

Vì $\left| \frac{1}{6} + \frac{3}{4}x \right|^3 \geq 0; \left| \frac{3}{4} - \frac{3}{2}y \right|^3 \geq 0$ nên đẳng thức chỉ xảy ra khi:

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{4}x = 0; \frac{3}{4} - \frac{3}{2}y = 0 \hat{=} \frac{3}{4}x = -\frac{1}{6}; \frac{3}{2}y = \frac{3}{4}$$

$$\hat{=} x = -\frac{2}{9}; y = \frac{1}{2} \text{ . Vậy } (x; y) = \left(-\frac{2}{9}; \frac{1}{2} \right)$$

c) Vì $|x - 2020|^3 \geq 0; |y - 2021|^3 \geq 0$ nên đẳng thức chỉ xảy ra khi:

$$x - 2020 = 0; y - 2021 = 0 \hat{=} x = 2020; y = 2021$$

Vậy $(x; y) = (2020; 2021)$

d) Vì $|x - y|^3 \geq 0; \left| y + \frac{21}{10} \right|^3 \geq 0$ nên đẳng thức chỉ xảy ra khi:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + \frac{21}{10} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = -\frac{21}{10}$$

$$(x; y) = \left(-\frac{21}{10}; -\frac{21}{10}\right)$$

Vậy

3.5.

a) Điều kiện $x^3 \neq 0$, suy ra:

$$x + \frac{1}{1.2} + x + \frac{1}{2.3} + x + \frac{1}{3.4} + \dots + x + \frac{1}{2019.2020} = 2020x$$

$$2019x + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2019.2020} = 2020x$$

$$2019x + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020} = 2020x$$

$$2019x + \frac{1}{1} - \frac{1}{2020} = 2020x$$

$$x = \frac{2019}{2020} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

b) Điều kiện $x^3 \neq 0$, suy ra:

$$x + \frac{1}{1.3} + x + \frac{1}{3.5} + x + \frac{1}{5.7} + \dots + x + \frac{1}{197.199} = 100x$$

$$99x + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{197.199} = 100x$$

$$99x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{197} - \frac{1}{199} = 100x$$

$$99x + \frac{1}{2} - \frac{1}{199} = 100x$$

$$99x + \frac{99}{199} = 100x \Rightarrow x = \frac{99}{199} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

c) Ta có: $\left|x + \frac{1}{2}\right|^3 \neq 0; \left|x + \frac{1}{6}\right|^3 \neq 0; \dots; \left|x + \frac{1}{110}\right|^3 \neq 0 \Rightarrow 11x^3 \neq 0 \Rightarrow x^3 \neq 0$

Từ đó suy ra: $x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + \dots + x + \frac{1}{110} = 11x$

$$(x + x + x + \dots + x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{110} = 11x$$

$$10x + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{10.11} = 11x$$

Suy ra: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = x \Rightarrow x = \frac{1}{1} - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$.

3.6.

a) $|x+4| + |y-2| = 3 \Rightarrow 0 \leq |x+4| \leq 3; 0 \leq |y-2| \leq 3$ suy ra bảng giá trị sau:

$ x+4 $	0	1	2	3
$ y-2 $	3	2	1	0

Từ đó suy ra:

x	4	-3; -5	-2; -6	-1; -7
y	5; -1	0; 4	3; 1	2

Vậy cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là:

$$\{(4; 5); (4; -1); (-3; 0); (-3; 4); (-5; 0); (-5; 4); (-2; 3); (-2; 1); (-6; 3); (-6; 1); (-1; 2); (-7; 2)\}$$

b) $|2x+1| + |y-1| = 4 \Rightarrow 0 \leq |2x+1| \leq 4; 0 \leq |y-1| \leq 4$

Mặt khác $|2x+1|$ là số lẻ nên chúng ta có bảng sau:

suy ra bảng giá trị sau:

$ 2x+1 $	1	3
$ y-1 $	3	1

Từ đó suy ra:

x	0; -1	1; -2
y	4; -2	2; 0

Vậy cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là:

$$\{(0; 4); (0; -2); (-1; 4); (-1; -2); (1; 2); (1; 0); (-2; 0); (-2; 2)\}$$

c) $|3x| + |y+5| = 5 \Rightarrow 0 \leq |3x| \leq 5; 0 \leq |y+5| \leq 5$

Mặt khác $|3x|$ chia hết cho 3, nên chúng ta có bảng sau:

Suy ra bảng giá trị sau:

$ 3x $	0	3
$ y+5 $	5	2

Từ đó suy ra:

x	0	1; -1
y	0; -10	-3; -7

Vậy cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là:

$$\{(0; 0); (0; -10); (1; -3); (1; -7); (-1; -3); (-1; -7)\}$$

d) $|5x| + |2y + 3| = 7 \Rightarrow 0 \leq |5x| \leq 7; 0 \leq |2y + 3| \leq 7$

Mặt khác $|5x|$ chia hết cho 5, nên chúng ta có bảng sau:

Suy ra bảng giá trị sau:

$ 5x $	0	5
$ 2y + 3 $	7	2 (loại)

Từ đó suy ra:

x	0
y	2; -5

Vậy cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là: $\{(0; 2); (0; -5)\}$

3.7.

a) Ta có: $|x + 5| \geq x + 5$ và $|4 - x| \geq 4 - x$ nên

$$|x + 5| + |4 - x| \geq x + 5 + 4 - x = 9$$

Do vậy đẳng thức chỉ xảy ra khi $x + 5 \geq 0$ và $4 - x \geq 0$ hay $x^3 - 5; x \leq 4$

Vậy $-5 \leq x \leq 4$

b) Ta có $|x - \frac{2}{3}| \geq x - \frac{2}{3}$ và $|x - \frac{3}{4}| \geq \frac{3}{4} - x$

Suy ra $|x - \frac{2}{3}| + |x - \frac{3}{4}| \geq x - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - x = \frac{1}{12}$

Do vậy đẳng thức chỉ xảy ra khi $x - \frac{2}{3} \geq 0$ và $\frac{3}{4} - x \geq 0$ hay $x^3 \geq \frac{2}{3}; x \leq \frac{3}{4}$

Vậy $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{3}{4}$

c) Ta có $2|x - 3| \geq |2x - 6| \geq 6 - 2x$; $|2x + 5| \geq 2x + 5$ nên

$$2|x - 3| + |2x + 5| \geq 6 - 2x + 2x + 5 = 11$$

Do vậy đẳng thức chỉ xảy ra khi $6 - 2x \geq 0$ và $2x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \leq 3; x^3 \geq -\frac{5}{2}$

Vậy $-\frac{5}{2} \leq x \leq 3$

d) $|x - 3| \geq x - 3; |5 - x| \geq 5 - x; 2|x - 4| \geq 0$

$$\text{Đ} \quad |x-3|+|5-x|+2|x-4|^3 \quad x-3+5-x+0=2$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $x=4$

3.8.

Ta có: $|x-1|+|x-4|=|x-1|+|4-x|^3 \quad |x-1+4-x|=3$

Mặt khác: $|x-2|^3 \geq 0; |y-3|^3 \geq 0$ suy ra $|x-1|+|x-2|+|y-3|+|x-4|^3 \geq 3$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $x=2; y=3$

3.9.

a) Xét $|y+1|=(2-x)(x+1) > 0$, suy ra $2-x$ và $x+1$ cùng dấu.

+ Trường hợp 1. Xét $2-x < 0$ và $x+1 < 0$

$$x > 2 \text{ và } x < -1 \text{ không xảy ra.}$$

+ Trường hợp 2. Xét $2-x > 0$ và $x+1 > 0$

$$x < 2 \text{ và } x > -1 \text{ thì } x \in \{0;1\}$$

+) Với $x=0$ suy ra: $|y+1|=2 \text{ Đ } y=1; y=-3$

+) Với $x=1$ suy ra $|y+1|=2 \text{ Đ } y=1; y=-3$

+ Trường hợp 3.

$$(2-x)(x+1)=0 \text{ Đ } x=2; x=-1 \text{ Đ } |y+1|=0 \text{ Đ } y=-1$$

Từ đó ta có cặp số nguyên $(x;y)$ sau thỏa mãn:

$$(x;y) \in \{(0;1);(0;-3);(1;1);(1;-3);(2;-1);(-1;-1)\}$$

b) Xét $|y|=(x+3)(1-x) > 0$ suy ra $x+3$ và $1-x$ cùng dấu.

+ Trường hợp 1.

+) Xét $x+3 > 0$ và $1-x > 0 \text{ Đ } -3 < x < 1$

+) Xét $x=-2$ suy ra $|y|=3 \text{ Đ } y=3; y=-3$

+) Xét $x=-1$ suy ra $|y|=4 \text{ Đ } y=4; y=-4$

+) Xét $x=0$ suy ra $|y|=3 \text{ Đ } y=3; y=-3$

+ Trường hợp 2. $x+3 < 0$ và $1-x < 0 \text{ Đ } x < -3$ và $x > 1$ vô lý (loại)

Xét $|y|=(x+3)(1-x)=0 \text{ Đ } (x;y) \in \{(-3;0);(1;0)\}$

Từ đó, ta có cặp số nguyên $(x;y)$ sau thỏa mãn:

$$\{(-2;3);(-2;-3);(-1;4);(-1;-4);(0;3);(0;-3);(-3;0);(1;0)\}$$

c) $|2y+1|+2>0 \wedge (x-2)(5-x)>0$ suy ra $x-2$ và $5-x$ cùng dấu.

+ Trường hợp 1.

+) Xét $x-2>0$ và $5-x>0 \Rightarrow 2<x<5$

+) Xét $x=3 \Rightarrow (3-2).(5-3)=|2y+1|+2 \Rightarrow 2=|2y+1|+2$ vô lý vì $|y| \geq 0$ (loại).

+) Xét $x=4$

$\Rightarrow (4-2)(5-4)=|2y+1|+2 \Rightarrow 2=|2y+1|+2 \Rightarrow |2y+1|=0$ vô lý vì $|y| \geq 0$.

+ Trường hợp 2. $x-2<0$ và $5-x<0 \Rightarrow x<2$ và $x>5$ vô lý (loại).

Vậy không tồn tại cặp số nguyên thỏa mãn.

3.10.

a) Áp dụng $|a|+|b| \geq |a+b|$ dấu bằng chỉ xảy ra khi $ab \geq 0$

$\Rightarrow |x-5|+|1-x| \geq |x-5+1-x|=4$

Mặt khác: $\frac{12}{|y+1|+3} \leq \frac{12}{3}=4$ suy ra $|x-5|+|1-x| \geq 4 \geq \frac{12}{|y+1|+3}$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $(x-5)(1-x) \geq 0$ và $y+1=0; y=-1$ với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{5; 4; 3; 2; 1\}$.

Vậy ta có cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn:

$(x; y) \in \{(5; -1); (4; -1); (3; -1); (2; -1); (1; -1)\}$

b) $|x-2y-1|+5 \geq 5$ và $\frac{10}{|y-4|+2} \leq \frac{10}{2}=5 \Rightarrow |x-2y-1|+5 \geq \frac{10}{|y-4|+2}$

Đẳng thức xảy ra khi $x-2y-1=0$ và $y-4=0$ suy ra $(x; y)=(9; 4)$

c) Ta có $|x+3|+|x-1|=|x+3|+|1-x| \geq |x+3+1-x|=4$

Ta có $|y-2|+|y+2|=|2-y|+|y+2| \geq |2-y+y+2|=4$

$\Rightarrow \frac{16}{|y-2|+|y+2|} \leq \frac{16}{4}=4 \Rightarrow |x+3|+|x-1| \geq \frac{6}{|y-2|+|y+2|}$

Dấu bằng xảy ra khi $(x+3)(1-x) \geq 0$ và $(2-y)(y+2) \geq 0$. Vì $|x; y| \in \mathbb{Z}$ suy ra

$x \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}; y \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Từ đó suy ra các cặp $(x; y)$.

d) Ta có $|x-1|+|3-x| \geq |x-1+3-x|=2$

Mặt khác: $\frac{6}{|y+3|+3} \leq \frac{6}{3}=2 \Rightarrow |x-1|+|3-x| \geq \frac{6}{|y+3|+3}$

Dấu bằng xảy ra khi $(x-1).(3-x) \geq 0$ và $y+3=0$ vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên ta có cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn là: $(x, y) \in \{(1; -3); (2; -3); (3; -3)\}$

3.11.

a) Ta có $\left|\frac{3}{4} - x\right| \geq 0 \Rightarrow A = \frac{2}{3} + \left|\frac{3}{4} - x\right| \geq \frac{2}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{2}{3}$ khi $x = \frac{3}{4}$

b) Ta có $\left|x + \frac{5}{6}\right| \geq 0 \Rightarrow B = \left|x + \frac{5}{6}\right| - \frac{21}{10} \geq -\frac{21}{10}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $-\frac{21}{10}$ khi $x = -\frac{5}{6}$

c) Ta có $\left|\frac{9}{10} - x\right| \geq 0 \Rightarrow C = \frac{11}{12} + \left|\frac{9}{10} - x\right| \geq \frac{11}{12}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{11}{12}$ khi $x = \frac{9}{10}$.

d) Ta có $\left|3x + \frac{9}{10}\right| \geq 0 \Rightarrow D = \left|3x + \frac{9}{10}\right| - \frac{73}{79} \geq -\frac{73}{79}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $-\frac{73}{79}$ khi $x = -\frac{3}{10}$.

e) Ta có $E = |4x - 3| + \left|5y + \frac{15}{16}\right| + \frac{21}{10} \geq \frac{21}{10}$

Dấu bằng xảy ra khi $4x - 3 = 0$ và $5y + \frac{15}{16} = 0$ hay $x = \frac{3}{4}; y = -\frac{3}{16}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của E là $\frac{21}{10}$ khi $x = \frac{3}{4}; y = -\frac{3}{16}$.

3.12. Ta có:

$$|x - 2019| + |x - 2021| = |x - 2019| + |2021 - x| \geq |x - 2019 + 2021 - x| = 2$$

Và $|x - 2020| \geq 0$ suy ra $A \geq 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2 khi $x = 2020$.

3.13. Ta có:

$$A = |2x + 1000| + |2020 - 2x| \geq 2x + 1000 + 2020 - 2x = 3020$$

Dấu bằng khi $2x + 1000 \geq 0$; $2020 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq -500$ và $x \leq 1010$

Với $x \in \mathbb{Z}$ suy ra $x \in \{-500; -499; -498; \dots; 1010\}$

Vậy với $x \in \{-500; -499; -498; \dots; 1010\}$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất là 3020.

$$A = \frac{(0,34 - 0,04) \cdot \frac{2}{5}}{0,8 : (4,0,25)} - 0,42 : \frac{40}{50}$$

3.14. Ta có:

$$A = \frac{0,30,4}{0,8:1} - 0,42 \cdot \frac{50}{4} = \frac{0,12}{0,8} + 0,525 = 0,15 + 0,525 = 0,675$$

3.15.

a) $7,3 \cdot 10,5 + 7,3 \cdot 15 + 2,7 \cdot 10,5 + 15 \cdot 2,7$
 $= 7,3(10,5 + 15) + 2,7(10,5 + 15)$
 $= 7,3 \cdot 25,5 + 2,7 \cdot 25,5 = 25,5(7,3 + 2,7) = 25,5 \cdot 10 = 255$

b) $5,4 - 1,5 - (7,2 - 1) = 5,4 - 1,5 - 6,2 = 3,9 - 6,2 = -2,3$

3.16.

a) $x + \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \left| -\frac{1}{5} \right| - \frac{3}{4} \Rightarrow x + \frac{1}{15} = \frac{1}{5} - \frac{3}{4}$
 $\Rightarrow x = \frac{1}{5} - \frac{3}{4} - \frac{1}{15} \Rightarrow x = -\frac{37}{60}$

b) $\frac{5}{6} - \frac{13}{8} - x = 10 - \left| -\frac{1}{6} \right|$
 $\Rightarrow \frac{5}{6} - \frac{13}{8} + x = 10 - \frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{19}{24} + x = \frac{59}{6} \Rightarrow x = \frac{59}{6} + \frac{19}{24} \Rightarrow x = \frac{85}{8}$

Chuyên đề 4. LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Lũy thừa với số mũ tự nhiên

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ thừa số}} \quad (x \in \mathbb{Q}; n \in \mathbb{N}; n > 1)$$

Quy ước: $x^1 = x, x^0 = 1 (x \neq 0)$

2. Các phép tính về lũy thừa

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$x^m : x^n = x^{m-n} \quad (x \neq 0; m, n \in \mathbb{N})$$

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$$

$$\left(\frac{x}{y} \right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (y \neq 0)$$

3. Lũy thừa với số mũ nguyên âm

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{với } (x \neq 0, n \in \mathbb{N})$$

B. Một số ví dụ

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}; B = \frac{30 \cdot 4^7 \cdot 3^{29} - 5 \cdot 14^5 \cdot 2^{12}}{54 \cdot 6^{14} \cdot 9^7 - 12 \cdot 8^5 \cdot 7^5}$$

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức :

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Để thực hiện phép tính chứa nhiều lũy thừa, ta dùng các công thức biến đổi về lũy thừa của các số nguyên tố. Sau đó có thể dùng tính chất phân phối của phép nhân đối và phép cộng.

✓ *Trình bày lời giải.*

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3 + 1)}$$

a) Ta có :

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot 2}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot 4} = \frac{1}{6}$$

b) Ta có :

$$B = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^{14} \cdot 3^{29} - 5 \cdot 2^5 \cdot 7^5 \cdot 2^{12}}{2 \cdot 3^3 \cdot 2^{14} \cdot 3^4 \cdot 3^{14} - 2^2 \cdot 3 \cdot 2^{15} \cdot 7^5} = \frac{2^{15} \cdot 3^{30} \cdot 5 - 2^{17} \cdot 5 \cdot 7^5}{2^{15} \cdot 3^{31} - 2^{17} \cdot 3 \cdot 7^5} = \frac{5(2^{15} \cdot 3^{30} - 2^{17} \cdot 7^5)}{3(2^{15} \cdot 3^{30} - 2^{17} \cdot 7^5)} = \frac{5}{3}$$

Ví dụ 2: Tìm x

a) $(x + 2)^2 = 64$; b) $(x + 5)^3 = -125$ c) $2^x + 2^{x+2} = 320$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Khi tìm x có chứa lũy thừa ở phần cơ số ta đưa hai vế về cùng số mũ và lưu ý:

$$a^n = b^n \text{ (với } n \text{ lẻ)} \text{ thì } a = b$$

$$a^n = b^n \text{ (với } n \text{ chẵn)} \text{ thì } a = b \text{ hoặc } a = -b$$

Để tìm x ở phần số mũ ta đưa hai vế về cùng cơ số và sử dụng :

$$a^m = a^n \text{ (với } a \neq 0, \pm 1) \text{ thì } m = n$$

✓ *Trình bày lời giải*

a) $(x + 2)^2 = 64 \Rightarrow (x + 2)^2 = 8^2 \Rightarrow x + 2 = 8 \text{ hoặc } x + 2 = -8$

Suy ra $x \in \{6; -10\}$

b) $(x + 5)^3 = -125 \Rightarrow (x + 5)^3 = (-5)^3 \Rightarrow x + 5 = -5 \Rightarrow x = -10$

c) $2^x + 2^{x+2} = 320 \Rightarrow 2^x (1 + 2^2) = 320$

$$2^x = 64 \Rightarrow 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$$

Ví dụ 3:

a) Chứng minh rằng $16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 66

b) Chứng minh rằng với số nguyên dương n thì $3^{n+2} - 2^{n+4} + 3^n + 2^n$ chia hết cho 30

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Để chứng minh $A : k$ ta có thể vận dụng tính chất :

$$A = b.k \text{ thì } A:k$$

$$A = B + C \text{ mà } B:k \text{ thì } C:k \text{ thì } A:k$$

✓ *Trình bày lời giải*

$$\text{a) Ta có: } 16^5 + 2^5 = 2^{20} + 2^{15} = 2^{15}(2^5 + 1) = 2^{15} \cdot 33 = 2^{14} \cdot 66:66$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } 3^{n+2} + 3^n - 2^{n+4} + 2^n &= 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^4 - 1) \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 15 = 3^{n-1} \cdot 30 - 2^{n-1} \cdot 30:30 \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Thu gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = 3^{2020} - 3^{2019} + 3^{2018} - 3^{2017} + \dots + 3^2 - 3 + 1;$$

$$\text{b) } B = 5^{2020} + 5^{2019} + 5^{2018} + 5^{2017} + \dots + 5^2 + 5 + 1$$

$$\text{c) } C = 7^{2021} - 7^{2019} + 7^{2017} - 7^{2015} + \dots + 7^5 - 7^3 + 7$$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Những bài toán tính tổng đại số về lũy thừa có cùng cơ số theo quy luật, chúng ta cần nhân hai vế với một lượng thích hợp để được biểu thức mới, mà bắt đầu từ hạng tử đối nhau thì cộng biểu thức ban đầu với biểu thức mới, bằng nhau thì trừ biểu thức mới với biểu thức ban đầu

✓ *Trình bày lời giải*

$$\text{a) Xét } 3A = 3^{2021} - 3^{2020} + 3^{2019} - 3^{2018} + \dots + 3^3 - 3^2 + 3$$

$$\Rightarrow 3A + A = 3^{2021} + 1 \Rightarrow A = \frac{3^{2021} + 1}{4}$$

$$\text{b) Xét } 5B = 5^{2021} + 5^{2020} + 5^{2019} + 5^{2018} + \dots + 5^3 + 5^2 + 5$$

$$\Rightarrow 5B - B = 5^{2021} - 1 \Rightarrow B = \frac{5^{2021} - 1}{4}$$

$$\text{c) Xét } 49A = 7^{2023} - 7^{2021} + 7^{2019} - 7^{2017} + \dots + 7^7 - 7^5 + 7^3$$

$$\Rightarrow 49C + C = 7^{2023} + 7 \Rightarrow C = \frac{7^{2023} + 1}{50}$$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng tổng:

$$S = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} - \dots + \frac{1}{2^{4n-2}} - \frac{1}{2^{4n}} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{1}{2^{2020}} < 0,2$$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Bản chất của bài toán là thu gọn tổng S. Tương tự như ví dụ trên, dễ dàng phát hiện ra

nhân hai vế của tổng S với $\frac{1}{2^2}$. Sau đó cộng với biểu thức S. Cuối cùng đánh giá

✓ *Trình bày lời giải*

$$\text{Xét } \frac{1}{2^2} S = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} - \dots + \frac{1}{2^{2016}} - \frac{1}{2^{2018}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} S + S = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{2020}} \Rightarrow \frac{5}{4} S < \frac{1}{4} \Rightarrow S < \frac{1}{5} \text{ hay } S < 0,2$$

Ví dụ 6: Đặt $A = 3^{101} + 3^{102} + 3^{103} + \dots + 3^{200}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 120

Giải

Biểu thức A có 100 số hạng. Kể từ số hạng đầu, cứ nhóm 4 số hạng liên tiếp với nhau được 25 nhóm

$$A = (3^{101} + 3^{102} + 3^{103} + 3^{104}) + (3^{105} + 3^{106} + 3^{107} + 3^{108}) + \dots + (3^{197} + 3^{198} + 3^{199} + 3^{200})$$

$$A = 3^{100} \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{104} \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{196} \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4)$$

$$A = 3^{100} \cdot 120 + 3^{104} \cdot 120 + \dots + 3^{196} \cdot 120$$

$$A = 120 \cdot (3^{100} + 3^{104} + \dots + 3^{196}) : 120. \text{ Điều phải chứng minh}$$

C. Bài tập vận dụng

4.1. Tính:

$$\text{a) } A = \frac{6 + 3^2 \cdot 2 - 6 \cdot 3^2}{3^2 + 3 \cdot 3^2 - 3^4}; \quad \text{b) } \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}$$

$$A = \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$$

4.2. Thực hiện phép tính:

$$\text{4.3. Cho } T = 2^{2020} - 2^{2019} - 2^{2018} - \dots - 2 - 1. \text{ Tính } 2021^T$$

4.4. Tìm x, biết :

$$\text{a) } 3^{x+2} + 3^x = 810 \quad \text{b) } 2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$$

$$\text{4.5. Tìm số tự nhiên } x, \text{ biết : } \frac{7^{x+2} + 7^{x+1} + 7^x}{57} = \frac{5^{2x} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3}}{131}$$

4.6. Tìm x , biết :

$$\text{a) } \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} \dots \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 4^x;$$

$$\text{b) } \frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 8^x$$

4.7. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-2}} - \frac{1}{7^{4n}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$$

$$\text{4.8. Chứng minh rằng : } B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2020}} + \frac{1}{3^{2021}} < \frac{1}{2}$$

$$\text{4.9. Chứng minh rằng : } \frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$$

$$\text{4.10. Chứng minh rằng : } \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$$

4.11. Xét tổng $T = \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2019}{2^{2018}} + \frac{2020}{2^{2019}}$. Hãy so sánh T với 3

4.12. Cho $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$ và $P = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$. Tính $(S - P)^{2013}$

(Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán, lớp 7, tỉnh Bắc Giang, năm học 2012 - 2013)

4.13. Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho : $2^a + 37 = |b - 45| + b - 45$

4.14. Chứng tỏ rằng:

a) $63^{63} - 37^{37}$ chia hết cho 10

b) $2^{100} + 2^{101} + 2^{102}$ chia hết cho 7

c) $7^{100} - 7^{99} - 7^{98}$ chia hết cho 41

4.15. Thu gọn biểu thức sau :

a) $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2020}}$

b) $B = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \dots + \frac{1}{5^{2019}} - \frac{1}{5^{2020}}$

c) $C = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2020}{3^{2020}}$

4.16. **Đố.** Bạn có thể điền các lũy thừa của 2 vào các ô vuông còn lại trong bảng bên sao cho tích các lũy thừa trong mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo bằng nhau được không ?

	2^1	
	2^5	
	2^9	

4.1

$$A = \frac{6(1+3-3^2)}{3^2(1+3-3^2)} = \frac{6}{3^2} = \frac{2}{3}$$

a)

$$B = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3+1)} = \frac{3^4 \cdot 2}{3^5 \cdot 4} = \frac{1}{6}$$

b)

$$A = \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2 \cdot 7^3} = \frac{5^{10} \cdot 7^3 (1-7)}{5^9 \cdot 7^3 (1+2)} = \frac{5 \cdot (-6)}{9} = \frac{-10}{3}$$

4.2.

$$4.3. \text{ Xét } R = 2^{2019} + 2^{2018} + \dots + 2 + 1 \Rightarrow 2R = 2^{2020} + 2^{2019} + \dots + 2^2 + 2$$

$$\Rightarrow 2R - R = 2^{2020} - 1 \Rightarrow R = 2^{2020} - 1 \text{ do đó : } T = 2^{2020} - R = 1$$

$$\Rightarrow 2021^T = 2021$$

4.4.

$$a) 3^x (3^2 + 1) = 810 \Leftrightarrow 3^x \cdot 10 = 810 \Leftrightarrow 3^x = 81 \Leftrightarrow x = 4$$

$$b) \text{ Ta có } 2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800 \Leftrightarrow 2^x \cdot 2^2 \cdot 3^x \cdot 3 \cdot 5^x = 10800 \Leftrightarrow (2 \cdot 3 \cdot 5)^x = 900$$

$$\Leftrightarrow 30^x = 30^2 \Leftrightarrow x = 2$$

$$4.5. \frac{7^{x+2} + 7^{x+1} + 7^x}{57} = \frac{5^{2x} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3}}{131} \Leftrightarrow \frac{7^x (7^2 + 7 + 1)}{57} = \frac{5^{2x} (1 + 5 + 5^3)}{131}$$

$$7^x = 5^{2x} \Leftrightarrow 7^x = 25^x \Leftrightarrow \left(\frac{7}{25}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

4.6.

$$a) \text{ Ta có } \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4}{2 \cdot 5} \cdot \frac{5}{2 \cdot 6} \cdots \frac{30}{2 \cdot 31} \cdot \frac{31}{64} = 4^x$$

$$\frac{1}{2^{30} \cdot 64} = 4^x \Leftrightarrow 4^x \cdot 2^{30} \cdot 2^6 = 1 \Leftrightarrow 2^{2x+36} = 2^0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = -18$$

$$b) \frac{4 \cdot 4^5}{3 \cdot 3^5} \cdot \frac{6 \cdot 6^5}{2 \cdot 2^5} = 8^x \Leftrightarrow \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 2} \left(\frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 2}\right)^5 = 8^x$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 4^5 = 2^{3x} \Leftrightarrow 2^{12} = 2^{3x} \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$$

4.7. Đặt về trái của bất đẳng thức là A

$$\text{Xét : } 49.A = 1 - \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^{4n-4}} - \frac{1}{7^{4n-2}} + \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}$$

$$\text{Suy ra : } 49A + A = 1 - \frac{1}{7^{100}} \text{ hay: } 50A = 1 - \frac{1}{7^{100}} < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{50}$$

Điều phải chứng minh.

4.8. Xét $3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2019}} + \frac{1}{3^{2020}} \Rightarrow 3B - B = 1 - \frac{1}{3^{2021}}$

$$\Rightarrow 2B = 1 - \frac{1}{3^{2021}} < 1 \Rightarrow B < \frac{1}{2}$$

4.9. Đặt $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$

Ta có $A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100}$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4} \quad (1)$$

Ta có : $A = \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101}$

$$\Rightarrow A > \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101}$$

$$\Rightarrow A > \frac{1}{5} - \frac{1}{101} > \frac{1}{5} - \frac{1}{100} = \frac{19}{100} = \frac{57}{300} > \frac{50}{300} = \frac{1}{6} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

4.10. Ta có : $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} =$

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} < 1$$

Điều phải chứng minh

4.11. Xét : $2T = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2^2} + \dots + \frac{2020}{2^{2018}}$

mà $T = \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2019}{2^{2018}} + \frac{2020}{2^{2019}}$

Suy ra : $2T - T = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{2020}{2^{2019}}$

$$\Rightarrow T = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{2020}{2^{2019}}$$

$$\Rightarrow 2T = 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2017}} - \frac{2020}{2^{2018}}$$

$$\Rightarrow T = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{2020}{2^{2019}} \Rightarrow 2T - T = 3 - \frac{2021}{2^{2018}} + \frac{2020}{2^{2019}} < 3$$

$$\Rightarrow T < 3$$

4.12. Ta có :

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006}\right) \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2012}\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} = S
 \end{aligned}$$

Do đó $(S - P)^{2013} = 0$

4.13. Xét $b \geq 45 \Rightarrow |b - 45| + b - 45 = b - 45 + b - 45 = 2b - 90$ là số chẵn

Xét $b < 45 \Rightarrow |b - 45| + b - 45 = 45 - b + b - 45 = 0$ là số chẵn

$$\Rightarrow 2^a + 37 \text{ là số chẵn} \Rightarrow 2^a \text{ là số lẻ} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow 1 + 37 = |b - 45| + b - 45$$

Theo nhận xét trên thì $b \geq 45$ do đó $38 = 2b - 90 \Rightarrow b = 64$

Vậy $a = 0$; $b = 64$.

4.14.

a) $63^{63} = 63^{60} \cdot 63^3 = (63^4)^{15} \cdot 63^3$

Ta có 63^4 tận cùng là 1 nên $(63^4)^{15}$ tận cùng là 1, mà 63^3 tận cùng là 7

Suy ra $(63^4)^{15} \cdot 63^3$ tận cùng là 7 $\Rightarrow 63^{63}$ tận cùng là 7

Ta có: $37^{37} = 37^{36} \cdot 37 = (37^4)^9 \cdot 37$

Ta có 37^4 tận cùng là 1 nên $(37^4)^9$ tận cùng là 1

Suy ra $(37^4)^9 \cdot 37$ tận cùng là 7

Do vậy $63^3 - 37^{37}$ tận cùng là 0. Vậy $63^3 - 37^{37}$ chia hết cho 10

b) $2^{100}(1 + 2 + 2^2) = 2^{100} \cdot 7$ chia hết cho 7

c) $7^{98}(7^2 - 7 - 1) = 7^{98} \cdot 41$ chia hết cho 41

4.15.

a) Xét $2A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2019}}$

suy ra $2A - A = 1 - \frac{1}{2^{2020}} \Rightarrow A = 1 - \frac{1}{2^{2020}}$

b) Xét $5B = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{2018}} - \frac{1}{5^{2019}}$

suy ra $5B + B = 1 - \frac{1}{5^{2020}} \Rightarrow B = \frac{5^{2020} - 1}{6 \cdot 5^{2020}}$

c) Xét $3C = 1 + \frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{2020}{3^{2019}}$

suy ra $3C - C = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2019}} - \frac{2020}{3^{2020}}$

$$2C = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2019}} + \frac{2020}{3^{2020}}$$

Xét $6C = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} + \frac{2020}{3^{2019}}$

Suy ra : $6C - 2C = 3 + \frac{2019}{3^{2019}} - \frac{2020}{3^{2020}} \Rightarrow C = \left(3 + \frac{2019}{3^{2019}} - \frac{2020}{3^{2020}} \right) : 4$

4.16. Bạn có thể điền như sau :

2^8	2^1	2^6
2^3	2^5	2^7
2^4	2^9	2^2

Chuyên đề 5. TỈ LỆ THỨC. TÍNH CHẤT CỦA DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa. Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số

- Dạng tổng quát : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hoặc $a:b = c:d$

Các số a và d gọi là ngoại tỉ ; các số b và c gọi là trung tỉ.

2. Tính chất của tỉ lệ thức

• Tính chất cơ bản : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \ (b, d \neq 0)$

• Tính chất hoán vị: Từ một tỉ lệ thức ta có thể:

- + Đổi chỗ hai ngoại tỉ cho nhau;
- + Đổi chỗ hai trung tỉ cho nhau;
- + Vừa đổi chỗ hai ngoại tỉ, vừa đổi chỗ hai trung tỉ.

3. Từ dãy tỉ số $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ta suy ra : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a-c+e}{b-d+f}$

(Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa)

4. Khi có dãy tỉ số $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$, ta nói các số a, b, c tỉ lệ với các số 2; 3; 5.

Ta cũng viết $a:b:c = 2:3:5$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Tìm hai số x và y biết $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $2x + 3y = 36$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Để tìm x, y trong dãy tỉ số bằng nhau và biết thêm điều kiện ràng buộc. Ta có thể:

- *Cách 1.* Đặt hệ số tỉ lệ k làm ẩn phụ
- *Cách 2.* Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau
- *Cách 3.* Biểu diễn x theo y từ tỉ lệ thức (hoặc y theo x)

✓ *Trình bày lời giải*

+ **Cách 1 :** (Đặt ẩn phụ)

Đặt $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = k$ suy ra : $x = 3k, y = 4k$

Theo giả thiết : $2x + 3y = 36 \Rightarrow 6k + 12k = 36 \Rightarrow 18k = 36 \Rightarrow k = 2$

Do đó : $x = 3.2 = 6; y = 4.2 = 8$

Kết luận $x = 6, y = 8$

+ **Cách 2:** (sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau):

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có : $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{2x+3y}{2.3+3.4} = \frac{36}{18} = 2$

Do đó : $\frac{x}{3} = 2 \Rightarrow x = 6$

$\frac{y}{4} = 2 \Rightarrow y = 8$

Kết luận : $x = 6, y = 8$

+ **Cách 3:** (phương pháp thế)

Từ giả thiết $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow x = \frac{3y}{4}$

Mà $2x + 3y = 36 \Rightarrow \frac{3y}{2} + 3y = 36 \Rightarrow 9y = 72 \Rightarrow y = 8$

Do đó : $x = \frac{3 \cdot 8}{4} = 6$

Kết luận $x = 6, y = 8$

Ví dụ 2: Tìm x, y, z biết : $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}, \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x - 3y + z = 6$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Từ hai tỉ lệ thức của giả thiết ,ta cần nối lại tạo thành dãy tỉ số bằng nhau. Quan sát hai tỉ lệ thức ta thấy chúng có chung y vì vậy khi nối cần tạo thành phần chứa y giống nhau. Sau đó vẫn ý tưởng như ví dụ trên, chúng ta có 3 cách giải.

- *Cách 1.* Đặt hệ số tỉ lệ k làm ẩn phụ. Biểu thị x, y, z theo hệ số tỉ lệ k .
- *Cách 2.* Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.
- *Cách 3.* Biểu diễn x, y theo z từ dãy tỉ số bằng nhau.

✓ *Trình bày lời giải*

+ **Cách 1.** Từ giả thiết : $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} \quad (1)$

$\frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \quad (2)$

Từ (1) và (2) , suy ra : $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \quad (*)$

Ta đặt $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = k$ suy ra $x = 9k; y = 12k; z = 20k$

Theo giả thiết : $2x - 3y + z = 6 \Rightarrow 18k - 36k + 20k = 6 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = 3$

Do đó: $x = 27, y = 36, z = 60$

+ **Cách 2.** Chúng ta biến đổi giả thiết như cách 1 đến (*)

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = \frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20} = \frac{2x - 3y + z}{18 - 36 + 20} = \frac{6}{2} = 3$

Do đó: $\frac{x}{9} = 3 \Rightarrow x = 27$

$\frac{y}{12} = 3 \Rightarrow y = 36$

$\frac{z}{20} = 3 \Rightarrow z = 60$

Kết luận : $x = 27, y = 36, z = 60$

+ **Cách 3.** (phương pháp thế : ta tính x, y theo z)

Từ giả thiết : $\frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow y = \frac{3z}{5}; \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow x = \frac{3y}{4} = \frac{3 \cdot \frac{3z}{5}}{4} = \frac{9z}{20}$

Mà $2x - 3y + z = 6 \Rightarrow 2 \cdot \frac{9z}{20} - 3 \cdot \frac{3z}{5} + z = 6 \Rightarrow \frac{z}{10} = 6 \Rightarrow z = 60$

Suy ra : $y = \frac{3 \cdot 60}{5} = 36, x = \frac{9 \cdot 60}{20} = 27$

Kết luận : $x = 27, y = 36, z = 60$

Ví dụ 3: Tìm hai số x và y biết $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ và $xy = 24$

Giải

Đặt $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = k$ suy ra : $x = 2k, y = 3k$

Theo giả thiết : $xy = 24 \Rightarrow 2k \cdot 3k = 24 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$

+ Với $k = 2$ thì $x = 4; y = 6$

+ Với $k = -2$ thì $x = -4; y = -6$

Kết luận. Vậy $(x; y)$ là $(-4; -6), (4; 6)$.

✓ **Nhận xét.** Trong ví dụ này có thể chúng ta mắc sai lầm sau :

+ Thứ nhất trong lời giải trên thiếu trường hợp $k = -2$

+ Thứ hai chúng ta vận dụng tính chất : $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{xy}{2 \cdot 3} = \frac{24}{6} = 4!$ Chúng ta lưu ý rằng tính chất dãy tỉ số bằng nhau không cho phép nhân (hoặc chia) tử thức với nhau. Do vậy gặp điều kiện về phép nhân hoặc lũy thừa giữa các biến, chúng ta nên đặt hệ số tỉ lệ k làm ẩn phụ

Ví dụ 4: Với a, b, c, x, y, z khác 0, biết $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$

Chứng minh rằng : $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Giải

✓ **Tìm cách giải.** Quan sát phần kết luận ta cần biến đổi đưa về : $ay = bx, bz = cy, az = cx$ hay cần chứng minh $ay - bx = 0, bz - cy = 0, az - cx = 0$. Vì vậy từ giả thiết ta cần chứng minh

$$\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c} = 0$$

. Với suy nghĩ đó, chúng ta cần nhân mỗi tỉ số với một số thích hợp vào tử và mẫu số sao cho khi vận dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau thì được kết quả bằng 0. Quan sát

tỉ số $\frac{bz - cy}{a}$ và $\frac{cx - az}{b}$ ta thấy bz và $-az$; để triệt tiêu được, chúng ta cần nhân cả tử và mẫu của tỉ số thứ nhất với a ; nhân cả tử và mẫu của tỉ số thứ hai với b . Tương tự như vậy với tỉ số thứ ba.

✓ *Trình bày lời giải*

$$\text{Từ đề bài ta có : } \frac{abz - acy}{a^2} = \frac{bcx - abz}{b^2} = \frac{acy - bcx}{c^2}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{abz - acy}{a^2} = \frac{bcx - abz}{b^2} = \frac{acy - bcx}{c^2} = \frac{abz - acy + bcx - abz + acy - bcx}{a^2 + b^2 + c^2} = 0$$

$$\text{Suy ra } ay - bx = 0, bz - cy = 0, bz - cx = 0$$

$$\Rightarrow ay = bx, bz = cy, bz = cx \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Ví dụ 5: Một khu đất hình chữ nhật có chiều rộng và chiều dài tỉ lệ với 5 và 8. Diện tích bằng $1960m^2$.
Tính chu vi hình chữ nhật đó.

Giải

✓ *Trình bày lời giải*

Đặt chiều rộng và chiều dài khu đất là x và y (mét; $x, y > 0$)

$$\text{Theo đề bài, ta có : } \frac{x}{5} = \frac{y}{8} \text{ và } xy = 1960$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{5} = \frac{y}{8} = k \text{ (điều kiện } k > 0 \text{), suy ra : } x = 5k, y = 8k$$

$$\text{Theo giả thiết : } xy = 1960 \Rightarrow 5k \cdot 8k = 1960 \Rightarrow k^2 = 49 \Rightarrow k = 7 \text{ (vì } k > 0 \text{)}$$

$$\text{Từ đó ta tìm được : } x = 35; y = 56$$

$$\text{Suy ra chu vi hình chữ nhật là : } (35 + 56) \cdot 2 = 182(m)$$

Ví dụ 6: Cho a, b, c, d khác 0 và không đổi nhau từng đôi một, thỏa mãn dãy tỷ số bằng nhau :

$$\frac{2020a + b + c + d}{a} = \frac{a + 2020b + c + d}{b} = \frac{a + b + 2020c + d}{c} = \frac{a + b + c + 2020d}{d}$$

$$\text{Tính } M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$$

Giải

Từ giả thiết suy ra :

$$2019 + \frac{a+b+c+d}{a} = 2019 + \frac{a+b+c+d}{b} = 2019 + \frac{a+b+c+d}{c} = 2019 + \frac{a+b+c+d}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

$$+ \text{Trường hợp 1: Xét } a+b+c+d = 0 \Rightarrow a+b = -(c+d); b+c = -(d+a)$$

$$M = \frac{-(c+d)}{c+d} + \frac{-(d+a)}{d+a} + \frac{c+d}{-(c+d)} + \frac{d+a}{-(d+a)}$$

Suy ra

$$M = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4$$

+ Trường hợp 2 : Xét $a+b+c+d \neq 0$

$$a=b=c=d \Rightarrow M = \frac{a+a}{a+a} + \frac{a+a}{a+a} + \frac{a+a}{a+a} = 1+1+1+1 = 4$$

Suy ra

$$\frac{21a+10b}{a-11b} = \frac{21c+10d}{c-11d}$$

Ví dụ 7: Cho a, b, c, d khác 0, thỏa mãn tỉ lệ thức

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Chứng minh rằng

Giải

Từ $\frac{21a+10b}{21c+10d} = \frac{a-11b}{c-11d}$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\text{Từ } \frac{21a+10b}{21c+10d} = \frac{a-11b}{c-11d} = \frac{21a-231b}{21c-231d} = \frac{21a+10b-(21a-231b)}{21c+10d-(21c-231d)} = \frac{241b}{241d} = \frac{b}{d} \quad (1)$$

$$\text{Từ } \frac{231a+110b}{231c+110d} = \frac{10a-110b}{10c-110d} = \frac{231a+110b+10a-110b}{231c+110d+10c-110d} = \frac{241a}{241c} = \frac{a}{c} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra : } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ hay } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Ví dụ 8: Độ dài các cạnh của một tam giác tỉ lệ với nhau như thế nào, biết nếu cộng lần lượt từng độ dài hai đường cao của tam giác đó thì các tổng này tỉ lệ với 7; 6; 5.

Giải

Đặt độ dài ba cạnh tam giác là a, b, c. Độ dài ba đường cao tương ứng là $h_a; h_b; h_c$. Theo đề bài ta có :

$$\frac{h_a + h_b}{7} = \frac{h_b + h_c}{6} = \frac{h_c + h_a}{5} \text{ và } ah_a = bh_b = ch_c \quad (1)$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{h_a + h_b}{7} = \frac{h_b + h_c}{6} = \frac{h_c + h_a}{5} = \frac{h_a + h_b - h_b - h_c}{7-6} = h_a - h_c$$

$$\Rightarrow h_c + h_a = 5h_a - 5h_c \Rightarrow 2h_a = 3h_c \Rightarrow \frac{h_a}{3} = \frac{h_c}{2} \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác } \frac{h_a + h_b}{7} = \frac{h_b + h_c}{6} \Rightarrow \frac{2h_a + 2h_b}{14} = \frac{h_b + h_c}{6} \Rightarrow \frac{3h_c + 2h_b}{14} = \frac{h_b + h_c}{6}$$

$$\Rightarrow 3(3h_c + 2h_b) = 7(h_b + h_c) \Rightarrow 9h_c + 6h_b = 7h_b + 7h_c \Rightarrow 2h_c = h_b \Rightarrow \frac{h_c}{2} = \frac{h_b}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (2),(3) suy ra : } \frac{h_a}{3} = \frac{h_b}{4} = \frac{h_c}{2}$$

$$\text{Đặt } \frac{h_a}{3} = \frac{h_b}{4} = \frac{h_c}{2} = k \ (k > 0) \Rightarrow h_a = 3k; h_b = 4k; h_c = 2k$$

$$\text{Kết hợp với (1), ta có : } 3a = 4b = 2c \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6}$$

Vậy độ dài ba cạnh tỉ lệ với 4; 3; 6.

C. Bài tập vận dụng

5.1. Tìm x, y biết :

$$\text{a) } \frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x}; \quad \text{b) } \frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x}$$

$$\text{5.2. Cho x, y thỏa mãn } \frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{6x}. \text{ Tìm x, y}$$

5.3. Tìm các số x, y, z biết rằng:

$$\text{a) } x : y : z = 3 : 4 : 5 \text{ và } 5z^2 - 3x^2 - 2y^2 = 594$$

$$\text{b) } 3(x-1) = 2(y-2); 4(y-2) = 3(z-3) \text{ và } 2x + 3y - z = 50$$

$$\text{c) } \frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5} \text{ và } x + y - z = 38$$

5.4. Tìm x, y, z biết rằng:

$$\text{a) } 7x = 10y = 12z \text{ và } x + y + z = 685;$$

$$\text{b) } \frac{x+y}{3} = \frac{5-z}{1} = \frac{y+z}{2} = \frac{9+y}{5};$$

$$\text{c) } \frac{y+z+1}{x} = \frac{z+x+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = x+y+z$$

$$\text{d) } \frac{x}{y+z+2} = \frac{y}{x+z+5} = \frac{z}{x+y-7} = x+y+z;$$

$$\text{e) } \frac{xy+1}{9} = \frac{xz+2}{15} = \frac{yz+3}{27} \text{ và } xy + yz + zx = 11$$

$$\text{5.5. Cho } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \text{ Chứng minh rằng:}$$

$$\text{a) } (a+2c).(b+d) = (a+c).(b+2d);$$

$$\text{b) } \frac{a^{2020} + b^{2020}}{c^{2020} + d^{2020}} = \frac{(a+b)^{2020}}{(c+d)^{2020}}$$

$$\text{5.6. Cho } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \text{ Các số x, y, z, t thỏa mãn } xa + yb \neq 0 \text{ và } zc + td \neq 0$$

$$\text{Chứng minh } \frac{xa + yb}{za + tb} = \frac{xc + yd}{zc + td}$$

5.7. Cho tỉ lệ thức $\frac{3x-y}{x+y} = \frac{3}{4}$. Tính giá trị của tỉ số $\frac{x}{y}$

5.8. Chứng minh rằng : Nếu $2(x+y) = 5(y+z) = 3(z+x)$ thì $\frac{x-y}{4} = \frac{y-z}{5}$

5.9. Cho a, b, c, d khác 0, thỏa mãn $b^2 = ac; c^2 = bd$. Chứng minh rằng:

$$a) \frac{a^3 + b^3 - c^3}{b^3 + c^3 - d^3} = \left(\frac{a+b-c}{b+c-d} \right)^3; \quad b) \frac{a^3 + 8b^3 + 27c^3}{b^3 + 8c^3 + 27d^3} = \frac{a}{d}.$$

5.10. Chứng minh nếu $a(y+z) = b(z+x) = c(x+y)$ trong đó a, b, c khác nhau và khác 0 thì ta có

$$\frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)}$$

5.11. Cho a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{2016} = \frac{b}{2018} = \frac{c}{2020}$. Chứng minh rằng :

$$\frac{(a-c)^2}{4} = (a-b)(b-c)$$

5.12. Cho $a+b+c = a^2 + b^2 + c^2 = 1$ và $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Chứng minh rằng :

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

5.13. Cho $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$. Chứng minh rằng biểu thức sau có giá trị

$$A = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$$

nguyên

5.14. Cho dãy tỉ số bằng nhau : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{2019}}{a_{2020}} = \frac{a_{2020}}{a_1}$

$$B = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_{2020})^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{2020}^2}$$

Tính giá trị biểu thức

5.15. Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ và $a+b+c \neq 0$. Tính $P = \frac{a^{49} \cdot b^{51}}{c^{100}}$

5.16. Cho a, b, c là ba số dương, thỏa mãn điều kiện : $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$

$$B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right).$$

Hãy tính giá trị của biểu thức

5.17. Cho a, b, c thỏa mãn $\frac{a+b+c}{a+b-c} = \frac{a-b+c}{a-b-c}$ và $b \neq 0$. Chứng minh rằng : $c = 0$

5.18. Cho x, y, z khác 0, thỏa mãn $\frac{x-y}{x+y} = \frac{z-x}{z+x}$. Chứng minh rằng $x^2 = yz$

5.19. Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z}$ (giả thiết A có nghĩa)

5.20. Cho các số $a; b; c$ khác 0 thỏa mãn $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a}$

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{a^3 + b^3 + c^3}$

5.1.

$$\text{a) Vì } \frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} \Rightarrow 24(1+2y) = 18(1+4y) \Rightarrow 24 + 48y = 18 + 72y$$

$$\Rightarrow 24y = 6 \Rightarrow y = \frac{1}{4}. \text{ Thay vào đề bài ta có :}$$

$$\frac{1+2 \cdot \frac{1}{4}}{18} = \frac{1+6 \cdot \frac{1}{4}}{6x} \Rightarrow \frac{\frac{3}{2}}{18} = \frac{\frac{5}{2}}{6x} \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot 6x = 18 \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow 18x = 90 \Rightarrow x = 5$$

$$\text{b) Ta có : } \frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x} = \frac{4+20y}{20x} = \frac{5+35y}{20x} =$$

$$= \frac{1+3y+4+20y-5-35y}{12+20x-20x} = \frac{-12y}{12} = -y$$

$$\Rightarrow 1+3y = -12y \Rightarrow y = -\frac{1}{15}$$

$$\text{Thay vào đề bài ,ta được : } \frac{1+5 \cdot \frac{-1}{15}}{5x} = \frac{1}{15} \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Vậy } x = 2 \text{ và } y = -\frac{1}{15}$$

5.2. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+1+3y-2}{5+7} = \frac{2x+3y-1}{12}$$

$$\text{Kết hợp với đề bài suy ra: } \frac{2x+3y-1}{12} = \frac{2x+3y-1}{6x}$$

$$\checkmark \text{ Trường hợp 1: Xét } 2x+3y-1=0$$

$$\text{suy ra: } \frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = 0 \Rightarrow 2x+1=0; 3y-2=0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}; y = \frac{2}{3}$$

$$\checkmark \text{ Trường hợp 2: Xét } 2x+3y-1 \neq 0 \text{ suy ra } 6x = 12 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Thay vào đề bài ta có : } \frac{2 \cdot 2 + 1}{5} = \frac{3y-2}{7} \Rightarrow \frac{3y-2}{7} = 1 \Leftrightarrow 3y-2=7 \Leftrightarrow y=3$$

$$\text{Vậy } x=2; y=3$$

Nhận xét. bài này dễ bỏ sót trường hợp 1

5.3.

$$\text{a) Đặt } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k \Rightarrow x = 3k; y = 4k; z = 5k$$

$$\text{Mà } 5z^2 - 3x^2 - 2y^2 = 594 \Rightarrow 5 \cdot 25k^2 - 3 \cdot 9k^2 - 2 \cdot 16k^2 = 594$$

$$\Leftrightarrow 66k^2 = 594 \Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow k = \pm 3$$

+ Với $k = 3$ suy ra $x = 9; y = 12; z = 15$

+ Với $k = -3$ suy ra $x = -9; y = -12; z = -15$

b) $3(x-1) = 2(y-2) \Rightarrow 6(x-1) = 4(y-2)$ suy ra $6(x-1) = 4(y-2) = 3(z-3)$

$$\Rightarrow \frac{6(x-1)}{12} = \frac{4(y-2)}{12} = \frac{3(z-3)}{12} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{4}$$

Đặt $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} = k \Rightarrow x = 2k+1; y = 3k+2; z = 4k+3$

Mà $2x + 3y - z = 50 \Rightarrow 2(2k+1) + 3(3k+2) - (4k+3) = 50$

$$\Leftrightarrow 4k + 2 + 9k + 6 - 4k - 3 = 50 \Leftrightarrow 9k = 45 \Leftrightarrow k = 5$$

Vậy $x = 2.5 + 1 = 11; y = 3.5 + 2 = 17; z = 4.5 + 3 = 23$

c) Ta có: $\frac{2x}{3} \cdot \frac{1}{12} = \frac{3y}{4} \cdot \frac{1}{12} = \frac{4z}{5} \cdot \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15} = \frac{x+y-z}{18+16-15} = \frac{38}{19} = 2$$

suy ra: $x = 36; y = 32; z = 30$

5.4.

a) Từ $7x = 10y = 12z \Rightarrow \frac{x}{60} = \frac{y}{42} = \frac{z}{35}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{60} = \frac{y}{42} = \frac{z}{35} = \frac{x+y+z}{60+42+35} = \frac{685}{137} = 5$$

Từ đó suy ra: $x = 120; y = 210; z = 175$

b) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{5-z}{1} = \frac{y+z}{2} = \frac{9+y}{5} = \frac{5-z+y+z-9-y}{1+2-5} = 2$$

$$\Rightarrow 5-z = 2 \Rightarrow z = 3; 9+y = 10 \Rightarrow y = 1; x+y = 6 \Rightarrow x = 5$$

a) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{z+x+2}{y} = \frac{x+y-3}{x} = \frac{x+z+1+z+x+2+x}{x+y+z} = 2$$

Kết hợp với đề bài, suy ra: $x+y+z = 2$

Suy ra: $y+z+1 = 2x \Rightarrow x+y+z+1 = 3x \Rightarrow 1+2 = 3x \Rightarrow x = 1$

$$z+x+2 = 2y \Rightarrow x+y+z+2 = 3y \Rightarrow 4 = 3y \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

$$x + y - 3 = 2z \Rightarrow x + y = z - 3 = 3z \Rightarrow 2 - 3 = 3z \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{5}{6}; y = \frac{11}{6}; z = \frac{-13}{6}$$

b) Giải tương tự câu c, ta được :

c) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{xy+1}{9} = \frac{zx+2}{15} = \frac{yz+3}{27} = \frac{xy+1+zx+2+yz+3}{9+15+27} = \frac{17}{51}$$

$$\text{Suy ra : } xy+1=3 \Rightarrow xy=2(1)$$

$$zx+2=5 \Rightarrow zx=3(2)$$

$$yz+3=9 \Rightarrow yz=6(3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) nhân vế với vế : } (xyz)^2 = 36 \Rightarrow xyz = \pm 6$$

$$+ \text{ Trường hợp } xyz = 6$$

$$\text{Kết hợp với (1), (2) và (3) ta có : } x=1; y=2; z=3$$

$$+ \text{ Trường hợp } xyz = -6$$

$$\text{Kết hợp với (1), (2) và (3) ta có: } x=-1; y=-2; z=-3$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk, c = dk$$

5.5. Đặt

$$\text{a) Xét } (a+2c)(b+d) = (bk+2dk)(b+d) = k.(b+2d).(b+d)(1)$$

$$\text{Xét } (a+c)(b+2d) = (bk+dk)(b+2d) = k(b+d)(b+2d)(2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra : } (a+2c)(b+d) = (a+c)(b+2d)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk, c = dk$$

b) Đặt

$$\frac{a^{2020} + b^{2020}}{c^{2020} + d^{2020}} = \frac{b^{2020}.k^{2020} + b^{2020}}{d^{2020}.k^{2020} + d^{2020}} = \frac{b^{2020}(k^{2020} + 1)}{d^{2020}(k^{2020} + 1)} = \frac{b^{2020}}{d^{2020}}(1)$$

Xét

$$\frac{(a+b)^{2020}}{(c+d)^{2020}} = \frac{(bk+b)^{2020}}{(dk+d)^{2020}} = \frac{b^{2020}(k+1)^{2020}}{d^{2020}(k+1)^{2020}} = \frac{b^{2020}}{d^{2020}}(2)$$

Xét

Từ (1) và (2), suy ra điều phải chứng minh

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk; c = dk$$

5.6. Đặt

$$\frac{xa+yb}{za+tb} = \frac{xbk+yb}{zbx+tb} = \frac{b(xk+y)}{b(zk+t)} = \frac{xk+y}{zk+t}(1)$$

Xét

$$\text{Xét } \frac{xc + yd}{zc + td} = \frac{xdk + yd}{zdk + td} = \frac{d(xk + y)}{d(zk + t)} = \frac{xk + y}{zk + t} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\frac{xa + yb}{za + tb} = \frac{xc + yd}{zc + td}$, điều phải chứng minh

$$\begin{aligned} \text{5.7. Từ } \frac{3x - y}{x + y} &= \frac{3}{4} \text{ suy ra: } 4(3x - y) = 3(x + y) \Rightarrow 12x - 4y = 3x + 3y \\ \Rightarrow 12x - 3x &= 3y + 4y \Rightarrow 9x = 7y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

5.8. Từ $2(x + y) = 5(y + z) = 3(z + x)$ suy ra:

$$\frac{2(x + y)}{30} = \frac{5(y + z)}{30} = \frac{3(z + x)}{30} \Rightarrow \frac{x + y}{15} = \frac{y + z}{6} = \frac{z + x}{10}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x + y}{15} = \frac{y + z}{6} = \frac{z + x}{10} = \frac{(x + y) - (z + x)}{15 - 10} = \frac{y - z}{5} \quad (1)$$

$$\frac{x + y}{15} = \frac{y + z}{6} = \frac{z + x}{10} = \frac{(z + x) - (y + z)}{10 - 6} = \frac{x - y}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\frac{x - y}{4} = \frac{y - z}{5}$, điều phải chứng minh.

$$\text{5.9. Từ } b^2 = ac \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c}; c^2 = bd \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}.$$

$$\text{Đặt } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk; b = ck; c = dk$$

$$\text{a) Xét } \frac{a^3 + b^3 - c^3}{b^3 + c^3 - d^3} = \frac{b^3k^3 + c^3k^3 - d^3k^3}{b^3 + c^3 - d^3} = \frac{k^3(b^3 + c^3 - d^3)}{b^3 + c^3 - d^3} = k^3 \quad (1)$$

$$\text{Xét } \left(\frac{a + b - c}{b + c - d} \right)^3 = \left(\frac{bk + ck - dk}{b + c - d} \right)^3 = \left(\frac{k(b + c - d)}{b + c - d} \right)^3 = k^3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\frac{a^3 + b^3 - c^3}{b^3 + c^3 - d^3} = \left(\frac{a + b - c}{b + c - d} \right)^3$ điều phải chứng minh.

$$\text{b) Xét } \frac{a^3 + 8b^3 + 27c^3}{b^3 + 8c^3 + 27d^3} = \frac{b^3k^3 + 8c^3k^3 + 27d^3k^3}{b^3 + 8c^3 + 27d^3} = \frac{k^3(b^3 + 8c^3 + 27d^3)}{b^3 + 8c^3 + 27d^3} = k^3 \quad (3)$$

$$\text{Xét } \frac{a}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = k \cdot k \cdot k = k^3 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra điều phải chứng minh

5.10. Từ $a(y + z) = b(z + x) = c(x + y)$ suy ra

$$\frac{a(y+z)}{abc} = \frac{b(z+x)}{abc} = \frac{c(x+y)}{abc} \Rightarrow \frac{y+z}{bc} = \frac{z+x}{ac} = \frac{x+y}{ab}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{y+z}{bc} = \frac{z+x}{ac} = \frac{(z+x)-(y+z)}{ac-bc} = \frac{x-y}{c(a-b)} \quad (1)$$

$$\frac{y+z}{bc} = \frac{x+y}{ab} = \frac{(y+z)-(x+y)}{bc-ab} = \frac{z-x}{b(c-a)} \quad (2)$$

$$\frac{z+x}{ac} = \frac{x+y}{ab} = \frac{(x+y)-(z+x)}{ab-ac} = \frac{y-z}{a(b-c)} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3), suy ra $\frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)}$, điều phải chứng minh

5.11. Áp dụng tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{a}{2016} = \frac{b}{2018} = \frac{c}{2020} = \frac{a-b}{-2} = \frac{b-c}{-2} = \frac{a-c}{-4}$$

$$\Rightarrow \frac{(a-c)^2}{16} = \left(\frac{a-b}{-2}\right)\left(\frac{b-c}{-2}\right) = \frac{(a-b)(b-c)}{4}$$

$$\frac{(a-c)^2}{4} = (a-b)(b-c)$$

Do đó

5.12. Áp dụng tính chất tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = x+y+z \quad (\text{Vì } a+b+c=1)$$

$$\text{Suy ra : } (x+y+z)^2 = \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = x^2+y^2+z^2$$

(vì $a+b+c=1$)

$$\text{Vậy } (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2$$

$$\text{5.13. Từ } \frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z+t} + 1 = \frac{y}{z+t+x} + 1 = \frac{z}{t+x+y} + 1 = \frac{t}{x+y+z} + 1$$

$$\frac{x+y+z+t}{y+z+t} = \frac{x+y+z+t}{z+t+x} = \frac{x+y+z+t}{t+x+y} = \frac{x+y+z+t}{x+y+z}$$

✓ Trường hợp 1: Xét $x+y+z+t=0$

$$\Rightarrow x+y=-(z+t); y+z=-(t+x)$$

$$A = \frac{-(z+t)}{z+t} + \frac{-(t+x)}{t+x} + \frac{z+t}{-(z+t)} + \frac{t+x}{-(t+x)}$$

Suy ra

$$A = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4$$

✓ Trường hợp 2: Xét $x + y + z + t \neq 0$

Suy ra $y + z + t = z + t + x = t + x + y = x + y + z \Rightarrow x = y = z = t$

$$A = \frac{x+x}{x+x} + \frac{x+x}{x+x} + \frac{x+x}{x+x} + \frac{x+x}{x+x} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Suy ra

Vậy biểu thức A luôn có giá trị là số nguyên

5.14. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{2019}}{a_{2020}} = \frac{a_{2020}}{a_1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2019} + a_{2020}}{a_2 + a_3 + \dots + a_{2020} + a_1}$$

Suy ra : $a_1 = a_2 = \dots = a_{2019} = a_{2020}$

$$B = \frac{(a_1 + a_1 + \dots + a_1)^2}{a_1^2 + a_1^2 + \dots + a_1^2} = \frac{2020^2 a_1^2}{2020 a_1^2} = 2020$$

Do đó

5.15. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{b+c+a} = 1 \Rightarrow a = b = c \quad P = \frac{a^{49} \cdot a^{51}}{a^{100}} = 1$$

Do đó

5.16. Từ đề bài suy ra :

$$\frac{a+b-c}{c} + 2 = \frac{b+c-a}{a} + 2 = \frac{c+a-b}{b} + 2 \Rightarrow \frac{a+b+c}{c} = \frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b}$$

Mà $a, b, c > 0$ nên $a + b + c > 0$, suy ra $a = b = c$

$$B = \left(1 + \frac{a}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{a}\right) = 8$$

Từ đó, ta có :

5.17. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{a+b+c}{a+b-c} = \frac{a-b+c}{a-b-c} = \frac{(a+b+c) - (a-b+c)}{(a+b-c) - (a-b-c)} = \frac{2b}{2b} = 1$$

$$\Rightarrow a + b + c = a + b - c \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{z-x}{z+x} \quad \frac{x-y}{z-x} = \frac{x+y}{z+x}$$

5.18. Từ

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x-y}{z-x} = \frac{x+y}{z+x} = \frac{x-y+x+y}{z-x+z+x} = \frac{2x}{2z} = \frac{x}{z} \quad (1)$$

$$\frac{x-y}{z-x} = \frac{x+y}{z+x} = \frac{x-y-x-y}{z-x-z-x} = \frac{-2y}{-2x} = \frac{y}{x} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra : $\frac{x}{z} = \frac{y}{x} \Rightarrow x^2 = yz$

5.19. Từ $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{24}$ suy ra $\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24}$

Đặt $\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24} = k \Rightarrow x = 15k; y = 20k; z = 24k$

Do đó $A = \frac{30k + 60k + 96k}{45k + 80k + 120k} = \frac{186k}{250k} = \frac{93}{125}$

5.20. Với $a, b, c \neq 0$ ta có : $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a}$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{b+c}{bc} = \frac{c+a}{ca} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow a = b = c \Rightarrow P = 1$$

Chuyên đề 6. SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN. SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN. LÀM TRÒN SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Xét phép chia:

$$3 : 20 = 0,15$$

$$5 : 12 = 0,41666...$$

- Số 0,15 là số thập phân hữu hạn.
 - Số 0,41666... được viết gọn thành 0,14(6) là số thập phân vô hạn tuần hoàn có chu kì là 6.
2. Nếu một phân số tối giản với mẫu dương mà mẫu không có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.
- Nếu một phân số tối giản với mẫu dương và mẫu có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.
3. Mỗi số hữu tỉ được biểu diễn bởi một số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn. Ngược lại, mỗi số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn biểu diễn một số hữu tỉ.

4. Quy ước làm tròn số

- ✓ *Trường hợp 1:* Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi nhỏ hơn 5 thì ta giữ nguyên bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay các chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0.
- ✓ *Trường hợp 2:* Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cộng thêm 1 vào chữ số cuối cùng của bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0

B. Một số ví dụ**Ví dụ 1:** Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản.

$$\begin{array}{llll} a) 12,5 & b) -2,54 & c) 0,126 & d) -0,0108 \\ e) 53,0263 & f) -0,984 & & \end{array}$$

Giải

$$\begin{array}{lll} a) 12,5 = \frac{25}{2}; & c) 0,126 = \frac{63}{500}; & e) 53,0263 = \frac{530263}{10000}; \\ b) -2,54 = -\frac{127}{50}; & d) -0,0108 = -\frac{27}{2500}; & f) -0,984 = -\frac{123}{125} \end{array}$$

Ví dụ 2: Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

$$\frac{11}{15}; -\frac{10}{21}; \frac{9}{7}; -\frac{80}{11}$$

Giải

$$\frac{11}{15} = 0,7(3); -\frac{10}{21} = 0,(476190); \frac{9}{7} = 1,(285714); -\frac{80}{11} = -7,(27)$$

Ví dụ 3: Biểu diễn số thập phân sau dưới dạng phân số :

$$a) 0,(73) \quad b) 0,5(18) \quad c) 0,2(6) \quad d) 1,12(45)$$

Giải✓ *Tìm cách giải.* Khi biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số thì ta nhớ :

- Nếu $0,(a)$ có chu kì là a thì $0,(a) = \frac{a}{9}$.
- Nếu $0,(\overline{ab})$ có chu kì là $\overline{ab}$ thì $0,(\overline{ab}) = \frac{\overline{ab}}{99}$
- Nếu $0,(\overline{a_1a_2...a_n})$ có chu kì là $\overline{a_1a_2...a_n}$ thì $0,(\overline{a_1a_2...a_n}) = \frac{\overline{a_1a_2...a_n}}{\underbrace{99...9}_{n \text{ số } 9}}$

Dựa vào kiến thức đó, ta có lời giải sau:

✓ *Trình bày lời giải*

$$\begin{array}{l} a) 0,(73) = \frac{73}{99} \\ b) 0,5(18) = \frac{1}{10} \cdot 5,(18) = \frac{1}{10} \cdot \left(5 + \frac{18}{99} \right) = \frac{57}{110} \\ c) 0,2(6) = \frac{1}{10} \cdot 2,(6) = \frac{1}{10} \cdot \left(2 + \frac{6}{9} \right) = \frac{4}{15} \\ d) 1,12(45) = \frac{1}{100} \cdot 112,(45) = \frac{1}{100} \cdot \left(112 + \frac{45}{99} \right) = \frac{1237}{1100} \end{array}$$

Ví dụ 4: Tính :

$$a) 0,(6) + 4\frac{1}{3} + 0,5(3);$$

$$b) \frac{2}{9} + 1,2(27) - 0,(54)$$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Trước khi thực hiện ta nên đổi số thập phân vô hạn tuần hoàn ra dạng phân số

✓ *Trình bày lời giải*

$$a) 0,(6) + 4\frac{1}{3} + 0,5(3) = \frac{2}{3} + 4\frac{1}{3} + \frac{8}{15} = 5\frac{8}{15}$$

$$b) \frac{2}{9} + 1,2(27) - 0,(54) = \frac{2}{9} + \frac{27}{22} - \frac{6}{11} = \frac{179}{198}$$

$$\frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{x}}}}} = \frac{229}{1015}$$

Ví dụ 5: Tìm số tự nhiên x biết :

Giải

$$4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{x}}}} = \frac{1015}{229} = 4 + \frac{99}{229}$$

Ta có :

$$2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{x}}} = \frac{229}{99} = 2 + \frac{31}{99} \Leftrightarrow \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{x}}} = \frac{31}{99} \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{x}} = \frac{99}{31} = 3 + \frac{6}{31}$$

Tương tự:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5 + \frac{1}{x}} = \frac{6}{31} \Leftrightarrow 5 + \frac{1}{x} = \frac{31}{6} = 5 + \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = 6$$

Ví dụ 6: Tìm x, biết :

$$\frac{0,1(6) + 0,(3)}{0,(3) + 1,1(6)} \cdot x = 0,(2)$$

Giải

$$\frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{3}{9}}{\frac{3}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{11}{9}} \cdot x = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3}} \cdot x = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} \cdot x = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} \cdot x = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot x = \frac{2}{9} \Rightarrow x = \frac{2}{9} : \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Ví dụ 7: Theo thống kê dân số thế giới tính đến ngày 28/02/2016, dân số Việt Nam có 94 104 871 người

Hãy làm tròn đến:

a) Hàng nghìn;

b) Hàng vạn;

c) Hàng triệu

- a) 94 105 000 b) 94 100 000 c) 94 000 000

C. Bài tập vận dụng

6.1.Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản.

- a) 21,10 b) $-4,36$ c) 0,708 d) $-0,0907$
 e) 0,978 f) $-0,69005$

6.2. Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn

$$\frac{7}{12}; -\frac{8}{7}; \frac{1}{11}; -\frac{123}{18}$$

6.3. Biểu diễn số thập phân sau dưới dạng phân số:

- a) 20,(05); b) 0,20(07); c) 0,1(80); d) 21,10(45)

6.4. Tính:

a) $A = 0,(37) + 0,(62)$ b) $B = 10,(3) + 0,(4) - 8,(6)$

c) $C = 0,(3) + 3\frac{1}{3} - 0,4(2)$

$$M = \frac{0,5 + 0,(3) - 0,1(6)}{2,5 + 1,(6) - 0,8(3)}$$

6.5. Rút gọn biểu thức :

6.6. Tìm x, biết:

a) $\frac{0,(3) + 0,(384615) + \frac{3}{13} \cdot x}{0,0(3)} = \frac{50}{65};$ b) $[0,(37) + 0,(62)]x = 10$

c) $0,(12) : 1,(6) = x : 0,(4)$

6.7. Trong phép chia sau đây $2020 : 7$. Tổng của 2020 chữ số đầu tiên sau dấu phẩy là bao nhiêu ?

6.8. Một số tự nhiên sau khi làm tròn đến hàng nghìn thì cho kết quả 73 000. Số lớn nhất và số nhỏ nhất có thể là bao nhiêu?

6.9. Thực hiện phép tính :

$$A = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right)^3 : \frac{2019}{2020}$$

$$A = 26 : \left[\frac{3 : (0,2 - 0,1)}{2,5 \times (0,8 + 1,2)} + \frac{(34,06 - 33,81) \times 4}{6,84 : (28,57 - 25,15)} \right] + \frac{2}{3} : \frac{4}{21}$$

6.10. Tính

6.11. Tìm tập hợp các số nguyên x, biết rằng :

$$4\frac{5}{9} : 2\frac{5}{18} - 7 < x < \left(3\frac{1}{5} : 3,2 + 4,5 \cdot 1\frac{31}{45} \right) : \left(-21\frac{1}{2} \right)$$

6.12. Tìm x biết :

$$a) \frac{2}{3}x - 70 \frac{10}{11} : \left(\frac{131313}{151515} + \frac{131313}{353535} + \frac{131313}{636363} + \frac{131313}{999999} \right) = -5$$

$$b) x - 128 = \left(4 \frac{20}{21} - 5 \right) : \left(\frac{4141}{4242} - 1 \right) : \left(\frac{636363}{646464} - 1 \right)$$

$$C = \frac{\left(1 + \frac{2020}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{2020}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2020}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{2020}{2019}\right)}{\left(1 + \frac{2019}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{2019}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2019}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{2019}{2020}\right)}$$

6.13. Tính :

6.14. a) Chứng tỏ rằng $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (với $n \in \mathbb{N}$)

b) Tính giá trị biểu thức :

$$A = \frac{2 \times 2020}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2020}}$$

6.15. Cho $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ với $a, b, c > 0$. Chứng tỏ rằng M không phải là số nguyên.

6.16. Tìm số tự nhiên x, biết :

$$a) \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x + \frac{1}{2}}}} = \frac{16}{23};$$

$$b) \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{x + \frac{1}{6}}}} = \frac{130}{421}$$

6.17. So sánh:

a) $0,(12)$ với $0,12$;

b) $-0,1(23)$ với $-0,123$

$$\frac{1}{10 + \frac{1}{9 + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{b}}}}} = 1$$

6.18. Cho với a và b là các số nguyên

Tính a + b

6.19. Thay các chữ cái bởi các chữ số khác 0 thích hợp

a) $1: \overline{0,ab} = a + b - c$

b) $\overline{2,x(y)} - \overline{1,y(x)} = 1,2(6)$; biết $x + y = 7$

6.20. Đố. Đặt phép tính (*) được xác định bởi $a * b = \frac{ab}{a+b}$

Tính giá trị biểu thức : $A = \frac{1}{1*2} - \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} - \frac{1}{4*5} + \dots + \frac{1}{2019*2020}$

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

6.1. a) $\frac{211}{10}$ b) $-\frac{109}{25}$ c) $\frac{177}{250}$ d) $-\frac{907}{10000}$

e) $\frac{489}{500}$ f) $-\frac{13801}{20000}$

6.2. $\frac{7}{12} = 0,58(3); -\frac{8}{7} = -1,(142857); \frac{1}{11} = 0,(09); -\frac{123}{18} = -6,8(3)$

6.3. a) $\frac{1985}{99}$ b) $\frac{1987}{9900}$ c) $\frac{179}{990}$ d) $\frac{23215}{1100}$

6.4. a) $A = \frac{37}{99} + \frac{62}{99} = \frac{99}{99} = 1$ b) $B = 10\frac{3}{9} + \frac{4}{9} - 8\frac{6}{9} = 2\frac{1}{9}$

c) $C = \frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} - \frac{1}{10} \cdot 4\frac{2}{9} = 3\frac{2}{3} - \frac{19}{45} = \frac{11}{3} - \frac{19}{45} = \frac{146}{45}$

6.5. $M = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} \cdot 1\frac{6}{9}}{\frac{5}{2} + 1\frac{6}{9} - \frac{1}{10} \cdot 8\frac{3}{9}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{5}} = \frac{1}{5}$

6.6.

a) $0,(3) + 0,(384615) + \frac{3}{13} \cdot x = \frac{50}{65} \cdot 0,0(3) \Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{384615}{999999} + \frac{3}{13} \cdot x = \frac{10}{13} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{5}{13} + \frac{3}{13} \cdot x = \frac{1}{39} \Leftrightarrow \frac{3}{13} \cdot x = \frac{1}{39} - \frac{1}{3} - \frac{5}{13}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{13} \cdot x = -\frac{27}{39} = -\frac{9}{13} \Leftrightarrow x = -\frac{9}{13} : \frac{3}{13} = -3$

b) $[0,(37) + 0,(62)] \cdot x = 10 \Leftrightarrow \left[\frac{37}{99} + \frac{62}{99} \right] \cdot x = 10 \Leftrightarrow 1 \cdot x = 10 \Rightarrow x = 10$

c) $0,(12) \cdot 0,(4) = x \cdot 1,(6) \Leftrightarrow \frac{12}{99} \cdot \frac{4}{9} = x \cdot 1\frac{6}{9}$

$\Leftrightarrow \frac{16}{297} = x \cdot \frac{15}{9} \Rightarrow x = \frac{16}{297} : \frac{15}{9} = \frac{16}{495}$

6.7.

Ta có : $2020 : 7 = 288,571428571428... = 288,(571428)$

Ta có : $2020 : 6 = 336$ dư 4

Vậy tổng của 2020 chữ số đầu tiên sau dấu phẩy là :

$336 \cdot (5 + 7 + 1 + 4 + 2 + 8) + 5 + 7 + 1 + 4 = 989$

6.8. Kết quả :

+ Số lớn nhất là : 73499

+ Số nhỏ nhất là : 72500

$$a) A = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{13}}{2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{13}\right)} \cdot \frac{3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64} - \frac{1}{256}\right)}{4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64} - \frac{1}{256}\right)} + \frac{5}{8} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{5}{8} = 1$$

$$b) B = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7}}{\frac{3}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10}} \Leftrightarrow B = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7}}{3\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)} + \frac{2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right)}{3\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

$$c) C = \frac{\frac{7}{9} - \frac{7}{13} + \frac{7}{18} - \frac{7}{151}}{\frac{5}{9} - \frac{5}{13} + \frac{5}{18} - \frac{5}{151}} = \frac{7\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{18} - \frac{1}{151}\right)}{5\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{18} - \frac{1}{151}\right)} = \frac{7}{5}$$

$$A = \frac{5\left(31 - \frac{2}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{23}\right)}{13\left(31 - \frac{2}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{23}\right)} + \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{13} - \frac{9}{10}}{\frac{1}{13} + \frac{1}{5} - \frac{3}{10}}$$

6.9. Ta có :

$$\Leftrightarrow A = \frac{5}{13} + \frac{3\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{13} - \frac{3}{10}\right)}{\frac{1}{5} + \frac{1}{13} - \frac{3}{10}} = \frac{5}{13} + 3 = 3\frac{5}{13}$$

6.10.

$$a) F = \frac{\frac{25}{108} \cdot \frac{5751}{25} + \frac{187}{4}}{\frac{142}{21} : \frac{-41}{21}} = \frac{\frac{231}{3} + \frac{187}{4}}{\frac{-142}{41}} = 100 : \left(-\frac{142}{41}\right) = -\frac{2050}{71}$$

$$b) G = \frac{-1\left(\frac{5}{7} + \frac{7}{9} - \frac{9}{11} + \frac{11}{13}\right) \cdot \frac{9}{4}}{\frac{2}{3}\left(\frac{5}{7} + \frac{7}{9} - \frac{9}{11} + \frac{11}{13}\right) \cdot \frac{4}{3}} \Leftrightarrow G = -\frac{3}{2} : \frac{27}{16} = -\frac{8}{9}$$

6.11.

$$a) \frac{2}{3}x - 70 \frac{10}{11} : \left(\frac{131313}{151515} + \frac{131313}{353535} + \frac{131313}{636363} + \frac{131313}{999999}\right) = -5$$

$$\frac{2}{3}x - 70 \frac{10}{11} : \left(\frac{13}{15} + \frac{13}{35} + \frac{13}{63} + \frac{13}{99}\right) = -5$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x - 70 \frac{10}{11} : \left[\frac{13}{2} \cdot \left(\frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 11}\right)\right] = -5$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x - 70 \frac{10}{11} : \left[\frac{13}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11}\right)\right] = -5$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x - 70 \frac{10}{11} : \left(\frac{13}{2} \cdot \frac{8}{11} \right) = -5 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \frac{780}{11} : \frac{52}{11} = -5$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x - 15 = -5 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = 10 \Leftrightarrow x = 15$$

$$b) x - 128 = \left(4 \frac{20}{21} - 5 \right) : \left(\frac{4141}{4242} - 1 \right) : \left(\frac{636363}{646464} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow x - 128 = \frac{-1}{21} : \left(\frac{41}{42} - 1 \right) : \left(\frac{63}{64} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow x - 128 = \frac{-1}{21} : \frac{-1}{42} : \frac{-1}{64} \Leftrightarrow x - 128 = \frac{-1}{21} \cdot \frac{-42}{1} \cdot \frac{-64}{1} = -128 \Leftrightarrow x = 0$$

$$E = \frac{0,8 : \left(\frac{4}{5} \times 1,25 \right)}{0,64 - \frac{1}{25}} + \frac{\left(1,08 - \frac{2}{25} \right) : \frac{4}{7}}{\left(6\frac{5}{9} - 3\frac{1}{4} \right) \times 2\frac{2}{17}} + (1,2 \times 0,5) : \frac{4}{5}$$

6.12. Ta có:

$$E = \frac{0,8 : 1}{0,64 - 0,04} + \frac{(1,08 - 0,08) : \frac{4}{7}}{\frac{119}{36} \times \frac{36}{17}} + 0,6 : \frac{4}{5} = \frac{0,8}{0,6} + \frac{1 \times \frac{7}{4}}{7} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{8}{6} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 2\frac{1}{3}$$

$$M = \frac{1}{1.300} + \frac{1}{2.301} + \frac{1}{3.302} + \dots + \frac{1}{101.400}$$

6.13. Xét

$$\Rightarrow 299.M = \frac{299}{1.300} + \frac{299}{2.301} + \frac{299}{3.302} + \dots + \frac{299}{101.400}$$

$$299.M = \frac{1}{1} - \frac{1}{300} + \frac{1}{2} - \frac{1}{301} + \frac{1}{3} - \frac{1}{302} + \dots + \frac{1}{101} - \frac{1}{400}$$

$$299.M = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{101} \right) - \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{301} + \frac{1}{302} + \dots + \frac{1}{400} \right)$$

$$N = \frac{1}{1.102} + \frac{1}{2.103} + \frac{1}{3.104} + \dots + \frac{1}{299.400}$$

Ta có :

$$\Rightarrow 101.N = \frac{101}{1.102} + \frac{101}{2.103} + \dots + \frac{101}{299.400}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{102} + \frac{1}{2} - \frac{1}{103} + \frac{1}{3} - \frac{1}{104} + \dots + \frac{1}{299} - \frac{1}{400}$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{299} \right) - \left(\frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \frac{1}{104} + \dots + \frac{1}{400} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{101} \right) - \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{301} + \frac{1}{302} + \dots + \frac{1}{400} \right)$$

$$\Rightarrow 299.M = 101.N \Rightarrow \frac{M}{N} = \frac{101}{299} \Rightarrow B = \frac{101}{299}$$

6.14. Vì $a, b, c > 0$ nên : $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1 \quad \text{Do đó } M > 1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Mà : } & \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right) + \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right) \\ &= \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \right) + \left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} \right) + \left(\frac{c}{c+a} + \frac{a}{c+a} \right) = 3 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right) > 1 \quad (\text{tương tự (1)})$$

$$\text{Suy ra : } M = \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right) < 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra : $1 < M < 2$ nên M không phải là số nguyên.

6.15.

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x + \frac{1}{2}}}} = \frac{16}{23} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x + \frac{1}{2}}} = \frac{23}{16} = 1 + \frac{7}{16}$$

a)

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{x + \frac{1}{2}}} = \frac{7}{16} \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x + \frac{1}{2}} = \frac{16}{7} = 2 + \frac{2}{7}$$

Tương tự :

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x + \frac{1}{2}} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

$$\frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{x + \frac{1}{6}}}} = \frac{130}{421}$$

b)

$$3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{x + \frac{1}{6}}} = \frac{421}{130} = 3 + \frac{31}{130}$$

$$4 + \frac{1}{x + \frac{1}{6}} = \frac{130}{31} = 4 + \frac{6}{31}$$

Tương tự :

$$\frac{1}{x + \frac{1}{6}} = \frac{6}{31} \Leftrightarrow x + \frac{1}{6} = \frac{31}{6} = 5 + \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = 5$$

6.16.

a) Ta có : $0,(12) = 0,121212... \rangle 0,12$ nên $0,(12) > 0,12$

b) Ta có: $0,1(23) = 0,1232323... \rangle 0,123$ nên $0,1(23) \rangle 0,123$
 $\Rightarrow 0,1(23) \langle -0,123$

$$\frac{1}{10 + \frac{1}{9 + \frac{1}{9}}} + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{b + \frac{1}{b}}}} = 1 \Leftrightarrow \frac{82}{829} + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{b + \frac{1}{b}}}} = 1$$

6.17.

$$\Leftrightarrow a + \frac{1}{b + \frac{1}{b + \frac{1}{b}}} = \frac{829}{747}$$

$$-1 < \frac{1}{b + \frac{1}{b + \frac{1}{b}}} < 1 \Rightarrow \frac{829}{747} - 1 < a < \frac{829}{747} + 1$$

Do b nguyên và khác 0 nên

Hay là $\frac{82}{747} < a < \frac{82}{747} + 2$. Do a nguyên nên $a = 1$ hoặc $a = 2$

$$b + \frac{1}{b + \frac{1}{b}} = \frac{747}{82} \Rightarrow b = 9$$

Nếu $a = 1$ thì

$$9 + \frac{1}{9 + \frac{1}{9}} = \frac{747}{82}$$

$\Rightarrow b = 9$ thử lại có đúng

Vậy $a = 1$ và $b = 9$ suy ra $a + b = 10$

Nếu $a = 2$ thì $b + \frac{1}{b + \frac{1}{b}} = -\frac{747}{665}$. Do $-\frac{747}{665} = -1 - \frac{82}{665}$

$$b + \frac{1}{b + \frac{1}{b}} = -\frac{3}{2} \neq -\frac{747}{665}$$

Nếu $b = -1$ thử lại có vô lí

Vậy $a + b = 10$

6.18.

a) $\frac{100}{ab} = a + b - c \Rightarrow \overline{ab}$ là ước của 100 $\Rightarrow \overline{ab} = 25$ (vì $a; b \neq 0$)
 $\Rightarrow a = 2; b = 5$. Do đó $a + b - c = 7 - c = 100 : 25 \Rightarrow c = 3$

Vậy $a = 2; b = 5; c = 3$

b) $2 \frac{\overline{xy} - x}{90} - 1 \frac{\overline{yx} - y}{90} = 1 \frac{26 - 2}{90} \Leftrightarrow \overline{xy} - x - \overline{yx} + y = 24 \Rightarrow x - y = 3$

Kết hợp với $x + y = 7$, ta có $x = 5; y = 2$ và đẳng thức :

$$2,5(2) - 1,2(5) = 1,2(6)$$

6.19. Ta có : $\frac{1}{a * b} = \frac{a + b}{a.b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ suy ra :

$$A = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} \right)$$

$$A = 1 + \frac{1}{2020} = \frac{2021}{2020}$$

Chuyên đề 7.

SỐ VÔ TỈ

KHÁI NIỆM VỀ CĂN BẬC HAI. SỐ THỰC

A. Kiến thức cần nhớ

1. **Số vô tỉ.** Số vô tỉ là số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

Tập hợp các số vô tỉ kí hiệu là I.

2. Khái niệm về căn bậc hai

Căn bậc hai của một số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$

* Số dương a có đúng hai căn bậc hai, một số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$ và một số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.

* Số 0 chỉ có một căn bậc hai là số 0, cũng biết $\sqrt{0} = 0$.

3. Số thực

* Số vô tỉ và số hữu tỉ gọi chung là số thực.

* Tập hợp các số thực kí hiệu là R.

* Cách so sánh hai số thực tương tự như so sánh hai số hữu tỉ viết dưới dạng số thập phân.

* Trong tập hợp các số thực cũng có các phép toán với các tính chất tương tự như các phép toán trong tập hợp các số hữu tỉ.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Tính và so sánh:

a) $\sqrt{4.9}$ và $\sqrt{4}.\sqrt{9}$;

b) $\sqrt{9.36}$ và $\sqrt{9}.\sqrt{36}$.

c) $\sqrt{25.81}$ và $\sqrt{25}.\sqrt{81}$.

d) $\sqrt{0,64.0,25}$ và $\sqrt{0,64}.\sqrt{0,25}$.

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Để tính $\sqrt{a.b}$ ta thực hiện phép nhân $a.b$ trước, sau đó mới khai căn kết quả. Để tính $\sqrt{a}.\sqrt{b}$ ta tính $\sqrt{a}$ và $\sqrt{b}$ sau đó nhân kết quả với nhau.

✓ *Trình bày lời giải*

a) Ta có: $\sqrt{9.4} = \sqrt{36} = 6$ và $\sqrt{9}.\sqrt{4} = 3.2 = 6$

Suy ra $\sqrt{9.4} = \sqrt{4.9}$.

b) Kết quả $\sqrt{9.36} = \sqrt{9}.\sqrt{36} = 18$.

c) Kết quả $\sqrt{25.81} = \sqrt{25}.\sqrt{81} = 45$.

d) Kết quả $\sqrt{0,64.0,25} = \sqrt{0,64}.\sqrt{0,25} = 0,4$

Từ đó ta có thể dự đoán một công thức: $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ với $a \geq 0; b \geq 0$.

Ví dụ 2: Tính giá trị biểu thức:

a) $\sqrt{36}.\sqrt{\frac{25}{16}} + \frac{1}{4}$.

b) $\sqrt{\frac{4}{81}} : \sqrt{\frac{25}{81}} - 1\frac{2}{5}$.

c) $0,1.\sqrt{225}.\sqrt{\frac{1}{4}}$.

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Thực hiện phép tính chứa căn bậc hai và phép tính cộng, trừ, nhân, chia, chúng ta thực hiện theo thứ tự phép tính: khai căn bậc hai trước, sau đó nhân, chia cuối cùng là cộng trừ.

✓ *Trình bày lời giải*

a) $\sqrt{36}.\sqrt{\frac{25}{16}} + \frac{1}{4} = 6.\frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{30}{4} + \frac{1}{4} = \frac{31}{4}$.

b) $\sqrt{\frac{4}{81}} : \sqrt{\frac{25}{81}} - 1\frac{2}{5} = \frac{2}{9} : \frac{5}{9} - 1\frac{2}{5} = \frac{2}{5} - 1\frac{2}{5} = -1$.

c) $0,1.\sqrt{225}.\sqrt{\frac{1}{4}} = 0,1.15.\frac{1}{2} = 0,75$.

Ví dụ 3: Tính giá trị của biểu thức: $A = 27 - 7|x| - 2002x$, biết $|x| = \sqrt{(-2)^2}$.

Giải

$$|x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

- Nếu $x = 2$ thì $A = 27 - 7.2 - 2002.2 = -4027$.

- Nếu $x = -2$ thì $A = 27 - 7.2 - 2002(-2) = 2033$.

Ví dụ 4: Tìm x , biết:

$$a) \sqrt{1,69} \cdot \left(2\sqrt{x} + \sqrt{\frac{81}{121}} \right) = \frac{13}{10}.$$

$$b) (3x^2 - 2) \cdot \left(2x^2 - \frac{1}{0,18} \right) \cdot (x^2 + 9) = 0.$$

$$c) \left| \frac{3}{5} \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{20} \right| - \frac{2}{3} = \frac{4}{5}.$$

$$d) (x^2 - 5) \cdot \left(3x^2 - \frac{4}{3} \right) \cdot \left(\sqrt{|x|} - \frac{\sqrt{5}}{4} \right) = 0.$$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Những bài tìm x chứa căn bậc hai, chúng ta lưu ý kiến thức sau:

- $\sqrt{x} = m (m \geq 0)$ thì $x = m^2$.
- $x^2 = m (m > 0)$ thì $x = \pm \sqrt{m}$.

✓ *Trình bày lời giải.*

$$a) 1,3 \cdot \left(2\sqrt{x} + \frac{9}{11} \right) = 1,3$$

$$2\sqrt{x} + \frac{9}{11} = 1$$

$$2\sqrt{x} = \frac{2}{11} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{11} \Leftrightarrow x = \frac{1}{121}.$$

$$b) (3x^2 - 2) \cdot \left(2x^2 - \frac{1}{0,18} \right) \cdot (x^2 + 9) = 0.$$

$$3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

+ *Trường hợp 1:* Xét:

$$2x^2 - \frac{1}{0,18} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = \frac{1}{0,18} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{0,36} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{0,6} = \pm \frac{5}{3}.$$

+ *Trường hợp 2:* Xét:

$$x \in \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}}; -\sqrt{\frac{2}{3}}; \frac{5}{3}; -\frac{5}{3} \right\}.$$

Vậy

$$c) \left| \frac{3}{5} \sqrt{x} - \frac{1}{20} \right| = \frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{22}{15}$$

$$+ \text{Trường hợp 1: Xét: } \frac{3}{5} \sqrt{x} - \frac{1}{20} = \frac{22}{15} \Rightarrow \frac{3}{5} \sqrt{x} = \frac{91}{60} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{91}{36} \Rightarrow x = \frac{8281}{1296}.$$

$$+ \text{Trường hợp 2: Xét: } \frac{3}{5} \sqrt{x} - \frac{1}{20} = -\frac{22}{15} \Rightarrow \frac{3}{5} \sqrt{x} = -\frac{17}{12} \Rightarrow \text{Không tồn tại } x.$$

$$\text{Vậy } x = \frac{8281}{1296}.$$

$$d) x^2 - 5 = 0 \text{ hoặc } 3x^2 - \frac{4}{3} = 0 \text{ hoặc } \sqrt{|x|} - \frac{\sqrt{5}}{4} = 0.$$

$$\text{Xét } x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{5}.$$

$$\text{Xét } 3x^2 - \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2}{3}.$$

$$\text{Xét } \sqrt{|x|} - \frac{\sqrt{5}}{4} = 0 \Leftrightarrow |x| = \frac{5}{16} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5}{16}.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \sqrt{5}; -\sqrt{5}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{5}{16}; -\frac{5}{16} \right\}.$$

Ví dụ 5: Không dùng bảng số hoặc máy tính, hãy so sánh:

a) $\sqrt{26} + \sqrt{17}$ với 9.

b) $\sqrt{8} - \sqrt{5}$ với 1.

c) $\sqrt{63-27}$ với $\sqrt{63} - \sqrt{27}$.

Giải

✓ *Tìm cách giải:* Khi so sánh các biểu thức chứa căn bậc hai, mà không dùng máy tính, chúng ta vận dụng tính chất:

- $a > b \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}.$
- $a > b, x < y \Rightarrow a - x > b - y.$

✓ *Trình bày lời giải.*

a) Ta có: $\sqrt{26} > \sqrt{25} = 5; \sqrt{17} > \sqrt{15} = 4.$

$$\Rightarrow \sqrt{26} + \sqrt{17} > 5 + 4. \Rightarrow \sqrt{26} + \sqrt{17} > 9.$$

b) $\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3; \sqrt{5} > \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \sqrt{8} - \sqrt{5} < 3 - 2$ hay $\sqrt{8} - \sqrt{5} < 1.$

c) Ta có: $\sqrt{63-27} = \sqrt{36} = 6$

$$\sqrt{63} - \sqrt{27} < \sqrt{64} - \sqrt{25} = 8 - 5 = 3 \Rightarrow \sqrt{63-27} > \sqrt{63} - \sqrt{27}.$$

Ví dụ 6: Cho $A = 2019 + \sqrt{2x+3}; B = 21 - 10\sqrt{x+2}$. Hãy tìm:

a) Giá trị nhỏ nhất của A.

b) Giá trị lớn nhất của B.

Giải

✓ *Tìm lời giải.* Chúng ta lưu ý: $\sqrt{A} \geq 0$ với mọi $A \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi $A = 0$.

✓ *Trình bày lời giải.*

a) Ta có: $A = 2019 + \sqrt{2x+3} \geq 2019.$

Dấu bằng xảy ra khi $x = -1,5$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2019 khi $x = -1,5$.

b) Ta có: $B = 21 - 10\sqrt{x+2} \leq 21$. Dấu bằng xảy ra khi $x = -2$.

Vậy giá trị lớn nhất của B là 21 khi $x = -2$.

$$\sqrt{a} = \underbrace{99 \dots 96}_{2020 \text{ chữ số}}.$$

Ví dụ 7: Tính tổng các chữ số của a biết rằng:

$$a = \left(\underbrace{99 \dots 96}_{2020} \right)^2 = \underbrace{99 \dots 96}_{2020} \times \underbrace{99 \dots 96}_{2020}$$

Ta có:

$$a = \left(\underbrace{100 \dots 0}_{2020} - 4 \right) \times \underbrace{99 \dots 96}_{2020} = \underbrace{99 \dots 96}_{2020} \underbrace{00 \dots 0}_{2021} - 4 \times \underbrace{99 \dots 96}_{2020}$$

$$a = \underbrace{99 \dots 96}_{2020} \underbrace{00 \dots 0}_{2020} - \underbrace{399 \dots 9996}_{2020}$$

$$a = \underbrace{99 \dots 95}_{2020} \underbrace{60 \dots 004}_{2020}$$

Vậy tổng các chữ số a là: $2020 \cdot 9 + 5 + 6 + 4 = 18195$

Ví dụ 8: Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ

Giải

✓ *Tìm lời giải.* Một số thực chỉ có thể là số hữu tỷ hoặc số vô tỉ. Do vậy để chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỉ, chúng ta nên dùng phương pháp chứng minh bằng phản chứng:

- *Bước 1:* Phủ định kết luận. Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ.
- *Bước 2:* Lập luận logic, suy ra mâu thuẫn với một điều đã biết, một tính chất hiển nhiên.
- *Bước 3:* Vậy giả sử là sai. Suy ra kết luận là đúng.

✓ *Trình bày lời giải.*

Giả sử $\sqrt{2}$ là một số hữu tỷ, như vậy $\sqrt{2}$ có thể viết $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Với $m, n \in \mathbb{N}^+$ và $\text{ƯCLN}(m, n) = 1$.

Khi đó $m = n \cdot \sqrt{2} \Rightarrow m^2 = 2n^2$. Do đó $m^2 : 2 \Rightarrow m : 2$ (1)

Đặt $m = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^+$). Thay vào, ta có: $(2k)^2 = 2n^2$.

$$\Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2 : 2 \Rightarrow n : 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra m và n cùng chia hết cho 2 trái với $\text{ƯCLN}(m, n) = 1$.

Vì vậy $\sqrt{2}$ không thể là số hữu tỷ, do đó $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

C. Bài tập vận dụng

7.1 Thực hiện phép tính:

a) $A = \sqrt{64} + \sqrt{81} - \sqrt{(-7)^2}$.

b) $B = \sqrt{121} + \sqrt{(-5)^2} - \sqrt{16}$.

7.2 Thực hiện phép tính:

a) $A = \left[-\sqrt{2,25} + 4\sqrt{(-2,15)^2} - \left(3 \cdot \sqrt{\frac{7}{6}} \right)^2 \right] \cdot \sqrt{1\frac{9}{16}}$.

b) $B = \sqrt{\frac{361}{10^6}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot \sqrt{(-10)^8} - 30 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{5}} \right]$.

$$c) C = \left[\sqrt{64} + 2\sqrt{(-3)^2} - 7\sqrt{1,69} + 3\sqrt{\frac{25}{16}} \right] : \left(5\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2$$

$$B = \left(\frac{10\sqrt{1,21}}{7} + \frac{22\sqrt{0,25}}{3} \right) : \left(\frac{5}{\sqrt{49}} + \frac{\sqrt{225}}{9} \right).$$

7.3 Thực hiện phép tính:

$$A = \sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}}$$

7.4 Thực hiện phép tính:

7.5 So sánh:

$$a) \sqrt{0,04} + \sqrt{0,25} \text{ và } 0,01 + 5 \times \sqrt{0,36}$$

$$b) 0,5 \times \sqrt{100} - \sqrt{\frac{4}{25}} \text{ và } \left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}} \right) : 5$$

7.6 So sánh:

$$a) \sqrt{17} \text{ và } 4.$$

$$b) \sqrt{63} \text{ và } 8.$$

$$c) \sqrt{13+17} \text{ và } \sqrt{13} + \sqrt{17}.$$

7.7 Tính giá trị biểu thức: $B = \sqrt{x^2 + y^2 - x^2}$ với $x = 7, y = 6, z = 2$.

7.8 Tìm x biết:

$$a) 7 - x = \sqrt{(-5)^2}.$$

$$b) 2020 : x - 2 = \sqrt{1 + 2 + 3 + 2 + 1}$$

$$c) x + \frac{\sqrt{22,09}}{5} = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{9}{25}}.$$

$$d) x + \sqrt{81} = \sqrt{5^2 - 3^2}.$$

$$e) \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}.$$

$$A = \sqrt{225} - \frac{1}{\sqrt{5}} - 1; \quad B = \sqrt{196} - \frac{1}{\sqrt{6}}$$

7.9 Hãy so sánh A với B biết:

$$7.10 \text{ Cho } P = \frac{1}{2} + \sqrt{x}; \quad Q = 7 - 2\sqrt{x-1}.$$

Hãy tìm:

a) Giá trị nhỏ nhất của P.

b) Giá trị lớn nhất của Q.

$$7.11 \text{ Cho } M = \frac{\sqrt{x-1}}{2}. \text{ Tìm } x \in \mathbb{Z} \text{ và } x < 50 \text{ để cho M có giá trị nguyên.}$$

$$7.12 \text{ Cho } N = \frac{9}{\sqrt{x}-5}. \text{ Tìm } x \in \mathbb{Z} \text{ để N có giá trị nguyên.}$$

7.13 Chứng minh rằng: $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{9} < 12 + 5\sqrt{5}.$

7.14 Chứng tỏ rằng: $\sqrt{3}$ là một số vô tỉ.

7.15 Tìm x, biết;

$$a) x^2 = 4.$$

$$b) x^2 = 6.$$

$$c) x^2 = 5 \text{ (với } x < 0).$$

d) $x^2 = 8$ (với $x > 0$).

e) $(x+5)^2 = 5$.

f) $(x-8)^2 = 8$.

g) $(x+3)^2 = 6$.

h) $(2x+5)^2 = 7$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

7.1 a) $A = 8 + 9 - 7 = 10$.

b) $B = 11 + 5 - 4 = 12$.

7.2 a) $A = \left[-1,5 + 4,2, 15 - 9\frac{7}{6} \right] \cdot \sqrt{\frac{25}{16}}$

$$A = [-1,5 + 8,6 - 10,5] \cdot \frac{5}{4}$$

$$A = (-3,4) \cdot \frac{5}{4} = -\frac{17}{4}$$

b) $B = \frac{19}{10^3} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot 10^4 - 30 \cdot 2 \cdot 10^2 \right] = \frac{19}{10^3} \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot 10 - 3 \cdot 2 \right] = 19 \cdot (15 - 6) = 171$

c) $C = \left[8 + 2,3 - 7,1, 3 + 3\frac{5}{4} \right] : \left(25 \cdot \frac{2}{3} \right) = (8 + 6 - 9,1 + 3,75) : \frac{50}{3}$

$$C = 8,65 \cdot \frac{3}{50} = 0,519$$

7.3 $B = \left(\frac{10,1,1}{7} + \frac{22,0,5}{3} \right) : \left(\frac{5}{7} + \frac{15}{9} \right) = \left(\frac{11}{7} + \frac{11}{3} \right) : \left(\frac{5}{7} + \frac{5}{3} \right)$

$$B = \left[11 \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3} \right) \right] : \left[5 \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{11}{5}$$

7.4 $A = \sqrt{\frac{2^{30} + 2^{20}}{2^{12} + 2^{22}}} = \sqrt{\frac{2^{20} \cdot (2^{10} + 1)}{2^{12} (1 + 2^{10})}} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16$

7.5 a) Ta có: $\sqrt{0,04} + \sqrt{0,25} = 0,2 + 0,5 = 0,7$

$$0,01 + 5 \cdot \sqrt{0,36} = 0,01 + 5 \cdot 0,6 = 3,01$$

Suy ra $\sqrt{0,04} + \sqrt{0,25} < 0,01 + 5 \cdot \sqrt{0,36}$.

b) Ta có $0,5 \cdot \sqrt{100} - \sqrt{\frac{4}{5}} = 0,5 \cdot 10 - \frac{2}{5} = 5 - \frac{2}{5} = \frac{23}{5}$

$$\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}} \right) : 5 = \left(\sqrt{\frac{25}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}} \right) \cdot \frac{1}{5} = \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

Suy ra $0,5 \cdot \sqrt{100} - \frac{4}{5} > \left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}} \right) : 5$

7.6 a) $\sqrt{17} > \sqrt{16} = 4$.

b) $\sqrt{63} < \sqrt{64} = 8$.

c) $\sqrt{13+17} = \sqrt{30} < \sqrt{36} = 6$.

$$\sqrt{13} + \sqrt{17} > \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

Suy ra: $\sqrt{13+17} < \sqrt{13} + \sqrt{17}$

7.7 Thay $x=7, y=6, z=2$ vào biểu thức ta được;

$$B = \sqrt{7^2 + 6^2 - 2^2} = \sqrt{49 + 36 - 4} = \sqrt{81} = 9$$

7.8 a) $7 - x = 5 \Leftrightarrow x = 2.$

b) $2020 : x - 2 = 3 \Leftrightarrow 2020 : x = 5 \Leftrightarrow x = 404.$

c) $x - \frac{4,7}{5} = \frac{0,3}{5} \Leftrightarrow x = 1.$

d) $x + 9 = 4 \Leftrightarrow x = -5.$

e) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$

7.9 Ta có: $A = 15 - \frac{1}{\sqrt{5}} - 1 = 14 - \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$B = 14 - \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{mà} \quad \sqrt{5} < \sqrt{6} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow A = 14 - \frac{1}{\sqrt{5}} < B = 14 - \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow A < B$$

7.10 a) Ta có: $P = \frac{1}{2} + \sqrt{x} \geq \frac{1}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 0$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$ khi $x = 0$.

b) Ta có: $Q = 7 - 2\sqrt{x-1} \leq 7$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$. Vậy giá trị lớn nhất của Q là 7 khi $x = 1$.

7.11 M có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} : 2$ hay $x-1$ là số chính phương chẵn. Mà $x < 50$ nên $x-1 < 49$ suy ra $x-1 \in \{0; 4; 16; 36\} \Rightarrow x \in \{1; 5; 17; 37\}$

Vậy với $x \in \{1; 5; 17; 37\}$ thì M có giá trị là số nguyên.

7.12 $\sqrt{x} - 5 \in U(9)$ mà $U(9) = \{1; 3; 9; -1; -3; -9\}$

Suy ra bảng giá trị:

$\sqrt{x} - 5$	1	3	9	-1	-3	-9
$\sqrt{x}$	6	8	14	4	2	-4
x	36	64	196	16	4	$\emptyset$

Vậy với $x \in \{36; 64; 196; 16; 4\}$ thì N có giá trị nguyên.

7.13 Ta có: $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} > 2 + 2 + 2 = 6.$

$$\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{8} + \sqrt{9} < 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15.$$

Từ đó suy ra: $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{9} < 1 + 6 + 15 = 22$.

Mà $12 + 5\sqrt{5} > 12 + 5.2 = 22$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

7.14 Giả sử $\sqrt{3}$ là số hữu tỷ, suy ra $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\text{ƯCLN}(m, n) = 1$

Suy ra: $3 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 3n^2 \Rightarrow m \vdots 3$. Đặt $m = 3k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) (1)

Suy ra $9k^2 = 3n^2 \Rightarrow n^2 = 3k^2 \Rightarrow n \vdots 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra m và n cùng chia hết cho 3 trái với $\text{ƯCLN}(m, n) = 1$.

Vì vậy $\sqrt{3}$ không thể là số hữu tỷ, do đó $\sqrt{3}$ là số vô tỉ.

7.15 Đáp số:

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|-----------------------------|
| a) $x = \pm 2$. | b) $x = \pm \sqrt{6}$. | c) $x = -\sqrt{5}$. |
| d) $x = \sqrt{8}$. | e) $x = \pm \sqrt{5} - 5$. | f) $x = \pm \sqrt{8} + 8$. |
| g) $x = \pm \sqrt{6} - 3$. | h) $x = \frac{\pm \sqrt{7} - 5}{2}$. | |

Chuyên đề 8

PHẦN NGUYÊN, PHẦN LẺ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa:

Ta biết rằng mọi số thực x đều có thể viết được dưới dạng $x = n + y$ trong đó $n \in \mathbb{Z}$ và $0 \leq y < 1$.

Chẳng hạn $7,3 = 7 + 0,3$; $-7,3 = -8 + 0,7$.

Hơn nữa cách viết trên là duy nhất. Ta gọi số nguyên n là phần của x và kí hiệu là $[x]$; còn y được gọi là phần lẻ của x và kí hiệu là $\{x\}$.

Từ phân tích trên, ta rút ra định nghĩa.

✓ **Định nghĩa.** Phần nguyên của x, kí hiệu là $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x; phần lẻ của x là $x - [x]$ được kí hiệu là $\{x\}$.

2. Tính chất:

- $x = [x] + \{x\}$;
- $x = [x] \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
- $x = \{x\} \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$;

- $x = 1 < [x] \leq x$;
- Nếu $k \in \mathbb{Z}$ thì $[x+k] = [x] + k$ và $\{x+k\} = \{x\}$;
- $0 \leq \{x\} < 1$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Tìm phần nguyên, phần lẻ của các số hữu tỉ x , biết:

- a) $x = -2020$; v) $21,12$; c) $x = -\frac{11}{21}$; d) $x = \frac{21}{73}$.

Giải

a) $[x] = -2020; \{x\} = 0$

b) $[x] = 21; \{x\} = 0,12$

c) $[x] = -1; \{x\} = -\frac{11}{21} - (-1) = \frac{10}{21}$

d) $[x] = 0; \{x\} = \frac{21}{73}$

Ví dụ 2: Tìm $[x]$ biết: $x < 9 < x + 0,6$.

Giải

✓ *Tìm cách giải:* Nếu số hữu tỉ x bị “kẹp giữa” hai số nguyên liền nhau thì $[x]$ đúng bằng số nhỏ trong hai số nguyên đó tức là $n \leq x < n+1$ với $n \in \mathbb{Z}$ thì $[x] = n$.

✓ *Trình bày lời giải*

Vì $x + 0,6 > 0 \Rightarrow 9 - 0,6 = 8,4 > 8$ mà $x < 9 \Rightarrow 8 < x < 9$ nên $[x] = 8$.

Ví dụ 3: Tìm phần nguyên của số hữu tỉ x biết:

- a) $12 < x < 12,5$; b) $x - 0,1 < 8 < x$;
c) $-14,11 < x < -14$; d) $x < -10 < x + \frac{1}{5}$.

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Tương tự như ví dụ 2. Chúng ta tìm số nguyên n sao cho $n \leq x < n+1$ với $n \in \mathbb{Z}$ thì $[x] = n$.

✓ *Trình bày lời giải.*

a) Ta có: $12 < x < 12,5 \Rightarrow 12 < x < 13 \Rightarrow [x] = 12$.

b) Ta có: $x - 0,1 < 8 < x \Leftrightarrow -15 < x < -14 \Rightarrow [x] = -15$.

c) Ta có: $x - 0,1 < 8 \Rightarrow x < 8 + 0,1 = 8,1 < 9$ mà $x > 8$

$$\Rightarrow 8 < x < 9 \Rightarrow [x] = 8$$

d) Ta có: $x + \frac{1}{5} > -10 \Rightarrow x > -10 - \frac{1}{5} > -11$ mà $x < -10 \Rightarrow -11 < x < -10 \Rightarrow [x] = -11$.

$$A = \frac{1}{\frac{1}{2015} + \frac{1}{2016} + \frac{1}{2017} + \dots + \frac{1}{2024}}$$

Ví dụ 4: Đặt $A = \frac{1}{\frac{1}{2015} + \frac{1}{2016} + \frac{1}{2017} + \dots + \frac{1}{2024}}$ Tìm $[A]$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Với ý tưởng như ví dụ trên. Chúng ta tìm số nguyên n sao cho $n \leq A < n+1$ với $n \in \mathbb{Z}$ thì $[A] = n$. Nhận thấy mẫu số của biểu thức A có 10 phân số, do vậy việc đánh giá nên dùng phương pháp so sánh cùng tử và nhóm thích hợp các phân số.

✓ *Trình bày lời giải*

Ta có: $\frac{1}{2015} + \dots + \frac{1}{2024} < \frac{5}{2015} + \frac{5}{2020} \Rightarrow A > \frac{403.404}{807} \Rightarrow A > 201$

Mà: $\frac{1}{2015} + \dots + \frac{2}{2024} > \frac{2}{2016} + \frac{2}{2018} + \frac{2}{2020} + \frac{2}{2022} + \frac{2}{2024}$
 $= \left(\frac{1}{1008} + \frac{1}{1012} \right) + \frac{1}{1010} + \left(\frac{1}{1009} + \frac{1}{1011} \right) > 5 \cdot \frac{1}{1010} = \frac{1}{202} \Rightarrow A < 202$

$$\Rightarrow A < 202 \Rightarrow [A] = 201.$$

Ví dụ 5: Tích $T = 1.2.3...100$ có bao nhiêu thừa số 3 khi phân tích ra thừa số nguyên tố?

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Việc tìm có bao nhiêu thừa số 3 khi phân tích T ra thừa số nguyên tố theo cách đếm là hết sức khó khăn. Khi phân tích đề bài, chúng ta chỉ cần tìm các số chia hết cho các lũy thừa của 3, sau đó cộng lại.

✓ *Trình bày lời giải.*

Ta có nhận xét rằng bắt đầu kể từ số 1, cứ 3 số lại có một bội của 3, cứ 9 số (3^2) lại có một bội của 9, cứ 27 số (3^3) lại có một bội của 27;... Do đó số thừa số 3 khi phân tích T ra thừa số nguyên tố bằng:

$$\left[\frac{1000}{3} \right] + \left[\frac{1000}{3^2} \right] + \left[\frac{1000}{3^3} \right] + \left[\frac{1000}{3^4} \right] + \left[\frac{1000}{3^5} \right] + \left[\frac{1000}{3^6} \right] + \left[\frac{1000}{3^7} \right]$$

$$= 333 + 111 + 37 + 12 + 4 + 1 = 498.$$

(Vì số $\frac{1000}{3^7}$ có phần nguyên bằng 0 nên ta không tiếp tục tìm phần nguyên của số tiếp theo).

✓ *Tổng quát.* Số thừa số nguyên tố p khi phân tích $R = 1.2.3...n$, ra thừa số nguyên tố là:

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p^k} \right] \text{ với } k \text{ là số mũ lớn nhất sao cho } p^k \leq n.$$

Ví dụ 6: Tìm số hữu tỉ x , biết rằng:

a) $[3x-4] = x;$

b) $[x+8] = -3x;$

c) $[5x-3] = 2x+1.$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Tìm số hữu tỉ x có chứa phần nguyên như đề bài, chúng ta có định hướng sau: $[A] = B$ thì B là số nguyên.

- Nếu A là số nguyên thì $A = B$.
- Nếu không rõ A là số nguyên thì $B \leq A < B+1$.

✓ *Trình bày lời giải.*

a) Vì $[3x-4] = x \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$.

Ta có $[3x-4] = x \Leftrightarrow x \leq 3x-4 < x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4 \geq x \\ 3x-4 < x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 2,5$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x = 2$.

b) $[x+8] = -3x$ (*). Đặt $-3x = t (t \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = -\frac{t}{3}$.

Thay vào (*) ta được: $\left[-\frac{t}{3}+8\right] = t$

$$\begin{cases} -\frac{t}{3}+8 \geq t \\ -\frac{t}{3}+8 < t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 6 \\ t > \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5\frac{1}{4} < t \leq 6 \quad \text{mà } t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = 6, \text{ suy ra } x = -2.$$

c) $[5x-3] = 2x+1$ (**)

Đặt $2x+1 = t (t \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = \frac{t-1}{2}$ thay vào (**) ta được:

$$\left[5\frac{t-1}{2}-3\right] = t \Rightarrow \left[\frac{5t-11}{2}\right] = t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{5t-11}{2} \geq t \\ \frac{5t-11}{2} < t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t-11 \geq 2t \\ 5t-11 < 2t+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3} \\ t < \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3\frac{2}{3} < t < 4\frac{1}{3} \quad \text{mà } t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = 4 \text{ từ đó suy ra } x = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x]$$

Ví dụ 7: Với x là số thực. Chứng minh rằng

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Nhận thấy x và $x + \frac{1}{2}$ hơn kém nhau $\frac{1}{2}$ đơn vị. Do vậy chúng ta nên so sánh $\{x\}$ với $\frac{1}{2}$. Bởi vì nếu $\{x\} < \frac{1}{2}$ thì $[x] = \left[x + \frac{1}{2} \right]$, còn nếu $\{x\} > \frac{1}{2}$ thì $[x] + 1 = \left[x + \frac{1}{2} \right]$. Từ đó bài toán cần xét hai trường hợp.

✓ *Trình bày lời giải*

• *Trường hợp 1*

Xét $\{x\} < \frac{1}{2} \Rightarrow \left[x + \frac{1}{2} \right] = \left[[x] + \{x\} + \frac{1}{2} \right] = [x] + \left[\{x\} + \frac{1}{2} \right] = [x]$

Do đó $[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [x] + [x] = 2[x]$

Còn $[2x] = [2[x] + 2\{x\}] = 2[x] + [2\{x\}] = 2[x]$

Từ đó suy ra $[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x]$

• *Trường hợp 2.* Xét tương tự với $\frac{1}{2} \leq \{x\} < 1$.

Ví dụ 8: Tìm x , biết:

a) $\left[\frac{5x+6}{8} \right] = \frac{15x-7}{5};$

b) $\left[\frac{2x-1}{3} \right] + \left[\frac{4x+1}{6} \right] = \frac{5x-4}{3}$

Giải

a) Đặt $\frac{15x-7}{5} = t (t \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = \frac{5t+7}{15}$. Thay vào đề bài, ta có:

$$\left[\frac{5+6 \cdot \frac{5t+7}{15}}{8} \right] = t \Rightarrow \left[\frac{30t+117}{120} \right] = t \Rightarrow 0 \leq \frac{30t+117}{120} - t < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 30t + 117 - 120t < 120 \Rightarrow \frac{-1}{30} \leq t < \frac{117}{90} \text{ do } t \in \mathbb{Z} \text{ nên } t \in \{0; 1\}$$

Với $t = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{15}$.

Với $t = 1 \Rightarrow x = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

Suy ra $x \in \left\{ \frac{7}{15}; \frac{4}{5} \right\}$

b) Đặt $\frac{2x-1}{3} = y \Rightarrow x = \frac{3y+1}{2}$, thay vào đề bài, ta có:

$[y] + \left[y + \frac{1}{2} \right] = \frac{5y-1}{2}$. Áp dụng **ví dụ 7**, suy ra $[2y] = \frac{5y-1}{2}$ (*)

Đặt $\frac{5y-1}{2} = t (t \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y = \frac{2t+1}{5}$. Thay vào (*), ta có:

$\left[\frac{4t+2}{5} \right] = t \Rightarrow 0 \leq \frac{4t+2}{5} - t < 1 \Rightarrow -3 < t \leq 2$.

Vì $t \in \mathbb{Z}$, nên $t \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ suy ra $x \in \left\{ \frac{1}{5}; -\frac{2}{3}; \frac{4}{7}; \frac{7}{5}; 2 \right\}$

C. Bài tập vận dụng

8.1 Tìm phần nguyên và phần lẻ của x, biết rằng:

a) $x = -5$;

b) $x = 2,45$;

c) $x = -3,62$;

d) $x = -\frac{1}{14}$.

8.2 So sánh phần nguyên của các số hữu tỉ sau:

a) $x = \frac{21}{10}; y = \frac{15}{8}; z = \frac{19}{73}$;

b) $x = -3\frac{1}{5}; y = -3\frac{9}{10}; z = -4$.

8.3 Tìm phần nguyên của số hữu tỉ x, biết rằng:

a) $x < 9 < x + 0,8$;

b) $x - 0,7 < 8 < x$;

c) $13 < x < 13,8$;

d) $x < -5 < x + 0,12$.

8.4 Tìm $[x]$ biết: $x = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$, với n là số nguyên dương.

8.5 Tìm phần nguyên của: $S = \frac{1}{\frac{1}{2011} + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} + \dots + \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020}}$

8.6 Với mỗi số nguyên dương n, đặt $S_n = \left[\frac{n}{1} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{3} \right] + \dots + \left[\frac{n}{n} \right]$, trong đó kí hiệu $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a. Tính $S_1; S_2; S_3; \dots; S_6$.

8.7 Tính tổng: $B = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{100}]$

8.8 Giả sử $a; n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $n: a$ thì $\left[\frac{n}{a} \right] = \left[\frac{n-1}{a} \right] + 1$

b) Nếu n không chia hết cho a và $a > 0$ thì $\left[\frac{n}{a} \right] = \left[\frac{n-1}{a} \right]$

8.9 Chứng minh rằng với mọi số thực thì $[2x]$ bằng $2[x]$ hoặc $2[x]+1$

8.10 Cho n là số nguyên dương, chứng minh: $\left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n+1}{2} \right] = n$.

8.11 Nếu $x \geq y$. Chứng minh rằng $[x] \geq [y]$

8.12 Tìm số nguyên x biết:

a) $\left[\frac{3x+1}{5} \right] = 1;$

b) $\left[\frac{7x-5}{3} \right] = -2.$

8.13 Tìm x , biết: $[x+1] + [x+2] + [x+3] = 10$

8.14 a) Cho $A = \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n+1}{2} \right]$. Với giá trị nào của $n \in \mathbb{Z}$ thì A chia hết cho 2?

b) Cho $B = \left[\frac{n}{3} \right] + \left[\frac{n+1}{3} \right] + \left[\frac{n+2}{3} \right]$. Với giá trị nào của $n \in \mathbb{Z}$ thì B chia hết cho 3?

8.15 Số $2020!$ Có tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0.

8.16 Đặt $x_n = \left[\frac{n+1}{2} \right] - \left[\frac{n}{2} \right]$, với n là số nguyên dương. Hỏi trong 2020 số: $\{x_1; x_2; x_3; \dots; x_{2020}\}$ có bao nhiêu số khác 0?

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

8.1 a) $[x] = -5; \{x\} = 0.$

b) $[x] = 2; \{x\} = 0,45.$

c) $[x] = -4; \{x\} = 0,38.$

d) $[x] = -1; \{x\} = \frac{13}{14}.$

8.2 a) $[x] = 0; [y] = 1; [z] = 0$ nên $[x] = [z] < [y]$

b) $[x] = -4; [y] = -4; [x] = -4$ nên $[x] = [y] = [z]$

8.3 a) Ta có: $9 < x + 0,8 \Rightarrow 8,2 < x \Rightarrow 8,2 < x < 9 \Rightarrow 8 < x < 9 \Rightarrow [x] = 8.$

b) $x < 0,7 + 8 \Rightarrow x < 8,7 \Rightarrow 8 < x < 8,7 \Rightarrow 8 < x < 9 \Rightarrow [x] = 8.$

c) $13 < x < 13,8 \Rightarrow 13 < x < 14 \Leftrightarrow [x] = 13.$

d) $-5 - 0,12 < x < -5 \Rightarrow -5,12 < x < -5 \Rightarrow -6 < x < -5 \Rightarrow [x] = -6$

8.4 Ta có:

$$x = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow [x] = 0$$

8.5 Ta có:

$$\frac{10}{2020} < \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012} + \dots + \frac{1}{2020} < \frac{10}{2011} \Rightarrow \frac{2011}{10} < S < \frac{2020}{10} \Leftrightarrow 201,1 < S < 202$$

Vậy phần nguyên của S là 201.

8.6 $S_1 = \left[\frac{1}{1} \right] = 1; S_2 = \left[\frac{2}{1} \right] + \left[\frac{2}{2} \right] = 2 + 1 = 3.$

$$S_3 = \left[\frac{3}{1} \right] + \left[\frac{3}{2} \right] + \left[\frac{3}{3} \right] = 3 + 1 + 1 = 5$$

$$S_4 = \left[\frac{4}{1} \right] + \left[\frac{4}{2} \right] + \left[\frac{4}{3} \right] + \left[\frac{4}{4} \right] = 4 + 2 + 1 + 1 = 8.$$

$$S_5 = \left[\frac{5}{1} \right] + \left[\frac{5}{2} \right] + \left[\frac{5}{3} \right] + \left[\frac{5}{4} \right] + \left[\frac{5}{5} \right] = 5 + 2 + 1 + 1 + 1 = 10$$

$$S_6 = \left[\frac{6}{1} \right] + \left[\frac{6}{2} \right] + \left[\frac{6}{3} \right] + \left[\frac{6}{4} \right] + \left[\frac{6}{5} \right] + \left[\frac{6}{6} \right] = 6 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 14.$$

8.7 Ta chú ý rằng: $n \leq \sqrt{k} < n+1$ với $n^2 \leq k < (n+1)^2$ nên $[\sqrt{k}] = n$

$$[\sqrt{1}] = 1; [\sqrt{2}] = 1; [\sqrt{3}] = 1; [\sqrt{4}] = 2; [\sqrt{5}] = 2; [\sqrt{6}] = 2; [\sqrt{7}] = 2; [\sqrt{8}] = 2.$$

Làm tương tự như vậy, ..., $[\sqrt{100}] = 10.$

Vậy tổng $B = 1.3 + 2.5 + 3.7 + 4.9 + 5.11 + 6.13 + 7.15 + 8.17 + 9.19 + 10 = 625.$

8.8 a) Nếu $n: a$, đặt $n = ak$ ($k \in \mathbb{N}$). Ta có: $\left[\frac{n}{a} \right] = [k] = k$ (1)

$$\left[\frac{n-1}{a} \right] = \left[\frac{ak-1}{a} \right] = \left[k-1 + \frac{a-1}{a} \right] = k-1 \Rightarrow \left[\frac{n-1}{a} \right] + 1 = k \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra điều phải chứng minh.

b) Nếu n không chia hết cho a , đặt $n = ak + r$ (với $0 < r < a$)

$$\Rightarrow \left[\frac{n}{a} \right] = \left[\frac{ak+r}{a} \right] = \left[k + \frac{r}{a} \right] = k \quad (3)$$

$$\text{Và } \left[\frac{n-1}{a} \right] = \left[\frac{ak+r-1}{a} \right] = \left[k + \frac{r-1}{a} \right] = k \quad (4)$$

$$\text{Vì } 0 \leq r-1 < a \Rightarrow 0 \leq \frac{r-1}{a} < 1$$

8.9 Nếu $\{x\} < 0,5$

$$\text{Ta có } 2x - 2[x] = 2(\{x\}) - 2[x] = 2\{x\} < 1 \Rightarrow 2x < 2[x] + 1$$

$$\text{Mặt khác, hiển nhiên } 2[x] \leq 2x \quad \text{tức là } 2[x] \leq 2x < 2[x] + 1$$

$$\Rightarrow [2x] = 2[x]$$

- Nếu $\{x\} > 0,5$

$$\text{Ta có: } 2x - 2[x] = 2\{x\} > 1 \Rightarrow 2[x] + 1 < 2x.$$

$$\text{Mặt khác, ta có: } \{x\} < 1 \Rightarrow 2x - 2[x] = 2\{x\} < 2 \Rightarrow 2x < 2[x] + 2$$

$$\text{Tức là: } 2[x] + 1 < 2x < 2[x] + 2 \quad \text{suy ra } [2x] = 2[x] + 1$$

8.10

$$\text{- Xét } n \text{ là số chẵn } (n = 2k, k \in \mathbb{N}^*) \text{ thì: } \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n+1}{2} \right] = [k] + \left[k + \frac{1}{2} \right] = 2k = n$$

$$\text{- Xét } n \text{ là số lẻ } (n = 2k+1, k \in \mathbb{N}^*) \text{ thì: } \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n+1}{2} \right] = \left[k + \frac{1}{2} \right] + [k+1] = 2k+1 = n.$$

$$\text{Vậy ta luôn có: } \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n+1}{2} \right] = n$$

8.11 Vì $x \geq y$ nên tồn tại $\alpha \geq 0$ sao cho $x = y + \alpha$

$$\text{Đặt } y = [y] + \{y\} \Rightarrow x = [y] + \{y\} + \alpha \quad \text{suy ra } [x] = [y] + [\{y\} + \alpha]$$

$$\text{Vì } \alpha \geq 0 \text{ và } \{y\} \geq 0 \text{ nên do vậy } [x] \geq [y]$$

$$8.12 \text{ a) } 1 \leq \frac{3x+1}{5} < 2 \Leftrightarrow 5 \leq 3x+1 < 10 \Leftrightarrow 4 \leq 3x < 9$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{1; 2\}$

$$\text{b) } -2 \leq \frac{7x-5}{3} < -1 \Leftrightarrow -6 \leq 7x-5 < -3 \Rightarrow -1 \leq 7x < 2$$

vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x = 0$.

8.13 Áp dụng công thức: $[n+x] = n + [x]$. Ta có: $[x] + 1 + [x] + 2 + [x] + 3 = 10$

$$3[x] = 4 \Leftrightarrow [x] = \frac{4}{3}.$$

Vô lý. Vậy không có x thỏa mãn.

8.14

$$\text{a) Xét } n = 2k (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow A = \left[\frac{2k}{2} \right] + \left[\frac{2k+1}{2} \right] = [k] + \left[k + \frac{1}{2} \right]$$

$$\Rightarrow A = k + k = 2k \Rightarrow A : 2$$

$$\text{Xét } n = 2k+1 (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow A = \left[\frac{2k+1}{2} \right] + \left[\frac{2k+2}{2} \right]$$

$$A = \left[k + \frac{1}{2} \right] + [k+1] = k + k + 1 = 2k+1 \Rightarrow A \text{ không chia hết cho 2.}$$

Vậy với $n = 2k (k \in \mathbb{Z})$ thì A chia hết cho 2.

$$\text{b) Xét } n = 3k (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow B = \left[\frac{3k}{3} \right] + \left[\frac{3k+1}{3} \right] + \left[\frac{3k+2}{3} \right]$$

$$\Rightarrow B = [k] + \left[k + \frac{1}{3} \right] + \left[k + \frac{2}{3} \right] = k + k + k = 3k \Rightarrow B : 3$$

$$\text{Xét } n = 3k+1 (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow B = \left[\frac{3k+1}{3} \right] + \left[\frac{3k+2}{3} \right] + \left[\frac{3k+3}{3} \right]$$

$$\Rightarrow B = \left[k + \frac{1}{3} \right] + \left[k + \frac{2}{3} \right] + [k+1] = k + k + 1 + k + 1 = 3k+2 \text{ không chia hết cho 3.}$$

Vậy với $n = 3k (k \in \mathbb{Z})$ thì B chia hết cho 3.

8.15 Ta có: $2.5 = 10$ có tận cùng bằng một chữ số 0. Như vậy muốn biết $2020! = 1.2.3 \dots 2020$ có tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0 thì ta chỉ cần số thừa số 2 và số thừa số 5 khi phân tích số $2020!$ ra thừa số nguyên tố. Mặt khác dễ thấy số thừa số 5 ít hơn thừa số 2 nên ta chỉ cần tính số thừa số nguyên tố 5. Kể từ 1 cứ 5 số lại có một bội của 5; cứ $25 = 5^2$ số lại có một bội của 5^2 ; cứ 125 lại có một bội của 5^3 ; cứ 625 lại có một số là bội của 5^4 .

Ta có $5^4 < 2020 < 5^5 \Rightarrow$ số thừa số 5 khi phân tích số $2020!$ ra thừa số nguyên tố là:

$$\left\lfloor \frac{2020}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2020}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2020}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2020}{5^4} \right\rfloor = 404 + 80 + 16 + 3 = 503$$

Vậy số 2020! Có tận cùng bằng 503 chữ số 0.

8.16 Vì $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2020}$ chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1 nên ta có: $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2020}$

$$= \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{2021}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2020}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2021}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 1010$$

Vậy có tất cả 1010 số khác 0.

Chuyên đề 9.

SỬ DỤNG TÍNH CHẤT BẤT BIẾN ĐỂ GIẢI TOÁN SUY LUẬN LOGIC

A. Kiến thức cần nhớ

Bài toán suy luận logic thường phát biểu dưới dạng toán đố (có lời văn). Để làm được dạng toán này không nhất thiết cần nhiều kiến thức phức tạp mà thường đòi hỏi suy tư sáng tạo, nhận xét tinh tế.

Ta thường gặp bài toán cho trạng thái ban đầu cùng các thao tác thay đổi liên tục trạng thái đó và yêu cầu cần phải chỉ ra một điều gì đó về trạng thái cuối cùng của nó. Việc khảo sát toàn bộ sau tất cả các lần thay đổi như vậy rất phức tạp. Khi đó ta có thể trả lời câu hỏi mà bài toán yêu cầu nhờ tính toán một đại lượng nào đó đặc trưng cho trạng thái của bài và được đảm bảo qua tất cả các lần thay đổi. Đại lượng không đổi đó được gọi là bất biến của bài toán đã cho. Như vậy trong trạng thái cuối cùng của bài toán, giá trị của bất biến vẫn giữ nguyên như trạng thái ban đầu, tức là hệ thống không thể ở trong trạng thái với một giá trị khác với bất biến. Để tìm lời giải cho bài toán:

- Ta xác định đại lượng ở hai trạng thái: trạng thái ban đầu và trạng thái cuối cùng.
- Khảo sát sự thay đổi của nó qua một số lần thay đổi liên tiếp để phát hiện sự bất biến.

Các tính chất bất biến thường gặp là: xét tính chẵn lẻ, xét tính chia hết của một số nguyên, xét màu sắc của vật cần xét.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Trên bảng, người ta viết 2020 dấu (+) và 2021 dấu (-). Giả sử mỗi lần ta thực hiện thao tác: Hai dấu bất kì trên bảng bị xóa đi và thay bằng dấu (+) nếu chúng giống nhau, thay bằng dấu (-) nếu chúng khác nhau. Sau khi thực hiện nhiều lần đến khi trên bảng còn lại một dấu. Hỏi trên bảng còn lại dấu (+) hay dấu (-)?

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Đọc xong đề bài, chúng ta nhận thấy:

- Lúc đầu có tất cả 4041 dấu cả dấu (+) và dấu (-).
- Mỗi lần thực hiện thao tác, xóa hai dấu và viết lại một dấu nên sau mỗi thao tác số dấu trên bảng giảm đi 1.
- Do vậy sau 4040 lần thực hiện thao tác, trên bảng chỉ còn 1 dấu.
- Bài toán không thể thực hiện hết được tất cả các thao tác trong mọi trường hợp, do vậy chúng ta thử một vài khả năng xảy ra để tìm yếu tố bất biến (không đổi) trong mọi thao tác. Thật vậy:

+ **Trường hợp 1.** Nếu xóa hai dấu (+) thì viết lại một dấu (+).

+ **Trường hợp 2.** Nếu xóa hai dấu (-) thì viết lại một dấu (+).

+ **Trường hợp 3.** Nếu xóa một dấu (+) và một dấu (-) thì viết lại một dấu (-).

- Ta nhận thấy trong ba trường hợp thì số dấu (+) có thể giữ nguyên, có thể tăng 1, có thể giảm 1. Còn số dấu (-) chỉ giữ nguyên hoặc giảm 2. Như vậy số dấu (-) trong mọi thao tác luôn luôn là số lẻ.

✓ *Trình bày lời giải*

Mỗi lần thực hiện thao tác: Hai dấu bất kì trên bảng bị xóa đi và thay bằng dấu (+) nên chúng giống nhau, thay bằng dấu (-) nếu chúng khác nhau thì số dấu (-) giữ nguyên hoặc giảm đi hai. Vì vậy tính chẵn lẻ của dấu (-) không thay đổi qua các thao tác. Ban đầu có 2021 dấu (-), tức là số dấu trừ là một số lẻ. Vì vậy ở cuối cùng còn lại một dấu (số lẻ dấu) thì phải là dấu (-).

✓ **Nhận xét:** Ở ví dụ 1, tính bất biến là số các dấu (-) còn lại sau mỗi lần xóa luôn là một số lẻ.

Ví dụ 2: Cho dãy số 2, 4, 6, 8, ..., 200 (gồm 100 số nguyên dương chẵn đầu tiên). Sau khi thêm các dấu (+) hoặc dấu (-) vào giữa các số trên một cách tùy ý rồi thực hiện phép toán. Bạn Toán tính được kết quả là 34, bạn Học tính được là - 10. Hỏi bạn nào tính sai?

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Nhận thấy dãy số gồm toàn số chẵn nên kết quả cũng là số chẵn, mà 34 và - 10 cũng là số chẵn nên không thể vận dụng tính chẵn lẻ được.

Chúng ta thử cách khác, viết toàn bộ dấu (+) thì kết quả là 10100. Để kết quả nhỏ hơn (34 hoặc - 10) thì chúng ta đổi dấu một vài dấu (+) thành dấu (-). Chúng ta thử đổi dấu (+) trước số 6 thì thấy kết quả giảm đi 12, tức là giảm đi 2.6. Quan sát tiếp một vài số nữa chúng ta thấy giảm đi 2 lần số bị đổi dấu. Tức là kết quả còn lại luôn luôn chia hết cho 4. Còn số 34 và - 10 đều không chia hết cho 4.

✓ *Trình bày lời giải*

Tổng $S = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 200 = 10100$.

Khi thay số a bởi số - a thì tổng S giảm đi 2a, mà a là số chẵn nên S giảm đi bội của 4. Tổng S ban đầu là số chia hết cho 4, nên kết quả cuối cùng sau khi thay dấu (+) hoặc dấu (-) thì phải là một bội số của 4.

Hai số 34 và - 10 đều không phải là bội số của 4, nên cả hai bạn đều tính sai.

✓ **Nhận xét.** Ở ví dụ 2, tính bất biến là kết quả của tổng các số luôn là bội số của 4.

Ví dụ 3: Trong dãy số 13576193923... bắt đầu từ chữ số thứ năm, mỗi chữ số bằng chữ số hàng đơn vị của tổng bốn chữ số đứng ngay trước nó. Hỏi trong dãy này có chứa cụm chữ số 1234 và 6789 không?

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Các chữ số trong dãy chỉ tồn tại hai trạng thái chẵn hoặc lẻ. Quan sát những lần xuất hiện chữ số chẵn hoặc chữ số lẻ trong dãy, chúng ta có lời giải sau:

✓ *Trình bày lời giải.*

Nhận thấy tổng của 4 chữ số lẻ là một số chẵn, tổng của 3 chữ số lẻ và một chữ số chẵn là một số lẻ.

Ta cần tìm quy luật chẵn lẻ (bất biến) của các chữ số trong dãy đã cho bằng cách:

Ta thay mỗi chữ số của dãy đã cho bằng số 0 nếu nó là số chẵn và bằng số 1 nếu nó là một số lẻ. Khi đó ta nhận được dãy số 111101111011110..., trong dãy này cứ sau bốn chữ số 1 có một chữ số 0 và cứ sau một chữ số 0 là bốn chữ số 1 (tính bất biến). Nhận thấy các dãy 1234 và 6789 ứng với các dãy bốn chữ số 1010 và 0101 nên không thể có mặt trong dãy số trên.

Ví dụ 4: Cho bàn cờ kích thước 10x10 ô vuông. Hỏi có thể dùng 49 hình chữ nhật kích thước 1x2 để ghép sao cho chỉ còn 2 ô ở hai góc đối diện của bảng được hay không?

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Nhận xét, mỗi mảnh hình chữ nhật chỉ ghép được 2 ô liền nhau, nên chúng ta nghĩ tới việc tô màu hoặc đánh số chẵn lẻ.

✓ *Trình bày lời giải.*

Ta ghi các số 1 và 2 vào bảng sao cho hai ô liền nhau được ghi hai số khác nhau (chẳng hạn như hình vẽ), sẽ có 50 ô số 1 và 50 ô số 2, hai số ghi ở hai góc đối diện sẽ cùng là số 1 hoặc cùng là số 2.

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1

Mỗi lần ghép một hình chữ nhật thì chiếm hai ô cùng hàng hoặc cùng cột liền nhau, tức là tô màu một ô ghi số 1; một ô ghi số 2. Như vậy sau mỗi lần ghép một hình chữ nhật thì số ô ghép thành hình chữ nhật ghi số 1 bằng số ô chưa tô màu ghi số 2. Sau 49 lần ghép hình chữ nhật sẽ còn 2 ô: 1 ô ghi số 1, 1 ô ghi số 2. Hai ô này không thể ở hai góc đối của bảng được.

Ví dụ 5: Cho bảng ô vuông kích thước 2009 x 2010, trong mỗi ô lúc đầu đặt một viên sỏi. Gọi T là thao tác lấy 2 ô bất kì có sỏi và chuyển từ mỗi ô đó một viên sỏi đưa sang ô bên cạnh (là ô có chung cạnh với ô có chứa sỏi). Hỏi sau một số hữu hạn phép thực hiện các thao tác trên ta có thể đưa hết sỏi ở trên bảng về cùng một ô không?

(Tuyển sinh lớp 10, chuyên TP Hải Phòng, năm học 2009 – 2010)

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Tương tự như ví dụ trên, chúng ta nhận thấy mỗi thao tác chỉ dịch chuyển hai viên sỏi ở hai ô sang ô bên cạnh. Do vậy chúng ta nghĩ tới việc tô màu như bàn cờ vua. Mỗi thao tác, một viên sỏi chuyển từ ô đen sang ô trắng hoặc ngược lại. Nếu tất cả các viên sỏi vào một ô đen (hoặc ô trắng) thì số sỏi ở ô đen là số chẵn và số sỏi ở ô trắng cũng là số chẵn. Vậy ta có lời giải sau:

✓ *Trình bày lời giải.*

Ta tô màu các ô vuông của bảng bằng hai màu đen trắng như bàn cờ vua. Lúc đầu tổng số sỏi ở các ô đen bằng 1005×2009 là một số lẻ.

Sau mỗi phép thực hiện thao tác T, xảy ra những trường hợp sau:

- **Trường hợp 1.** Nếu lấy hai viên sỏi ở hai ô đen thì chuyển sang hai ô trắng $\Rightarrow$ số sỏi ở ô đen giảm 2.
- **Trường hợp 2.** Nếu lấy hai viên sỏi ở hai ô trắng thì chuyển sang hai ô đen $\Rightarrow$ số sỏi ở ô đen tăng 2.
- **Trường hợp 3.** Nếu lấy một viên sỏi ở ô đen và một viên sỏi ở ô trắng thì chuyển sang một ô trắng và một ô đen $\Rightarrow$ số sỏi ở ô đen không đổi.

Như vậy mọi trường hợp số sỏi ở ô đen chỉ tăng (hoặc giảm) 2 viên hoặc không đổi suy ra tổng số sỏi ở các ô đen luôn là số lẻ. Vậy không thể chuyển tất cả các viên sỏi trên bảng ô vuông về cùng một ô sau một số hữu hạn các phép thực hiện thao tác T.

Ví dụ 6: Một bảng ô vuông gồm 2019 hàng và 2020 cột. Ký hiệu ô ở hàng thứ m và cột thứ n là (m, n) .

Người ta tô màu các ô của bảng theo cách sau: Lần thứ nhất tô màu 3 ô $(r, s), (r+1, s+1), (r+2, s+2)$ với $1 \leq r \leq 2017; 1 \leq s \leq 2019$. Từ lần thứ hai, mỗi lần tô đúng 3 ô chưa được tô màu liền nhau cùng hàng hoặc cùng cột. Hỏi bằng cách này có thể tô màu được tất cả các ô vuông của bảng đã cho không?

Giải

Ta ghi vào bảng các số tự nhiên theo cách sau: Từ trái sang phải, mỗi hàng ghi lần lượt các số tự nhiên từ 1 đến 2020. Như vậy, 3 ô liền nhau trong cùng một hàng ghi 3 số tự nhiên liên tiếp, 3 ô liền nhau trong cùng một cột sẽ ghi 3 số tự nhiên giống nhau.

Ở lần tô màu thứ nhất, tổng 3 số ghi ở 3 ô được tô màu là $s + s + 1 + s + 1 = 3s + 2$ ($1 \leq s \leq 2019$) là một số chia cho 3 dư 2.

Từ lần tô màu thứ hai trở đi, mỗi lần tô tổng 3 ô ghi ở 3 ô được tô màu là một số chia hết cho 3 (vì 3 số tự nhiên liên tiếp hoặc 3 số tự nhiên giống nhau).

Do đó, sau mỗi lần tô màu theo quy luật trên thì các ô đã được tô có tổng các số ghi trên đó là số chia cho 3 dư 2.

Tổng số các số ghi trên bảng ban đầu là $2019 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2020) = 2019 \cdot 2021 \cdot 1010$ chia hết cho 3. Vì vậy sau mỗi lần tô màu thì các ô còn lại (chưa tô) có tổng các số ghi trên đó là một số chia cho 3 dư 1 (tính bất biến). Vì vậy bằng mọi cách đều không thể tô màu được tất cả các ô vuông của hàng.

Ví dụ 7: Trên mặt bàn có 2005 đồng xu kích thước như nhau, mỗi đồng xu có hai mặt: một mặt màu xanh và một mặt màu đỏ, tất cả các đồng xu đều ngửa mặt xanh lên trên. Thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi phải đổi mặt 4 đồng xu nào đó trên mặt bàn. Hỏi sau 2006 lượt chơi, có thể nhận được tất cả 2005 đồng xu trên bàn đều ngửa mặt đỏ lên được không? Vì sao?

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, DHSP Hà Nội, năm học 2005 – 2006)

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Đọc xong đề bài, chúng ta nhận thấy:

- Bài toán không thể thực hiện hết được tất cả các thao tác trong mọi trường hợp, do vậy chúng ta thử một vài khả năng xảy ra để tìm yếu tố bất biến (không đổi) trong mọi thao tác. Thật vậy:

- **Trường hợp 1.** Nếu đổi 4 đồng xu mặt xanh thành 4 đồng xu mặt đỏ ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên giảm 4.
- **Trường hợp 2.** Nếu đổi 3 đồng xu mặt xanh, 1 đồng xu mặt đỏ thành 3 đồng xu mặt đỏ, 1 đồng xu mặt xanh ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên giảm 2.
- **Trường hợp 3.** Nếu đổi 2 đồng xu mặt xanh, 2 đồng xu mặt đỏ thành 2 đồng xu mặt đỏ, 2 đồng xu mặt xanh ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên không đổi.
- **Trường hợp 4.** Nếu đổi 1 đồng xu mặt xanh, 3 đồng xu mặt đỏ thành 1 đồng xu mặt đỏ, 3 đồng xu mặt xanh ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên tăng 2.
- **Trường hợp 5.** Nếu đổi 4 đồng xu mặt đỏ thành 4 đồng xu mặt xanh ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên tăng 4.

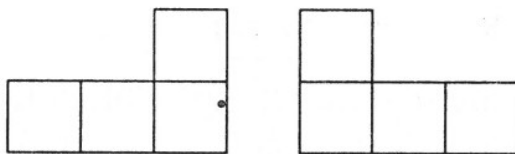
- Ta nhận thấy trong năm trường hợp thì đồng xu mặt xanh ngửa lên tăng hoặc giảm đi số chẵn lần. Như vậy số đồng xu mặt xanh ngửa lên trong mọi thao tác luôn luôn là số lẻ và số đồng xu mặt đỏ ngửa lên luôn là số chẵn.

✓ *Trình bày lời giải.*

Không thể nhận được tất cả 2005 đồng xu trên bàn đều ngửa mặt đỏ lên trên. Vì thế mỗi lần thay đổi 4 đồng xu: có x đồng xu ngửa mặt xanh lên trên và có $4 - x$ đồng xu ngửa mặt đỏ lên. Do đó số đồng xu ngửa mặt đỏ lên đã thay đổi là $|4x - 2|$, một số chẵn đồng xu. Nghĩa là số các đồng xu ngửa mặt xanh thành mặt đỏ không thay đổi tính chẵn lẻ. Ban đầu có 0 đồng xu ngửa mặt đỏ lên là một số chẵn thì không thể biến đổi thành số lẻ là 2005 đồng xu ngửa mặt đỏ lên.

✓ **Nhận xét.** Vì tính chất bất biến là tính chẵn lẻ nên ta thay số 2005 thành một số lẻ bất kỳ và số 4 thành một số chẵn bất kỳ thì bài toán không thay đổi kết quả.

Ví dụ 8: Có thể phủ kín bảng 20×13 ô vuông bằng các miếng lát có một trong hai dạng dưới (có thể xoay và sử dụng đồng thời cả hai dạng miếng lát) sao cho các miếng lát không chòem lên nhau không?



(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên TP Hải Phòng, năm học 2013 – 2014)

Giải

Tô màu các dòng của bảng ô vuông bằng hai màu đen trắng xen kẽ: dòng 1 đen, dòng 2 trắng, dòng 3 đen, dòng 4 trắng,...

Khi đó mỗi miếng lát sẽ luôn phủ đúng 3 ô đen 1 ô trắng hoặc 3 ô trắng 1 ô đen.

Trong bảng, số ô đen bằng số ô trắng nên số miếng lát phủ 3 ô đen 1 ô trắng bằng số miếng lát phủ 3 ô trắng 1 ô đen, do đó phải có chẵn miếng lát.

Tuy nhiên trong bảng có 65 miếng lát, mâu thuẫn. Vậy không thể được phủ được bằng thỏa mãn.

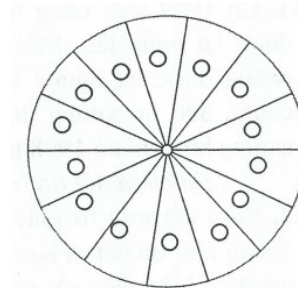
C. Bài tập vận dụng

9.1. Trên bảng ghi một dãy số gồm 2019 số 1 và 2020 số 2. Ta thực hiện xóa hai số bất kỳ và thay bằng hiệu của chúng. Quá trình cứ tiếp tục như vậy. Hỏi trên bảng có khi nào gồm toàn số 0 hay không?

9.2. Một tờ giấy được xé thành 4 mảnh, mỗi tờ giấy trong số tờ giấy nhỏ này lại được xé nhỏ thành 4 mảnh nhỏ nữa, ..., tiếp tục như vậy có khi nào được 2019 mảnh giấy hay không? Vì sao?

9.3. Có 2019 tách uống trà đặt trên bàn. Lúc đầu tất cả các tách trà đều được lật ngửa lên. Giả sử mỗi lần người ta làm cho 210 tách trong chúng được lật ngược lại. Hỏi sau một số lần như vậy có thể làm cho tất cả các tách đều úp xuống được không?

9.4. Một hình tròn được chia thành 14 hình quạt bằng nhau. Trong mỗi hình quạt đặt một viên bi. Thực hiện trò chơi sau: mỗi lần lấy hai viên bi ở hai hình quạt khác nhau và chuyển mỗi viên sang hình quạt kề với hình quạt chứa nó nhưng theo hai chiều ngược nhau. Hỏi sau một số hữu hạn bước ta có thể chuyển được tất cả các viên bi vào cùng một hình quạt được không?



(Đề thi vào lớp 10 chuyên, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội, năm học 1996 – 1997)

9.5. Ở sáu đỉnh của một lục giác lồi có ghi 6 số chẵn liên tiếp theo chiều kim đồng hồ. Ta thay đổi các số như sau: mỗi lần chọn một cạnh bất kì rồi cộng mỗi số ở hai đỉnh cạnh đó với cùng một số nguyên. Hỏi sau các lần thay đổi như thế thì sáu số mới ở đỉnh lục giác có bằng nhau không? Vì sao?

9.6. Trên hòn đảo có một loài thần lùn sinh sống, chúng có ba màu: xanh, đỏ, tím. Để lẫn trốn và săn mồi thì loài thần lùn này biến đổi màu như sau: nếu hai con thần lùn khác màu gặp nhau thì chúng đồng thời đổi màu sang màu thứ ba. Nếu hai con thần lùn cùng màu gặp nhau thì giữ nguyên màu. Có khi nào tất cả các con thần lùn trở thành cùng màu không? Vì sao?

9.7. Trên bảng ghi các số từ 1 đến 2020. Thực hiện trò chơi sau: Mỗi lần thay đồng thời tất cả các số có ở trên bảng bởi tổng các chữ số của nó. Hỏi nếu sau một số lần ta nhận được 2020 số mà mỗi số chỉ gồm một chữ số thì có bao nhiêu số 1.

9.8. Có một bao đựng 150 hòn bi đen và 75 hòn bi trắng. Một người bốc từ bao ra mỗi lần hai hòn bi một cách ngẫu nhiên. Nếu anh ta bốc được một hòn đen và một hòn trắng, anh ta lại bỏ viên trắng vào bao, cất đi viên đen. Nếu anh ta bốc được 2 viên cùng màu, anh ta cất đi cả hai rồi bỏ lại vào bao một hòn đen (giả sử anh ta có nhiều hòn đen ở ngoài đủ để làm chuyện đó nếu cần). Quá trình lặp lại. Sau cùng còn đúng một viên bi trong bao, lý do tại sao? Viên bi đó màu gì?

9.9. Có thể lát kín một cái sân hình vuông cạnh 3,5m bằng những viên gạch hình chữ nhật kích thước 25cm x 100cm được hay không?

(Thi tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, tỉnh Hòa Bình, năm học 2013-2014)

9.10. Trong bảng ô vuông 10×10 . Có thể sắp đặt 25 miếng bìa hình chữ nhật kích thước 1×4 phủ kín toàn bộ bảng ô vuông hay không?

9.11. Có 1999 tách uống trà đặt trên bàn. Lúc đầu tất cả các tách trà đều được lật ngửa lên. Mỗi một nước đi, ta làm cho đúng 100 tách trong chúng được lật ngược lại. Sau một số nước đi, có thể làm cho tất cả chúng đều úp xuống được không? Tại sao? Trả lời câu hỏi này trong trường hợp chỉ có 1998 tách.

(Thi chọn đội tuyển Hồng Kông tham gia IMO, năm học 2000, vòng 1)

9.12. Nam cắt một tờ giấy ra làm 4 miếng hoặc 8 miếng, rồi lấy một số miếng nhỏ đó cắt ra làm 4 hoặc 8 miếng nhỏ hơn và Nam cứ tiếp tục thực hiện việc cắt như thế nhiều lần. Hỏi với việc cắt như vậy, Nam có thể cắt được 2016 miếng lớn nhỏ hay không? Vì sao?

(Thi tuyển sinh lớn 10, THPT chuyên TP. Hồ Chí Minh, năm học 2016-2017)

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

9.1 Ban đầu có 2019 số 1 (số 1 là số lẻ)

- Nếu xóa hai số giống nhau, thay bằng hiệu của chúng thì số 1 giữ nguyên hoặc giảm đi 2 số nên số số 1 sau lần xóa vẫn là số lẻ.
- Nếu xóa hai số khác nhau (1 và 0) thay bằng hiệu của 2 số thì số 1 không đổi.

Như vậy sau mỗi lần xóa hai số bất kì thay bằng hiệu của chúng thì số số 1 vẫn là số lẻ nên không thể trên bảng còn toàn số 0 được.

9.2 Số mảnh giấy sau mỗi lần xé tăng thêm 3. Vậy ở lần xé thứ n thì số mảnh giấy là $3n + 1$. Mà $2019 : 3$ dư 0. Suy ra không được.

9.3 Mỗi lần lật ngửa 210 tách: giả sử x tách ngửa và $210 - x$ tách úp. Do đó mỗi lần thực hiện lật ngửa thì số tách ngửa thay đổi đi $|210 - 2x|$, một số chẵn. Ban đầu có 0 tách úp xuống là một số chẵn thì không thể biến đổi thành số lẻ 2019 tách úp xuống được.

9.4 Ta tô màu như hình vẽ. Có 7 viên bi ở hình quạt đen và 7 viên bi ở hình quạt trắng.

Thực hiện trò chơi sau: mỗi lần lấy hai viên bi ở hai hình quạt khác nhau và chuyển mỗi viên sang hình quạt kề với hình quạt chứa nó nhưng theo hai chiều ngược nhau:

- Nếu lấy hai viên ở hai hình quạt khác màu, thì vẫn chuyển vào hai hình quạt khác màu. Do vậy số viên bi ở mỗi màu hình quạt là không đổi.
- Nếu lấy hai viên ở hai hình quạt màu trắng thì chuyển sang 2 hình quạt màu đen, suy ra số bi ở hình quạt màu đen tăng 2.
- Nếu lấy hai viên ở hình quạt màu đen thì chuyển sang 2 hình quạt màu trắng, suy ra số bi ở hình quạt màu đen giảm 2.

Do vậy sau mỗi lần thực hiện thì tổng số bi ở hình quạt màu đen vẫn là số lẻ nên không thể thực hiện được.

9.5 Kí hiệu các đỉnh theo chiều kim đồng hồ bởi các chữ cái A, B, C, D, E, F (như hình vẽ). Giả sử các số chẵn liên tiếp được ghi tương ứng với đỉnh này là a, b, c, d, e, f .

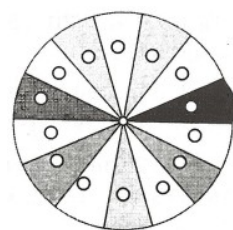
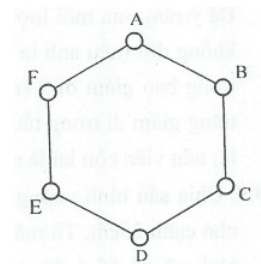
Đặt $S = (b + d + f) - (a + c + e)$

Nhận thấy hai số ghi hai đỉnh thuộc cùng một cạnh gồm một số trong các số b, d, f và một số trong các số a, c, e . Do đó khi cộng hai số này với cùng một số nguyên thì S không thay đổi.

Ban đầu a, b, c, d, e, f là các số chẵn liên tiếp nên $S = 6$. Vì vậy dù

có thực hiện bao nhiêu lần công việc cộng với cùng một số nguyên thì S vẫn bằng 6, tức là S khác 0, chứng tỏ không thể làm cho 6 số ở 6 đỉnh bằng nhau được.

9.6 Ta chứng minh rằng sau mỗi lần gặp nhau thì số dư cho 3 có đầy đủ 3 số dư là 0, 1, 2.



Nếu hai con khác màu gặp nhau thì đổi sang màu thứ 3 nên số dư chia cho 3 của các màu giảm 1, giảm 2 và tăng 2 nên có ba số dư là 1, 2, 0 vẫn đầy đủ.

Mặt khác, nếu tất cả đều về 1 màu thì số dư sẽ là 0, 0, 0. Điều này vô lý nên không thể có trường hợp tất cả các tắc kè có cùng màu.

9.7 Định hướng: Xét số dư chia cho 9 dư 1.

Ta biết rằng một số tự nhiên và tổng các chữ số của nó có cùng số dư trong phép chia cho 9. Do đó nếu thay đồng thời các số có ở trên bảng bởi các chữ số của nó thì số các số chia cho 9 dư 1 vẫn không đổi.

Muốn biết sau một số lần ta nhận được 2020 số mà mỗi số chỉ có một chữ số có bao nhiêu số 1, chúng ta chỉ cần tìm xem từ 1 đến 2020 có bao nhiêu số chia cho 9 dư 1.

Các số chia cho 9 dư 1 là: 1; 10; 19; 28; 37; ...; 2017.

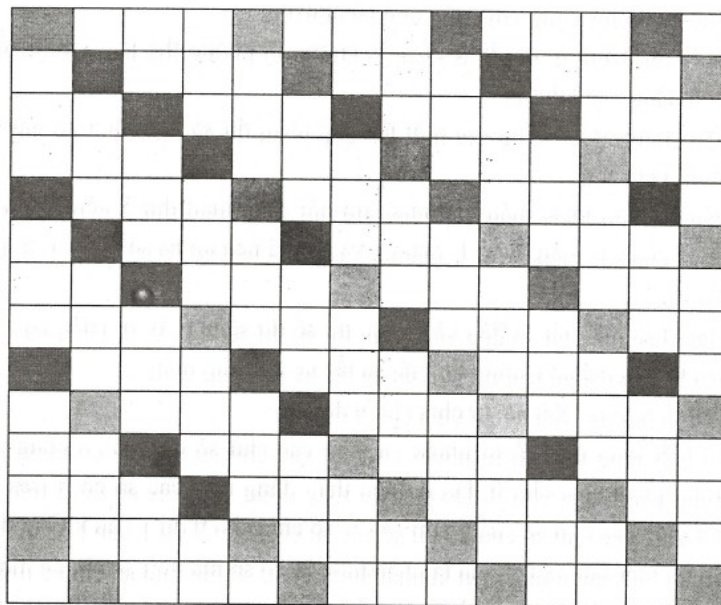
Số các số là: $(2017 - 1) : 9 + 1 = 225$ (số)

Vậy trên bảng có 225 số 1.

9.8 Cứ mỗi lần rút ra hai viên là một lần bỏ lại một viên, do đó sau mỗi lần rút thì số bi trong bao giảm đi 1. Lúc đầu có 225 hòn bi, nên sau 224 lần bốc sẽ giảm đi 224 hòn bi và cuối cùng phải còn lại một viên trong bao.

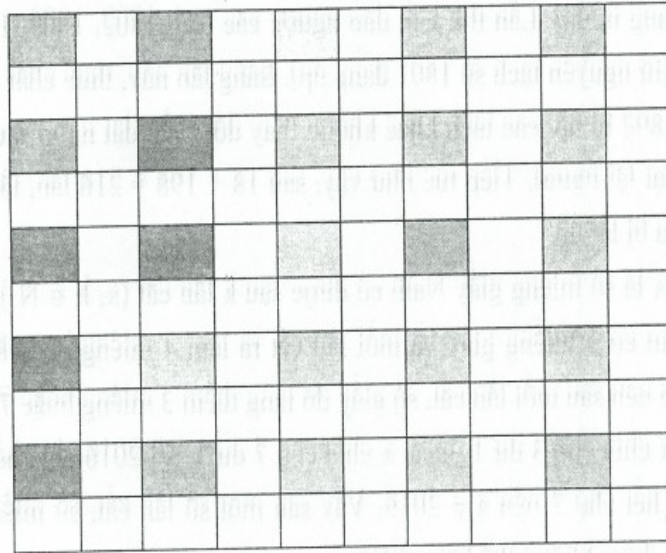
Để ý rằng sau mỗi lượt bốc ra rồi bỏ lại, thì hoặc là số bi trắng trong bao không đổi (nếu anh ta bốc được ít nhất một hòn đen) hoặc là số bi trắng trong bao giảm đi trong tất cả các lần là một số chẵn. Vì có 75 viên trắng (số lẻ) nên viên còn lại là màu trắng.

9.9 Chia sân hình vuông cạnh 3,5m thành $14 \times 14 = 196$ hình vuông nhỏ cạnh 25cm. Tô màu đen vào các hình vuông nhỏ của hình vuông như hình vẽ, có 50 ô đen và 146 ô trắng. Mỗi viên gạch 25cm x 100cm được lát lên 1 ô đen và 3 ô trắng.



Giả sử lát kín được sân thì số ô trắng phải gấp 3 lần số ô đen. Nhưng $146 \neq 50 \times 3$ nên không thể lát kín được.

9.10 Ta tô bảng vuông bằng màu đen và trắng sau cho như hình vẽ. Ta nhận được 25 ô đen và 75 ô trắng.



Ta chú ý đặt những hình chữ nhật trùng với các ô vuông thì mỗi hình chữ nhật sẽ phủ lên 2 ô vuông đen hoặc 0 ô vuông đen nào. Từ đó suy ra 25 hình chữ nhật trên bảng vuông, chúng sẽ phủ kín số chẵn ô vuông đen. Mà trên bảng có 25 ô đen không phải là số chẵn, nên không phủ kín được.

9.11 Nếu có 1999 chiếc tách (số tách là số lẻ), tất cả đều được đặt ngửa (trạng thái ngửa) thì ta không thể quay úp xuống tất cả (trạng thái úp) được.

Thật vậy, theo quy tắc chơi, tại mỗi thời điểm, giả sử có k tách đặt ngửa được làm úp xuống thì có $100-k$ chiếc, vậy số tách úp bị thay đổi đi một số chẵn $(100-k) - k = 100 - 2k$ (nếu $k > 50$ thì số tách úp giảm đi, nếu $k < 50$ thì số tách úp tăng lên, nếu $k = 50$ thì số tách úp không thay đổi). Nghĩa là tính chẵn lẻ của số tách úp không thay đổi (bất biến!). Nhưng lúc đầu số tách úp ở trạng thái chẵn (bằng 0). Vì vậy không thể làm cho số tách úp bằng 1999 (trở về trạng thái lẻ) được.

Nếu số tách là 1998 thì có thể úp tất cả các tách. Một thuật toán như sau: Đánh số các tách theo thứ tự: 1, 2, 3, ..., 1998. Lần lượt úp 100 tách đầu tiên, sau 18 lần úp được 1800 tách chuyển từ trạng thái ngửa sang úp. Tiếp theo úp 100 tách số 1801, 1803, 1804, ..., 1901 (để nguyên tách số 1802 đang ngửa). Lần thứ hai, đảo ngược tách 1802, 1803, 1804, ..., 1901 (giữ nguyên tách số 1801 đang úp). Sang lần này, thực chất chỉ tách 1801, 1802 bị úp, các tách khác không thay đổi (vẫn đặt ngửa sau khi lật úp rồi lại lật ngửa). Tiếp tục như vậy, sau $18 + 198 = 216$ lần, tất cả các tách đều bị lật úp.

9.12 Gọi x là số miếng giấy Nam có được sau k lần cắt ($x, k \in \mathbb{N}^+$). Vì lúc đầu Nam có 1 miếng giấy và mỗi lần cắt ra làm 4 miếng hoặc 8 miếng nhỏ hơn nên sau mỗi lần cắt, số giấy đó tăng thêm 3 miếng hoặc 7 miếng. Do đó x chia cho 3 dư 1, hoặc x chia cho 7 dư 1. Vì 2016 chia hết cho 3 và chia hết cho 7 nên $x \neq 2016$. Vậy sau một số lần cắt, số miếng giấy Nam có được không thể bằng 2016.

Chuyên đề 10.

CÂU ĐÓ VÀ TRÒ CHƠI

A. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Trong một giải bóng đá, có 4 đội thi đấu vòng tròn một lượt (trong một trận đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm, và đội thua được 0 điểm). Khi kết thúc giải, người ta thấy có 3 đội đạt được tổng số điểm lần lượt là 6 điểm, 5 điểm và 1 điểm. Hãy cho biết đội còn lại của giải có tổng số điểm là bao nhiêu và giải thích tại sao?

(Tuyển sinh lớp 10, trường PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2006-2007)

Giải

Do có 4 đội tham dự nên mỗi đội đấu 3 trận. Theo đề bài đội 6 điểm thắng 2 trận và thua 1 trận, đội 5 điểm thắng 1 trận và hòa 2 trận, đội 1 điểm hòa 1 trận và thua 2 trận. Do đó đội còn lại phải có 1 trận hòa. Vì tổng số trận thắng bằng tổng số trận thua nên đội còn lại phải thua 1 trận và thắng 1 trận. Tổng số điểm của đội còn lại là: $1 + 0 + 3 = 4$ (điểm)

Có thể diễn giải như sau: Giả sử 4 đội bóng đá là A, B, C, D

+ A thắng C và D, thua B nên được 6 điểm.

+ B thắng A, hòa C và D nên được 5 điểm.

+ C thắng D, hòa B thua A nên được 4 điểm.

+ D hòa B, thua A và C nên được 1 điểm.

Ví dụ 2: Một tháng đặc biệt có tới năm ngày thứ 3, trong đó ngày đầu tiên và ngày cuối cùng của tháng không phải là thứ 3. Hỏi ngày cuối cùng của tháng đó là ngày nào?

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Nhận thấy một tháng nhiều nhất có 31 ngày, nên nhiều nhất chỉ có 5 ngày thứ ba, khoảng cách giữa hai thứ ba liên tiếp là 7 ngày. Do đó chúng ta có thể tìm được ngày thứ ba đầu tiên trong tháng đó.

✓ *Trình bày lời giải.*

Ngày 2 của tháng là thứ 3, suy ra năm ngày thứ ba là 2, 9, 16, 23, 30. Mà ngày cuối cùng của tháng không phải ngày thứ ba nên suy ra ngày cuối cùng của tháng là 31 ngày và là thứ tư.

Ví dụ 3: Có 2020 đồng xu được đánh số thứ tự từ 1 đến 2020, tất cả đều ngửa.

Lần 1: Lật mặt tất cả các đồng xu có số thứ tự là bội của 1.

Lần 2: Lật mặt tất cả các đồng xu có số thứ tự là bội của 2.

Lần 3: Lật mặt tất cả các đồng xu có số thứ tự là bội của 3.

.....

Lần 2020: Lật mặt tất cả các đồng xu có số thứ tự là bội của 2020.

Hỏi có bao nhiêu đồng xu ngửa sau lần lật thứ 2020?

Giải

Tại lần lật thứ k, những đồng xu có số thứ tự là bội của k sẽ được lật. Để một đồng xu lúc đầu là ngửa, sau 2020 vòng lật nó vẫn ngửa thì số lần đồng xu đó được lật phải là một số chẵn, tức là số thứ tự của nó phải có số các ước số là chẵn.

Ta biết rằng những số chính phương mới có số các ước số là lẻ. Từ 1 đến 2020 có 44 số chính phương là: 1, 4, 9, ..., 1936.

Do đó cuối cùng sau 2020 vòng lật, số đồng xu ngửa là: $2020 - 44 = 1976$ (đồng xu).

Ví dụ 4: Thiện và Ác chia nhau một đồng gồm 2000 đô-la bằng bạc (mỗi đồng trị giá một đô-la), dưới sự giám sát của lão Tà. Đầu tiên, lão Tà bảo Thiện chia thành hai đồng, mỗi đồng có ít nhất hai đồng. Sau đó Ác chia mỗi đồng thành hai đồng (mỗi đồng có ít nhất 1 đồng), rồi lão ta chọn đồng ít nhất và đồng nhiều nhất trong bốn đồng tạo thành, hai đồng còn lại phần của Thiện. Vậy thì, bất chấp lão Ác khôn khéo và tham lam như thế nào, số tiền ớn nhất mà lão Thiện có thể kiếm được là bao nhiêu?

Giải

Nếu đồng X gồm 2000 đồng đô-la được chia thành hai đồng M đồng và N đồng ($X = M + N = 2000$) sao cho $M > N$ rồi tiếp tục chia mỗi đồng thành hai đồng: $M = a + b$ sao cho $a > b$ và $N = c + d$ sao cho $c > d$ thì trong mọi trường hợp, tổng của đồng lớn nhất và đồng nhỏ nhất trong bốn đồng a, b, c, d (Kí hiệu là T) cũng không vượt quá M.

Nếu b nhỏ nhất thì hiển nhiên a lớn nhất. $T = a + b = M$

Nếu d nhỏ nhất thì: hoặc c lớn nhất $T = c + d = N < M$ hoặc a lớn nhất: $T = a + d < M$.

Vậy để nhận được số tiền lớn nhất thì đầu tiên lão Thiện phải chia 2000 đồng đô-la thành hai đồng bằng nhau ($M = N$). Khi đó dù lão Ác chia thế nào thì cũng luôn nhận được 1000 đô-la, khi đó lão Thiện cũng nhận được 1000 đô-la.

Ví dụ 5: Trong một giải đấu vật có 100 người tham dự, tất cả có sức mạnh khác nhau. Người nào khỏe hơn luôn chiến thắng đối thủ yếu hơn. Mỗi đo vật đấu hai lần và người thắng cả hai trận sẽ được tặng thưởng. Hỏi số người ít nhất được tặng thưởng là bao nhiêu?

(Kỳ thi Toán quốc tế giữa các thành phố ITOT, Mùa thu 2013, THCS mở rộng)

Giải

Sắp xếp 100 đô vật theo sức mạnh tăng dần với a_1 (người yếu nhất), $a_2, a_3, \dots, a_{100}$ (người khỏe nhất) hiển nhiên a_{100} luôn là người chiến thắng.

Ở lượt thứ nhất ta xếp các đô vật thi đấu theo cặp như sau: a_{100} với a_{99} , a_{98} với $a_{97}; \dots; a_2$ với a_1 . Khi đó $a_1; a_3; \dots; a_{99}$ là những người thua cuộc.

Ở lượt thứ hai, ta xếp các cặp a_{100} với a_1 ; a_{99} với $a_{98}; \dots; a_3$ với a_2 . Khi đó $a_1; a_2; a_4; a_6; \dots; a_{98}$ là những người thua cuộc. Do đó chỉ có duy nhất a_{100} là người thắng cả hai vòng đấu.

Ví dụ 6: Nhà trường tổ chức một ngày hội chợ cho học sinh. Trong đó, có trò chơi đoán xem có bao nhiêu viên cảm thạch đựng trong một lọ kín. Giải thưởng sẽ trao cho ai đoán gần chính xác nhất vào cuối ngày hội chợ. Kết quả là:

- Giải nhất: Đức Trọng, dự đoán 125 viên.
- Giải nhì: Minh Hạnh, dự đoán 140 viên.
- Giải ba: Trọng Nhân, dự đoán 142 viên.
- Giải tư: Đức Minh, dự đoán 121 viên.

Hỏi chính xác trong lọ có bao nhiêu viên cẩm thạch.

Giải

Nếu gọi số viên cẩm thạch trong lọ là x thì $125 \leq x \leq 140$.

Vì người dự đoán số 125 đạt giải nhất và người dự đoán 140 đạt giải nhì nên suy ra

$$x - 125 < 140 - x \Rightarrow 125 \leq x \leq 132$$

Vì người dự đoán số 142 đạt giải ba và người dự đoán số 121 đạt giải tư nên

$$142 - x < x - 121 \Rightarrow 132 \leq x \leq 132 \Rightarrow x = 132.$$

Vậy trong lọ có chính xác 132 viên cẩm thạch.

B. Bài tập vận dụng

10.1 Bốn đội bóng A, B, C, D được xếp cùng một hàng. Mỗi đội chơi 1 trận, lần lượt với các đội còn lại. Mỗi trận thắng được 3 điểm, hòa được 1 điểm, thua 0 điểm. Sau tất cả các trận đấu, kết quả như sau:

(1). Tổng số điểm 3 trận của mỗi đội là các số lẻ liên tiếp.

(2). Đội D cao điểm nhất.

(3). Đội A hòa đúng 2 trận, trong đó hòa một trận với C. Tính điểm của mỗi đội.

10.2 Cho hình vuông 5×5 gồm 25 ô vuông nhỏ. Hỏi phải tô ít nhất bao nhiêu ô sao cho trong mỗi hình vuông 3×3 bất kì có đúng 4 ô được tô.

10.3 Sửu chỉ nói thật vào thứ 2, thứ 4, thứ 6 và chủ nhật. Dần chỉ nói thật vào ngày thứ 2, thứ 3, thứ 4 và thứ 5. Hãy tìm ngày mà cả hai đều nói: “Hôm qua, Tôi đã nói dối”.

10.4 Trên một bàn cờ 15×15 ô vuông gồm các ô trắng đen xen kẽ như cờ vua, có 15 quân xe đứng ở vị trí không đối đầu nhau (không ăn được nhau). Giả sử sau đó, mỗi quân xe này bị xô dịch theo một bước đi của quân mã. Chứng minh rằng khi đó phải có một cặp quân xe rơi vào thế đối đầu nhau.

10.5 Ai đã lấy thanh kẹo?

Ở trường nội trú, trong giờ ăn trưa, từ phòng cô Hằng ra, năm cậu bé ghé đến một quầy ăn trưa bên cạnh đó. Một trong năm cậu đã lấy một thanh kẹo mà không trả tiền. Khi bị thấy hiệu trưởng chất vấn, năm cậu bé trả lời như sau:

1) An : “Không phải Cường lấy, cũng không phải em”

2) Bình : “Theo em, An hoặc Chi đã lấy”

3) Chi : “Cả An và Bình đều nói dối”

4) Dũng : “Chi nói không đúng, một trong hai người kia nói dối, người còn lại nói sự thật”

5) Cường: “Tất cả những gì Dũng nói đều sai cả”

Khi thấy hiệu trưởng hỏi ý kiến cô Hằng, cô trả lời: “Trong năm cậu ấy, có 3 cậu luôn luôn trung thực, hai cậu còn lại thì luôn dối trá”.

Giả sử có Hằng nói đúng, bạn hãy xác định xem ai là người đã lấy thanh kẹo?

10.6 Trong một giải bóng đá có N đội tham gia thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (hai đội bất kì đều gặp nhau đúng một lần). Sau mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội thua không được điểm nào, còn nếu trận đấu có kết quả hòa thì mỗi đội cùng được 1 điểm. Các đội được xếp hạng dựa theo tổng

điểm. Trong trường hợp một số đội có tổng điểm bằng nhau thì các đội này được xếp hạng theo các chỉ số phụ. Kết thúc giải người ta nhận thấy rằng không có trận đấu nào kết thúc với tỉ số hòa; các đội xếp tiếp theo có tổng điểm đôi một khác nhau.

a) Chứng minh rằng $N \geq 7$

b) Tìm N và tổng điểm của mỗi đội tham gia giải.

10.7 Trong một giải cờ vua có 8 kì thủ tham gia, thi đấu vòng tròn một lượt, thắng được 1 điểm, hòa được $\frac{1}{2}$ điểm, thua được 0 điểm. Biết rằng sau khi tất cả các trận đấu kết thúc thì cả 8 kì thủ nhận được các số điểm khác nhau và kì thủ xếp thứ hai có số điểm bằng tổng điểm của 4 kì thủ xếp hạng cuối cùng. Hỏi ván đấu giữa kì thủ xếp thứ tư và kì thủ xếp thứ năm đã kết thúc với kết quả như thế nào?

10.8 Một đảo nằm xa tít ngoài biển khơi có tên là đảo “Thiên mã”. Trên hòn đảo này có hai bộ tộc đang sinh sống. Một bộ tộc có tên là Kị sĩ và bộ tộc kia làm nghề Ăn trộm. Tất nhiên bộ tộc Kị sĩ thì luôn nói thật và bộ tộc Ăn trộm thì luôn nói dối.

Dưới bóng cây có hai thổ dân đang ngồi nghỉ. Một du khách đi đến và hỏi một trong hai người

a) Ngài là Kị sĩ hay Ăn trộm ngựa?

A:.....

Không thể hiểu người đó nói gì, vì thế du khách quay sang hỏi người kia, xem người lúc trước nói gì?

B: Ông ta nói rằng ông ta là người Ăn trộm ngựa.

Vậy A và B là gì nhỉ?

10.9 Có 10 đồng tiền xu thật có khối lượng giống nhau, cùng một đồng tiền xu giả có khối lượng nặng hơn khối lượng đồng tiền xu thật và một đồng xu giả khác có khối lượng bé hơn khối lượng đồng xu thật. Hãy giải thích tại sao chỉ bốn lần cân đĩa bằng cân thăng bằng bạn có thể xác định được tổng khối lượng của hai đồng tiền xu giả lớn hơn, bằng hay nhỏ hơn tổng khối lượng của hai đồng xu thật.

(Thi Toán quốc tế IMC 2014. THCS Đồng Đội Canada đề nghị)

10.10 Cho bảng vuông với các số như sau: Có thể điền các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 vào các ô còn trống để tạo thành một hình vuông kì diệu hay không? (Hình vuông kì diệu có tổng các số trên mỗi hàng, cột, đường chéo bằng nhau).

(Cuộc thi của Hội toán học Xcot-len, năm 2001-2002)

4	1	4	2	4
1				2
4				2
4				5
2	3	3	5	2

10.11 Cho ba đồng đá gồm 51, 49 và 5 hòn. Có hai thao tác được thực hiện là: dồn hai đồng tùy ý thành một đồng; chọn đồng tùy ý có số chẵn hòn đá để phân làm hai đồng có số lượng hòn đá bằng nhau. Có thể nào cuối cùng sẽ nhận được 105 đồng mà mỗi đồng chỉ có một hòn, sau một dãy các thao tác luân phiên nhau?

(Cuộc thi Toán học Quốc tế của các tỉnh thành, THCS, mùa xuân 2001)

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

10.1 Điểm của 4 đội có thể là (1, 3, 5, 7) hoặc (3, 5, 7, 9). Do không thể có hai đội có 7 điểm và 9 điểm nên bộ điểm là (1, 3, 5, 7). Đội D có điểm cao nhất nên điểm của D là 7 nên đội D thắng 2 trận, hòa 1 trận.

Đội A không thua trận 3, bởi nếu thua thì số điểm là số chẵn, suy ra D hòa với A và thắng đội B và đội C.

Đội A có 2 trận hòa với D và C, thắng B nên điểm của A là 5 điểm.

Đội B thắng C thua A và D nên được 3 điểm.

Đội C hòa với A, thua B và D được 1 điểm.

Vậy Đội A: 5 điểm; Đội B: 3 điểm; Đội C: 1 điểm; Đội D: 7 điểm.

10.2 Giả sử hình vuông 6x6 được tô màu một số ô sao cho trong mỗi hình vuông 3x3 bất kì có đúng 4 ô được tô.

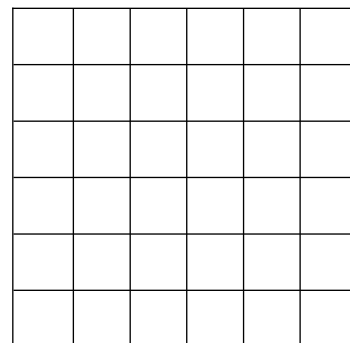
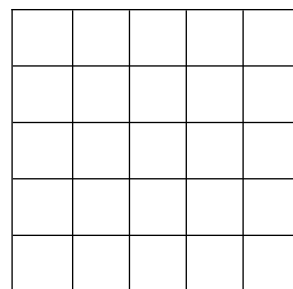
Hình vuông 6x6 được chia thành 4 hình vuông 3x3 nên trong 36 ô vuông nhỏ có đúng 16 ô được tô.

Để số ô được tô màu trong hình vuông 5x4 là ít nhất thì phải nhiều ô nhất có thể ở 11 ô vuông nhỏ phía ngoài.

Để ý rằng cột 3 và cột 6 sẽ tô màu giống nhau, hàng 3 và hàng 6 tô màu giống nhau và ô trung tâm sẽ giống ô ở góc dưới, do đó ta có thể tô màu cho nhiều nhất 9 ô trong 11 ô phía ngoài (ví dụ như hình trên).

Vậy cần tô ít nhất $16 - 9 = 7$ ô.

Ví dụ 1 cách tô màu;



10.3 Nếu hôm nay Dân nói thật thì hôm qua Dân nói dối, vậy hôm nay là thứ Hai. Sửa nói thật vào thứ Hai và cả Chủ nhật do đó vào thứ Hai, Sửu sẽ phải nói “Hôm qua tôi đã nói thật”. Như vậy hôm nay Dân nói dối, và hôm qua Dân nói thật. Suy ra hôm nay là thứ Sáu. Thứ Sáu là ngày Sửu nói thật và thứ Năm là ngày Sửu nói dối, vậy vào thứ Sáu, Sửu cũng sẽ nói “Hôm qua tôi đã nói dối”.

10.4 Đánh số các hàng và cột của bàn cờ từ 1 đến 15, khi đó, mỗi quân xe được xác định ở vị trí hàng i , cột j bởi cặp (i, j) với $1 \leq i, j \leq 15$. Vì ban đầu các quân xe đứng ở vị trí không đối đầu nhau nên không thể có hai quân xe nằm cùng một hàng hoặc một cột. Nói cách khác, chỉ số hàng (cột) của các quân xe phải khác nhau. Từ 1 đến 15 có 8 số lẻ và 7 số chẵn. Mỗi khi một quân xe di chuyển theo một bước đi của quân mã, nó làm tăng (hoặc giảm) chỉ số hàng là một đơn vị và chỉ số cột là hai đơn vị (hoặc ngược lại). Như thế, 15 số trong 30 số đó bảo toàn tính chẵn lẻ. Từ đó, sau khi mỗi quân xe đều di chuyển theo một bước đi của quân mã thì không thể có 16 số lẻ và 14 số chẵn nữa. Điều này có nghĩa rằng, khi đó phải có một cặp quân xe rơi vào thế đối nhau.

10.5 Vì có 3 câu luôn luôn trung thực nên câu trả lời của 3 câu đó sẽ không mâu thuẫn với nhau, nói cách khác, với người nói thật thì câu trả lời sẽ không mâu thuẫn với ít nhất hai câu trả lời của người khác. Từ

nhận xét trên, chúng ta suy luận ngay được An, Bình và Cường là những người luôn nói thật còn Chi và Dũng là những người luôn nói dối.

Dựa vào các câu trả lời của An và Bình, suy ra Chi là người lấy kẹo.

10.6

a) Đội xếp nhất 15 điểm nên thi đấu ít nhất với 5 đội khác nhau $\Rightarrow N \geq 5 + 1$

Nếu $N = 6$ thì đội xếp thứ nhất thắng 5 đội còn lại, đội xếp nhì 12 điểm nên thắng 4 đội trừ đội xếp nhất. Đội xếp ba thua đội xếp nhất và nhìn nên số điểm tối đa là $3 \cdot 3 = 9$.

Theo đầu bài đội ba 12 điểm: vô lí

Do vậy $N \geq 7$.

b) Các đội còn lại có số điểm không lớn hơn 12. Vì không có hòa nên số điểm các đội còn lại là bội của 3. Số điểm của các đội còn lại có thể là: 0, 3, 6, 9, 12.

Do đó $N \leq 5 + 3$ vì $N \geq 7$ (câu a)

Nên $N = 7$ hoặc $N = 8$

- Xét $N = 8$.

Có 8 đội nên số trận đấu có $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ trận. Tổng số điểm 8 đội đạt là 28.3 là số chẵn.

Còn $0+3+6+9+12+12+12+15$ là số lẻ: vô lí. Vậy nên $N \neq 8$

- Xét $N = 7$.

Có 7 đội nên số trận đấu có $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ trận.

Tổng số điểm 7 đội đạt $21 \cdot 3 = 63$ điểm. Tổng số điểm các đội còn lại đạt được là: $63 - (12 + 12 + 15) = 24$ điểm.

$$24 = 0 + 3 + 9 + 12$$

Số 24 biểu diễn thành tổng 4 số là bội của 3 và khác nhau chỉ duy nhất theo cách biểu diễn trên.

Tổng số điểm mỗi đội còn lại đạt được lần lượt là 0, 3, 9, 12.

10.7 Sau khi giải kết thúc, số ván cờ đã thi đấu giữa 4 kỳ thủ xếp cuối cùng là: $\frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$.

Sau mỗi ván tổng số điểm của hai kỳ thủ nhận được là 1. Vì thế tổng số điểm của 4 kỳ thủ xếp cuối cùng không ít hơn 6 điểm. Nếu $s \geq 6,5$ thì tổng số điểm của kỳ thủ xếp thứ hai là $s \geq 6,5$

Do 8 kỳ thủ được các số điểm khác nhau nên dễ thấy kỳ thủ xếp thứ nhất có điểm số không ít hơn $s + 0,5 \geq 7$.

Do kỳ thủ xếp thứ nhất đấu 8 trận nên điều này chỉ xảy ra khi $s + 0,5 = 7 \Leftrightarrow s = 6,5$ và kỳ thủ xếp thứ nhất thắng cả 7 ván. Suy ra kỳ thủ xếp thứ hai thắng không quá 6 ván và số điểm $\leq 6 < s$: vô lí.

Vậy ta phải có $s = 6$. Điều này có nghĩa là các kỳ thủ xếp từ năm đến tám chỉ giành điểm khi thi đấu với nhau thôi, ngoài ra thua tất cả các kỳ thủ khác. Do vậy, kỳ thủ xếp thứ tư đã thắng kỳ thủ xếp thứ năm trong trận đấu trực tiếp.

10.8 A chỉ có thể trả lời một cách rằng anh ta là Kị sĩ, bất kể anh ta là gì. Vì thế B đã nói dối. Suy ra B là Ăn trộm ngựa. Chúng ta không có thông tin chính xác về A.

10.9 Ta chia các đồng xu đã cho thành 4 nhóm A, B, C, D, mỗi nhóm có 3 đồng xu và đem cân từng nhóm đồng xu như sau: Cho A và B lên hai đĩa cân (lần cân thứ nhất); C và D lên hai đĩa cân (lần cân thứ hai). Ta xét 3 trường hợp.

+ *Trường hợp 1.* Cả hai lần cân đều thăng bằng. Khi đó, đồng xu giả ở cùng một nhóm và tổng khối lượng hai đồng xu bằng tổng khối lượng hai đồng xu giả.

+ *Trường hợp 2.* Một trong hai lần cân thăng bằng. Chỉ có hai nhóm đồng xu có khối lượng bằng nhau. Giả sử hai nhóm A và B có tổng khối lượng bằng nhau, tổng khối lượng các đồng xu trong nhóm C lớn hơn tổng khối lượng các đồng xu trong nhóm D. Khi đó cả hai đồng xu giả đều thuộc nhóm A và B với tổng khối lượng các đồng xu trong hai nhóm C và D. Từ đó ta sẽ có câu trả lời.

+ *Trường hợp 3.* Cả hai lần cân thứ nhất và thứ hai đều không thăng bằng.

Do đối xứng, ta có thể giả sử nhóm A có trọng lượng nặng hơn nhóm B và nhóm C có trọng lượng nặng hơn nhóm D. Khi đó đồng xu giả nặng hơn ở nhóm A và đồng xu giả nhẹ hơn ở nhóm D; hoặc đồng xu giả nặng hơn ở nhóm C và đồng xu giả nhẹ hơn ở nhóm B. Nếu nhóm A toàn đồng xu thật thì B chứa đồng xu giả nhẹ hơn, khi đó C chứa đồng xu giả nặng hơn. Nếu nhóm A chứa đồng xu giả nặng hơn thì B phải chứa hoàn toàn đồng xu thật (vì nếu B chứa đồng xu giả nhẹ hơn thì nhóm C có trọng lượng bằng nhóm D là vô lý). Khi đó D chứa đồng xu giả nhẹ hơn. Do đó nhóm A và D cùng chứa đồng xu giả hoặc cùng không chứa đồng xu giả. Nếu nhóm A có trọng lượng nhẹ hơn nhóm C thì đồng xu giả nặng hơn ở C và đồng xu giả nhẹ hơn ở B. Cuối cùng ta chỉ cần cân nhóm A và D với nhóm B và C thì được kết quả.

10.10 Giả sử ta điền được các số 1, 2, 3, 4, 5 để có hình vuông kì diệu:

Từ đó ta có:

$$4 + a + e + 1 + 2 = 15 \Rightarrow a + e + 1 = 9;$$

$$4 + b + e + h + 3 = 15 \Rightarrow b + e + h = 8;$$

$$2 + g + e + c + 4 = 15 \Rightarrow g + e + c = 9;$$

$$4 + d + e + f + 2 = 15 \Rightarrow d + e + f = 9;$$

Suy ra: $(a + b + c + d + e + f + g + h + i) + 3e = 35$

Mặt khác, cộng ba hàng ở giữa của hình vuông, ta được:

$$(a + b + c + d + e + f + g + h + i) + 18 = 45$$

Vì vậy: $3e = 8 \Rightarrow e \neq 1; 2; 3; 4; 5$

Kết luận: Không thể có hình vuông kì diệu thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

4	1	4	2	4
1	a	b	c	2
4	d	e	f	2
4	g	h	i	5
2	3	3	5	2

10.11 Do cả ba đồng 51, 49 và 5 hòn đều có số lẻ các hòn đá nên thao tác đầu tiên phải là: dồn hai đồng thành một.

Nếu ban đầu dồn hai đồng 5 và 49 hòn thành một, ta sẽ có hai đồng 51 và 54 hòn đều có số hòn là bội của 3. Từ lúc này trở đi, khi luân phiên thực hiện các thao tác, dễ thấy mỗi đồng luôn là bội của 3.

Tương tự: Nếu ban đầu dồn hai đồng 49 và 51 hòn thành một rồi tiếp tục luân phiên thực hiện các thao tác thì mỗi đồng luôn là bội của 5;

Nếu ban đầu dồn hai đồng 5 và 51 hòn thành một rồi tiếp tục luân phiên thực hiện các thao tác thì mỗi đồng luôn là bội của 7.

Vậy ta không thể thực hiện được yêu cầu của đề bài.

CHƯƠNG II. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

CHUYÊN ĐỀ 11. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa: Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = kx$ (với k là hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k .

2. Chú ý:

* Khi đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x thì x cũng tỉ lệ thuận với y và ta nói hai đại lượng đó tỷ lệ thuận với nhau.

* Nếu y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k (khác 0) thì x tỉ lệ thuận với y theo hệ số $\frac{1}{k}$.

* Nếu z tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ k_1 , y tỷ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k_2 thì z tỷ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $k_1.k_2$.

3. Tính chất: Nếu hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau thì:

* Tỉ số giữa hai giá trị tương ứng của hai đại lượng luôn không đổi:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots = k.$$

* Tỉ số giữa hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}; \frac{x_1}{x_3} = \frac{y_1}{y_3}; \dots$$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Dưới đây là bảng giá trị tương ứng của thời gian t (giờ) và quãng đường s (km) trong một chuyển động:

Thời gian t (giờ)	0,8	1,2	1,5	2,5	4
Quãng đường s (km)	20	30	37,5	62,5	100

- a) Hai đại lượng quãng đường s (km) và thời gian t (giờ) có phải là hai đại lượng tỉ lệ thuận không?
 b) Tính quãng đường đi ứng với thời gian 6 giờ 30 phút?
 c) Nếu quãng đường là 90 km thì thời gian đi là bao nhiêu ?

✓ *Tìm cách giải:* Dựa vào tính chất để kết luận: ta nhận thấy:

$$\frac{20}{0,8} = \frac{30}{1,2} = \frac{37,5}{1,5} = \frac{62,5}{2,5} = \frac{100}{4} = 25$$

Nghĩa là tỉ số hai giá trị tương ứng của hai đại lượng luôn không đổi. Từ đó tìm ra công thức và tính s với $t = 6$ giờ 30 phút = 6,5 giờ và tính t với $s = 90$ km.

Giải

a) Ta có: $\frac{s}{t} = \frac{20}{0,8} = \frac{30}{1,2} = \frac{37,5}{1,5} = \frac{62,5}{2,5} = \frac{100}{4} = 25.$

Ta thấy tỉ số hai giá trị tương ứng của hai đại lượng luôn không đổi $\frac{s}{t} = 25 \Rightarrow s = 25t$ nên đại lượng s tỉ lệ thuận với đại lượng t .

b) Với $t = 6,5$ (giờ) thì $s = 25 \cdot 6,5 = 162,5 (km)$.

c) Với $s = 90 (km)$ thì $t = 90 : 25 = 3,6$ (giờ) = 3 giờ 36 phút.

✓ **Chú ý:** Đây chính là bài toán thể hiện quan hệ giữa ba đại lượng quãng đường (s), thời gian (t) và vận tốc (v) của một động tử mà quan hệ là $s = v \cdot t$. Trong bài toán chuyển động đều cùng vận tốc v thì s và t là hai đại lượng tỉ lệ thuận (nếu cùng thời gian t thì s và v cũng là hai đại lượng tỉ lệ thuận).

Ví dụ 2: Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong 2 bảng sau:

Bảng I

x	1	2	3	4	6
y	2	3	5	6	10

Bảng II

x	-2	-3	-4	-6	1
y	6	9	12	18	-3

- a) Trong bảng nào thì hai đại lượng y và x tỉ lệ thuận với nhau?
 b) Trong trường hợp hai đại lượng tỉ lệ thuận, hãy tìm x biết $y = -18$; tìm y biết $x = 15$.

✓ *Tìm cách giải:*

a) Ta tìm tất cả tỷ số giữa hai giá trị tương ứng đã cho của y nếu chúng luôn không đổi thì y tỷ lệ thuận với x . Còn nếu xét hai tỷ số giữa hai cặp giá trị tương ứng nào đó của hai đại lượng mà khác nhau ta kết luận luôn hai đại lượng không tỉ lệ thuận với nhau.

b) Ta tìm hệ số tỷ lệ k , tìm công thức $y = kx$ rồi tính ra số cần tìm.

Giải

a) Trong bảng I ta có $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2}$; nên y và x không tỉ lệ thuận với nhau.

b) Trong bảng II ta có $\frac{6}{-2} = \frac{9}{-3} = \frac{12}{-4} = \frac{18}{-6} = \frac{-3}{1} = -3$ nên y và x tỉ lệ thuận với nhau. Suy ra $k = -3$ và $y = -3x$.

+ Với $y = -18$ thì $-18 = -3x \Rightarrow x = (-18) : (-3) = 6$

+ Với $x = 15$ thì $y = -3 \cdot 15 \Rightarrow y = -45$.

Ví dụ 3: Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau.

a) Biết hiệu hai giá trị nào đó của x là 2 và hiệu hai giá trị tương ứng của y là 12. Hỏi hai đại lượng y và x liên hệ với nhau bởi công thức nào?

b) Từ đó điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

x	-5	-2,5	$-\frac{1}{2}$	0				
y				0	$\frac{1}{2}$	3	6	18

✓ *Tìm cách giải:*

a) Biết hiệu hai giá trị của x giả sử $x_1 - x_2 = 2$ và hiệu hai giá trị tương ứng của y là $y_1 - y_2 = 12$ ta nghĩ đến sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau để tìm hệ số tỉ lệ $k \Rightarrow y = kx$.

b) Từ công thức $y = kx \Rightarrow x = y : k$ rồi tính ra số cần điền vào ô trống.

Giải

a) Gọi hai giá trị của x là x_1 và x_2 với $x_1 - x_2 = 2$ và hai giá trị tương ứng của y là y_1 và y_2 . Theo tính

chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận và tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$k = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Vậy công thức liên hệ là $y = 6x$.

b) Từ công thức $y = 6x \Rightarrow x = y : 6$.

Kết quả các số điền vào bảng như sau:

x	-5	-2,5	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	1	3
y	-30	-15	-3	0	$\frac{1}{2}$	3	6	18

Ví dụ 4: 15 lít dầu hỏa có khối lượng 12kg. Hỏi 1 thùng 55 lít dầu hỏa có khối lượng bao nhiêu kg? (không kể khối lượng vỏ thùng)

* **Tìm cách giải:** Đại lượng dung tích dầu hỏa (x) tỉ lệ thuận với khối lượng dầu hỏa (y). Đại lượng x có hai giá trị $x_1 = 15$ (lít); $x_2 = 55$ (lít). Đại lượng y có hai giá trị tương ứng là $y_1 = 12$ (kg) và y_2 là giá trị

cần tìm. Dựa vào tính chất $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ để tính khối lượng dầu cần tìm.

Giải

Gọi khối lượng dầu cần tìm là y_2 kg; ($y_2 > 0$). Do khối lượng dầu hỏa tỉ lệ thuận với dung tích của nó nên ta có:

$$\frac{12}{15} = \frac{y_2}{55} \Rightarrow y_2 = 55 \cdot \frac{12}{15} = 44 \text{ (kg)}$$

Vậy thùng 55 lít dầu hỏa có khối lượng 44 kg.

Ví dụ 5: Cho y tỉ lệ thuận với x. Biết hiệu hai lập phương của hai giá trị y_1 và y_2 là 1216 và hiệu hai lập phương của hai giá trị tương ứng x_1 và x_2 là 19.

a) Hãy viết công thức liên hệ giữa y và x.

b) Tính $y_3^3 + y_4^3$ biết $x_3 = 2$ và $x_4 = -3$

✓ **Tìm cách giải:** Ta biết nếu $\frac{y_i}{x_i} = k$ thì $\left(\frac{y_i}{x_i}\right)^3 = \frac{y_i^3}{x_i^3} = k^3$. Hiệu hai lập phương của hai giá trị y_1 và y_2 là $y_1^3 - y_2^3 = 1216$ và hiệu hai lập phương của hai giá trị tương ứng x_1 và x_2 là $x_1^3 - x_2^3 = 19$. Sử dụng tính chất của dãy tỷ số bằng nhau ta có cách giải sau:

Giải

a) Theo đầu bài vì y tỉ lệ thuận với x nên $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$. Theo tính chất dãy tỷ số bằng nhau ta có:

$$k^3 = \frac{y_1^3}{x_1^3} = \frac{y_2^3}{x_2^3} = \frac{y_1^3 - y_2^3}{x_1^3 - x_2^3} = \frac{1216}{19} = 64 = 4^3$$

$\Rightarrow k = 4$. Do đó ta có công thức $y = 4x$.

b) Với $x_3 = 2$ thì $y_3 = 4 \cdot 2 = 8$; với $x_4 = -3$ thì $y_4 = 4 \cdot (-3) = -12$

Do đó $y_3^3 + y_4^3 = 8^3 + (-12)^3 = 512 - 1728 = -1216$.

Ví dụ 6: Một ô tô chạy từ A lúc 5 giờ sáng đến B lúc 9 giờ. Một xe máy chạy từ B cũng vào lúc 5 giờ sáng và đến A lúc 13 giờ. Hỏi hai xe gặp nhau lúc mấy giờ?

✓ **Tìm cách giải:** Ta có thời gian ô tô đi hết quãng đường AB là 9 giờ - 5 giờ = 4 giờ thì 1 giờ xe ô tô đi

được $\frac{1}{4}$ quãng đường AB. Xe máy đi quãng đường BA hết 13 giờ - 5 giờ = 8 giờ thì 1 giờ xe máy đi được

$\frac{1}{8}$ quãng đường AB. Trong cùng một thời gian thì quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Nên nếu gọi t là thời gian hai xe gặp nhau; s_1 là quãng đường ô tô đi từ A đến chỗ gặp xe máy; v_1 là vận tốc ô tô; s_2 là quãng đường xe máy đi từ B đến chỗ gặp ô tô; v_2 là vận tốc xe máy. Ta có $\frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = t$ và $s_1 + s_2$ chính là quãng đường AB. Từ đó có cách giải sau:

Giải

Coi quãng đường AB là đơn vị quy ước ($=1$). Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB là $9 - 5 = 4$ (giờ) thì vận tốc xe ô tô là $v_1 = \frac{1}{4}$ (quãng đường AB/giờ). Xe máy đi quãng đường BA hết $13 - 5 = 8$ (giờ) thì vận tốc xe máy là $v_2 = \frac{1}{8}$ (quãng đường AB/giờ). Gọi t là thời gian hai xe phải đi để gặp nhau; s_1 là quãng đường ô tô đi từ A đến chỗ gặp xe máy; s_2 là quãng đường xe máy đi từ B đến chỗ gặp ô tô ta có $s_1 + s_2 = 1$.

Trong cùng một thời gian thì quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Do đó:

$$t = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s_1 + s_2}{v_1 + v_2} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ (giờ)} = 2 \text{ giờ } 40 \text{ phút.}$$

Vậy hai xe gặp nhau lúc 7 giờ 40 phút.

✓ **Chú ý:** Ta có cách giải khác: Nếu gọi độ dài quãng đường AB là a (km) thì vận tốc của vận tốc xe ô tô là $v_1 = \frac{a}{4}$ (km/giờ); vận tốc xe máy là $v_2 = \frac{a}{8}$ (km/giờ). Gọi t là thời gian hai xe phải đi để gặp nhau; s_1 là quãng đường ô tô đi từ A đến chỗ gặp xe máy; s_2 là quãng đường xe máy đi từ B đến chỗ gặp ô tô, ta có: $s_1 + s_2 = a$.

$$t = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s_1 + s_2}{v_1 + v_2} = \frac{a}{\frac{a}{4} + \frac{a}{8}} = \frac{a}{\frac{3 \cdot a}{8}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Ta có: $\frac{8}{3} \text{ (giờ)} = 2 \text{ giờ } 40 \text{ phút.}$

Ví dụ 7: Cho $\triangle ABC$ có số đo các góc $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ lần lượt tỉ lệ với $2, 3, 5$. Tính số đo các góc của $\triangle ABC$.

✓ **Tìm cách giải:** Ta có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ và do số đo các góc $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ lần lượt tỉ lệ với $2, 3, 5$ nghĩa là $\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C}}{5}$. Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có cách giải sau:

Giải

Ta có: $\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{5} = \frac{A+B+C}{2+3+5} = \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ$

Suy ra $A = 2.18^\circ = 36^\circ$; $B = 3.18^\circ = 54^\circ$; $C = 5.18^\circ = 90^\circ$

✓ *Chú ý:* Bài toán trên thuộc dạng chia một số thành những phần tỉ lệ thuận với các số cho trước.

Phương pháp chung để giải các bài toán dạng đó là: Giả sử phải chia một số t thành n phần $t_1, t_2, \dots, t_n$ tỉ lệ thuận với các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ (khác 0) với $n \in \mathbb{N}; n > 1$ ta làm như sau:

$$\frac{t_1}{a_1} = \frac{t_2}{a_2} = \dots = \frac{t_n}{a_n} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{t}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = k$$

Từ đó có $t_1 = ka_1; t_2 = ka_2; \dots; t_n = ka_n$.

Ví dụ 8: Bốn lớp 7A, 7B, 7C, 7D tham gia lao động trồng cây. Số cây mỗi lớp trồng tỉ lệ lần lượt với 5; 4; 3; 2. Biết rằng 5 lần số cây của lớp 7A trồng cộng với 4 lần số cây lớp 7B trồng nhiều hơn ba lần tổng số cây của 7C và 7D trồng là 520 cây. Tìm số cây mỗi lớp đã trồng.

✓ *Tìm cách giải:* Nếu số cây các lớp 7A, 7B, 7C, 7D trồng lần lượt là x, y, z, t ta có $5x + 4y - 3(z + t) = 520$.

Mặt khác $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{t}{2} = \frac{5x}{25} = \frac{4y}{16} = \frac{3y}{9} = \frac{3t}{6}$

Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta tìm được hệ số tỉ lệ. Từ đó tìm được $x; y; z; t$.

Giải

Gọi số cây các lớp 7A, 7B, 7C, 7D trồng lần lượt là: x, y, z, t ($x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$) thì

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{t}{2} = \frac{5x}{25} = \frac{4y}{16} = \frac{3y}{9} = \frac{3t}{6} = k$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$k = \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{t}{2} = \frac{5x}{25} = \frac{4y}{16} = \frac{3y}{9} = \frac{3t}{6} = \frac{5x + 4y - 3(y + t)}{25 + 16 - (9 + 6)} = \frac{520}{26} = 20$$

Suy ra $x = 5k = 100; y = 4k = 80; z = 3k = 60; t = 2k = 40$.

Vậy số cây các lớp 7A, 7B, 7C, 7D trồng lần lượt là: 100 cây; 80 cây; 60 cây; 40 cây.

Ví dụ 9:

a) Một số A được chia làm 4 phần a, b, c, d biết rằng a và b tỉ lệ với 5 và 6; b và c tỉ lệ với 8 và 9; c và d tỉ lệ với 3 và 2 và c hơn d là 27. Tìm A?

b) Một số B được chia làm năm phần $x; y; z; t; u$ biết rằng $x : y : z : t : u = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} : \frac{5}{6}$ và $\frac{x}{4} = \frac{135 - z}{3}$.

Tìm B?

✓ *Tìm cách giải:*

a) a và b tỉ lệ với 5 và 6 nghĩa là $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$; hay $\frac{a}{5} = \frac{b}{6}$;

b và c tỉ lệ với 8 và 9 nghĩa là $\frac{b}{c} = \frac{8}{9}$ hay $\frac{b}{8} = \frac{c}{9}$.

Để có thể lập được thành dãy tỉ số bằng nhau, ta nhận thấy BCNN $(6; 8) = 24$ do đó ta biến đổi

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{6} = \frac{20}{24} \Rightarrow \frac{a}{20} = \frac{b}{24};$$

$$\text{Tương tự } \frac{b}{c} = \frac{8}{9} = \frac{24}{27} \Rightarrow \frac{b}{24} = \frac{c}{27} \quad \text{từ đó suy ra } \frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{c}{27}.$$

Tiếp tục với c và d ta lập được dãy tỉ số bằng nhau.

$$\text{b) Từ } x : y : z : t : u = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} : \frac{5}{6} = \frac{30}{60} : \frac{40}{60} : \frac{45}{60} : \frac{48}{60} : \frac{50}{60}$$

$$= 30 : 40 : 45 : 48 : 50 \quad \text{và} \quad \frac{x}{4} = \frac{135 - z}{3} \Rightarrow 3x + 4z = 540. \quad \text{Ta áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.}$$

Giải

$$\text{a) Theo bài ra, ta có: } \frac{a}{b} = \frac{5}{6} = \frac{20}{24} \Rightarrow \frac{a}{20} = \frac{b}{24} \quad (1)$$

$$\frac{b}{c} = \frac{8}{9} = \frac{24}{27} \Rightarrow \frac{b}{24} = \frac{c}{27} \quad (2)$$

$$\text{và } \frac{c}{d} = \frac{3}{2} = \frac{27}{18} \Rightarrow \frac{c}{27} = \frac{d}{18} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1); (2); (3) suy ra: } \frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{c}{27} = \frac{d}{18} = \frac{c-d}{27-18} = \frac{27}{9} = 3.$$

$$\text{Do đó } \frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{c}{27} = \frac{d}{18} = \frac{a+b+c+d}{20+24+27+18} = \frac{A}{89} = 3 \Rightarrow A = 267.$$

$$\text{b) } \frac{x}{4} = \frac{135 - z}{3} \Rightarrow 3x + 4z = 540.$$

$$\text{Ta có } x : y : z : t : u = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} : \frac{5}{6} = \frac{30}{60} : \frac{40}{60} : \frac{45}{60} : \frac{48}{60} : \frac{50}{60}$$

$$= 30 : 40 : 45 : 48 : 50$$

$$\text{Do đó } \frac{x}{30} = \frac{y}{40} = \frac{z}{45} = \frac{t}{48} = \frac{u}{50} = \frac{z}{90} = \frac{3x}{90} = \frac{4z}{180} = \frac{3x+4z}{90+180} = \frac{540}{270} = 2$$

$$\Rightarrow x = 60; y = 80; z = 90; t = 96; u = 100.$$

$$\text{Vậy } B = 60 + 80 + 90 + 96 + 100 = 426.$$

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

11.1. Dưới đây là bảng giá trị tương ứng của thể tích V (cm^3) với khối lượng m (g) của sắt:

Thể tích V (cm^3)	2	2,4	4	5	6
Khối lượng m (g)	15,7	18,84	31,4	39,25	47,1

a) Chứng tỏ hai đại lượng khối lượng m (g) và thể tích V (cm^3) là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Viết công thức?

b) Tính khối lượng của $3cm^3$ sắt.

c) Một khối lượng 125,6 g sắt có thể tích bao nhiêu?

11.2. Cùng năng suất lao động thì số lượng sản phẩm K (chiếc áo) và thời gian t (ngày) của một xưởng may là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Hãy điền vào ô trống các số thích hợp trong bảng sau:

Thời gian t (ngày)		4	5		15
Số lượng K (chiếc áo)	360	720		1440	

11.3. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong 2 bảng sau:

Bảng I	x	-3	-2	2	4	5
	y	-6	-1	2,5	8	10

Bảng II	x	-3	-2	2	4	5
	y	-1,5	-1	1	2	2,5

a) Trong bảng nào thì hai đại lượng y và x tỉ lệ thuận với nhau?

b) Trong trường hợp có tương quan tỉ lệ thuận, hãy tìm x biết $y = -60$; tìm y biết $x = 0,8$.

11.4. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau.

a) Biết tổng hai giá trị nào đó của x là 673 và tổng hai giá trị tương ứng của y là 2019. Hỏi hai đại lượng x và y liên hệ với nhau bởi công thức nào?

b) Từ đó điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau (với $a \neq 0$):

x	-3			$\frac{3}{4}$		2		$\frac{a}{-3}$
y		6	$-\frac{3}{2}$		-3		-3b	

11.5. Cho x tỉ lệ thuận với y theo hệ số k_1 ; y tỉ lệ thuận với z theo hệ số k_2 ; z tỉ lệ thuận với t theo hệ số k_3 . Chứng minh x tỉ lệ thuận với t. Tìm hệ số tỉ lệ của t với x.

11.6. Một đoạn dây đồng dài 2,5 m có khối lượng 8,4 kg. Hỏi 80 m dây đồng như thế nặng bao nhiêu kg?

11.7. Một thửa ruộng hình chữ nhật có 2 cạnh tỉ lệ với 5 và 8. Biết chiều dài hơn chiều rộng là 18m.

a) Tìm diện tích của thửa ruộng hình chữ nhật đó.

b) Người ta trồng lúa trên thửa ruộng đó, biết rằng cứ $25m^2$ thu hoạch được 20kg thóc. Hỏi thửa ruộng thu hoạch được bao nhiêu kg thóc?

11.8. Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận; x_1 và x_2 là hai giá trị khác nhau của x và y_1 và y_2 là các giá trị tương ứng của y .

a) Tìm x_1 biết $x_2 = 5$; $y_1 = \frac{-2}{3}$ và $y_2 = \frac{5}{9}$;

b) Tính x_2 và y_2 biết $y_2 - x_2 = -8$; $x_1 = -6$; $y_1 = 3$, 8 .

11.9*. Cho $x; y; z$ tỉ lệ thuận với $3; 4; 5$. Tính giá trị biểu thức:

$$A = 2018(x - y)(y - z) - 504, 5 \left(\frac{x + y + z}{6} \right)^2.$$

11.10*. Cho $24a - 30b$; $40c - 24a$; $30b - 40c$ tỉ lệ thuận với 2018 ; 2019 ; 2020 . Biết $a + b + c = 2016$.
Tìm $a; b; c$.

11.11. Cho y tỉ lệ thuận với x . Biết hiệu hai bình phương của hai giá trị y_1 và y_2 là 128 và hiệu hai bình phương của hai giá trị tương ứng x_1 và x_2 là 8.

a) Hãy viết công thức liên hệ giữa y và x ;

b) Tính $y_3^2 - y_4^2$ biết $x_3 = 3$ và $x_4 = -8$.

11.12*. Hai ô tô cùng khởi hành một lúc từ M và N cách nhau 55 km và đến P cùng một lúc (ba địa điểm M, N, P nằm trên một đường thẳng). Vận tốc của ô tô đi từ M là 50km/h, vận tốc ô tô đi từ N là 60km/h. Tính quãng đường mà hai ô tô đã đi.

11.13*. Cùng lúc 7 giờ sáng một ô tô chạy từ A và đến B lúc 8 giờ 30 phút, một xe đạp điện chạy từ B đến A lúc 10 giờ. Một xe đạp khởi hành từ A lúc 6 giờ và đến B lúc 12 giờ. Hỏi:

a) Xe ô tô và xe đạp điện gặp nhau lúc mấy giờ?

b) Xe ô tô gặp xe đạp lúc mấy giờ?

11.14. Lúc 6 giờ sáng trên quãng đường AB dài 93km, người đi xe máy thứ nhất đi từ A đến B có vận tốc bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc người đi xe máy thứ hai đi từ B đến A. Đến lúc gặp nhau thời gian người đi xe máy thứ nhất bằng $\frac{5}{4}$ thời gian người đi xe máy thứ hai.

Tính quãng đường mỗi người đã đi từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau.

11.15. Một ca nô khi nước yên lặng có vận tốc là 30km/h. Với cùng thời gian ca nô xuôi dòng 99km thì ca nô ngược dòng được bao nhiêu km biết một cụm bèo trôi trên dòng sông 9km trong 3 giờ.

11.16. Một ô tô khách và một ô tô tải cùng khởi hành lúc 8 giờ sáng từ hai đầu quãng đường AB dài 100km. Ô tô khách đi từ A đến B với vận tốc 750m/phút. Ô tô tải đi từ B đến A sau 2 giờ đi được 70km. Gọi M là trung điểm của AB.

- a) Hỏi đến mấy giờ thì ô tô tải cách M một khoảng gấp ba khoảng cách từ ô tô khách đến M?
b) Nếu đi tiếp với vận tốc ấy thì sau mấy giờ nữa thì ô tô khách đến B?

11.17. Ba tổ sản xuất của một xí nghiệp cùng sản xuất một loại sản phẩm với năng suất lao động của mỗi công nhân đều như sau. Tổ một có 12 người trong 9 ngày sản xuất được 540 sản phẩm. Tổ hai có 18 người trong 8 ngày; tổ ba có 10 người làm trong 4 ngày. Hỏi tổ hai và ba mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu sản phẩm?

11.18. Một số dương A được chia làm bốn phần đều dương tỉ lệ với $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}$ và tổng các bình phương của bốn phần ấy là 23716. Tìm số A.

11.19*. Bốn túi đường có tổng cộng 375 kg. Lần thứ nhất người ta lấy đi 1kg ở túi thứ nhất; 2kg ở túi thứ hai; 3kg ở túi thứ ba; 4kg ở túi thứ tư. Lần thứ hai người ta lấy tiếp đi $\frac{1}{5}$ số kg đường còn lại của túi thứ nhất, $\frac{1}{4}$ số kg đường còn lại của túi thứ hai; $\frac{1}{3}$ số kg đường còn lại của túi thứ ba, $\frac{1}{2}$ số kg đường còn lại của túi thứ tư thì số kg đường còn lại sau lần lấy thứ hai của bốn túi bằng nhau. Tìm số kg đường mỗi túi lúc đầu.

11.20. Cho ba số x, y, z tỉ lệ thuận lần lượt với 2009; 2010; 2011

a) Chứng minh rằng $(x-z)^3 = 8(x-y)^2(y-z)$;

b) Cho biết $\frac{x}{26} + \frac{y}{4} = \frac{z}{2012}$. Tính x, y, z .

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

11.1. a) Ta nhận thấy: $\frac{m}{V} = \frac{15,7}{2} = \frac{18,84}{2,4} = \frac{31,4}{4} = \frac{39,25}{5} = \frac{47,1}{6} = 7,85 (g / cm^3)$

nghĩa là tỉ số hai giá trị tương ứng của hai đại lượng luôn không đổi nên hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau. Từ đó $m = 7,85.V$.

b) Với $V = 3 (cm^3)$ thì $m = 7,85.3 = 23,55 (g)$.

c) Với $m = 125,6 (g)$ thì $V = 125,6 : 7,85 = 16 (cm^3)$.

11.2. Ta có $k = \frac{720}{4} = 180$ (chiếc áo/ngày) $\Rightarrow K = kt$ và $t = K : k$. Ta sẽ có

Thời gian t (ngày)	2	4	5	8	15
Số lượng K (chiếc áo)	360	720	900	1440	2700

11.3.

a) Trong bảng I hai giá trị tương ứng của hai đại lượng là $\frac{-6}{-3} \neq \frac{2,5}{2}$ ta kết luận luôn hai đại lượng không tỉ lệ thuận với nhau.

Trong bảng II tất cả tỷ số giữa hai giá trị tương ứng đã cho của y và x luôn không đổi

$$\frac{-1,5}{-3} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{2,5}{5} = 0,5 \quad \text{nên ta có y tỉ lệ thuận với x.}$$

b) Trong bảng II ta suy ra $k = 0,5$ và $y = 0,5x$.

Với $y = -60$ thì $-60 = 0,5x \Rightarrow x = (-60) : 0,5 = -120$.

Với $x = 0,8$ thì $y = 0,8 \cdot 0,5 \Rightarrow y = 0,4$.

11.4.

a) Biết tổng hai giá trị của x giả sử $x_1 + x_2 = -673$ và tổng hai giá trị tương ứng của y là $y_1 + y_2 = 2019$.

Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận và tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$k = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{2019}{-673} = -3.$$

Vậy công thức liên hệ là $y = -3x$.

b) Từ công thức $y = -3x \Rightarrow x = y : (-3)$.

Kết quả điền số:

x	-3	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	b	$\frac{a}{-3}$
y	9	6	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{4}$	-3	-6	-3b	a

11.5. Ta có $x = k_1 y; y = k_2 z; z = k_3 t \Rightarrow x = k_1 k_2 k_3 t$.

Nghĩa là x tỉ lệ thuận với t theo hệ số $k_1 k_2 k_3$.

Do đó t tỉ lệ thuận với x theo hệ số $\frac{1}{k_1 k_2 k_3}$.

11.6. Gọi khối lượng dây đồng cần tìm là y_2 . Do khối lượng dây đồng tỉ lệ thuận với chiều dài của nó nên ta có:

$$\frac{8,4}{y_2} = \frac{2,5}{80} \Rightarrow y_2 = (8,4 : 80) : 2,5 = 268,8$$

Vậy 80m dây đồng nặng 268,8 kg.

11.7.

a) Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m), chiều rộng là y (m) ($x, y > 0$) thì $x - y = 18$. Ta có

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{x-y}{8-5} = \frac{18}{3} = 6 \Rightarrow x = 48; y = 15.$$

Diện tích thửa ruộng là $48.15 = 720 (m^2)$.

b) Số thóc thu hoạch và số m^2 ruộng là hai đại lượng tỷ lệ thuận. Do đó nếu gọi số thóc thu hoạch là x kg ($x > 0$)

Ta có: $\frac{25}{720} = \frac{20}{x} \Rightarrow x = 720.20 : 25 = 576 (kg)$

11.8.

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Rightarrow x_1 = \frac{y_1 \cdot x_2}{y_2} = \frac{-\frac{2}{3} \cdot 5}{\frac{5}{9}} = -6$$

a)

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2 - x_2}{y_1 - x_1} = \frac{-8}{3,8 + 6,2} = -0,8$$

b)

Vậy: $x_2 = (-0,8) \cdot (-6,2) = 4,96$

$$y_2 = (-0,8) \cdot 3,8 = -3,04.$$

11.9*. Do $x; y; z$ tỉ lệ thuận với $3; 4; 5$ nên ta đặt $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k$

$\Rightarrow x = 3k; y = 4k; z = 5k$. Ta có:

$$A = 2018(3k - 4k)(4k - 5k) - 504,5 \cdot \left(\frac{3k + 4k + 5k}{6} \right)^2$$

$$= 2018(-k)(-k) - 504,5 \cdot \left(\frac{12k}{6} \right)^2$$

$$= 2018k^2 - 504,5 \cdot 4k^2 = 2018k^2 - 2018k^2 = 0$$

11.10*. $24a - 30b; 40c - 24a; 30b - 40c$ tỉ lệ thuận với $2018; 2019; 2020$ nên:

$$\frac{24a - 30b}{2018} = \frac{40c - 24a}{2019} = \frac{30b - 40c}{2020} = \frac{24a - 30b + 40c - 24a + 30b - 40c}{2018 + 2019 + 2020} = 0$$

Do đó $24a - 30b = 0 \Rightarrow 4a = 5b$ hay $\frac{a}{5} = \frac{b}{4}$ (1)

$$40c - 24a = 0 \Rightarrow 5c = 3a$$
 hay $\frac{a}{5} = \frac{c}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{a}{5} = \frac{b}{4} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{5+4+3} = \frac{2016}{12} = 168.$

Vậy $a = 840; b = 672; c = 504$.

11.11.

a) Ta biết nếu $\frac{y_i}{x_i} = k$ thì $\left(\frac{y_i}{x_i}\right)^2 = \frac{y_i^2}{x_i^2} = k^2$. Ta có: $y_1^2 - y_2^2 = 128$ và $x_1^2 - x_2^2 = 8$. Theo đầu bài vì y tỉ lệ

thuận với x nên $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$.

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$k^2 = \frac{y_1^2}{x_1^2} = \frac{y_2^2}{x_2^2} = \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1^2 - x_2^2} = \frac{128}{8} = 16 = (\pm 4)^2$$

$\Rightarrow k = -4$ hoặc $k = 4$. Do đó ta có công thức $y = -4x$ hoặc $y = 4x$.

b) Với $x_3 = 3$ thì $y_3 = \pm 4 \cdot 3 = \pm 12$;

Với $x_4 = -8$ thì $y_4 = \pm 4 \cdot (-8) = \mp 32$.

Do đó $y_3^2 - y_4^2 = (\pm 12)^2 - (\mp 32)^2 = 144 - 1024 = -880$.

11.12*. Gọi quãng đường đi được của hai xe là S_M và S_N .

Có hai trường hợp xảy ra:

1) Địa điểm P nằm giữa M và N.

Do thời gian đi của hai xe bằng nhau nên quãng đường đi và vận tốc của hai xe là tỉ lệ thuận. Ta có:

$$\frac{S_M}{50} = \frac{S_N}{60} = \frac{S_M + S_N}{50 + 60} = \frac{55}{110} = 0,5$$

Vậy $S_M = 0,5 \cdot 50 = 25 (km)$; $S_N = 0,5 \cdot 60 = 30 (km)$.

2) Địa điểm P không nằm giữa M và N.

* Trường hợp N nằm giữa M và P không xảy ra vì nếu như vậy người đi từ N sẽ đến trước người đi từ M.

* Trường hợp M nằm giữa N và P. Tương tự 1) ta có:

$$\frac{S_M}{50} = \frac{S_N}{60} = \frac{S_M - S_N}{60 - 50} = \frac{55}{10} = 5,5$$

Do đó $S_M = 5,5 \cdot 50 = 275 (km)$; $S_N = 5,5 \cdot 60 = 330 (km)$.

11.13*.

a) Gọi quãng đường AB dài $a \text{ km}$ ($a > 0$).

Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB 1 giờ 30 phút = $\frac{3}{2}$ giờ thì vận tốc xe ô tô là $v_1 = a : \frac{3}{2} = \frac{2a}{3}$ (km/giờ).

Xe đạp điện đi quãng đường BA hết 3 giờ thì vận tốc xe đạp điện là: $v_2 = \frac{a}{3}$ (km/giờ).

Gọi t_1 là thời gian hai xe ô tô và xe đạp điện gặp nhau; s_1 là quãng đường ô tô đi từ A đến chỗ gặp xe đạp điện; s_2 là quãng đường xe đạp điện đi từ B đến chỗ gặp ô tô ($t_1; s_1; s_2 > 0$) ta có: $s_1 + s_2 = a$
 Trong cùng một thời gian thì quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Do đó:

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s_1 + s_2}{v_1 + v_2} = \frac{a}{\frac{2a}{3} + \frac{a}{3}} = \frac{a}{a} = 1.$$

Vậy hai xe gặp nhau lúc 8 giờ.

b) Gọi t_2 là thời gian xe ô tô khởi hành từ A đến lúc gặp xe đạp; s_3 là quãng đường ô tô đi từ A đến chỗ gặp xe đạp, vận tốc của ô tô $v_3 = v_1$; s_4 là quãng đường xe đạp đi từ A lúc 7 giờ đến chỗ gặp ô tô ($t_2; s_3; s_4 > 0$)

Vận tốc xe đạp là $v_4 = \frac{a}{6}$ km/giờ. Lúc 7 giờ xe đạp cách xe ô tô quãng đường là $\frac{a}{6}$ km. Trong cùng một thời gian thì quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

$$t_2 = \frac{s_3}{v_3} = \frac{s_4}{v_4} = \frac{s_3 - s_4}{v_3 - v_4} = \frac{\frac{a}{6}}{\frac{2a}{3} - \frac{a}{6}} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

Do đó (giờ) = 20 phút.

Ô tô và xe đạp gặp nhau lúc 7 giờ 20 phút.

✓ Chú ý: Bài toán có thể giải theo cách coi đoạn đường AB là đơn vị quy ước (=1)

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s_1 + s_2}{v_1 + v_2} = \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = 1$$

Thì (giờ) và

$$t_2 = \frac{s_3}{v_3} = \frac{s_4}{v_4} = \frac{s_3 - s_4}{v_3 - v_4} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$$

(giờ) , Bạn đọc tự giải.

11.14. Gọi v_1, v_2 là vận tốc; t_1, t_2 là thời gian đi; s_1, s_2 là quãng đường đi được của xe máy thứ nhất và xe máy thứ hai từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau.

Ta có: $v_1 = \frac{3}{4}v_2$; $t_1 = \frac{5}{4}t_2$ nên $v_1 t_1 = \frac{15}{16}v_2 t_2$ hay $s_1 = \frac{15}{16}s_2$

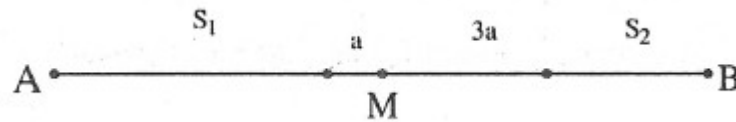
Ta có $\frac{s_1}{15} = \frac{s_2}{16} = \frac{s_1 + s_2}{15 + 16} = \frac{93}{31} = 3$

$\Rightarrow s_1 = 45(km)$ và $s_2 = 48(km)$.

11.15. Vận tốc trôi của bè chính là vận tốc dòng nước bằng $9 : 3 = 3$ (km/giờ). Gọi x km là quãng đường ca nô ngược dòng ($x > 0$). Vận tốc ca nô khi xuôi dòng là $30 + 3 = 33$ (km/h); Vận tốc ca nô khi ngược dòng là $30 - 3 = 27$ (km/h). Cùng một thời gian thì quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

$$\text{Do đó ta có } \frac{33}{27} = \frac{99}{x} \Rightarrow x = \frac{99 \cdot 27}{33} = 81 \text{ (km)}$$

11.16. Nửa quãng đường AB dài 50km; Vận tốc ô tô khách $750\text{m/phút} = 45\text{km/giờ}$. Vận tốc ô tô tải là $70 : 2 = 35$ (km/giờ).



a) Gọi quãng đường ô tô khách và ô tô tải đã đi là S_1 và S_2 và t là thời gian mỗi xe đã đi. Trong cùng một

thời gian thì quãng đường tỉ lệ thuận với vận tốc do đó: $\frac{S_1}{v_1} = \frac{S_2}{v_2} = t$

$$\text{Ta có: } t = \frac{50 - a}{45} = \frac{50 - 3a}{35} = \frac{150 - 3a}{135} = \frac{150 - 3a - 50 + 3a}{135 - 35} = 1$$

Vậy thời điểm mà ô tô tải cách M một khoảng gấp ba khoảng cách từ ô tô khách đến M là 8 giờ + 1 giờ = 9 giờ (sáng).

b) Thời gian ô tô khách đi tiếp đến B là: $(100 - 45 \cdot 1) : 45 = 1 \frac{2}{9}$ (giờ)

11.17. Gọi x là số sản phẩm tổ hai làm; y là số sản phẩm tổ ba làm ($x; y \in \mathbb{N}^*$). Tổ một có 12 người làm 9 ngày được $12 \cdot 9 = 108$ ngày công. Tổ hai có 18 người làm 8 ngày được $18 \cdot 8 = 144$ ngày công. Tổ ba có 10 người làm 4 ngày được $10 \cdot 4 = 40$ ngày công. Cùng năng suất lao động thì số sản phẩm làm được tỷ lệ thuận với số ngày công.

$$\text{Do đó: } \frac{108}{144} = \frac{540}{x} \Rightarrow x = \frac{540 \cdot 144}{108} = 720 \text{ (sản phẩm).}$$

$$\frac{108}{40} = \frac{540}{y} \Rightarrow y = \frac{540 \cdot 40}{108} = 200 \text{ (sản phẩm).}$$

11.18. Gọi bốn phần của A là $x; y; z; t$ ($x; y; z; t > 0$)

thì $A = x + y + z + t$ và $x : y : z : t = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} = 30 : 40 : 45 : 48$.

$$\text{Vậy } \frac{x}{30} = \frac{y}{40} = \frac{z}{45} = \frac{t}{48}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{900} = \frac{y^2}{1600} = \frac{z^2}{2025} = \frac{t^2}{2304} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{900 + 1600 + 2025 + 2304} = \frac{27316}{6829} = 4 = (\pm 2)^2$$

$$\Rightarrow x = 60; y = 80; z = 90; t = 96 \text{ và } A = 60 + 80 + 90 + 96 = 326.$$

11.19*. Gọi số kg đường bốn túi lúc đầu lần lượt là: $x+1; y+2; z+3; t+4$ ($x, y, z, t > 0$).

Sau khi lấy đi lần thứ nhất thì số kg đường mỗi túi còn lại lần lượt là $x; y; z; t$ và tổng số kg đường còn lại của 4 túi là $375 - (1+2+3+4) = 365$ (kg)

Sau khi lấy đi lần thứ hai thì số kg đường mỗi túi còn lại lần lượt là: $\frac{4}{5}x; \frac{3}{4}y; \frac{2}{3}z; \frac{1}{2}t$.

Ta có:

$$\frac{4x}{5} = \frac{3y}{4} = \frac{2z}{3} = \frac{t}{2} = \frac{12x}{15} = \frac{12y}{16} = \frac{12z}{18} = \frac{12t}{24} = \frac{12(x+y+z+t)}{73} = \frac{12 \cdot 365}{73} = 60$$

Suy ra $x = 75; y = 80; z = 90; t = 120$.

Số kg đường mỗi túi lúc đầu là:

+ Túi thứ nhất: $75 + 1 = 76$ (kg)

+ Túi thứ hai: $80 + 2 = 82$ (kg)

+ Túi thứ ba: $90 + 3 = 93$ (kg)

+ Túi thứ tư: $120 + 4 = 124$ (kg)

11.20.

a) Ta có: $\frac{x}{2009} = \frac{y}{2010} = \frac{z}{2011} = \frac{x-z}{-2} = \frac{x-y}{-1} = \frac{y-z}{-1}$

Với ba tỉ số bằng nhau, lập phương tỉ số thứ nhất sẽ bằng bình phương tỉ số thứ hai nhân với tỷ số thứ ba nên:

$$\left(\frac{x-z}{-2}\right)^3 = \left(\frac{x-y}{-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{y-z}{-1}\right) \Leftrightarrow \frac{(x-z)^3}{-8} = \frac{(x-y)^2(y-z)}{-1}$$

$$\Leftrightarrow (x-z)^3 = 8(x-y)^2(y-z).$$

b) $\frac{x}{26} + \frac{y}{4} = \frac{z}{2012} \Leftrightarrow \frac{2x+13y}{52} = \frac{z}{2012} \Leftrightarrow 2x+13y = \frac{52z}{2012}$ (1)

$$\frac{x}{2009} = \frac{y}{2010} = \frac{z}{2011} = \frac{2x}{2 \cdot 2009} = \frac{13y}{13 \cdot 2010} = \frac{2x+13y}{2 \cdot 2009 + 13 \cdot 2010} = \frac{z}{2011}$$
 (2)

$$\Rightarrow \frac{52z}{2012 \cdot (2 \cdot 2009 + 13 \cdot 2010)} = \frac{z}{2011} \Rightarrow z = 0.$$

Từ (1) và (2)

Ta suy ra $x = y = z = 0$.

-----////-----

Chương II. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Chuyên đề 12. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa: Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = \frac{a}{x}$ hay $xy = a$ (với a là hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a .

2. Tính chất: Nếu hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau thì:

* Tích của một giá trị bất kì của đại lượng này với giá trị tương ứng của đại lượng kia luôn là một hằng số: $x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = \dots = a$.

* Tỉ số giữa hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại

lượng kia: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}, \frac{x_1}{x_3} = \frac{y_3}{y_1}, \dots$

3. Chú ý:

* Khi đại lượng y tỉ lệ nghịch với đại lượng x thì x cũng tỉ lệ nghịch với y và ta nói hai đại lượng đó tỷ lệ nghịch với nhau.

* Nếu y tỉ lệ nghịch với x theo tỉ lệ a thì x cũng tỉ lệ nghịch với y theo tỉ lệ $\frac{1}{a}$.

* Nếu y tỉ lệ nghịch với x thì y tỉ lệ thuận với $\frac{1}{x}$.

* Nếu z tỉ lệ nghịch với y theo tỉ lệ a_1 và y tỉ lệ nghịch với x theo tỉ lệ a_2 thì z tỉ lệ thuận với x theo tỉ lệ $\frac{a_1}{a_2}$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Các giá trị tương ứng của x và y được cho trong hai bảng:

Bảng I

x	3	-4,5	5	0,75		22,5	-7,5	
y	-15	10	-9	-60	-2,5			-8

Bảng II

x	3	-0,5	-6	0,95		0,35	$-\frac{2}{5}$	
y	15	-2,5	-30	4,75	-7,5			1975

a) Xác định xem hai đại lượng y và x trong bảng nào tỉ lệ thuận? tỉ lệ nghịch? Tìm các hệ số tỉ lệ (biết các giá trị tương ứng còn lại cùng có quan hệ tỉ lệ như các giá trị đã cho trong bảng).

b) Điền tiếp các giá trị vào ô trống.

✓ *Tìm cách giải:*

- Ta tìm quan hệ tất cả các giá trị tương ứng đã cho của y và x . Nếu có $y = kx$ thì y và x tỉ lệ thuận. Nếu có $x \cdot y = a$ thì y tỉ lệ nghịch với x .

- Dựa vào các mối tương quan điền tiếp các số vào ô trống.

Giải

Tại bảng I: Ta có $3 \cdot (-15) = -4,5 \cdot 10 = 5 \cdot (-9) = -0,75 \cdot 60 = -45$.

Nên y tỉ lệ nghịch với x. Hệ số tỉ lệ -45. Công thức $x \cdot y = -45$.

Bảng I

x	3	-4,5	5	0,75	18	22,5	-7,5	5,625
y	-15	10	-9	-60	-2,5	-2	6	-8

Tại bảng II: $\frac{15}{3} = \frac{-2,5}{-0,5} = \frac{-30}{-6} = \frac{4,75}{0,95} = 5$.

Nên y tỉ lệ thuận với x. Hệ số tỉ lệ 5. Công thức $y = 5x$.

Bảng II

x	3	-0,5	-6	0,95	-1,5	0,35	$-\frac{2}{5}$	395
y	15	-2,5	-30	4,75	-7,5	1,75	-2	1975

Ví dụ 2: Cho hai đại lượng tỉ lệ nghịch x và y; x_1 và x_2 là hai giá trị của x và y_1 và y_2 là hai giá trị tương ứng của y.

Biết $y_1 = 3,5$; $y_2 = 2,5$ và $8x_2 - 5x_1 = 31$.

Tính x_1, x_2 và hệ số tỉ lệ a của hai đại lượng tỉ lệ nghịch này.

✓ *Tìm cách giải:* Ta sử dụng tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch: Tỉ số giữa hai giá trị bất kì của đại

lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$, để xuất hiện

$8x_2 - 5x_1$ ta biến đổi $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow \frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1}$ và áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau. Từ đó tìm x_1 và x_2 và hệ số tỉ lệ a.

Giải

Theo tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch, và áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow \frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1} = \frac{8y_1}{8x_2} = \frac{5y_2}{5x_1} = \frac{8y_1 - 5y_2}{8x_2 - 5x_1} = \frac{8 \cdot 3,5 - 5 \cdot 2,5}{31} = \frac{15,5}{31} = 0,5.$$

$$\text{Do đó } x_1 = y_2 : 0,5 = 2,5 : 0,5 = 5$$

$$\text{Và } x_2 = y_1 : 0,5 = 3,5 : 0,5 = 7.$$

Hệ số tỉ lệ của hai đại lượng là: $a = x_1 \cdot y_1 = 5 \cdot 3,5 = 17,5$.

✓ *Chú ý:* Ta có thể dùng định nghĩa của đại lượng tỉ lệ nghịch để giải:

Từ $xy = a$

Ta có
$$x_1 = \frac{a}{y_1}; x_2 = \frac{a}{y_2} \Rightarrow 8x_2 - 5x_1 = \frac{8a}{y_2} - \frac{5a}{y_1} = a \left(\frac{8}{y_2} - \frac{5}{y_1} \right) = a \left(\frac{8y_1 - 5y_2}{y_1 y_2} \right)$$

Thay $y_1 = 3,5; y_2 = 2,5$ và $8x_2 - 5x_1 = 31$ vào ta có:
$$31 = a \left(\frac{28 - 12,5}{3,5 \cdot 2,5} \right)$$

Hay
$$31 = a \cdot \frac{15,5}{8,75} \Rightarrow a = \frac{31 \cdot 8,75}{15,5} = 17,5$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{17,5}{3,5} = 5; x_2 = \frac{17,5}{2,5} = 7.$$

Ví dụ 3: Năm máy cày cùng loại, mỗi máy làm 8 giờ một ngày thì trong 12 ngày cày xong một cánh đồng.

a) Nếu có 10 máy cày cùng loại trên, mỗi máy làm 8 giờ một ngày thì trong mấy ngày cày xong cánh đồng trên.

b) Cần bao nhiêu máy cày, mỗi máy làm 6 giờ mỗi ngày để 5 ngày cày xong cánh đồng ấy ?

✓ *Tìm cách giải:*

a) Cùng một công việc và số giờ làm việc mỗi ngày của mỗi máy, số máy cày và số ngày là hai đại lượng tỉ lệ nghịch; hoặc cùng một công việc tổng số giờ làm 1 ngày và số ngày hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

b) Cùng một khối lượng công việc (cày xong cánh đồng) số máy cày và số giờ làm là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Ta cần tìm số giờ làm của số máy cày trong mỗi trường hợp.

Giải

a) Gọi số ngày cần tìm là z ngày ($z > 0$). Cùng một công việc và số giờ làm việc một ngày của mỗi máy, số máy cày và số ngày là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Ta có:
$$\frac{5}{10} = \frac{z}{12} \Rightarrow z = 5 \cdot 12 : 10 = 6$$
 (ngày).

* Có thể lý luận cách khác :

Một ngày 5 máy cày với tổng số giờ là $5 \cdot 8 = 40$ (giờ)

Một ngày 10 máy cày với tổng số giờ là $10 \cdot 8 = 80$ (giờ)

Cùng một công việc tổng số giờ làm 1 ngày và số ngày hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Do đó
$$\frac{40}{80} = \frac{z}{12} \Rightarrow z = 40 \cdot 12 : 80 = 6$$
 (ngày).

b) Gọi số máy cày cần tìm là t (cái).

Số giờ năm máy cày xong cánh đồng là $8 \cdot 12 = 96$ (giờ).

Số giờ x máy cày xong cánh đồng là $6 \cdot 5 = 30$ (giờ).

Trên cùng một cánh đồng số máy cày và số giờ làm là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Do đó ta có :

$$\frac{96}{30} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 96.5 : 30 = 16.$$

Vậy số máy cày cần tìm là 16 cái.

Ví dụ 4: Ba cạnh a, b, c của $\triangle ABC$ có $4a + 6b - 5c = 220\text{ cm}$. Ba đường cao tương ứng là $h_a; h_b; h_c$ tỉ lệ thuận với $3; 4; 5$. Tính chu vi của tam giác.

✓ *Tìm cách giải:* Cùng diện tích 1 tam giác thì độ dài cạnh và đường cao tương ứng tỉ lệ nghịch với nhau. Áp dụng tính chất tỉ lệ nghịch và tính chất dãy tỉ số bằng nhau để tìm độ dài các cạnh của tam giác.

Giải

Gọi diện tích của $\triangle ABC$ là S . Ta biết rằng $2S = ah_a = bh_b = ch_c$ nên trong một tam giác cạnh và đường cao tương ứng tỉ lệ nghịch với nhau.

Biết $h_a : h_b : h_c = 3 : 4 : 5$ nên $a : b : c = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = 20 : 15 : 12.$

Tức là $\frac{a}{20} = \frac{b}{15} = \frac{c}{12} = \frac{4a}{80} = \frac{6b}{90} = \frac{5c}{60} = \frac{4a + 6b - 5c}{80 + 90 - 60} = \frac{220}{110} = 2.$

Vậy chu vi tam giác là $20.2 + 15.2 + 12.2 = 94(\text{ cm})$.

Ví dụ 5: Một ô tô dự định chạy từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 40km/h thì đến B muộn hơn so với dự định là 30 phút. Nếu xe chạy với vận tốc 60km/h thì đến B sớm hơn so với dự định là 45 phút. Tính thời gian dự định đi và quãng đường AB.

✓ *Tìm cách giải:* Cùng một quãng đường thì vận tốc và thời gian đi tương ứng tỉ lệ nghịch với nhau. Áp dụng tính chất tỉ lệ nghịch và tính chất dãy tỉ số bằng nhau để tìm độ dài quãng đường và thời gian dự định.

Giải

Ta có 45 phút = 0,75 giờ; 30 phút = 0,5 giờ.

Gọi thời gian dự định là t (giờ); ($t > 0$) ; Thời gian xe chạy quãng đường AB với vận tốc 40km/h là $t_1 = (t + 0,5)$ (giờ). Thời gian xe chạy quãng đường AB với vận tốc 60km/h là $t_2 = (t - 0,75)$. Cùng một quãng đường thì vận tốc và thời gian đi tương ứng tỉ lệ nghịch với nhau. Do đó theo tính chất của tương quan tỉ lệ nghịch, ta có:

$$\frac{40}{60} = \frac{t_2}{t_1} \Rightarrow \frac{t_1}{60} = \frac{t_2}{40} = \frac{t_1 - t_2}{60 - 40} = \frac{t + 0,5 - t + 0,75}{20} = \frac{1,25}{20} = \frac{1}{16}.$$

$$\frac{t_1}{60} = \frac{1}{16} \Rightarrow t_1 = 3,75 \text{ (giờ)}.$$

Thời gian dự định là: $3,75 - 0,5 = 3,25$ (giờ) = 3 giờ 15 phút.

Quãng đường AB dài là: $3,75.40 = 150(\text{km})$.

Ví dụ 6: Bốn người mua cùng một số mét vuông vải để may quần áo lần lượt theo bốn loại khổ rộng 1,5m; 1,2m; 1,0m; 0,8m. Tổng số vải bốn người đã mua là 22,5m. Tính số mét vải và diện tích vải mỗi người đã mua.

✓ *Tìm cách giải:* Cùng một diện tích, số mét vải tỉ lệ nghịch với khổ rộng của nó. Từ định nghĩa và sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có cách giải:

Giải

Cùng một diện tích, số m vải tỉ lệ nghịch với khổ rộng của nó. Gọi số mét vải mỗi người mua lần lượt là x, y, z, t ($x, y, z, t > 0$) ta có:

$$1,5x = 1,2 = z = 0,8t \quad \text{hay} \quad 15x = 12y = 10z = 8t$$

$$\Rightarrow \frac{15x}{120} = \frac{12y}{120} = \frac{10z}{120} = \frac{8t}{120} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{10} = \frac{z}{12} = \frac{t}{15} = \frac{x+y+z+t}{8+10+12+15} = \frac{22,5}{45} = 0,5$$

Vậy: $x = 8.0,5 = 4(m); y = 10.0,5 = 5(m);$

$$z = 12.0,5 = 6(m); t = 15.0,5 = 7,5(m)$$

Diện tích vải mỗi người mua là: $4.1,5 = 6m^2$.

Ví dụ 7*: Tại một bến xe có 610 xe ô tô chở khách gồm 4 loại: Xe chở 50 khách; xe chở 45 khách; xe chở

30 khách và xe chở 25 khách. Biết rằng $\frac{2}{3}$ số xe chở khách 50 khách bằng $\frac{3}{4}$ xe chở 45 khách, bằng $\frac{4}{5}$ số xe chở 30 khách và bằng $\frac{5}{6}$ xe chở 25 khách. Hỏi bến xe có bao nhiêu xe mỗi loại

✓ *Tìm cách giải:* Đây là bài toán chia số 610 thành bốn phần tỉ lệ nghịch với $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}$ tức là tỉ lệ thuận với $\frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{6}{5}$.

Giải

Gọi số xe các loại chở 50 khách; chở 45 khách; chở 30 khách và chở 25 khách lần lượt là $x; y; z; t$ ($x; y; z; t \in N$) ta có:

$$x + y + z + t = 610 \quad \text{và} \quad \frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5} = \frac{5t}{6}$$

$$\Rightarrow x : y : z : t = \frac{3}{2} : \frac{4}{3} : \frac{5}{4} : \frac{6}{5} = 90 : 80 : 75 : 60$$

Hay $\frac{x}{90} = \frac{y}{80} = \frac{z}{75} = \frac{t}{60} = \frac{x+y+z+t}{90+80+75+60} = \frac{610}{305} = 2$

Suy ra $x = 180; y = 160; z = 150; t = 120$.

Ví dụ 8*: Một bộ máy truyền chuyển động có ba bánh xe răng được khớp vào nhau: bánh xe thứ nhất khớp với bánh xe thứ hai; bánh xe thứ hai khớp với bánh xe thứ ba.

a) Nếu bánh xe thứ nhất có 90 răng và quay 36 vòng/phút thì bánh xe thứ hai có 72 răng sẽ quay được bao nhiêu vòng/phút?

b) Muốn bánh xe thứ ba quay 180 vòng/phút thì bánh xe thứ ba cần thiết kế có bao nhiêu răng?

✓ *Tìm cách giải:* Do hai bánh xe khớp vào nhau trong quá trình chuyển động nên số răng và số vòng quay của bánh xe là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Giải

Ta có hai bánh xe khớp vào nhau trong quá trình chuyển động nên số răng và số vòng quay của bánh xe là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Vì thế:

a) Gọi số vòng quay của bánh xe thứ hai là x ($x > 0$) thì $\frac{90}{72} = \frac{x}{36}$

Suy ra $x = 90.36 : 72 = 45$ (vòng).

b) Gọi số răng của bánh xe thứ ba là y ($y \in \mathbb{N}$) thì $\frac{45}{180} = \frac{y}{72}$

Suy ra $y = 45.72 : 180 = 18$ (răng).

Ví dụ 9*: Để làm xong một công việc 48 công nhân cần làm trong 30 ngày (năng suất lao động mỗi người như nhau). Nếu số công nhân tăng thêm 25% và năng suất lao động mỗi người đều tăng thêm 20% thì cần làm bao lâu để xong công việc đó?

✓ *Tìm cách giải:* Thực chất bài toán trên được chia thành hai bài toán nhỏ:

Bài toán 1: Trước hết giữ nguyên năng suất lao động cũ. Cùng một công việc, cùng năng suất lao động thì số công nhân tỉ lệ nghịch với số ngày làm. Ta tìm được số ngày làm của số công nhân mới theo năng suất cũ.

Bài toán 2: Giữ nguyên số công nhân mới. Cùng một công việc, cùng số công nhân thì số ngày làm tỉ lệ nghịch với năng suất lao động. Ta tìm được số ngày cần tìm.

Giải

Số công nhân sau khi tăng có $48 + 48.25\% = 48 + 12 = 60$ (người)

Giữ nguyên năng suất lao động cũ. Cùng một công việc, cùng năng suất lao động thì số công nhân tỉ lệ nghịch với số ngày làm. Gọi số ngày làm của số 60 công nhân theo năng suất cũ là x ta có:

$$\frac{60}{48} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = 48.30 : 60 = 24 \quad (\text{ngày}).$$

Năng suất lao động mới là: $100\% + 20\% = 120\%$.

Cùng một công việc, cùng số công nhân thì số ngày làm tỉ lệ nghịch với năng suất lao động. Gọi số ngày

$$60 \text{ công nhân làm theo năng suất mới là } y \text{ thì ta có } \frac{100\%}{120\%} = \frac{y}{24} \Rightarrow y = 100.24 : 120 = 20 \quad (\text{ngày}).$$

C. Bài tập vận dụng

12.1. Cho biết hai đại lượng x và y tỷ lệ nghịch với nhau. Tìm công thức liên hệ giữa y và x . Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau;

x	-40		-8	-0,5		16		6,4
y		4		-160	20		-3,2	

12.2. Cho hai đại lượng tỉ lệ nghịch z và t ; z_1 và z_2 là hai giá trị của z , t_1 và t_2 là hai giá trị tương ứng của t .

Biết $z_2 = 8$; $2z_1 - 3t_2 = 10$ và $t_1 = 4$. Tính z_1, t_2 .

12.3. Tìm hai số dương biết tổng, hiệu, tích của chúng tỉ lệ nghịch với 50; 125 và 25.

12.4. Một số dương M được chia làm bốn phần đều là các số dương tỷ lệ nghịch với $2; 3; 4; 5$. Biết hiệu giữa tổng các bình phương của phần thứ nhất và phần thứ hai với tổng các bình phương của phần thứ ba và thứ tư là 3724. Tìm số M .

12.5.

a) Tìm ba số a, b, c tỷ lệ nghịch với $2; 3; 5$. Biết $a^3 - 2b^3 - 3c^3 = -5816$;

b) Cho ba số a, b, c tỷ lệ nghịch với $\frac{1}{2017}; \frac{1}{2018}; \frac{1}{2019}$.

$$A = \frac{2020(a-b)(b-c)}{(c-a)^2}$$

Tính giá trị biểu thức

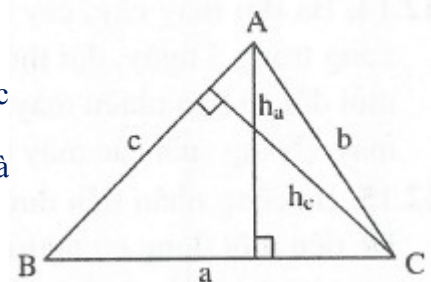
12.6.

Một tam giác ABC có chu vi 105cm. Các đường cao trong tam giác

ABC ứng với cạnh là $BC = a$ là $h_a = 28cm$ ứng với cạnh $AB = c$ là

$h_c = 32cm$. Biết $\frac{a+c}{b} = \frac{5}{2}$ với $AC = b$.

Tính độ dài mỗi cạnh của tam giác nói trên.



12.7. Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành một lúc từ A đến B. Vận tốc của ô tô là 60km/h. Vận tốc của xe máy là 45km/h. Ô tô đến B trước xe máy là 30 phút. Tính quãng đường AB.

12.8. Một ô tô chạy trên đoạn đường AB gồm bốn chặng đường dài bằng nhau với tốc độ lần lượt là 50km/h; 40km/h; 60km/h và 30km/h. Biết tổng thời gian đi cả bốn chặng là 19 giờ. Tính quãng đường AB.

12.9. Hai ô tô cùng khởi hành từ A đến B. Biết tỷ số vận tốc ô tô thứ hai và ô tô thứ nhất là 3: 5. Ô tô thứ nhất đến B sớm hơn 1 giờ 30 phút so với ô tô thứ hai. Tính thời gian mỗi xe đi từ A đến B.

12.10*. Trên đoạn đường AB lúc 7 giờ sáng một xe tải đi từ A với vận tốc 45km/h đến B lúc 11 giờ. Cùng lúc 7 giờ một ô tô khởi hành từ A đi đến B và một xe máy khởi hành từ B đi đến A. Ô tô và xe máy gặp nhau tại C trên AB. Tính độ dài đoạn AC. Biết rằng thời gian xe ô tô đi hết quãng đường AB và thời gian xe máy đi hết đoạn đường BA tỉ lệ thuận với 3 và 5.

12.11. Một động tử (vật chuyển động) chạy trên 3 cạnh của một tam giác đều (có ba cạnh bằng nhau) với vận tốc lần lượt là 6m/s; 5m/s; 4m/s. Tính chu vi tam giác biết tổng số thời gian động tử chuyển động trên ba cạnh là 111 giây.

12.12. Để làm xong một công việc 42 công nhân dự định làm trong 14 ngày (năng suất lao động mỗi người như nhau). Khi tiến hành công việc $\frac{1}{3}$ số công nhân được điều đi làm việc khác. Số công nhân còn lại năng suất lao động mỗi người đều tăng thêm 50%. Hỏi đội công nhân có hoàn thành đúng thời gian dự định?

12.13. Ba đội công nhân đào ba con mương như nhau với năng suất lao động mỗi người như nhau. Đội I hoàn thành trong 5 ngày; đội II hoàn thành trong 6 ngày; đội III hoàn thành trong 8 ngày. Số người của đội I nhiều hơn số người của đội III là 18 người. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu người?

12.14. Ba đội máy cày, cày ba cánh đồng cùng diện tích. Đội thứ nhất cày xong trong 3 ngày, đội thứ hai trong 5 ngày, đội thứ ba trong 6 ngày; Hỏi mỗi đội có bao nhiêu máy, biết rằng đội thứ hai có nhiều hơn đội thứ ba 1 máy. (Năng suất các máy như nhau).

12.15. Ba công nhân tiện được tất cả 860 dụng cụ trong cùng một thời gian. Để tiện một dụng cụ người thứ nhất cần 5 phút, người thứ hai cần 6 phút, người thứ ba cần 9 phút. Tính số dụng cụ mỗi người tiện được?

*(Đề khảo sát chất lượng học sinh giỏi lớp 7 huyện Thường Tín Hà Nội,
năm học 2009 – 2010)*

12.16. Ba đội máy san đất làm ba khối lượng công việc như nhau. Đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội thứ hai trong 6 ngày. Hỏi đội thứ ba hoàn thành trong mấy ngày, biết rằng tổng số máy của đội một và đội hai gấp 10 lần số máy đội ba (giả thiết năng suất của các máy như nhau)?

*(Đề khảo sát chất lượng học sinh giỏi lớp 7 huyện Thường Tín Hà Nội,
năm học 2011 – 2012)*

12.17.

a) Tìm ba số a, b, c biết rằng $\frac{a}{12} = \frac{b}{9} = \frac{c}{5}$ và $abc = 20$;

b) Tìm ba số có tổng 420, biết rằng $\frac{6}{7}$ số thứ nhất bằng $\frac{9}{11}$ số thứ hai bằng $\frac{2}{3}$ số thứ ba.

*(Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán lớp 7, quận 9, TP Hồ Chí Minh,
năm học 2014 - 2015)*

12.18. Tìm x, y, z biết rằng x và y tỉ lệ nghịch với 3 và 2; y và z tỉ lệ nghịch với 4 và 5 và $3x^2 - y^2 + z^2 = 1971$.

*Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, quận 9, TP Hồ Chí Minh,
năm học 2015 – 2016)*

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

12.1. Công thức $x \cdot y = 80$ hay $y = \frac{80}{x}$

x	-40	20	-8	-0,5	4	16	-25	6,4
y	-2	4	-10	-160	20	5	-3,2	12,5

12.2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2z_1}{2z_2} = \frac{3t_2}{3t_1} = \frac{2z_1 - 3t_2}{2z_2 - 3t_1} \Rightarrow \frac{z_1}{8} = \frac{10}{16 - 12} \Rightarrow z_1 = \frac{10 \cdot 8}{4} = 20$.

Và từ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{t_2}{t_1} \Rightarrow t_2 = \frac{z_1 t_1}{z_2} = \frac{20 \cdot 4}{8} = 10$.

12.3. Gọi hai số phải tìm là $x; y (x > 0; y > 0)$. Tổng, hiệu, tích của chúng tỉ lệ nghịch với 50; 125 và 25

nghĩa là tỉ lệ thuận với $\frac{1}{50}; \frac{1}{125}; \frac{1}{25}$.

$(x + y) : (x - y) : xy = \frac{1}{50} : \frac{1}{125} : \frac{1}{25} = 5 : 2 : 10$. Hay $\frac{x + y}{5} = \frac{x - y}{2} = \frac{xy}{10}$

Từ $\frac{x + y}{5} = \frac{x - y}{2} = \frac{x + y + x - y}{5 + 2} = \frac{2x}{7}$

Và $\frac{x + y}{5} = \frac{x - y}{2} = \frac{x + y - x + y}{5 - 2} = \frac{2y}{3}$

Ta có $\frac{2xy}{20} = \frac{2x}{7} = \frac{2y}{3} = \frac{2xy}{7y} = \frac{2xy}{3x}$.

Suy ra $7y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{7}$ và $3x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{3}$.

12.4. Gọi bốn phần của M là $x; y; z; t (x; y; z; t > 0)$

Ta có: $x : y : z : t = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = 30 : 20 : 15 : 12$

Hay $\frac{x}{30} = \frac{y}{20} = \frac{z}{15} = \frac{t}{12} = k$

$\Rightarrow k^2 = \frac{x^2}{900} = \frac{y^2}{400} = \frac{z^2}{225} = \frac{t^2}{144} = \frac{x^2 + y^2 - z^2 - t^2}{900 + 400 - 225 - 144} = \frac{3724}{931} = 4 = (\pm 2)^2$

Do các phần đều dương nên $k = 2$

$\Rightarrow x = 60; y = 40; z = 30; t = 24$ và $M = 154$.

12.5.

a) $a : b : c = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{5} = 15 : 10 : 6$.

$$\text{Hay } \frac{a}{15} = \frac{b}{10} = \frac{c}{6} = k$$

$$\Rightarrow k^3 = \frac{a^3}{3375} = \frac{2b^3}{2000} = \frac{3c^3}{648} = \frac{a^3 - 2b^3 - 3c^3}{3375 - 2000 - 648} = \frac{-5816}{727} = -8 = (-2)^3$$

$$\text{Vậy } k = -2 \Rightarrow a = -30; b = -20; c = -12.$$

$$\text{b) Ta có } \frac{a}{2017} = \frac{b}{2018} = \frac{c}{2019} = k$$

$$\Rightarrow a = 2017k; b = 2018k; c = 2019k.$$

$$A = \frac{2020(2017k - 2018k)(2018k - 2019k)}{(2019k - 2017k)^2} = \frac{2020(-k)(-k)}{(2k)^2} = 505.$$

Do đó

$$\text{12.6. Do đó } \frac{a+c}{b} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{a+c+b}{b} = \frac{5+2}{2}$$

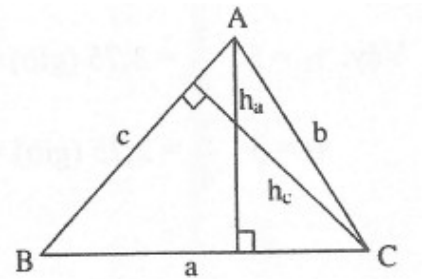
$$\Rightarrow \frac{105}{b} = \frac{7}{2} \Rightarrow b = \frac{105 \times 2}{7} = 30(\text{cm})$$

$$\text{và } a+c = 105 - 30 = 75\text{cm}.$$

Cùng một diện tích, thì cạnh đáy tỉ lệ nghịch với chiều cao tương ứng

$$\text{Do đó ta có: } \frac{a}{c} = \frac{h_c}{h_a} \Rightarrow \frac{a}{32} = \frac{c}{28} = \frac{a+c}{32+28} = \frac{75}{60} = \frac{5}{4}.$$

$$\text{Vậy } BC = a = 32 \cdot \frac{5}{4} = 40(\text{cm}); AB = c = 28 \cdot \frac{5}{4} = 35(\text{cm}).$$



12.7. Ta có 30 phút = 0,5 giờ. Cùng một quãng đường AB thì vận tốc và thời gian đi tương ứng tỉ lệ nghịch với nhau. Gọi t_1 là thời gian xe ô tô đi hết quãng đường AB, t_2 là thời gian xe máy đi hết quãng đường AB,

$$\text{Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ nghịch ta có: } \frac{60}{45} = \frac{t_2}{t_1}$$

$$\Rightarrow \frac{t_2}{60} = \frac{t_1}{45} = \frac{t_2 - t_1}{60 - 45} = \frac{0,5}{15} = \frac{1}{30}. \text{ Ta có: } \frac{t_2}{60} = \frac{1}{30} \Rightarrow t_2 = 2 \text{ (giờ).}$$

Quãng đường AB dài là: $2.45 = 90(\text{km})$.

12.8. Với quãng đường như nhau thì vận tốc tỉ lệ nghịch với thời gian. Gọi thời gian đi trên bốn đoạn đường lần lượt là $x; y; z; t$ (giờ) ($x; y; z; t > 0$).

$$\text{Ta có: } 50x = 40y = 60z = 30t = s \Rightarrow \frac{50x}{600} = \frac{40y}{600} = \frac{60z}{600} = \frac{30t}{600}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{10} = \frac{t}{20} = \frac{x+y+z+t}{57} = \frac{19}{57} = \frac{1}{3}.$$

$$x = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4 \quad (\text{giờ}). \text{ Mỗi chặng dài } 4.50 = 200(km).$$

$$\text{Quãng đường AB dài } 4.200 = 800(km).$$

12.9. Gọi v_1 là vận tốc ô tô thứ nhất, v_2 là vận tốc ô tô thứ hai ($v_1; v_2 > 0$) ta có $\frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{5}$. Cùng quãng đường thì vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Gọi t_1 là thời gian ô tô thứ nhất đi hết quãng đường AB; t_2 là thời gian ô tô thứ hai đi hết quãng đường AB ($t_1; t_2 > 0$) ta có:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{t_2}{5} = \frac{t_1}{3} = \frac{t_2 - t_1}{5 - 3} = \frac{1,5}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy: } t_2 = 5 \cdot \frac{3}{4} = 3,75 \quad (\text{giờ}) = 3 \text{ giờ } 45 \text{ phút;}$$

$$t_1 = 3 \cdot \frac{3}{4} = 2,25 \quad (\text{giờ}) = 2 \text{ giờ } 15 \text{ phút.}$$

12.10*. Quãng đường AB dài: $45 \cdot (11 - 7) = 180km$. Gọi $s_1 = AC, s_2 = BC$; và v_1 km/h là vận tốc của xe ô tô; v_2 km/h là vận tốc của xe máy ($s_1; s_2; v_1; v_2 > 0$).

Cùng một quãng đường thì thời gian và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Do thời gian xe ô tô đi hết quãng đường AB và thời gian xe máy đi hết đoạn đường BA tỉ lệ thuận với 3 và 5 nên $\frac{v_1}{v_2} = \frac{5}{3}$. Từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau hai xe đi trong cùng một thời gian nên quãng đường đi được và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

$$\text{Do đó } \frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{5}{3} \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{s_1}{5} = \frac{s_2}{3} = \frac{s_1 + s_2}{5 + 3} = \frac{140}{8} = 22,5$$

$$\Rightarrow s_1 = 5 \cdot 22,5 = 112,5(km)$$

12.11. Ba cạnh tam giác bằng nhau. Cùng đoạn đường vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Gọi thời gian động tử trên 3 cạnh lần lượt là $t_1; t_2; t_3$ (giây); ($t_1; t_2; t_3 > 0$).

$$\text{Ta có: } t_1 : t_2 : t_3 = \frac{1}{6} : \frac{1}{5} : \frac{1}{4} = 10 : 12 : 15$$

$$\text{Hay } \frac{t_1}{10} = \frac{t_2}{12} = \frac{t_3}{15} = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{10 + 12 + 15} = \frac{111}{37} = 3$$

$$\text{Ta có } t_1 = 30 \text{ giây và cạnh tam giác dài là } 30 \cdot 6 = 180(m).$$

$$\text{Chu vi tam giác là: } 180 \cdot 3 = 540(m).$$

12.12. Số người còn lại làm công việc là $42 - 42 : 3 = 28$ (công nhân). Năng suất lao động mới là: $100\% + 50\% = 150\%$

Giữ nguyên năng suất lao động cũ. Cùng một công việc, cùng năng suất lao động thì số công nhân tỉ lệ nghịch với số ngày làm. Gọi số ngày làm của số 28 công nhân theo năng suất cũ là x ($x > 0$) ta có:

$$\frac{28}{42} = \frac{14}{x} \Rightarrow x = 42 \cdot 14 : 28 = 21 \quad (\text{ngày})$$

Cùng một công việc, cùng số công nhân thì số ngày làm tỉ lệ nghịch với năng suất lao động. Gọi số ngày 28 công nhân làm theo năng suất mới là y ($y > 0$)

$$\text{Thì ta có: } \frac{100\%}{150\%} = \frac{y}{21} \Rightarrow y = 100 \cdot 21 : 150 = 14 \quad (\text{ngày}).$$

Đáp số: Đúng dự định 14 ngày.

12.13. Cùng khối lượng công việc (ba con mương như nhau), năng suất lao động mỗi người như nhau thì số người làm và thời gian hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Gọi x, y, z là số công nhân

của mỗi đội ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$). Ta có: $x : y : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{6} : \frac{1}{8} = 24 : 20 : 15$

$$\frac{x}{24} = \frac{y}{20} = \frac{z}{15} = \frac{x-y}{24-15} = \frac{18}{9} = 2.$$

Vậy $x = 48$ (người); $y = 40$ (người); $z = 30$ (người).

12.14. Gọi số máy của ba đội theo thứ tự là x, y, z ; ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$). Vì cùng diện tích cày, số máy và số

ngày cày xong cánh đồng là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên $x : y : z = \frac{1}{3} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} = 10 : 6 : 5$

$$\Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = \frac{y-z}{6-5} = 1$$

$$\Rightarrow x = 10 \text{ (máy); } y = 6 \text{ (máy); } z = 5 \text{ (máy).}$$

12.15. Gọi số dụng cụ của ba công nhân tiện được theo thứ tự là x, y, z ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$).

Vì cùng thời gian số dụng cụ tiện được của mỗi người và thời gian tiện xong một dụng cụ là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên

$$x : y : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{6} : \frac{1}{9} = 18 : 15 : 10$$

$$\Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{y}{15} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{18+15+10} = \frac{860}{43} = 20$$

$$\Rightarrow x = 360 \text{ (dụng cụ); } y = 300 \text{ (dụng cụ); } z = 200 \text{ (dụng cụ).}$$

12.16. Gọi số máy của ba đội theo thứ tự là x, y, z và t là số ngày đội thứ ba cần dùng để hoàn thành công việc ($x, y, z \in \mathbb{N}^*; t > 0$).

Vì cùng công việc số máy và số ngày là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên

$$x : y : z = \frac{1}{4} : \frac{1}{6} : \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{t}} = \frac{x+y}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{10z}{\frac{5}{12}} = 24z$$

$$\Rightarrow zt = 24z \Rightarrow t = 24 \text{ (ngày)}.$$

12.17.

a) Đặt $\frac{a}{12} = \frac{b}{9} = \frac{c}{5} = k \Rightarrow k^3 = \frac{a.b.c}{12.9.5} = \frac{20}{540} = \frac{1}{27} \Rightarrow k = \frac{1}{3}.$

Từ đó tìm được $a = 4; b = 3; c = \frac{5}{3}.$

b) Gọi x, y, z là ba số cần tìm thì $x + y + z = 420.$

$$\frac{6}{7}x = \frac{9}{11}y = \frac{2}{3}z = \frac{x}{\frac{7}{6}} = \frac{y}{\frac{11}{9}} = \frac{z}{\frac{3}{2}} = \frac{x+y+z}{\frac{7}{6} + \frac{11}{9} + \frac{3}{2}} = 108$$

Ta có

$$\Rightarrow x = 126; y = 132; z = 162.$$

12.18. Ta có: $3x = 2y$ và $4y = 5z \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} = k$

$$\Rightarrow x = 10k; y = 15k; z = 12k. \text{ Thay vào } 3x^2 - y^2 + z^2 = 1971$$

$$\Rightarrow 300k^2 - 225k^2 + 144k^2 = 1971 \Rightarrow k^2 = 9 \text{ vậy } k = \pm 3.$$

+ Với $k = 3 \Rightarrow x = 30; y = 45; z = 36.$

+ Với $k = -3 \Rightarrow x = -30; y = -45; z = -36.$

Chương II. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Chuyên đề 13. HÀM SỐ - ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x gọi là biến số.

2. Khi y là hàm số của x ta có thể viết $y = f(x), y = g(x) \dots$

Tập xác định của hàm số là tập hợp tất cả các giá trị của biến số.

Hàm số có thể được cho bằng bảng, bằng công thức, bằng sơ đồ mũi tên, bằng đồ thị.

Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị thì y được gọi là hàm hằng.

3. Mặt phẳng tọa độ Oxy được xác định bởi hai trục số vuông góc với nhau: trục hoành Ox và trục tung Oy; giao điểm hai trục O là gốc tọa độ.

Trên mặt phẳng tọa độ, mỗi điểm M xác định một cặp số $(x_0; y_0)$; ngược lại mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ xác định một điểm M. Cặp số $(x_0; y_0)$ gọi là tọa độ của điểm M; x_0 là hoành độ, y_0 là tung độ của điểm M. Ta viết $M(x_0; y_0)$.

4. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ.

5. Đồ thị của hàm số $y = ax (a \neq 0)$ là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

6. Đồ thị hàm số $y = \frac{a}{x} (a \neq 0)$ là hai nhánh (hai đường cong), một nhánh nằm ở góc phần tư thứ I và một nhánh nằm ở góc phần tư thứ III khi $a > 0$ và một nhánh nằm ở góc phần tư thứ II và một nhánh nằm ở góc phần tư thứ IV khi $a < 0$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho các cặp số $(x; y)$ sau:

$$(-2; -3); (-1,5; -4); (1,2; 5); \left(\frac{5}{7}; 8\frac{2}{5}\right); \left(18; \frac{1}{3}\right); (-3; -2)$$

a) Lập bảng giá trị các cặp số.

b) Vẽ sơ đồ mũi tên.

c) Giải thích tại sao bảng vừa lập xác định y là một hàm số của x?

d) Hàm số đó có thể được cho bởi công thức nào?

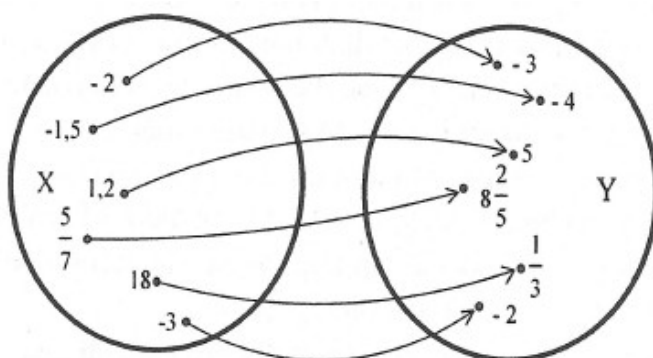
✓ *Tìm cách giải:* Ta cần kiểm tra xem mỗi giá trị của đại lượng x có được tương ứng với một và chỉ một giá trị của đại lượng y. Từ quan hệ của x và y viết công thức của hàm số.

Giải

a) Bảng giá trị các cặp số:

x	-2	-1,5	1,2	$\frac{5}{7}$	18	-3
y	-3	-4	5	$8\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	-2

b) Sơ đồ mũi tên:



c) Trong bảng trên ta thấy mỗi giá trị của x đều được tương ứng với một và chỉ một giá trị của y là hàm số của x (việc lập bảng và sơ đồ mũi tên cũng đã chứng tỏ điều ấy).

d) Hàm số có thể được cho bởi công thức $y = \frac{6}{x}$ với

$$x \in \left\{-2; -1,5; 1,2; \frac{5}{7}; 18; -3\right\}$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi công thức $f(x) = -5x^2 + 6$

a) Tính $f(3); f(-3); f\left(-\frac{1}{3}\right);$

b) Tìm x để $f(x) = -74; f(x) = 1;$

c) Chứng tỏ với $x \in R$ thì $f(x) = f(-x)$.

✓ *Tìm cách giải:* Để tính $f(a)$ ta thay $x = a$ vào công thức, từ đó tìm được giá trị. Để tìm x biết $f(x) = m$ ta thay $y = m$ và từ đó tìm được x . Ta thay vai trò của x là $-x$ và so sánh kết quả để kết luận.

Giải

a) $f(3) = -5 \cdot 3^2 + 6 = -39; f(-3) = -5 \cdot (-3)^2 + 6 = -39$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 6 = -\frac{5}{9} + 6 = 5\frac{4}{9}.$$

b) $f(x) = -74$ nghĩa là $-5x^2 + 6 = -74 \Leftrightarrow 5x^2 = 80 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4.$

$f(x) = 1$ nghĩa là $-5x^2 + 6 = 1 \Leftrightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

c) Với $(-x)$ thì $f(-x) = -5 \cdot (-x)^2 + 6 = -5x^2 + 6 = f(x)$.

Ví dụ 3: Một hàm số được xác định như sau:

$$y = \begin{cases} x - 5 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x - 5 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

a) Đặt $y = f(x)$. Tính $f(5); f(-8); f(0);$

b) Hãy viết gọn công thức trên.

✓ *Tìm cách giải:*

a) Thay $x = 5; x = -8$ và $x = 0$ vào $f(x)$ để ý rằng $5 > 0; -8 < 0$.

b) Lưu ý định nghĩa về giá trị tuyệt đối $|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$.

Giải

a) $f(5) = 5 - 5 = 0$ (vì $5 > 0$)

$$f(-8) = -(-8) - 5 = 3 \quad (\text{vì } -8 < 0)$$

$$f(0) = 0 - 5 = -5$$

b) Công thức trên được viết gọn là $y = f(x) = |x| - 5$ vì theo định nghĩa $|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$.

Ví dụ 4: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = -5x + 3;$

b) $y = \frac{2}{4x-9} + \frac{x}{x+1};$

c) $y = \frac{-5}{4x^2-9};$

d) $y = \frac{2x}{|x|-9};$

e) $y = \frac{2}{|3x-12|} + \frac{x}{x+5};$

f) $y = \frac{-3x}{x^2+2}.$

✓ *Tìm cách giải:* Để tìm tập xác định của các hàm số được cho bằng công thức, ta chỉ cần tìm tất cả các giá trị của biến làm cho công thức có nghĩa.

Giải

a) Tập xác định của hàm số $y = -5x + 3$ là $\mathbb{R}$;

b) $\frac{2}{4x-9} + \frac{x}{x+1}$ không có nghĩa khi $4x-9=0$ và $x+1=0$ tức là $x = \frac{9}{4}$ và $x = -1$. Vậy tập xác định

của hàm số $y = \frac{2}{4x-9} + \frac{x}{x+1}$ là tập hợp số thực khác $\frac{9}{4}$ và khác -1 : $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{9}{4}; x \neq -1\right\}$

c) $\frac{-5}{4x^2-9}$ không có nghĩa khi $4x^2-9=0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}$. Vậy tập xác định của hàm số $y = \frac{-5}{4x^2-9}$ là tập

hợp số thực khác $\frac{3}{2}$ và khác $-\frac{3}{2}$: $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm \frac{3}{2}\right\}$

d) $\frac{2x}{|x|-9}$ không có nghĩa khi $|x|-9=0 \Leftrightarrow |x|=9 \Leftrightarrow x = \pm 9$. Vậy tập xác định của hàm số $y = \frac{2x}{|x|-9}$ là

tập hợp số thực khác 9 và khác -9 : $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 9\right\}$

e) $\frac{2}{|3x-12|} + \frac{x}{x+5}$ không có nghĩa khi $|3x-12|=0 \Leftrightarrow x=4$ và $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$. Vậy tập xác định

của hàm số $y = \frac{2}{|3x-12|} + \frac{x}{x+5}$ là tập hợp số thực khác 4 và khác -5 : $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4; x \neq -5\right\}$

f) $x^2+2 \neq 0$ với mọi x nên tập xác định của hàm số $y = \frac{-3x}{x^2+2}$ là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x) = (m^3 - 2)x + 2m^3 - 5$. Tìm m nếu $f(3) = -51$.

✓ *Tìm cách giải:* Thay $x = 3$ vào được

$$f(x) = (m^3 - 2).3 + 2m^3 - 5 = -51. \text{ Giải ra tìm được } m.$$

Giải

Ta có $f(3) = (m^3 - 2).3 + 2m^3 - 5 = 51 \Leftrightarrow 5m^3 - 6 - 5 = -51$

$$\Leftrightarrow 5m^3 = -40 \Leftrightarrow m^3 = -8 \Leftrightarrow m = -2.$$

Ví dụ 6: Cho các điểm $A(0; 6); B(5; 6); C(5; 0); D(2; 2); M(-4; 0); N(0; 2)$. Tìm diện tích hình tam giác AMN và hình tứ giác ABCD.

✓ *Tìm cách giải:* Biểu diễn các điểm A, B, C, D, M, N trên mặt phẳng tọa độ rồi lại được $\triangle AMN$ và tứ giác ABCD.

Mỗi đơn vị trên trục tọa độ là một đơn vị độ dài. Tam giác AMN có độ dài đáy AN là 8 (đvdd), chiều cao MO là 4 (đvdd).

Ta có ABCO là hình chữ nhật. Để tính được diện tích tứ giác ABCD từ D ta hạ các đường vuông góc DK và DH xuống hai trục tọa độ Ox và Oy tạo thành hình vuông OHDK và các tam giác vuông AHD và DKC.

Giải

Ta có tam giác AMN có độ dài đáy AN là 8 (đvdd), chiều cao MO là 4 (đvdd). Nên:

$$S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} AN \cdot MO = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16 \quad (\text{đvdt})$$

Từ D ta hạ các đường vuông góc DK và DH xuống hai trục tọa độ Ox và Oy.

Ta có: $OA = 6$ (đvdd)

$OC = 5$ (đvdd); $HA = 4$ (đvdd); $CK = 3$ (đvdd)

$HD = DK = OK = OH = 2$ (đvdd).

Ta có: $S_{ABCD} = S_{AOCB} - (S_{\triangle AHD} + S_{\triangle DKC} + S_{\triangle OHDK})$

$$S_{ABCD} = AO \cdot OC - \frac{1}{2} AH \cdot HD - \frac{1}{2} DK \cdot KC - OH \cdot OK$$

$$= 6 \cdot 5 - 0,5 \cdot 4 \cdot 2 - 0,5 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 19 \quad (\text{đvdt}).$$

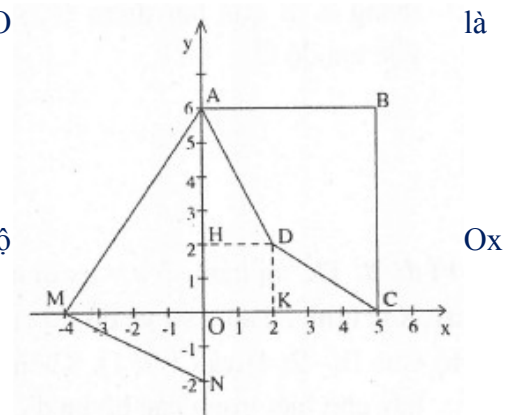
✓ *Chú ý:* Ta có thể tìm S_{ABCD} bằng cách khác: Nối O với D ta có: $S_{ABCD} = S_{AOCB} - (S_{\triangle AOD} + S_{\triangle DOC})$.

Bạn đọc tự giải.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = -2x$

a) Viết 5 cặp số $(x; y)$ với $x = -2; -1; 0; 1; 2$.

b) Biểu diễn các cặp số đó trên mặt phẳng tọa độ.



c) Vẽ đường thẳng đi qua điểm $(-2; 4)$ và gốc tọa độ O . Kiểm tra bằng thước xem các điểm còn lại có nằm trên đường thẳng đó không.

✓ *Tìm cách giải:* Để xác định cặp số ta thay giá trị của x vào công thức, sau đó tính giá trị của y . Khi biểu diễn $(-2; 4)$ trên mặt phẳng tọa độ thì từ điểm -2 trên trục hoành ta vẽ một đường thẳng vuông góc với trục hoành; từ điểm 4 trên trục tung ta vẽ một đường thẳng vuông góc với trục tung; giao điểm của hai đường vuông góc trên là điểm cần biểu diễn.

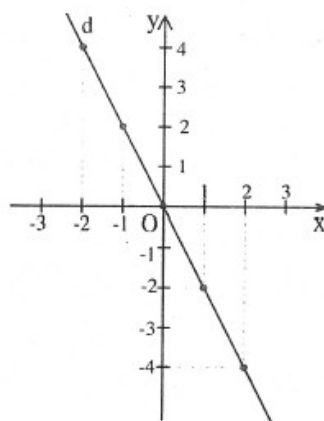
Giải

a) Năm cặp số cần xác định là $(-2; 4); (-1; 2);$

$(0; 0); (1; -2); (2; -4)$.

b) Biểu diễn các cặp số đó trên mặt phẳng tọa độ như hình bên.

c) Các điểm còn lại đều thuộc đường thẳng d đi qua hai điểm $(-2; 4)$ và gốc tọa độ O .



Ví dụ 8: Đồ thị hàm số $y = ax$ đi qua điểm $A(-4; -2)$.

a) Xác định hệ số a và vẽ đồ thị của hàm số đó;

b) Cho $B(-2; 4)$ và $C(2; 1)$. Không cần biểu diễn B, C trên mặt phẳng tọa độ hãy cho biết trong các bộ ba điểm sau, ba điểm nào thẳng hàng: $(A, B, C); (A, O, B); (A, O, C); (B, O, C)$;

c) Vẽ trên cùng mặt phẳng tọa độ đồ thị hàm số $y = 2x$.

✓ *Tìm cách giải:* Thay tọa độ điểm A vào $y = ax$ ta sẽ tìm được a . Đồ thị hàm số $y = ax$ là một đường thẳng qua gốc tọa độ nên chỉ cần xác định 2 điểm của đường thẳng.

Thông thường để vẽ đồ thị hàm số $y = ax$ chỉ cần xác định 1 điểm rồi vẽ đường thẳng qua điểm đó và gốc tọa độ.

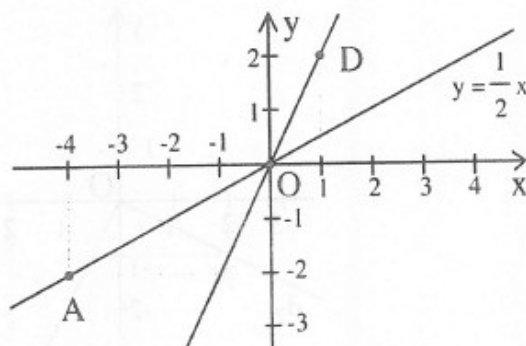
Một điểm thuộc đồ thị hàm số khi và chỉ khi tọa độ của nó thỏa mãn hàm số đã cho.

Giải

a) Đồ thị hàm số $y = ax$ đi qua điểm $A(-4; -2)$ nên cặp số $(-4; -2)$ phải thỏa mãn hàm số, tức là

$$a \cdot (-4) = -2 \quad \text{suy ra} \quad a = \frac{1}{2}.$$

Hàm số đã cho là $y = \frac{1}{2}x$.



Để vẽ đồ thị hàm số, ta cho $x = -4$ thì $y = -2$ vẽ điểm $A(-4; -2)$. Đường thẳng OA là đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x$.

b) Thay tọa độ của $B(-2; 4)$ vào $y = \frac{1}{2}x$ ta thấy không thỏa mãn vì $4 \neq \frac{1}{2} \cdot (-2)$.

Vậy điểm B không thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x$.

Thay tọa độ của $C(2; 1)$ vào $y = \frac{1}{2}x$ ta thấy thỏa mãn vì $1 = \frac{1}{2} \cdot 2$.

Vậy điểm C thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x$.

Do đó chỉ có bộ ba điểm (A, O, C) thẳng hàng.

c) Cho $x = 1$ thì $y = 2$. Vẽ điểm $D(1; 2)$.

Đường thẳng DO là đồ thị hàm số $y = 2x$ (hình vẽ trên).

$$y = \begin{cases} -2x & \text{nếu } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Ví dụ 9: Vẽ đồ thị của hàm số

✓ *Tìm cách giải:*

Vẽ hai đồ thị $y = -2x$ khi $x \geq 0$ và $y = \frac{1}{2}x$ khi $x < 0$.

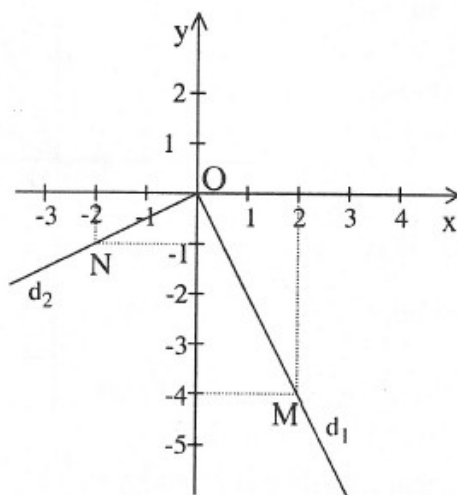
Hai đồ thị kết hợp thành đồ thị cần vẽ.

Giải

Đồ thị (d_1) của hàm số $y = -2x$ khi $x \geq 0$ là tia OM với $M(2; -4)$.

Đồ thị (d_2) của hàm số $y = \frac{1}{2}x$ khi $x < 0$ là tia ON với $N(-2; -1)$.

(d_1) và (d_2) kết hợp thành đồ thị hàm số $y = \begin{cases} -2x & \text{nếu } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$.



Ví dụ 10: Vẽ đồ thị hàm số $y = |3x| + x$.

✓ *Tìm cách giải:* Theo định nghĩa về giá trị tuyệt đối của một số thực x :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Xét hàm số trên với hai trường hợp $x \geq 0$ và $x < 0$.

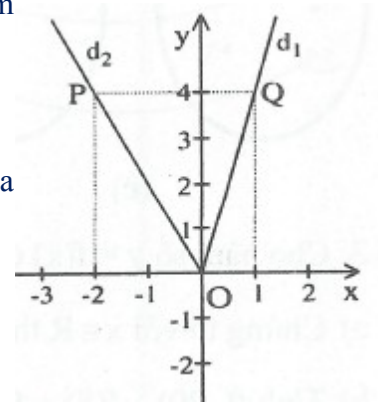
Giải

Do $|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ nên hàm số trên trở thành $y = \begin{cases} 4x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -2x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Đồ thị (d_1) của hàm số $y = 4x$ khi $x \geq 0$ là tia OQ gốc O đi qua điểm $Q(1;4)$.

Đồ thị (d_2) của hàm số $y = -2x$ khi $x < 0$ là tia OP gốc O đi qua điểm $P(-2;4)$.

(d_1) và (d_2) kết hợp thành đồ thị hàm số $y = |3x| + x$.



C. Bài tập vận dụng

13.1. Cho các cặp số (x, y) sau đây:

x	0,5	$-\frac{1}{6}$	3	-1	$\frac{1}{15}$	-6
y	$-\frac{2}{3}$	2	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	-5	$\frac{1}{18}$

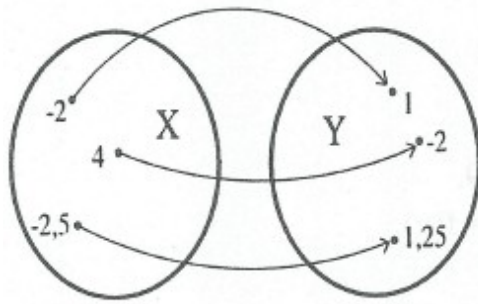
a) Hãy lập các cặp số (x, y) .

b) Vẽ sơ đồ mũi tên.

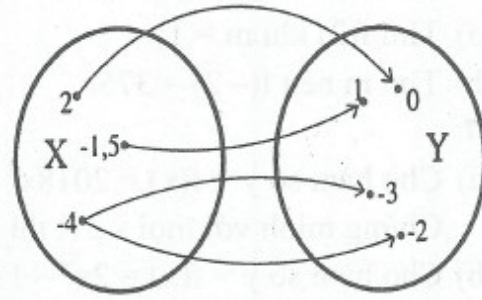
c) Các cặp số này xác định một hàm số. Tại sao?

d) Hàm số đó có thể được cho bởi công thức nào?

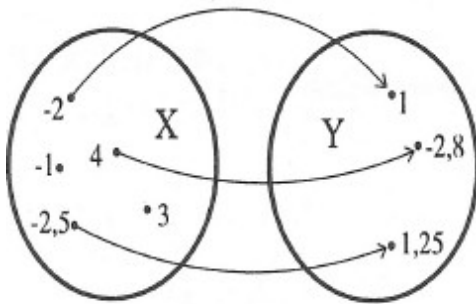
13.2. Trong các sơ đồ sau, sơ đồ nào xác định một hàm số? Tại sao. Hàm số nào được biểu thị bằng công thức?



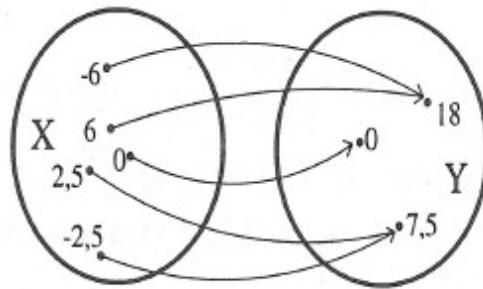
(a)



(b)



(c)



(d)

13.3. Cho hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi công thức $f(x) = -\frac{3}{4}x$

a) Chứng tỏ với $x \in R$ thì $f(x) = -f(-x)$.

b) Tính $f(-20) - f(5) + f(-8) - f\left(-\frac{1}{2}\right)$;

c) Tìm x để $f(x) = 6$; $f(x) = -1, 2$.

13.4. Hàm số $y = f(x)$ được xác định như sau:

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{nếu } x \geq 2,5 \\ -2x + 5 & \text{nếu } x < 2,5 \end{cases}$$

a) Tính $f(5)$; $-f(2018)$; $f(0)$; $f(-3)$;

b) Hãy viết gọn công thức trên;

c) Tính nhanh tích $P = f(0,5) \cdot f(1,5) \cdot f(2,5) \cdot \dots \cdot f(99,5)$;

d) Đại lượng x có là hàm số của đại lượng y không?

13.5. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{-3x}$;

b) $y = \frac{2x - 18}{(2x - 10)(x + 8)}$;

c) $y = \frac{-2016}{27x^3 + 1}$;

d) $y = \frac{1975x}{30x^2 + 4}$;

13.6. Cho hàm số $y = f(x) = (m^2 - 5)x^2 - 4(m^2 + 2m + 1)$.

a) Tìm $f(2)$ khi $m = 1$;

b) Tìm m nếu $f(-2) = 376$.

13.7.

a) Cho hàm số $y = f(x) = 2018x^2 - 2019$.

Chứng minh với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $f(-x) = f(x)$.

b) Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 1945x$.

Chứng minh với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $f(-x) = -f(x)$.

13.8. Cho hình chữ nhật có chiều rộng 25cm và chiều dài 28cm. Người ta tăng mỗi chiều $(15 - x)$ cm.

a) Tính chu vi y của hình chữ nhật mới theo x . Chứng minh đại lượng y là hàm số của đại lượng x ;

b) Tập xác định của hàm số y .

13.9. Đồ thị hàm số $y = ax$ đi qua điểm $C(1; 2)$.

a) Xác định hệ số a và vẽ đồ thị của hàm số đó;

b) Vẽ trên cùng mặt phẳng tọa độ đồ thị hàm số $y = 0,5|x|$.

13.10. Vẽ đồ thị của 2 hàm số $y = |3x|$ và đồ thị hàm số $y = \begin{cases} 2 & \text{nếu } x > 0 \\ -2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Xác định giao điểm hai đồ thị. Kiểm tra lại kết quả bằng tính toán.

13.11. Cho hàm số $y = |2bx| - x$.

a) Vẽ đồ thị hàm số khi $b = 2$;

b) Vẽ đồ thị hàm số khi $b = 0,5$ (cùng trên hệ trục tọa độ của câu a).

13.12. Biết đồ thị hàm số $y = \frac{a}{x} (a \neq 0)$ đi qua điểm $A(-2; 0,5)$.

a) Xác định hệ số a , và vẽ đồ thị (H) của hàm số với a vừa tìm;

b) $P(x_P; y_P)$ là một điểm trên (H) biết $2x_P + 8y_P = 0$, xác định tọa độ của P ;

c) Tìm giao điểm đồ thị hàm số trên với đồ thị (D) của hàm số $y = |x|$.

13.13. Gọi f là hàm xác định trên tập hợp các số nguyên và thỏa mãn các điều kiện sau đây:

1) $f(0) \neq 0$;

2) $f(1) = 3$;

3) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$.

Tính $f(7)$.

(Cuộc thi Olympic Toán học thành phố Leningrat, LB Nga năm 1987)

13.14. Cho $f(x)$ là hàm số thỏa mãn $f(2x+1) = (x-12)(x+13)$, với mọi số thực. Hãy xác định giá trị của $f(31)$.

(Cuộc thi Toán Canada mở rộng 2006)

13.15. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2x+1) = (x-2013)(x+2014)$. Tính $f(4207)$

(Đề thi Olympic Toán tuổi thơ cấp THCS, Đắk Lắk năm học 2013 – 2014)

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

13.1. a); b) Bạn đọc tự lập các cặp số và vẽ sơ đồ.

c) Trong các cặp số trên ta thấy mỗi giá trị của x đều được tương ứng với một và chỉ một giá trị của y nên y là hàm số của x (Việc lập cặp số và sơ đồ mũi tên cũng sẽ chứng tỏ điều ấy).

d) Hàm số có thể được cho bởi công thức $y = -\frac{1}{3x}$ với $x \in \left\{-0,5; -\frac{1}{6}; 3; -1; \frac{1}{15}; -6\right\}$.

13.2. Theo khái niệm hàm số:

- Quy tắc trong sơ đồ (a) biểu thị một hàm số. Công thức $y = -0,5x$.

- Quy tắc trong sơ đồ (b) không biểu thị một hàm số vì với $x = -4$ có hai giá trị tương ứng thuộc Y .

- Quy tắc trong sơ đồ (c) không biểu thị một hàm số vì có phần tử chẳng hạn 3 của tập X không có giá trị tương ứng thuộc tập Y .

- Quy tắc trong sơ đồ (d) biểu thị một hàm số. Công thức $y = |3x|$.

13.3.

a) Với $x \in R$ thì $f(-x) = -\frac{3}{4}(x) = \frac{3}{4}x = -\left(-\frac{3}{4}\right)x = -f(x)$.

Từ $f(-x) = -f(x) \Rightarrow -f(-x) = f(x)$.

Vậy với $x \in R$ thì $f(x) = -f(-x)$.

b) $f(-20) - f(5) + f(-8) - f\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (-20) - \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 5 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (-8) - \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 24\frac{3}{8}$.

c) $f(x) = 6$ nghĩa là $-\frac{3}{4}x = 6 \Leftrightarrow x = -8$.

$f(x) = -1,2$ nghĩa là $-\frac{3}{4}x = -1,2 \Leftrightarrow x = 1,6$.

13.4.

a) $f(5) = 10 - 5 = 5;$

$-f(2018) = -(2018 \cdot 2) + 5 = -4031;$

$f(0) = 0 + 5 = 5;$

$f(-3) = -2 \cdot (-3) + 5 = 11.$

b) Công thức được viết gọn là $y = f(x) = |2x - 5|$ vì theo định nghĩa

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases} \quad \text{nên} \quad y = f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{nếu } 2x - 5 \geq 0 \text{ hay } x \geq 2,5 \\ -2x + 5 & \text{nếu } 2x - 5 < 0 \text{ hay } x < 2,5 \end{cases}$$

c) $P = 0$ vì $f(2,5) = 0$.

d) Đại lượng x không là hàm số của đại lượng y vì ứng với một giá trị của y ta có hai giá trị tương ứng của x (chẳng hạn $y = 9$ thì $x = 7$ và $x = -2$) nên theo định nghĩa hàm số đại lượng x không là hàm số của đại lượng y .

13.5.

a) $\{x | x \in \mathbb{R} \text{ và } x \leq 0\};$

b) $\{x | x \in \mathbb{R}; x \neq 5 \text{ và } x \neq 8\};$

c) $\left\{x \left| x \in \mathbb{R}; x \neq -\frac{1}{3} \right.\right\};$

d) $\{x | x \in \mathbb{R}\}.$

13.6. a) Khi $m = 1$ thì $f(x) = (-4)x^2 - 16$ nên $f(2) = (-4)2^2 - 16 = -32.$

b) $f(-2) = (m^2 - 5)(-2)^2 - 4(m^2 + 2m + 1) = 376 \Leftrightarrow m = -50.$

13.7.

a) Ta có: $f(-x) = 2018(-x)^2 - 2019 = 2018x^2 - 2019 = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x)$

b) $f(-x) = 2(-x)^9 - 1945(-x) = -2x^9 + 1945x = -(2x^9 - 1945x) = -f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$

13.8.

a) Chiều rộng mới là $25 + (15 - x)$; chiều dài mới là $28 + (15 - x)$. Chu vi hình chữ nhật mới là $y = 2(25 + 15 - x + 28 + 15 - x) = -4x + 166$

$y = -4x + 166$ là hàm số vì ứng với mỗi giá trị của x ta có một giá trị tương ứng duy nhất của y .

b) Tập xác định của hàm số $y = -4x + 166$ là $D = \{x | x \in \mathbb{R}; x \leq 15\}$.

13.9.

a) Đồ thị hàm số $y = ax$ đi qua điểm $C(1;2)$ nên cặp số $(1;2)$ phải thỏa mãn hàm số, tức là $a \cdot 1 = 2$ suy ra $a = 2$. Hàm số đã cho là $y = 2x$. Vẽ điểm $C(1;2)$. Đường thẳng OC là đồ thị của hàm số $y = 2x$.

b) $y = f(x)$

$$= 0,5|x| = \begin{cases} 0,5x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -0,5x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

* Đồ thị (t_1) của hàm số $y = 0,5x$ khi $x \geq 0$ là tia OA với $A(4;2)$

* Đồ thị (t_2) của hàm số $y = -0,5x$ khi $x < 0$ là tia OB với

$B(-4;2)$

Hợp của t_1 và t_2 là đồ thị hàm số $y = 0,5|x|$.

$$y = f(x) = |3x| = \begin{cases} 3x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -3x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

13.10.

Đồ thị (d_1) của hàm số $y = 3x$ khi $x \geq 0$ là tia OA với $A(1;3)$

Đồ thị (d_2) của hàm số $y = -3x$ khi $x < 0$ là tia OB với

$B(-1;3)$,

(d_1) và (d_2) kết hợp thành đồ thị hàm số

$$y = \begin{cases} 3x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -3x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Đồ thị hàm số $y = \begin{cases} 2 & \text{nếu } x > 0 \\ -2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ là phần đường thẳng t_1 với $x > 0$ kết hợp với phần đường thẳng t_2 với $x < 0$.

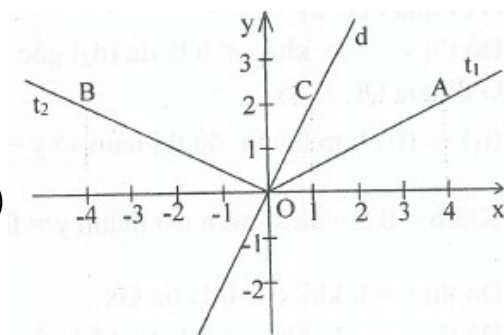
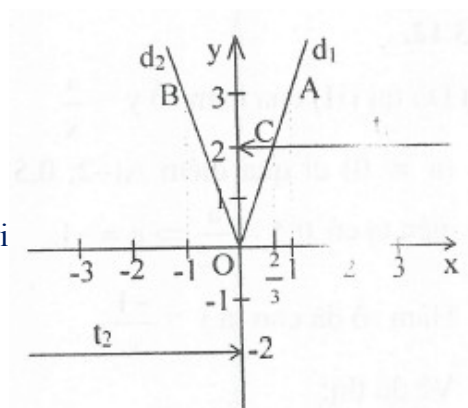
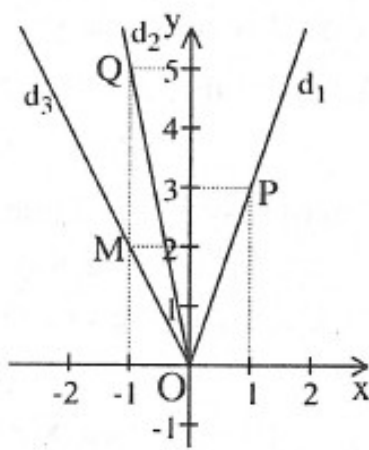
Giao điểm của hai đồ thị là $C\left(\frac{2}{3}; 2\right)$.

Kiểm tra với $y = 2$ thì $2 = 3x$ nên $x = \frac{2}{3}$.

13.11. Do $|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ nên

a) Khi $b = 2$ hàm số trên trở thành

$$y = \begin{cases} 3x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -5x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$



Đồ thị $y = 3x$ khi $x \geq 0$ là tia (d_1) gốc O đi qua $P(1;3)$.

Đồ thị $y = -5x$ khi $x < 0$ là tia (d_2) gốc O đi qua $Q(-1;5)$.

(d_1) và (d_2) hợp thành đồ thị hàm số $y = |3x| - x$.

b) Khi $b = 0,5$ hàm số trên trở thành

$$y = f(x) = |x| - x = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -2x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Đồ thị $y = 0$ khi $x \geq 0$ là tia Ox.

Đồ thị $y = -2x$ khi $x < 0$ là tia (d_3) gốc O đi qua $M(-1;2)$.

Tia Ox và (d_3) hợp thành đồ thị hàm số $y = |x| - x$.

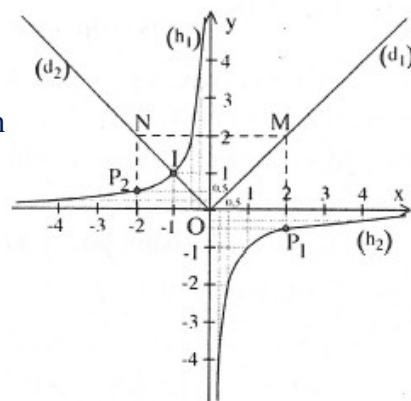
13.12.

a) Đồ thị (H) của hàm số $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) đi qua điểm

$A(-2;0,5)$ nên ta có $0,5 = \frac{a}{-2} \Rightarrow a = -1$.

Hàm số đã cho là $y = \frac{-1}{x}$.

Vẽ đồ thị:



x	-4	-2	-1	-0,25	0,25	0,5	1	2	4
y	0,25	0,5	1	4	-4	-2	-1	-0,5	-0,25

Vẽ các điểm $(x;y)$ và nối lại được: Đồ thị hàm số $y = \frac{-1}{x}$ là hai nhánh đường cong (h_1) nằm ở góc phần tư thứ II và (h_2) nằm ở góc phần tư thứ IV.

b) P nằm trên đồ thị hàm số $y = \frac{-1}{x}$ nên y_P và x_P thỏa mãn biểu thức trên nghĩa là $y_P = \frac{-1}{x_P}$. Do

$$2x_P + 8y_P = 0 \Leftrightarrow x_P^2 = 4x_P = \pm 2$$

Với $x_P = 2$ thì $y_P = -0,5$; $x_P = -2$ thì $y_P = 0,5$.

Ta có hai điểm $P_1(2;-0,5)$ và $P_2(-2;0,5)$.

c) Đồ thị (D) của hàm số $y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ gồm 2 tia OM và ON với $M(2;2); N(-2;2)$.

Hai đồ thị (D) và (H) cắt nhau tại $I(-1;1)$.

13.13. Áp dụng lần lượt các tính chất đã cho ta có:

$$f(1)f(0) = f(1+0) + f(1-0) = 2f(1) = 6 \Rightarrow f(0) = 2.$$

$$f(1)f(1) = f(1+1) + f(1-1) = f(2) + f(0) \Rightarrow f(2) = 7.$$

$$f(2)f(1) = f(2+1) + f(2-1) = f(3) + f(1) \Rightarrow f(3) = 18.$$

$$f(3)f(1) = f(4) + f(2) \Rightarrow f(4) = 47.$$

$$f(4)f(3) = f(7) + f(1) \Rightarrow f(7) = 843.$$

Vậy $f(7) = 843.$

13.14. Ta có: $31 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = 15$. Vậy $f(31) = (15 - 12)(15 + 13) = 84.$

13.15. Ta có: $4027 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = 2013$. Vậy $f(4027) = 0$.

CHUYÊN ĐỀ 14. THỐNG KÊ

§1. NHỮNG KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

§2. TRÌNH BÀY MỘT MẪU SỐ LIỆU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Khái niệm về thống kê

Thống kê là khoa học về các phương pháp thu thập, tổ chức, trình bày, phân tích và xử lý số liệu.

2. Mẫu số liệu

· *Dấu hiệu* là một vấn đề hay hiện tượng nào đó mà người điều tra quan tâm tìm hiểu. Mỗi đối tượng điều tra gọi là một *đơn vị điều tra*. Mỗi đơn vị điều tra có một số liệu, số liệu đó gọi là giá trị của dấu hiệu trên đơn vị điều tra đó.

· Một tập con hữu hạn các đơn vị điều tra được gọi là một *mẫu*. Số phần tử của một mẫu được gọi là *kích thước mẫu*. Các giá trị của dấu hiệu thu được trên mẫu được gọi là một *mẫu số liệu* (mỗi giá trị như thế còn gọi là một số liệu của mẫu).

· Nếu thực hiện điều tra trên trên mọi đơn vị điều tra thì đó là điều tra toàn bộ. Nếu chỉ điều tra trên một mẫu thì đó là điều tra mẫu.

3. Bảng phân bố tần số - tần suất. Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp.

Tần số của giá trị x_i là số lần lặp lại của giá trị x_i trong mẫu số liệu.

Tần suất f_i của giá trị x_i là tỷ số giữa tần số n_i và kích thước mẫu N hay $f_i = \frac{n_i}{N}$.

Người ta thường viết tần suất dưới dạng phần trăm.

· Bảng phân bố tần số (gọi tắt là *bảng tần số*) được trình bày ngang như sau:

Giá trị (x)	x_1	x_2	x_3	...	x_m	
Tần số (n)	n_1	n_2	n_3	...	n_m	$N = \sum_{i=1}^m n_i$

Trên hàng tần số, người ta dành một ô để ghi kích thước mẫu N hàng tổng các tần số (tức $N =$

$$\sum_{i=1}^m n_i$$

· Bổ sung thêm một hàng tần suất vào bảng trên, ta được *bảng phân bố tần số - tần suất* (gọi tắt là *bảng tần số - tần suất*).

Giá trị (x)	x_1	x_2	x_3	...	x_m	
Tần số (n)	n_1	n_2	n_3	...	x_m	$N = \sum_{i=1}^m n_i$
Tần suất %	f_1	f_2	f_3	...	f_m	

Chú ý: Người ta cũng thể hiện bảng phân bố tần số - tần suất dưới dạng bảng dọc.

· Nếu kích thước mẫu số liệu khá lớn, thì người ta thường chia số liệu thành nhiều lớp dưới dạng $\left[\frac{a}{b}; \frac{a}{b} \right)$ hay $\left[\frac{a}{b}; b \right)$ (thường có độ dài các lớp bằng nhau). Khi đó tần số của lớp $\left[\frac{a}{b}; \frac{a}{b} \right)$ là số giá trị $x_i \in \left[\frac{a}{b}; \frac{a}{b} \right)$ (hay $x_i \in \left[\frac{a}{b}; b \right)$) xuất hiện trong lớp đó. Tần suất của lớp $\left[\frac{a}{b}; \frac{a}{b} \right)$ là $f = \frac{n}{N}$ trong đó n là tần số của lớp $\left[\frac{a}{b}; \frac{a}{b} \right)$ và N là kích thước mẫu.

- Bảng phân bố tần suất ghép lớp được xác định tương tự như trên.

- Giá trị đại diện của lớp $c = \frac{a+b}{2}$

4. Biểu đồ:

Các loại biểu đồ thường dùng là: biểu đồ hình cột, biểu đồ đường gấp khúc và biểu đồ hình quạt. Số liệu vẽ biểu đồ được lấy từ các bảng tần số - tần suất.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Dạng Toán 1: Xác Định Mẫu Số Liệu.

1. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Số học sinh giỏi của 30 lớp ở một trường THPT A được thống kê lại như sau.

0	2	1	0	0	3	0	0	1	1	0	1	6	6	0
1	5	2	4	5	1	0	1	2	4	0	3	3	1	0

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu bao nhiêu?

b) Viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên

Lời giải

a) Dấu hiệu là học sinh giỏi, đơn vị điều tra là mỗi lớp của trường THPT A

Kích thước mẫu là 30

b) Các giá trị khác nhau của mẫu số liệu trên là 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6

Ví dụ 2: Để may đồng phục cho khối học sinh lớp năm của trường tiểu học A. Người ta chọn ra một lớp 5A, thống kê chiều cao của 45 học sinh lớp 5A (tính bằng cm) được ghi lại như sau :

102	102	113	138	111	109	98	114	101
103	127	118	111	130	124	115	122	126
107	134	108	118	122	99	109	106	109
104	122	133	124	108	102	130	107	114
147	104	141	103	108	118	113	138	112

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu bao nhiêu?

b) Viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên

Lời giải

a) Dấu hiệu là chiều cao của mỗi học sinh, đơn vị điều tra là một học sinh của lớp 5A

Kích thước mẫu là $N = 45$

b) Các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên là

102; 113; 138; 109; 98; 114; 101; 103; 127; 118; 111; 130; 124; 115; 122; 126; 107;

134; 108; 99; 106; 104; 133; 147; 141; 138; 112

2. Bài tập luyện tập

Bài 0: Thống kê điểm kiểm tra môn Toán của học sinh lớp 10 được cho ở bảng sau:

Điểm thi	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tần số	3	2	1	1	3	7	4	8	9	3	1

Cho biết đơn vị điều tra và kích thước của mẫu số liệu trên?

Bài 1: Số con của 40 gia đình ở huyện A được thống kê lại như sau

2	4	3	2	0	2	2	3	4	5
2	2	5	2	1	2	2	2	3	2
5	2	7	3	4	2	2	2	3	2
3	5	2	1	2	4	4	3	4	3

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu bao nhiêu?

b) Viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên

Bài 2: Tiến hành một cuộc thăm dò về số cân nặng của mỗi học sinh nữ lớp 10 trường THPT A, người điều tra chọn ngẫu nhiên 30 học sinh nữ lớp 10 và đề nghị các em cho biết số cân nặng của mình. Kết quả thu được ghi lại trong bảng sau (đơn vị là kg):

43	50	43	48	45	40	38	48	45	50	43	45	48	43	38
40	43	48	40	43	45	43	50	40	50	43	45	50	43	45

Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?

Dạng Toán 2: Trình Bày Mẫu Số Liệu Dưới Dạng Bảng Và Biểu Đồ.

1. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Số lượng khách đến tham quan một điểm du lịch trong 12 tháng được thống kê như ở bảng sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số khách	430	550	430	520	550	515	550	110	520	430	550	880

Lập bảng phân bố tần số - tần suất

Lời giải

a) Bảng phân bố tần số - tần suất

Số lượng khách (người)	Tần số	Tần suất%
110	1	8,3
430	3	24,9
515	1	8,3
520	2	16,8

550	4	33,4
800	1	8,3
Cộng	N= 12	100%

Ví dụ 2: Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau :

Thành tích chạy 500m của học sinh lớp 10A ở trường THPT C. (đơn vị : giây)

6,3	6,2	6,5	6,8	6,9	8,2	8,6	6,6	6,7	7,0	7,1
8,5	7,4	7,3	7,2	7,1	7,0	8,4	8,1	7,1	7,3	7,5
8,7	7,6	7,7	7,8	7,5	7,7	7,8	7,2	7,5	8,3	7,6

a) Lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp với các lớp :

[6,0 ; 6,5) ; [6,5 ; 7,0) ; [7,0 ; 7,5) ; [7,5 ; 8,0) ; [8,0 ; 8,5) ; [8,5 ; 9,0]

b) Vẽ đường gấp khúc tần suất

Lời giải

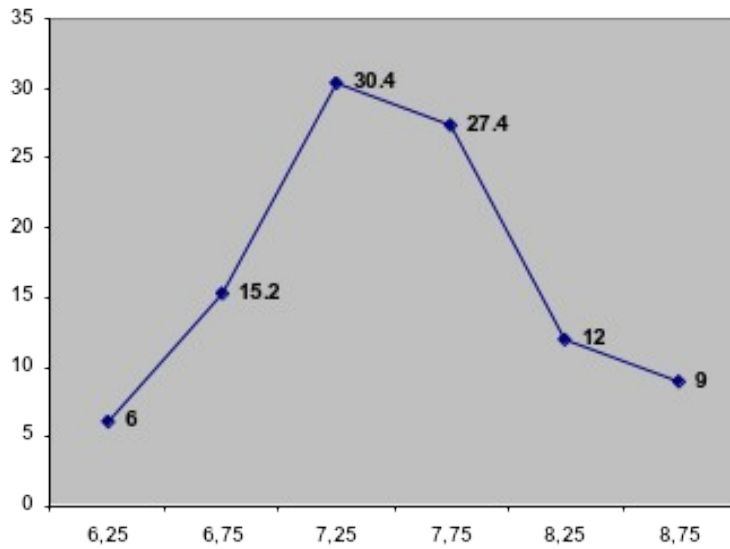
a) Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp là

Lớp Thành Tích (m)	Tần số	Tần suất %
[6,0; 6,5)	2	6,0
[6,5; 7,0)	5	15,2
[7,0; 7,5)	10	30,4
[7,5; 8,0)	9	27,4
[8,0; 8,5)	4	12,0
[8,5; 9,0]	3	9,0
	N= 33	100%

b) Ta có

Lớp Thành Tích (m)	Giá trị đại diện	Tần suất %
[6,0; 6,5)	6,25	6,0
[6,5; 7,0)	6,75	15,2
[7,0; 7,5)	7,25	30,4
[7,5; 8,0)	7,75	27,4
[8,0; 8,5)	8,25	12,0
[8,5; 9,0]	8,75	9,0

Đường gấp khúc tần suất ghép lớp là



Ví dụ 3: Điểm thi của 32 học sinh trong kì thi Tiếng Anh (thang điểm 100) như sau :

68	79	65	85	52	81	55	65	49	42	68	66	56	57	65	72
69	60	50	63	74	88	78	95	41	87	61	72	59	47	90	74

a) Hãy trình bày số liệu trên dưới dạng bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp với các lớp:

$[40; 50)$; $[50; 60)$; $[60; 70)$; $[70; 80)$; $[80; 90)$; $[90; 100]$.

b) Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình cột để mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp đã lập ở câu a).

c) Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình quạt để mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp đã lập ở câu a).

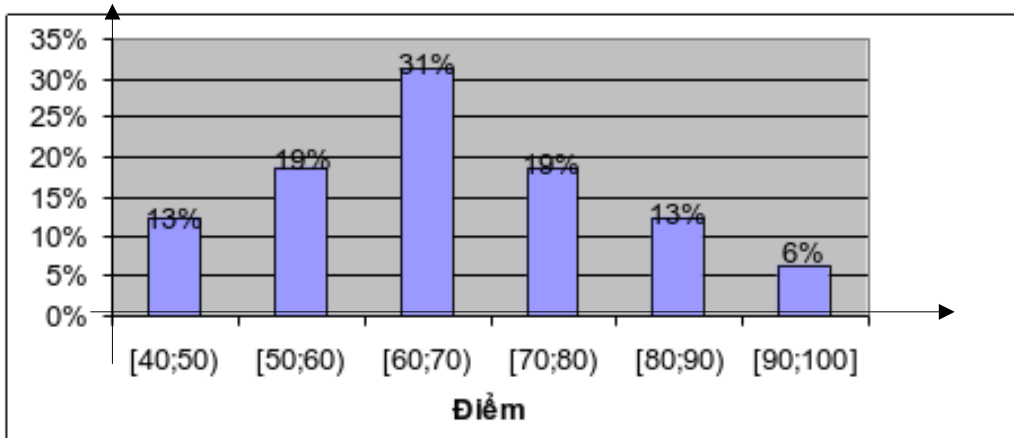
Lời giải

a) Ta có bảng phân bố là

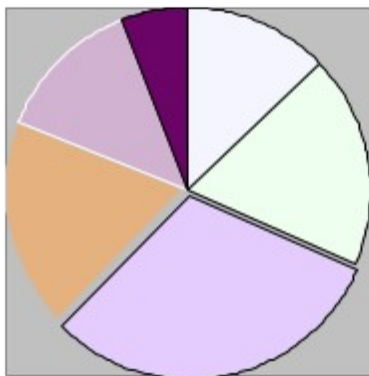
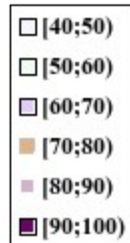
Lớp điểm	Tần số
$[40; 50)$	4
$[50; 60)$	6
$[60; 70)$	10
$[70; 80)$	6
$[80; 90)$	4

Lớp điểm	Tần suất
$[40; 50)$	13%
$[50; 60)$	19%
$[60; 70)$	31%
$[70; 80)$	19%
$[80; 90)$	13%
$[90; 100]$	6%

b) Biểu đồ tần suất hình cột là



c) Biểu đồ hình quạt là



Lớp điểm	Tần suất	Góc ở tâm
[40;50)	13%	46,8°
[50;60)	19%	68,4°
[60;70)	31%	111,6°
[70;80)	19%	68,4°
[80;90)	13%	46,8°
[90;100]	6%	21,6°

Nhận xét: Để vẽ đồ biểu đồ hình quạt ta xác định góc ở tâm hình quạt dựa vào công thức $\Delta_0 = f_i \cdot 360^\circ$.

Ví dụ 4: Để đánh giá kết quả của một đề tài sau khi áp dụng vào thực tiễn dạy học người ta thực nghiệm bằng cách ra đề kiểm tra một tiết cho hai lớp (gần tương đương về trình độ kiến thức). Trong đó lớp $12A_3$ đã được dạy áp dụng đề tài (lớp thực nghiệm), lớp $12A_4$ (lớp đối chứng). Kết quả điểm của học sinh hai lớp như sau:

Lớp	Số HS	Số bài KT	Số bài kiểm tra đạt điểm Xi									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ĐC $12A_3$	43	86	1	3	6	8	15	20	20	12	2	1
TN $12A_4$	46	92	0	1	4	5	16	21	23	15	3	3

a) Hãy lập bảng phân bố tần suất của hai lớp trên

b) Hãy lập biểu đồ tần suất hình cột của hai lớp (trong cùng một biểu đồ)

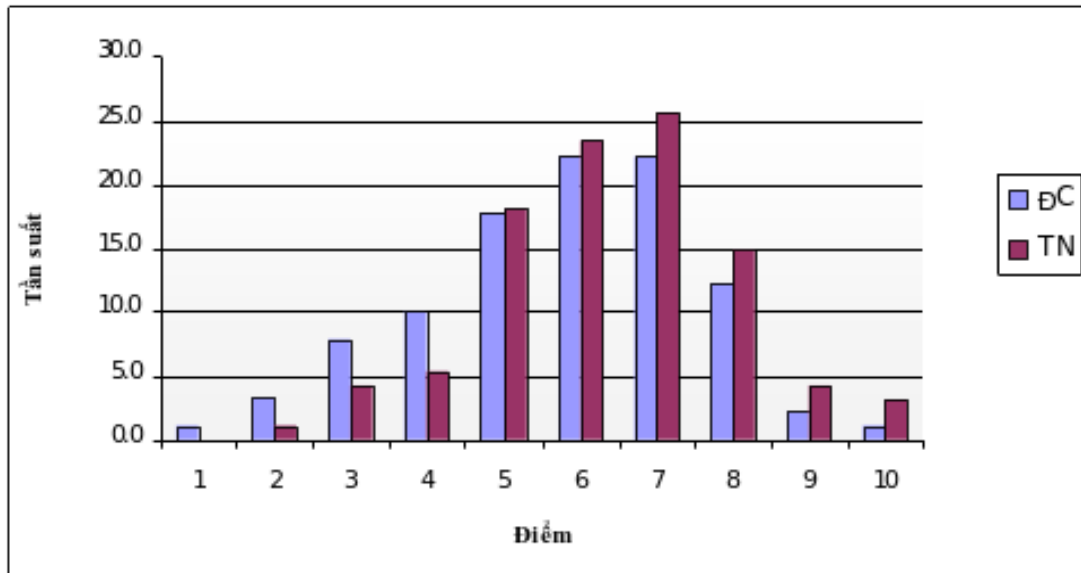
c) Hãy lập biểu đồ tần suất hình quạt của hai lớp (trong cùng một biểu đồ)

Lời giải

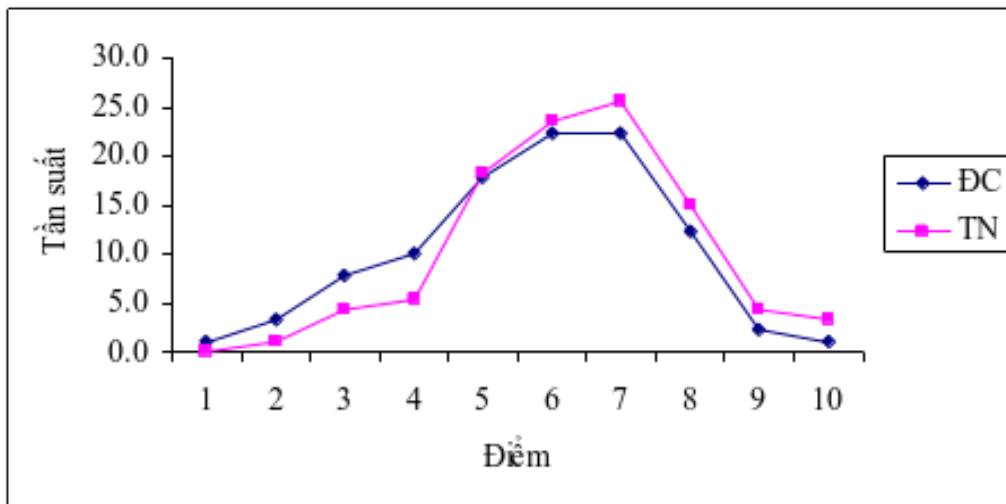
a) Bảng phân bố tần suất

Lớp	Số HS	Số bài KT	Số % bài kiểm tra đạt điểm Xi									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ĐC 12A ₃	43	86	1,1	3,1	7,6	10,2	17,6	22,3	22,1	12,3	2,3	1,2
TN 12A ₄	46	92	0,0	1,2	4,1	5,3	18,5	22,8	25,9	14,5	4,4	3,0

b) Biểu đồ phân bố tần suất của hai lớp



c) Đường gấp khúc tần suất của hai lớp



3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3: Điểm kiểm tra của 2 nhóm học sinh lớp 10 được cho như sau:

Nhóm 1: (9 học sinh) 1, 2, 3, 5, 6, 6, 7, 8, 9

Nhóm 2: (11 học sinh) 1, 3, 3, 4, 4, 6, 7, 7, 7, 8, 10

a) Hãy lập các bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp với các lớp [1, 4]; [5, 6]; [7, 8]; [9, 10] của 2 nhóm.

b) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột của 2 nhóm.

Bài 4: Sau một tháng gieo trồng một giống hoa, người ta thu được số liệu sau về chiều cao (đơn vị là milimét) của các cây hoa được trồng:

Nhóm	Chiều cao	Số cây đạt được
1	Từ 100 đến 199	20
2	Từ 200 đến 299	75
3	Từ 300 đến 399	70
4	Từ 400 đến 499	25
5	Từ 500 đến 599	10

- a) Lập bảng phân bố tần suất ghép lớp của mẫu số liệu trên.
 b) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột .
 c) Vẽ đường gấp khúc tần suất

Bài 5: Chiều cao của 40 vận động viên bóng chuyền được cho trong bảng sau:

Lớp chiều cao (cm)	Tần số
[168 ; 172)	4
[172 ; 176)	4
[176 ; 180)	6
[180 ; 184)	14
[184 ; 188)	8
[188 ; 192]	4
Cộng	40

- a) Hãy lập bảng phân bố tần suất ghép lớp ?
 b) Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình cột để mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp đã lập ở câu a).
 c) Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình quạt để mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp đã lập ở câu a).

Bài 6: Thống kê điểm thi tốt nghiệp môn Toán của 926 em học sinh Trường THPT A cho ta kết quả sau đây:

Điểm bài thi (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tần số (n)	17	38	...	124	176	183	119	...	50	25
Tần suất %	...	...	12,10	...	...	...	8,63	8,86		

- a) Chuyển bảng trên thành dạng cột và điền tiếp vào các ô còn trống.
 b) Vẽ biểu đồ hình cột tần số.

c) Vẽ biểu đồ hình quạt tần suất.

Bài 7: Kết quả làm bài kiểm tra của học sinh lớp hai lớp gồm lớp thực nghiệm (TN) và học sinh lớp đối chứng (ĐC) được thể hiện thông qua Bảng thống kê sau đây:

Lớp	Số HS	Số bài kiểm tra đạt điểm tương ứng										Điểm TB
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10 C ₁	46	0	1	2	6	10	12	8	7	0	0	6.3
10 C ₂	46	0	0	0	2	4	6	12	10	8	4	7.4

a) Hãy lập bảng phân bố tần suất của mẫu số liệu trên(trong một bảng)

b) Vẽ biểu đồ tần suất (trong một biểu đồ)

§3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Số trung bình

- Với mẫu số liệu kích thước N là $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N n_i x_i}{N} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{N}$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số ghép lớp:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N n_i c_i}{N} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k}{N}$$

(c_i là giá trị đại diện của lớp thứ i)

2. Số trung vị

Giả sử ta có một mẫu gồm N số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm (hoặc không tăng). Khi đó **số trung vị** M_e là:

– Số đứng giữa nếu N lẻ;

– Trung bình cộng của hai số đứng giữa (số thứ $\frac{N}{2}$ và $\frac{N}{2} + 1$) nếu N chẵn.

3. Mốt

Mốt của một bảng phân bố tần số là giá trị có tần số lớn nhất và được kí hiệu là M_o.

Chú ý: – Số trung bình của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu.

- Nếu các số liệu trong mẫu có sự chênh lệch quá lớn thì dùng số trung vị làm đại diện cho các số liệu của mẫu.
- Nếu quan tâm đến giá trị có tần số lớn nhất thì dùng một làm đại diện. Một mẫu số liệu có thể có nhiều một.

4. Phương sai và độ lệch chuẩn

Để đo mức độ chênh lệch (**độ phân tán**) giữa các giá trị của mẫu số liệu so với số trung bình ta dùng **phương sai** S^2 và **độ lệch chuẩn** $S = \sqrt{S^2}$.

- Với mẫu số liệu kích thước N là $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$:

$$S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2$$

$$= \bar{x}^2 - (\bar{x})^2$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số, tần suất:

$$S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^k n_i x_i \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k f_i x_i \right)^2$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp:

$$S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i (c_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i c_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^k n_i c_i \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^k f_i (c_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k f_i c_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k f_i c_i \right)^2$$

(c_i, n_i, f_i là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i ;

N là số các số liệu thống kê $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$)

Chú ý: Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì độ phân tán (so với số trung bình) của các số liệu thống kê càng lớn.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Dạng Toán : Xác Định Các Số Đặc Trưng Của Mẫu Số Liệu .

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho các số liệu thống kê về sản lượng chè thu được trong 1 năm (kg/sào) của 20 hộ gia đình

111	112	112	113	114	114	115	114	115	116
112	113	113	114	115	114	116	117	113	115

- Lập bảng phân bố tần số - tần suất
- Tìm số trung bình, trung vị, một

Lời giải

Bảng phân bố tần số - tần suất:

Giá trị x	Tần số	Tần suất (%)
-----------	--------	--------------

111	1	5
112	3	15
113	4	20
114	5	25
115	4	20
116	2	10
117	1	5
	N=20	100

b) * Số trung bình:

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(1.111 + 3.112 + 4.113 + 5.114 + 4.115 + 2.116 + 1.117) = 113,9$$

* Số trung vị: Do kích thước mẫu $N = 20$ là một số chẵn nên số trung vị là trung bình cộng của

hai giá trị đứng thứ $\frac{N}{2} = 10$ và $\frac{N}{2} + 1 = 11$ đó là 114 và 114.

Vậy $M_e = 114$

*Mốt: Do giá trị 114 có tần số lớn nhất là 5 nên ta có: $M_o = 114$.

Ví dụ 2: Để khảo sát kết quả thi tuyển sinh môn Toán trong kì thi tuyển sinh đại học năm vừa qua của trường A, người điều tra chọn một mẫu gồm 100 học sinh tham gia kì thi tuyển sinh đó. Điểm môn Toán (thang điểm 10) của các học sinh này được cho ở bảng phân bố tần số sau đây.

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	N=100

a) Tìm mốt, số trung vị.

b) Tìm số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn (chính xác đến hàng phần trăm).

Lời giải

a) Ta có giá trị có tần số lớn nhất $M_o = 7$

Kích thước mẫu là số chẵn nên số trung vị là trung bình cộng của hai số đứng giữa

$$\text{Vậy } M_e = \frac{6+7}{2} = 6,5$$

b) Ta có số trung bình cộng là

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k}{N} = \frac{0.1 + 1.1 + 2.3 + \dots + 10.2}{100} = 6,23$$

Ta có $\sum_{i=1}^k n_i x_i^2 = 4277$, $\sum_{i=1}^k n_i x_i = 623$

Suy ra phương sai là $s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^k n_i x_i \right)^2 = \frac{4277}{100} - \frac{623^2}{10000} = 3,96$

Do đó độ lệch chuẩn là $S \approx 1,99$.

Ví dụ 3: Tiền lãi (nghìn đồng) trong 30 ngày được khảo sát ở một quầy bán báo.

81	37	74	65	31	63	58	82	67	77	63	46	30	53	73
51	44	52	92	93	53	85	77	47	42	57	57	85	55	64

a) Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất theo các lớp như sau:

[29,5; 40,5), [40,5; 51,5), [51,5; 62,5), [62,5; 73,5), [73,5; 84,5), [84,5; 95,5]

b) Tính số trung bình cộng, phương sai, độ lệch chuẩn ?

Lời giải

a) Bảng phân bố tần số và tần suất là

Lớp tiền lãi	Tần số	Tần suất
[29,5;40,5)	3	10%
[40,5;51,5)	5	17%
[51,5;62,5)	7	23%
[62,5;73,5)	6	20%
[73,5;84,5)	5	17%
[84,5;95,5]	4	13%
N	30	100%

b) Ta có $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N n_i c_i}{N}$ nên

$$\bar{x} = \frac{3.35 + 5.46 + 7.57 + 6.68 + 5.79 + 4.90}{30} = 63,23$$

Ta có $\sum_{i=1}^k n_i c_i^2 = 128347$, $\sum_{i=1}^k n_i c_i = 1897$

Suy ra phương sai là

Lớp tiền lãi	Tần số	Giá trị đại diện ci
[29,5;40,5)	3	35
[40,5;51,5)	5	46
[51,5;62,5)	7	57
[62,5;73,5)	6	68

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i c_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^k n_i c_i \right)^2 = \frac{128347}{100} - \frac{21897^2}{10000} \gg 279,78$$

Do đó độ lệch chuẩn là $S \gg 16,73$.

Ví dụ 4: Cho mẫu số liệu gồm bốn số tự nhiên khác nhau và khác 0, biết số trung bình là 6 và số trung vị là 5. Tìm các giá trị của mẫu số liệu đó sao cho hiệu của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Giả sử các giá trị của mẫu số liệu là a, b, c, d với $0 < a < b < c < d$, $a, b, c, d \in N$

Ta có $M_e = \frac{b+c}{2} = 5 \Rightarrow b+c = 10$

Mà $\bar{x} = 6 \Rightarrow a+b+c+d = 24 \Rightarrow a+d = 14$

Ta có $\begin{cases} a < b < c \\ b+c = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 1 \\ 10 > 2b \end{cases}$ hay $1 < b < 5$ mà $b \in N \Rightarrow b \in \{2, 3, 4\}$

· Nếu $b = 2$ thì $c = 8$, mà $0 < a < b, a \in N \Rightarrow a = 1, d = 13$

Khi đó các giá trị của mẫu số liệu là 1;2;8;13

· Nếu $b = 3$ thì $c = 7$, mà $0 < a < b, a \in N \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow d = 13 \\ a = 2 \Rightarrow d = 12 \end{cases}$

Khi đó có hai mẫu số liệu thỏa đề bài có giá trị là 1;3;7;13 và 2;3;7;12

· Nếu $b = 4$ thì $c = 6$, mà $0 < a < b, a \in N \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow d = 13 \\ a = 2 \Rightarrow d = 12 \\ a = 3 \Rightarrow d = 11 \end{cases}$

Khi đó có ba mẫu số liệu thỏa đề bài có giá trị là 1;4;6;13, 2;4;6;12 và 3;4;6;11

Suy ra với mẫu số liệu có các giá trị là 3;4;6;11 thì hiệu của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đạt giá trị nhỏ nhất.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 8: Đo chiều cao (cm) của 40 học sinh nam ở một trường THPT, người ta thu được mẫu số liệu sau:

176	167	165	164	144	176	162	175	149	144
176	166	166	163	156	170	161	176	148	143
175	174	175	146	157	170	165	176	152	142
163	173	175	147	160	170	169	176	168	141

a) Lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp theo chiều cao của học sinh với các lớp: [141;146], [147;152], ... , [171;176] .

b) Dựa vào bảng phân bố tần số ghép lớp trên, tính chiều cao trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đã cho.

Bài 9: Có 100 học sinh tham dự kỳ thi học sinh giỏi môn toán, kết quả được cho trong bảng sau: (thang điểm là 20)

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	N=100 0

a) Tính số trung bình và số trung vị.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài 10: Có tài liệu về tuổi nghề của công nhân hai tổ trong một xí nghiệp cơ khí như sau:

Tổ I 2 2 5 7 9 9 9 10 10 11 12

Tổ II 2 3 4 4 4 5 5 7 7 8

Trong mỗi tổ, tính tuổi nghề bình quân, số mốt và số trung vị?

Bài 11: Thống kê điểm kiểm tra toán của lớp 10C , giáo viên bộ môn thu được số liệu :

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số	1	1	1	5	6	7	11	5	4	2	2	N = 45

Tính : Số trung bình, số trung vị, phương sai và độ lệch chuẩn (chính xác đến hàng phần chục)

Bài 12: Để được cấp chứng chỉ A- Anh văn của một trung tâm ngoại ngữ , học viên phải trải qua 6 lần kiểm tra trắc nghiệm , thang điểm mỗi lần kiểm tra là 100, và phải đạt điểm trung bình từ 70 điểm trở lên.Qua 5 lần thi Minh đạt điểm trung bình là 64,5 điểm . Hỏi trong lần kiểm tra cuối cùng Minh phải đạt ít nhất là bao nhiêu điểm để được cấp chứng chỉ?

Bài 13: Cho hai bảng phân bố tần số mô tả kết quả điểm thi môn Toán của hai lớp 10A và 10B của một trường(Hai lớp làm cùng một đề) như sau:

Bảng 1:Điểm thi của lớp 10A

Điểm	1	3	4	5	6	7	8	
Tần số	1	3	4	8	10	3	1	N=30

Bảng 2:Điểm thi của lớp 10B

Điểm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

Tần số	1	2	3	4	6	7	3	3	1	N=30
--------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	------

a) Tính phương sai của từng bảng .

b) Nhận xét lớp nào có điểm thi môn Toán đồng đều hơn, vì sao?

Bài 14: Người ta đã thống kê số gia cầm bị tiêu hủy trong vùng dịch của 6 xã A,B,...,F như sau (đơn vị: nghìn con):

Xã	A	B	C	D	E	F
Số lượng gia cầm bị tiêu hủy	12	27	22	15	45	5

Tính số trung vị, số trung bình , phương sai và độ lệch chuẩn (chính xác đến hàng trăm) của bảng số liệu thống kê trên

Bài 15: Tiến hành một cuộc thăm dò về số cân nặng của mỗi học sinh nữ lớp 10 trường THPT A, người điều tra chọn ngẫu nhiên 30 học sinh nữ lớp 10 và đề nghị các em cho biết số cân nặng của mình . Kết quả thu được ghi lại trong bảng sau (đơn vị là kg):

43	50	43	48	45	40	38	48	45	50	43	45	48	43	38
40	43	48	40	43	45	43	50	40	50	43	45	50	43	45

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất (chính xác đến hàng phần trăm).

b) Tính số trung bình ; số trung vị và mốt .

Bài 16: Điểm kiểm tra môn toán của hai học sinh An và Bình được ghi lại như sau :

An	9	8	4	10	3	10	9	7
Bình	6	7	9	5	7	8	9	9

a) Tính điểm trung bình của mỗi học sinh .

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn về điểm của mỗi học sinh (chính xác đến hàng phần trăm).

c) Học sinh nào có kết quả ổn định hơn? Vì sao ?

ÔN TẬP CHUYÊN ĐỀ 3

Bài 17: Điểm kiểm tra cuối năm môn Toán của lớp 10A ở một trường THPT như sau:

3	9	8	9	8	4	8	9	5	8
5	6	7	3	6	7	6	7	6	5
8	7	5	4	7	3	8	9	4	8
4	6	7	6	7	5	8	7	5	4

a) Đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?

b) Lập bảng phân bố tần số - tần suất.

Bài 18: Điều tra về thu nhập của công nhân xí nghiệp X (đơn vị: nghìn đồng/ tháng), người ta ghi được bảng tần số ghép lớp sau đây:

Lớp	Tần số
[800; 890]	15
[900; 990]	25
[1000; 1090]	28
[1100; 1190]	35
[1200; 1290]	40
[1300; 1390]	30
[1400; 1490]	27
	N

Tính kích thước mẫu và lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp.

Bài 19: Cân lần lượt 40 quả cam (đơn vị gram) ta được kết quả sau (mẫu số liệu)

85 86 86 86 86 86 87 87 87 87 87 88 88 88 88 89
 89 89 89 89 89 89 90 90 90 90 90 91 91 91 92 93
 93 93 93 94 94 94 94 94 94

Hãy lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp gồm [85; 86], [87; 88], [89; 90], [91; 92], [93; 94]?

Bài 20: Một lần kiểm tra toán của một lớp gồm 55 học sinh, thống kê điểm số như sau:

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số hs	0	3	3	5	4	12	10	8	7	1	2

a) Hãy lập bảng phân bố tần số-tần suất ghép lớp gồm 5 lớp [1;2], [3;4], [5;6], [7;8], [9;10]

b) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột, đường gấp khúc tần suất, biểu đồ tần suất hình quạt.

Bài 21: Điểm kiểm tra cuối học kỳ môn Toán của hai tổ học sinh lớp 10A như sau:

Tổ 1:	8	6	6	7	3	7	5	9	6	
Tổ 2:	4	10	7	3	8	6	4	5	2	6

a) Tính điểm trung bình của mỗi tổ.

b) Tính số trung vị và một của từng tổ.

Bài 22: Thống kê tuổi thọ của các bóng đèn do một nhà máy sản xuất ta có bảng số liệu sau:

Tuổi thọ (giờ)	Số bóng	Tuổi thọ (giờ)	Số bóng
[1200; 1300)	15	[1600; 1700)	42
[1300; 1400)	20	[1700; 1800)	34
[1400; 1500)	36	[1800; 1900)	30
[1500; 1600)	48	[1900; 2000]	25

a) Tính tuổi thọ trung bình của một bóng đèn.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài 23: Tại một cửa hàng bán hoa quả, người ta kiểm tra 65 thùng trái cây thì thấy số lượng quả bị hỏng trong các thùng là:

5	0	8	7	9	4	2	6	1	4	5	3	7
6	4	2	5	4	7	9	7	3	8	6	5	5
0	4	2	3	1	5	6	0	3	5	7	6	7
1	3	5	0	2	4	3	9	7	6	5	4	1
4	5	3	1	3	2	7	0	5	4	2	1	3

a) Lập bảng phân bố tần số - tần suất.

b) Tìm số trung vị và môđ. Nêu ý nghĩa của chúng.

c) Sử dụng máy tính bỏ túi hãy tìm số quả bị hỏng trung bình trong một thùng. Tính phương sai và độ lệch chuẩn (chính xác đến hàng phần trăm).

d) Lập bảng phân bố tần số ghép lớp gồm năm lớp, mỗi lớp là một đoạn có độ dài bằng 1.

Tính giá trị đại diện của mỗi lớp.

e) Tính số trung bình và độ lệch chuẩn theo bảng phân bố tần số ghép lớp.

Bài 24: Nghiên cứu cân nặng của trẻ sơ sinh thuộc nhóm có bố không hút thuốc lá và nhóm có bố nghiện thuốc lá, ta có kết quả sau (đơn vị: kg):

Nhóm trẻ có bố không hút thuốc lá:

3,8	4,1	3,8	3,6	3,8	3,5	3,6	4,1
3,6	3,8	3,3	4,1	3,3	3,6	3,5	2,9

Nhóm trẻ có bố nghiện hút thuốc lá:

3,3	2,9	2,9	3,3	3,6	3,5	3,3	2,9
2,6	3,6	3,8	3,6	3,5	2,6	2,6	

Nhóm trẻ nào có cân nặng trung bình lớn hơn ?

Bài 25: Hãy thống kê điểm kiểm tra môn Toán gần nhất của các học sinh trong từng tổ của lớp. Tính điểm trung bình và độ lệch chuẩn của mỗi tổ. Tổ nào có điểm trung bình cao nhất? Học sinh của tổ nào học đều nhất?

Bài 26: Một nhà nghiên cứu ghi lại tuổi của 30 bệnh nhân. Kết quả thu được mẫu số liệu như sau:

21	17	20	18	20	17	15	13	15	20
15	12	18	17	15	16	21	15	12	18
16	20	14	18	19	13	16	19	18	17

a) Lập bảng phân bố tần số.

b) Tính số trung bình và độ lệch chuẩn.

c) Tính số trung vị và môđ.

d) Vẽ biểu đồ tần số hình cột và đường gấp khúc tần số.

Bài 27: Một trăm bảy mươi chín củ khoai tây Chia thành chín lớp căn cứ trên khối lượng của chúng(đơn vị : gam). Ta có bảng phân bố tần số sau:

Lớp	Khoảng	Tần số
1	[10;19)	1
2	[10;19)	14
3	[10;19)	21
4	[10;19)	73
5	[10;19)	42
6	[10;19)	13
7	[10;19)	9
8	[10;19)	4
9	[10;19)	2

a) Tính Khối lượng trung bình của 1 củ khoai tây.

b) Tính độ lệch chuẩn và phương sai.

Bài 28: Một mẫu số liệu có kích thước mẫu N và có bảng phân bố tần suất như sau :

Giá trị(x)	0	1	2	3	4
Tần suất (%)	12,5	6,25	25	50	6,25

Tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của kích thước mẫu N.

Bài 29: Để so sánh, kiểm định chất lượng học tập của hai lớp 10A và 10B người ta ra một đề kiểm tra một tiết. Thống kê kết quả làm bài kiểm tra của học sinh hai lớp như sau:

Bảng thống kê các điểm số (Xi) của bài kiểm tra

Lớp	Số bài	Số bài kiểm tra đạt điểm Xi									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10A	46	0	0	2	5	9	9	12	5	4	0
10B	47	0	0	0	3	6	10	13	8	5	2

a) Hãy lập bảng phân bố tần suất của số liệu thống kê trên

b) Vẽ biểu đồ phân bố tần suất của hai lớp

c) Vẽ đường gấp khúc tần suất của hai lớp

Bài 30: Thống kê điểm số của 46 học sinh lớp 10C trong kì thi học kì như sau

3 6 9 7 8 6 7 5 8 5
5 4 6 7 4 8 9 6 7 5

7	6	5	7	5	8	4	9	5	7
5	7	9	7	6	7	8	6	7	5
3	4	6	7	4	6				

a) Lập bảng phân bố tần số

b) Lập bảng phân bố tần suất với các lớp sau: $[1; 2]$, $[3; 4]$, $[5; 6]$, $[7; 8]$ và $[9; 10]$

c) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột ghép lớp.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ CHƯƠNG V

Bài 0: Đơn vị điều tra: một hsinh lớp 10, kích thước của mẫu số liệu: 42

Bài 1: a) Dấu hiệu là số con, đơn vị điều tra là mỗi gia đình ở huyện A

Kích thước mẫu là $N=40$

b) Các giá trị khác nhau của mẫu số liệu trên là $1; 2; 3; 4; 5; 7$

Bài 2: Dấu hiệu điều tra: Số cân nặng của mỗi học sinh nữ lớp 10

Đơn vị điều tra: Một học sinh nữ.

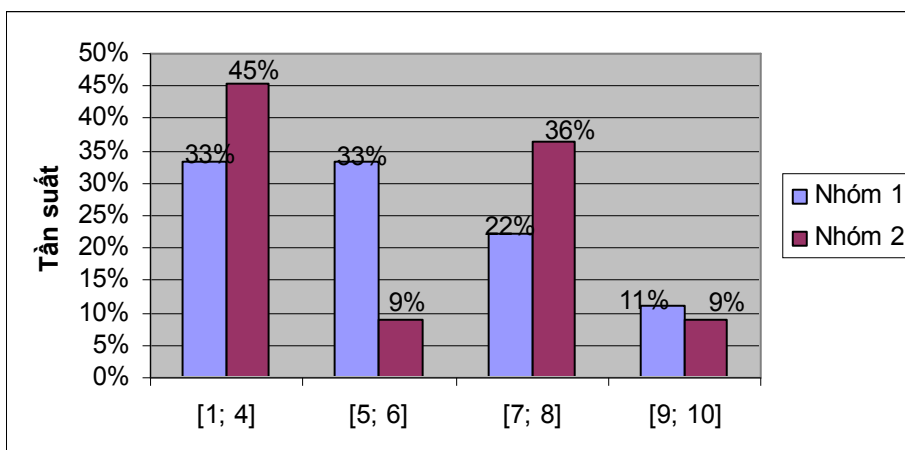
Kích thước mẫu: 30

Bài 3: a) Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp là

Lớp điểm	Tần số n_i	Tần suất f_i
$[1; 4]$	3	33%
$[5; 6]$	3	33%
$[7; 8]$	2	22%
$[9; 10]$	1	11%
N	9	100%

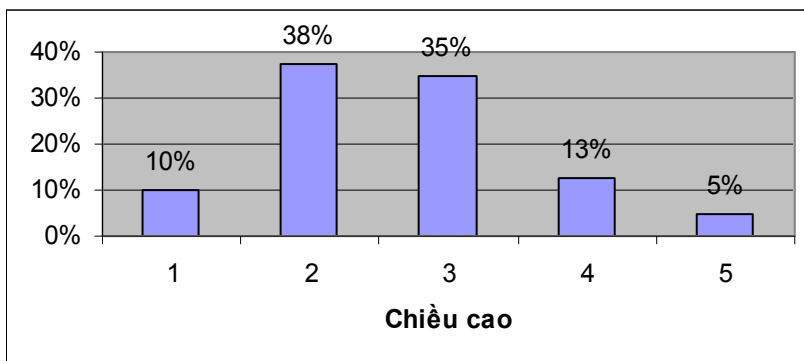
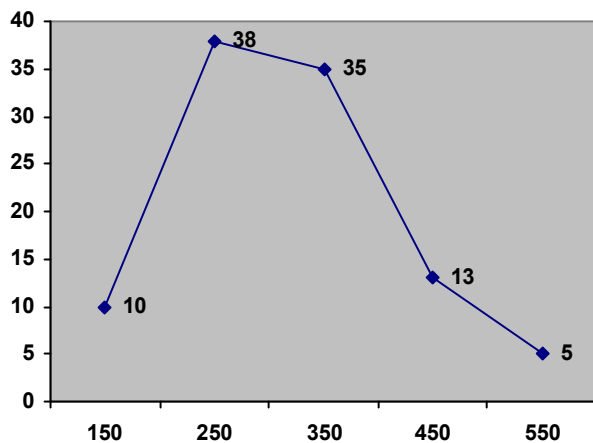
Lớp điểm	Tần số n_i	Tần suất f_i
$[1; 4]$	5	45%
$[5; 6]$	1	9%
$[7; 8]$	4	36%
$[9; 10]$	1	9%
N	11	100%

b) Biểu đồ tần suất hình cột của hai nhóm là



Bài 4: a) Bảng phân bố tần suất

Lớp chiều cao	Tần suất
[100;199)	10%
[200;299)	38%
[300;399)	35%
[400;499)	13%
[500;599)	5%
N	100%

b) Biểu đồ tần suất hình cột là**c) Đường gấp khúc tần suất là**

Lớp chiều cao	Tần suất f _i	Giá trị đại diện c _i
[100;199)	10%	150
[200;299)	38%	250
[300;399)	35%	350

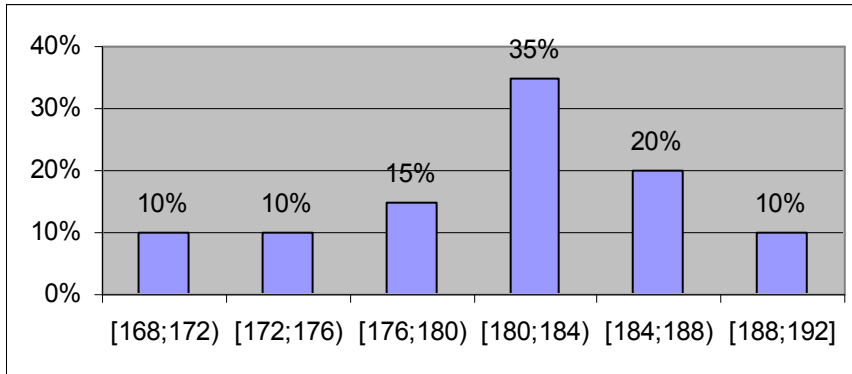
Bài 5: a) Bảng phân bố tần suất là

Lớp chiều cao	Tần suất
[168;172)	10%
[172;176)	10%
[176;180)	15%

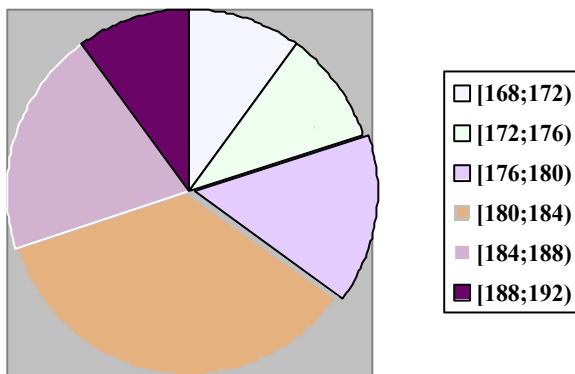
Lớp chiều cao	Tần suất	Giá trị đại diện c _i
[168;172)	10%	170
[172;176)	10%	174
[176;180)	15%	178

[180;184)	35%
[184;188)	20%
[188;192]	10%
N	100%

b) Biểu đồ tần số hình cột là



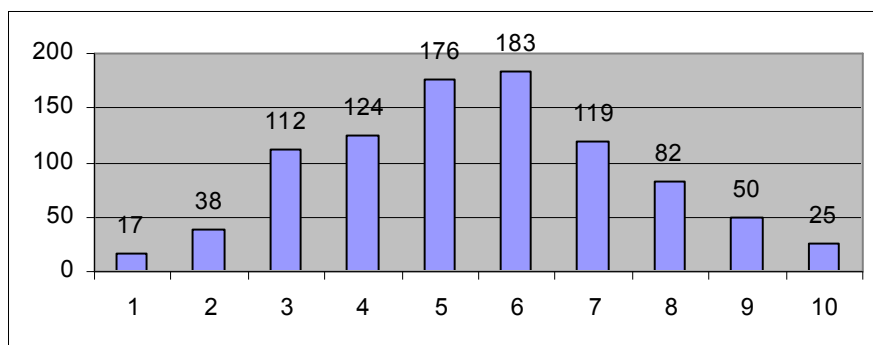
c) Biểu đồ tần suất hình quạt là



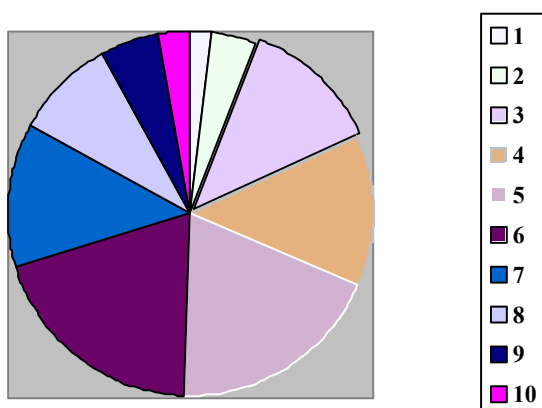
Bài 6: a) Ta có $N = 926$ do đó ta có kết quả sau

Điểm bài thi(x)	Tần số(n)	Tần suất %
1	17	1.84
2	38	4.10
3	112	12.10
4	124	13.39
5	176	19.01
6	183	19.76
7	119	12.85
8	82	8.86
9	50	5.40
10	25	2.70

b) Vẽ biểu đồ hình cột tần số



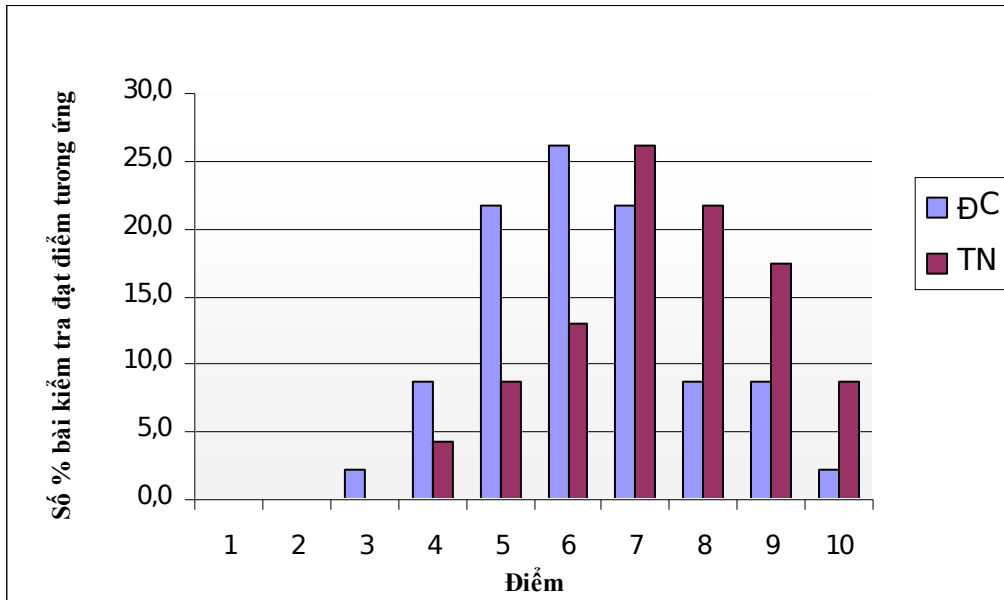
c) Biểu đồ tần suất hình quạt là



Bài 7: a) Bảng phân bố tần suất điểm của bài kiểm tra

Lớp	Số HS	Số % bài kiểm tra đạt điểm tương ứng									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10 C ₁	46	0	0	2,2	8,7	21,7	26,1	21,7	8,7	8,7	2,2
10 C ₂	46	0	0	0	4,3	8,7	13	26,1	21,7	17,4	8,7

b) Biểu đồ phân bố tần suất



Bài 8: a) Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[141;146]	6	15.0
[147;152]	4	10.0
[153;158]	2	5.0
[159;164]	6	15.0
[165;170]	10	25.0
[171;176]	12	30.0
	N = 40	

b) Chiều cao trung bình: $\bar{x} = 162,4$, phương sai: $s^2 = 116,19$, độ lệch chuẩn: $s = 10,78$

Bài 9: $\bar{x} = 15,23$, $M_e = 15,5$ phương sai: $s^2 = 3,96$, độ lệch chuẩn: $s = 1,99$

Bài 10: * Tổ I: - Tuổi nghề bình quân:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{2 + 2 + 5 + 7 + 9 + 9 + 9 + 10 + 10 + 11 + 12}{11} = 7,81$$

$$M_o = 9$$

- Số một:

$$M_e = 9$$

- Số trung vị:

* Tổ II: - Tuổi nghề bình quân:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{2+3+4+4+4+5+5+7+7+8}{10} = 4,9$$

$$M_o = 4$$

- Số một :

$$M_e = 4,5$$

- Số trung vị

$$\bar{x} = \frac{1}{45} \sum_{i=0}^{10} n_i x_i \gg 5,5$$

Bài 11: Số trung bình:

Số trung vị :

$$N=45 \text{ là số lẻ; } \frac{N+1}{2} = \frac{46}{2} = 23 \text{ ,số liệu thứ 23 là 6 } \Rightarrow \text{ Số trung vị } M_e = 6$$

$$s^2 = \frac{1}{45} \sum_{i=0}^{10} n_i x_i^2 - \frac{1}{45^2} \left(\sum_{i=0}^{10} n_i x_i \right)^2 \gg 4,7$$

Phương sai:

$$\text{Độ lệch chuẩn: } s = \sqrt{s^2} \gg 2,2$$

Bài 12: Gọi x là số điểm trong lần kiểm tra cuối mà Minh cần đạt được để được cấp chứng chỉ

Ta có số điểm qua 5 lần thi của Minh là $64,5 \cdot 5 = 322,5$

$$\text{Suy ra } \frac{x + 322,5}{6} = 70 \Rightarrow x = 97,5$$

Bài 13: Gọi $\bar{x}, \bar{y}$ lần lượt là số TBC của các số liệu trong bảng 1, bảng 2 ta có:

$$\bar{x} = \frac{1}{30} (1.2 + 3.3 + \dots + 1.8) = 5,2$$

$$\bar{y} = \frac{1}{30} (1.1 + 2.2 + \dots + 1.9) = 5,2$$

$$S_x^2 = \frac{1}{30} [(2-5,2)^2 + 3(3-5,2)^2 + \dots + (8-5,2)^2] \gg 1,83$$

$$S_y^2 = \frac{1}{30} [(1-5,2)^2 + 2(2-5,2)^2 + \dots + (9-5,2)^2] \gg 3,69$$

Vì $\bar{x} = \bar{y} = 5,2$ nhưng $S_x^2 < S_y^2$ nên điểm thi môn Toán của lớp 10A đồng đều hơn lớp 10B.

Bài 14: $M_e=22$; $\bar{x}=21$; $s^2 = 164,333$; $s = 12,8$

Bài 15: a) Bảng phân bố tần số - tần suất

Số cân nặng (kg)	38	40	43	45	48	50	
Tần số	2	4	9	6	4	5	N = 30
Tần suất(%)	6,67	13,33	30	20	13,33	16,67	

$$\bar{x} = \frac{2.38 + 4.40 + 9.43 + 6.45 + 4.48 + 5.50}{30} = 44,5$$

b) Số trung bình:

$$M_e = \frac{43 + 45}{2} = 44$$

Số trung vị:

$$M_o = 43$$

Bài 16: a) An : Số TB $\bar{x} = 7,5$

Bình : Số TB $\bar{x} = 7,5$

b) An: phương sai : $s_A^2 = 6,25$; Độ lệch chuẩn : $s = 2,5$

Bình : phương sai : $s_B^2 = 2$; Độ lệch chuẩn : $s = 1,41$

c) Vì $s_B^2 < s_A^2 \Rightarrow$ Bình có kết quả ổn định hơn

Bài 17: a) Đơn vị điều tra là một học sinh lớp 10A, kích thước mẫu $N = 40$

b) Bảng phân bố tần số - tần suất là

Điểm	3	4	5	6	7	8	9
Tần số	3	5	6	6	8	8	4
Tần suất(%)	8	13	15	15	20	20	10

Bài 18: Kích thước mẫu $N = 200$

Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp

Lớp	Tần số	Tần suất(%)
[800; 890]	15	8
[900; 990]	25	13
[1000; 1090]	28	14
[1100; 1190]	35	18
[1200; 1290]	40	20
[1300; 1390]	30	15
[1400; 1490]	27	14

Bài 19: Bảng phân bố tần số - tần suất

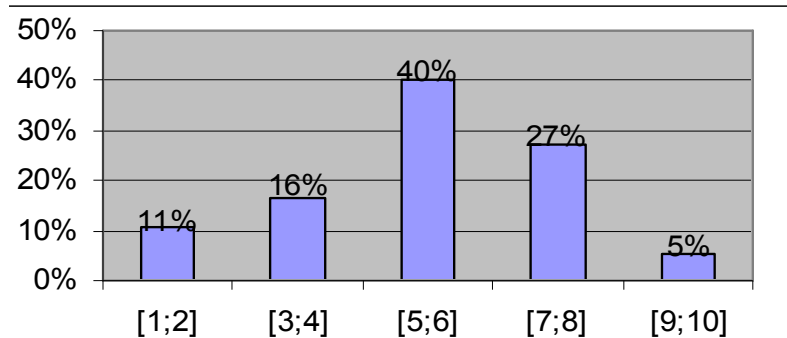
Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[85; 86]	6	15

	9	
[87; 88]	11	22,5
[89; 90]	4	27,5
[91; 92]	10	10
[93; 94]		25
	N = 40	

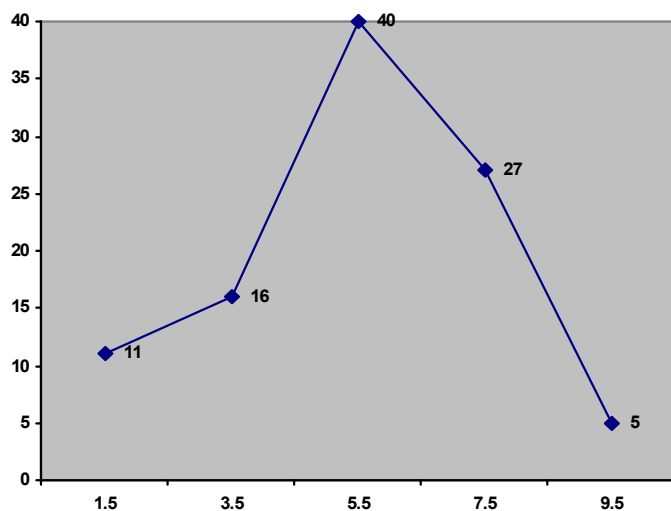
Bài 20: a) Bảng phân bố tần số-tần suất ghép lớp

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[1;2]	6	11
[3;4]	9	16
[5;6]	22	40
[7;8]	15	27
[9;10]	3	5
	N = 55	

b) Biểu đồ tần suất hình cột

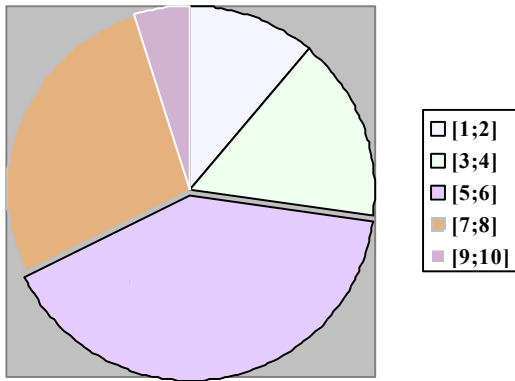


Đường gấp khúc tần suất



Lớp điểm	Tần suất (%)	Giá trị đại diện
[1;2]	11	1,5
[3;4]	16	3,5
[5;6]	40	5,5

Biểu đồ tần suất hình quạt



Bài 21: a) $\bar{x}_1 \approx 6,33, \bar{x}_2 \approx 5,5$

b) Tổ 1: $M_e = 6, M_0 = 6$, tổ 2: $M_e = 6, M_0 = 5,5$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N n_i c_i}{N} = 1622,8$$

Bài 22: a) Tuổi thọ trung bình của một bóng đèn là

b) Ta có $\sum_{i=1}^k n_i c_i^2 = 668218000, \sum_{i=1}^k n_i c_i = 405700$

Phương sai là

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i c_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^k n_i c_i \right)^2 = 39392,2$$

Độ lệch chuẩn là $s = 198,5$

Bài 23: a) Bảng phân bố tần số - tần suất

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tần số	5	6	6	9	9	11	6	8	2	3
Tần suất(%)	7,69	9,23	9,2	13,85	13,85	16,9	9,23	12,31	3,08	4,62

b) $M_e = 4, M_0 = 5$

c) $\bar{x} = 4,17; s^2 = 5,83; s = 2,42$

d) Bảng phân bố tần số ghép lớp là

Lớp	[0;1]	[2;3]	[4;5]	[6;7]	[8;9]
Tần số	11	15	20	14	5
Giá trị đại diện	0,5	2,5	4,5	6,5	8,5

$\bar{x} = 4,10; s^2 = 5,56; s = 2,36$

Bài 24: Nhóm trẻ có bố không hút thuốc lá: $\bar{x} = 3,65$

Nhóm trẻ có bố nghiện hút thuốc lá: $\bar{x} = 3,2$

Suy ra nhóm có bố không hút thuốc lá có cân nặng trung bình lớn hơn lớn hơn

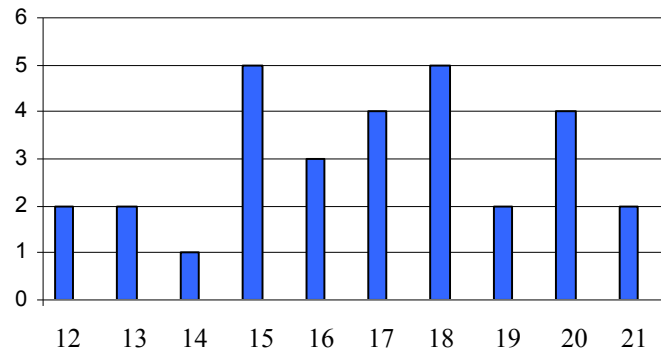
Bài 26: a) Bảng phân bố tần số

Tuổi	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Tần số	2	2	1	5	3	4	5	2	4	2

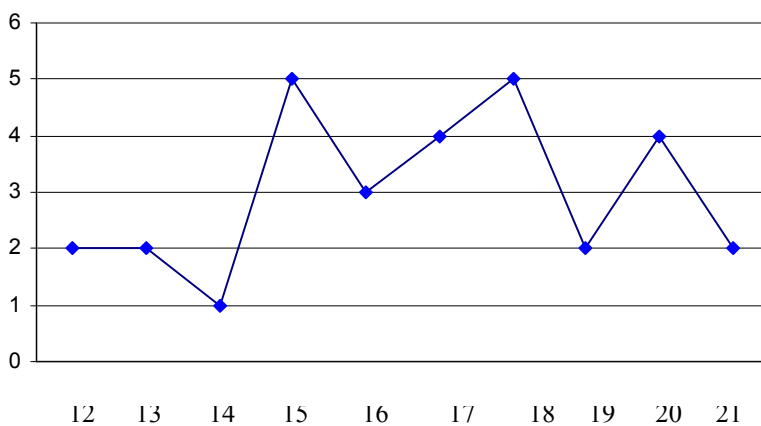
b) $\bar{x} = 16,8$; $s^2 = 6,5$; $s = 2,5$

c) $M_e = 17$, $M_o = 15$ hoặc $M_o = 18$

d) Biểu đồ tần số hình cột



Đường gấp khúc tần số



Bài 27: $\bar{x} \approx 48,3547486$; $s \approx 13,95127664$; $s^2 \approx 194,6381199$

Bài 28: Tần số của giá trị 0 là $\frac{12,5.N}{100} = \frac{N}{8}$

Tần số của giá trị 1 và 4 là $\frac{6,25.N}{100} = \frac{N}{16}$

Tần số của giá trị 2 là $\frac{25.N}{100} = \frac{N}{4}$

Tần số của giá trị 3 là $\frac{50.N}{100} = \frac{N}{2}$

$\Rightarrow N$ chia hết cho 2 ; 4 ; 8 ; 16

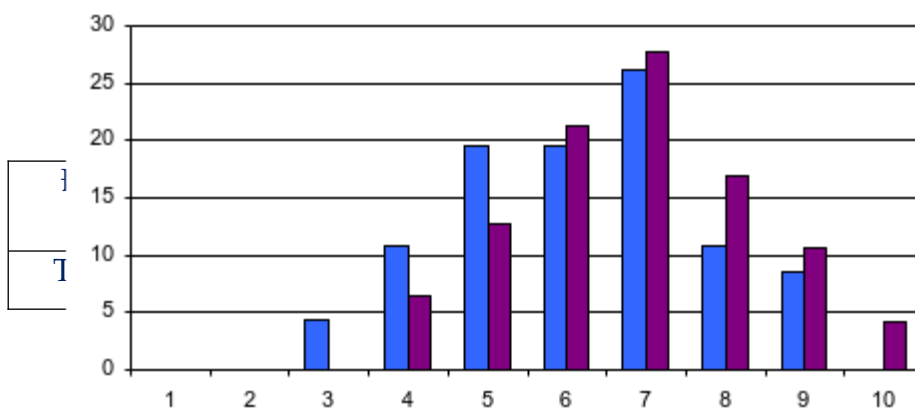
$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất có thể có của N là bội số chung nhỏ nhất của 4 số 2 ; 4 ; 8 ; 16

Vậy giá trị nhỏ nhất có thể có của N là 16

Bài 29: a) Bảng phân phối tần suất

Điểm Lớp	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10A	0	0	0	6,4	12,8	21,3	27,7	17	10,6	4,2
10B	0	0	4,3	10,9	19,6	19,6	26,1	10,9	8,6	0

b) Biểu đồ phân phối tần suất của hai lớp

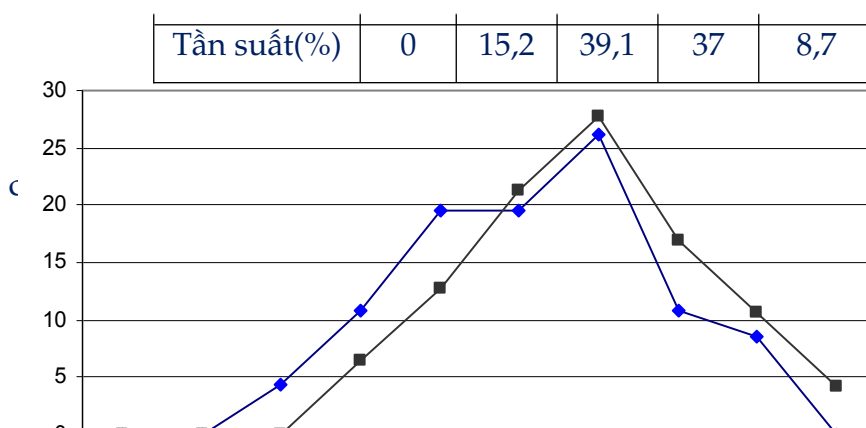


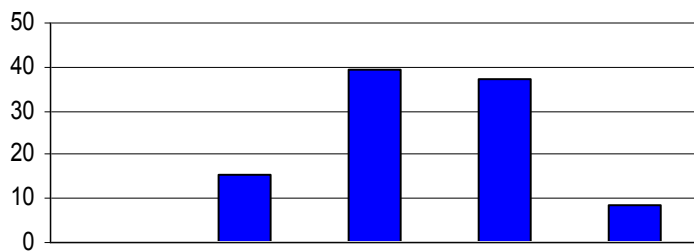
c) Đường gấp khúc tần suất

Bài 30: a) Bảng phân bố tần số

9	10
4	0

b) Bảng phân bố tần suất





Chuyên đề 15.

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Biểu thức mà trong đó ngoài các số, các ký hiệu phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa còn có các chữ (đại diện cho các số) được gọi là biểu thức đại số.
2. Trong biểu thức đại số, các chữ có thể đại diện cho những số tùy ý nào đó. Những chữ như vậy gọi là biến số (gọi tắt là biến). Khi thực hiện các phép toán trên các biến, ta có thể áp dụng những tính chất, quy tắc phép toán như trên các số.
3. Để tính giá trị của một biểu thức đại số tại những giá trị cho trước của các biến, ta thay các giá trị cho trước đó vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Hãy viết các biểu thức đại số biểu thị:

- a) Tổng của hai lần x và năm lần y bình phương;
- b) Bình phương của hiệu x và y ;
- c) Tổng các lập phương của x và y ;
- d) Tích của hiệu a và b với tổng các bình phương của a và b .

✓ *Tìm cách giải:* Dựa vào quy ước: Trong một biểu thức, phép tính nào làm trước thì đọc sau, phép tính nào làm sau thì đọc trước.

Giải

- a) $2x + 5y^2$;
 b) $(x - y)^2$;
 c) $x^3 + y^3$;
 d) $(a - b)(a^2 + b^2)$.

Ví dụ 2: Cho biểu thức $5x^2 - 4x + 3$. Tính giá trị của biểu thức tại:

- a) $x = -2$;
 b) $x = 0,5$;
 c) $x = 0$;
 d) $x = \frac{2}{5}$.

✓ *Tìm cách giải:* Thay biến x trong biểu thức đại số trên bằng các số đã cho ta được các biểu thức số. Kết quả nhận được khi thực hiện các phép tính trong biểu thức số đó chính là giá trị của biểu thức đại số tại các giá trị cho trước của biến

Giải

a) Thay $x = -2$ vào biểu thức trên ta có:

$$5.(-2)^2 - 4.(-2) + 3 = 5.4 + 8 + 3 = 31$$

Vậy giá trị của biểu thức: $5x^2 - 4x + 3$ tại $x = -2$ là 31.

b) Thay $x = 0,5$ vào biểu thức trên ta có:

$$5.(0,5)^2 - 4(0,5) + 3 = 5.(0,25) - 2 + 3 = 2,25$$

Vậy giá trị của biểu thức: $5x^2 - 4x + 3$ tại $x = 0,5$ là 2,25

c) Thay $x = 0$ vào biểu thức trên ta có:

$$5.0^2 - 4.0 + 3 = 3$$

Vậy giá trị của biểu thức: $5x^2 - 4x + 3$ tại $x = 0$ là 3.

d) Thay $x = \frac{2}{5}$ vào biểu thức trên, ta có:

$$5.\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 4.\frac{2}{5} + 3 = \frac{4}{5} - \frac{8}{5} + 3 = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$$

Vậy giá trị của biểu thức $5x^2 - 4x + 3$ tại $x = \frac{2}{5}$ là $2\frac{1}{5}$.

Ví dụ 3:

a) Hãy viết biểu thức đại số P biểu thị: Hiệu diện tích hình tam giác đáy là a, đường cao h_a với diện tích hình chữ nhật có kích thước là b và c (a, h_a , b, c có cùng đơn vị đo).

Tính P biết $a = 25cm; h_a = 10cm; b = 5cm; c = 4cm$

b) Hình tròn có chu vi là C thì diện tích Q của $\frac{1}{4}$ hình tròn được biểu thị bằng công thức nào. Tính Q biết $C = 3,2m; \pi \approx 3,14$

Giải

$$a) P = \frac{a \cdot h_a}{2} \cdot b \cdot c$$

Thay $a = 25cm; h_a = 10cm; b = 5cm; c = 4cm$ ta được:

$$P = \frac{25 \cdot 10}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 105 (cm^2)$$

b) Ta biết nếu hình tròn bán kính là r , thì $C = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{C}{2\pi}$.

Diện tích hình tròn bán kính r được cho bởi công thức: $S = \pi r^2$

$$\text{Do đó } Q = \frac{1}{4} \pi \cdot \left(\frac{C}{2\pi} \right)^2 = \frac{C^2}{16\pi}$$

$$\text{Thay } C = 3,2m \text{ ta có: } Q = \frac{(3,2)^2}{16\pi} \approx 0,2 (m^2)$$

Ví dụ 4: Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 - 2xy + 3y^3$ tại:

$$a) x = 2y = -4$$

$$b) x + y = 10 \text{ và } 3x = 2y$$

$$c) |x| = 0,5 \text{ và } y = 4$$

$$d) 5|x - 2| + |y + 3| = 0$$

✓ *Tìm cách giải:* Biểu thức A có hai biến x và y .

a) Đã cho biết giá trị của biến x ; suy ra y rồi thay giá trị của hai biến vào biểu thức A.

b) Từ quan hệ giữa hai biến $x + y = 5$ (1) và $3x = 2y$ (2) ta biểu diễn x theo y từ (1) rồi thay vào (2) để tìm giá trị của y . Từ đó tìm tiếp giá trị của x .

$$c) \text{ Lưu ý } |x| = 0,5 \Rightarrow \begin{cases} x = 0,5 \\ x = -0,5 \end{cases} \text{ nên phải xét cả hai cặp giá trị } (x = 0,5; y = 4) \text{ và } (x = -0,5; y = 4)$$

$$d) \text{ Lưu ý } |M| + |N| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} M = 0 \\ N = 0 \end{cases}$$

Giải

a) Với $x = 2y = -4$ ta có $x = -4$ và $y = -2$

Ta có $A = (-4)^2 - 2(-4)(-2) + 3(-2)^3 = 16 - 16 - 24 = -24$

b) Từ $x + y = 10 \Rightarrow x = 10 - y$ và $3x = 2y \Rightarrow 3(10 - y) = 2y$

$$\Leftrightarrow 30 - 3y = 2y \Leftrightarrow 30 = 5y \Leftrightarrow y = 6$$

Từ đó có $x = 4$. Thay vào biểu thức $A = 4^2 - 2.4.6 + 3.6^3 = 616$.

c) $|x| = 0,5 \Rightarrow \begin{cases} x = 0,5 \\ x = -0,5 \end{cases}$

Với $x = 0,5$ và $y = 4$ thì $A = (0,5)^2 - 2.(0,5).4 + 3.4^3 = 188,25$

Với $x = -0,5$ và $y = 4$ thì $A = (-0,5)^2 - 2.(-0,5).4 + 3.4^3 = 196,25$.

d) $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ và $y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -3$

Do đó $A = 2^2 - 2.2.(-3) + 3.(-3)^3 = -65$.

Ví dụ 5: Tính giá trị của biểu thức sau: $A = \frac{3a-4b}{4a-3b}$ biết $\frac{a}{b} = \frac{5}{9}$.

✓ **Tìm cách giải:** Do $\frac{a}{b} = \frac{5}{9}$ chứng tỏ $a \neq 0$ và $b \neq 0$ nên hướng giải là làm xuất hiện $\frac{a}{b}$ hoặc $\frac{b}{a}$ trong biểu thức bằng cách chia cả tử và mẫu cho a hoặc cho b. Hoặc có thể biểu diễn a theo b (hoặc b theo

a). Cũng có thể biểu diễn a và b theo biến phụ k từ tỉ số $\frac{5}{9}$.

Từ đó có một số cách giải sau:

Giải

Do $\frac{a}{b} = \frac{5}{9}$ nên $a \neq 0$ và $b \neq 0$.

➤ Cách 1: Chia cả tử và mẫu cho b, ta có:

$$A = \frac{3 \cdot \frac{a}{b} - 4}{4 \cdot \frac{a}{b} - 3} = \frac{3 \cdot \frac{5}{9} - 4}{4 \cdot \frac{5}{9} - 3} = \frac{\frac{15}{9} - 4}{\frac{20}{9} - 3} = \frac{-\frac{21}{9}}{-\frac{7}{9}} = 3$$

➤ Cách 2: Chia cả tử và mẫu cho a. Do $\frac{a}{b} = \frac{5}{9}$ nên $\frac{b}{a} = \frac{9}{5}$. Nên:

$$A = \frac{3 - 4 \cdot \frac{b}{a}}{4 - 3 \cdot \frac{b}{a}} = \frac{3 - 4 \cdot \frac{9}{5}}{4 - 3 \cdot \frac{9}{5}} = \frac{-\frac{5}{5}}{-\frac{7}{5}} = 3$$

➤ Cách 3: $\frac{a}{b} = \frac{5}{9}$ nên $9a = 5b$. Do đó:

$$A = \frac{(3a-4b) \cdot 9}{(4a-3b) \cdot 9} = \frac{3 \cdot 9a - 36b}{4 \cdot 9a - 27b} = \frac{15b - 36b}{20b - 27b} = \frac{-21b}{-7b} = 3$$

➤ Cách 4: $\frac{a}{b} = \frac{5}{9} \Rightarrow a = 5k; b = 9k$ nên $A = \frac{3 \cdot 5k - 4 \cdot 9k}{4 \cdot 5k - 3 \cdot 9k} = \frac{-21k}{-7k} = 3$

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{9} \Rightarrow a = \frac{5}{9}b \Rightarrow A = \frac{3 \cdot \frac{5}{9}b - 4b}{4 \cdot \frac{5}{9}b - 3b} = \frac{\frac{15}{9}b - 4b}{\frac{20}{9}b - 3b} = \frac{-\frac{21}{9}b}{-\frac{7}{9}b} = 3$$

➤ Cách 5:

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{9} \Rightarrow b = \frac{9}{5}a \Rightarrow A = \frac{3a - 4 \cdot \frac{9}{5}a}{4a - 3 \cdot \frac{9}{5}a} = \frac{-\frac{21}{5}a}{-\frac{7}{5}a} = 3$$

➤ Cách 6:

Ví dụ 6: Tính giá trị của biểu thức sau: $B = \frac{4a+b}{5a-2018} + \frac{4a+2018}{5a-b}$

biết $a-b=2018; b \neq -4a; a \neq -504,5; a \neq 403,6; b \neq 5a$

✓ **Tìm cách giải:** Do $b \neq -4a; a \neq -504,5; a \neq 403,6; b \neq 5a$ nên các mẫu số trong B trước và sau khi biến đổi đều khác 0. Mặt khác, $a-b=2018$ nên ta có thể thay $2018 = a-b$ trong biểu thức hoặc biểu diễn a theo b; b theo a từ $a-b=2018$. Từ đó có một số cách giải sau:

Giải

➤ Cách 1: Thay $2018 = a-b$ vào B, ta có:

$$B = \frac{4a+b}{5a-(a-b)} + \frac{4a+(a-b)}{5a-b} = \frac{4a+b}{4a+b} + \frac{5a-b}{5a-b} = 1+1=2$$

➤ Cách 2: Biến đổi $B = \frac{5a-a+b}{5a-2018} + \frac{4a+2018}{4a+a-b} = \frac{5a-(a-b)}{5a-2018} + \frac{4a+2018}{4a+(a-b)}$

Thay $x-y=8$ ta có $B = \frac{5a-2018}{5a-2018} + \frac{4a+2018}{4a+2018} = 1+1=2$

➤ Cách 3: Từ $a-b=2018 \Rightarrow a=2018+b$ và thay vào B, ta có:

$$B = \frac{4(2018+b)+b}{5(2018+b)-2018} + \frac{4(2018+b)+2018}{5(2018+b)-b} = \frac{8072+5b}{8072+5b} + \frac{10090+4b}{10090+4b} = 1+1=2$$

➤ Cách 4: Từ $a-b=2018 \Rightarrow b=a-2018$ và thay vào B, ta có:

$$B = \frac{4a+(a-2018)}{5a-2018} + \frac{4a+2018}{5a-(a-2018)} = \frac{5a-2018}{5a-2018} + \frac{4a+2018}{4a+2018} = 1+1=2$$

Ví dụ 7: Tìm giá trị các biến để:

- a) Biểu thức $\frac{2016}{3x-2019}$ có giá trị bằng 1;
 b) $(t^4+4)(x^3-1)(y^2-9)(z+6)$ có giá trị bằng 0;
 c) $z^2-8z+10$ có giá trị lớn hơn 10.

✓ Tìm cách giải:

- a) $\frac{2016}{3x-2019}$ có giá trị bằng 1 có nghĩa là $\frac{2016}{3x-2019} = 1$ (hoặc là $2016 = 3x - 2019$).
 b) Một tích bằng 0 khi ít nhất 1 thừa số bằng 0.
 c) $z^2-8z+10$ có giá trị lớn hơn 10 nghĩa là $z^2-8z > 0$.

Giải

- a) $3x - 2016 = 2019 \Leftrightarrow 3x = 4035 \Leftrightarrow x = 1345$.
 b) Do $t^4 + 4 > 0$ với mọi giá trị của t nên $(t^4+4)(x^3-1)(y^2-9)(z+6) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-1=0 \\ y^2-9=0 \\ z+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y^2=9 \\ z=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\pm 3 \\ z=-6 \end{cases}$$

 c) $z^2-8z+10 > 10 \Leftrightarrow z^2-8z > 0 \Leftrightarrow z(z-8) > 0$

Suy ra z và $z-8$ phải cùng dấu nghĩa là $\begin{cases} z > 0 \\ z-8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z > 0 \\ z > 8 \end{cases} \Rightarrow z > 8$

hoặc $\begin{cases} z < 0 \\ z-8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z < 0 \\ z < 8 \end{cases} \Rightarrow z < 0$

Vậy để $z^2-8z+10$ có giá trị lớn hơn 10 thì $\begin{cases} z > 8 \\ z < 0 \end{cases}$.

Ví dụ 8: Cho $abcd \neq 0; a-b-c=0$ và $c=-3d$.

Tính giá trị của biểu thức $M = \left(1 - \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 - \frac{c}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{d}\right)$

✓ Tìm cách giải: Do $a.b.c.d \neq 0$ nên a, b, c, d đều khác 0.

Ta có: $1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}; 1 + \frac{b}{c} = \frac{c+b}{c}; 1 - \frac{c}{a} = \frac{a-c}{a}$

Với $c = -3d$ và từ $a-b-c=0 \Rightarrow -c=b-a; a-c=b; c+b=a$ thay vào biểu thức ta có cách giải sau:

Giải

$$M = \frac{b-a}{b} \cdot \frac{c+b}{c} \cdot \frac{a-c}{a} \cdot \left(1 + \frac{-3d}{d}\right) = \frac{-c}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} \cdot (-2) = (-1) \cdot (-2) = 2$$

C. Bài tập áp dụng

15.1. Tìm các cặp giữa biểu thức đại số a), b),... với các diễn đạt tương ứng 1); 2);...

$5a - (5b)^2$	a)	1)	Bình phương hiệu các bình phương của a và b
$3 + 3p^3$	b)	2)	Lập phương tích của 3 và x bình phương
$(3x^2)^3$	c)	3)	Hiệu của 5a và bình phương của 5b
$(x-y)(x+y)$	d)	4)	Bình phương của hiệu hai số 2a và b
$(a^2 - b^2)^2$	e)	5)	Tổng của 3 với 3 lần lập phương của p
$(2a-b)^2$	g)	6)	Tích của hiệu hai số x và y với tổng của chúng

15.2. Viết các biểu thức đại số biểu thị:

- a) Hiệu giữa bình phương của a với 2 lần tích của b và c;
- b) Bình phương hiệu các lập phương của x và y ;
- c) Hiệu giữa lập phương của tổng các bình phương của a và b với hiệu các lập phương của chúng;
- d) Tích của tổng hai số x và y với hiệu các bình phương của chúng.

15.3. Tính giá trị của biểu thức $P = 6x^2 - 4,5xy + 3$ tại:

- a) $x = -2; y = 5$;
- b) $|x| = 3; |y| = 2$;
- c) $|x-5| + |y+2| = 0$.

15.4. Viết các biểu thức đại số biểu thị:

- a) Tổng A chu vi hình vuông cạnh a với chu vi tam giác đều cạnh b. Tính giá trị của A với $a = 8cm; b = 9cm$;
- b) Hiệu B diện tích hình vuông cạnh c với diện tích hình chữ nhật cạnh c và d. Tính giá trị của B với $c = \frac{8}{9}dm; d = \frac{1}{3}dm$;
- c) Hiệu C giữa diện tích hình thang hai đáy e, g đường cao h với diện tích tam giác cạnh đáy e, đường cao tương ứng h. Tính giá trị của C với $e = 18,4m; g = 16,5m; h = 6,8m$;

d) Tổng D diện tích hai hình tròn bán kính r_1 và r_2 . Tính giá trị của D với $r_1 = \frac{3}{4}m$ và $r_2 = 0,5m$; $\pi \approx 3,14$.

15.5*. Với n là số tự nhiên:

a) Viết biểu thức biểu diễn: Tổng P của 100 số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ n . Tính giá trị của P khi $n = 10$;

b) Viết biểu thức biểu diễn: Tổng Q của 10 số tự nhiên lẻ liên tiếp. Tìm 10 số lẻ đó biết $Q = 200$;

c) Biết tổng ba số tự nhiên chẵn liên tiếp là 36. Tính giá trị của H là hiệu các bình phương của số lớn nhất và số nhỏ nhất trong ba số đó.

15.6. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $E = 2x - 3y + 5z$ tại $x = \frac{2}{5}$; $y = -\frac{1}{3}$; $z = \frac{1}{2}$

b) $F = 2x^2 - 4|y| + 3z$ tại $x = 2$; $y = -3$; $|z| = 4$

c) $G = 2|x - 5| - 2xy^2 + 3z^3$ tại $|x| = 3$; $y = -2$; $z = -1$.

15.7. Giữa một cái sân hình vuông cạnh a (mét) người ta xây một vườn hoa hình vuông có cạnh b (mét) ($a > b$),

a) Viết biểu thức đại số biểu thị diện tích S còn lại của sân.

b) Viết biểu thức đại số biểu diễn số viên gạch cần mua N để lát kín sân nếu gạch hình hộp chữ nhật, mặt hình chữ nhật của viên gạch để lát trên sân có kích thước dài $c(m)$; rộng $d(m)$;

c) Tính N nếu $a = 40m$; $b = 12m$; $c = 0,2m$; $d = 0,1m$.

15.8. Một bể nước có ba vòi chảy vào và một vòi chảy ra. Vòi thứ nhất mỗi phút chảy vào x lít nước. Vòi thứ hai cứ hai phút chảy vào y lít nước. Vòi thứ ba cứ ba phút chảy vào z lít nước. Vòi thứ tư chảy ra cứ bốn phút chảy mất t lít nước.

a) Viết biểu thức đại số biểu thị lượng nước V có thêm trong bể sau khi mở cả 4 vòi trong thời gian a phút;

b) Tính giá trị của V nếu $x = 20$; $y = 60$; $z = 45$; $t = 40$ và $a = 15$.

15.9. Tính giá trị của các biểu thức đại số sau:

a) $A = \frac{9a - 8b}{8a - 9b}$ biết $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$;

b) $B = \frac{3a-b}{5a-2018} - \frac{6a+2b-2018}{4a+b}$ với $2a+b=2018; a \neq \frac{2018}{5}; a \neq -4b$;

c) $C = \frac{6a-2b}{2a+2018} - \frac{3b-a}{2b-2018}$ với $a-b=2018$ và $a \neq -1009; b \neq 1009$.

$$M = \frac{9x^2 + 5y^2}{18x^2 - 5y^2}$$

15.10. Tính giá trị của biểu thức

a) Với $\frac{x^2}{5} = \frac{y^2}{9}$ và $x \neq 0; y \neq 0$;

b) Với $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$.

15.11. Tìm giá trị các biến để:

a) Biểu thức $A = (x-5)(y^2-16)(z^3+1)$ có giá trị bằng 0;

b) Biểu thức $B = (x^2+2) - (2xy-2016)$ có giá trị bằng 2018;

c) Biểu thức $C = \frac{x^2-3x+14}{2}$ có giá trị nhỏ hơn giá trị của $x+7$;

15.12. Cho biểu thức đại số $D = \frac{x-6}{x+3}$.

Tìm giá trị nguyên của x để D có giá trị nguyên.

15.13. Cho $a.b.c.d \neq 0; a+b+c=0$ và $c=3d$.

Tính giá trị của biểu thức: $E = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) \left(\frac{a+b}{d} - 5\right)$

15.14. Tính giá trị của biểu thức $G = (x+y)(x-6)(y-6)$ biết rằng:

$x+y-6=0$ và $xy=8$

15.15*. Tính giá trị biểu thức

$E = (a-b^2)(a^2-2b^3)(a^3-3b^4) \dots (a^{2017}-2018b^{2019})$ tại:

a) $a=4; b=2$;

b) $a=-1; b=0$.

$$a = 3 + \frac{2}{3} + \frac{2}{1 + \frac{1}{2}} \quad b = 4 - \frac{3}{1 - \frac{1}{2}}$$

15.16. Cho

Tính giá trị các biểu thức:

$$M = \frac{b + \frac{2}{b}}{a - \frac{2}{a}}$$

a) ;

$$P = a - b + \frac{a + b}{a + \frac{a + b}{a + \frac{a + b}{a}}}$$

b) .

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

15.1. Các cặp là:

- a) với 3); b) với 5); c) với 2);
 d) với 6); e) với 1); g) với 4).

15.2.

- a) $a^2 - 2bc$
 b) $(x^3 - y^3)^2$
 c) $(a^2 + b^2)^3 - (a^3 - b^3)$
 d) $(x + y)(x^2 - y^2)$

15.3.

- a) $P = 72$;
 b) Xét 4 trường hợp:

$$\text{Với } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \text{ thì } P = 30;$$

$$\text{với } \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \text{ thì } P = 84;$$

$$\text{với } \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \text{ thì } P = 84;$$

$$\text{với } \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \text{ thì } P = 30;$$

c) $|x - 5| + |y + 2| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$

Do đó $P = 198$

15.4.

- a) $A = 4a + 3b$; Giá trị của A là 59 (cm).
 b) $B = c^2 - cd$; Giá trị của B là $\frac{40}{81}$ (dm²)
 c) $C = \frac{(e + g)h}{2} - \frac{eh}{2}$; Giá trị của C là 56,1 (m²)
 d) $D = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$; Giá trị của D là $\frac{\pi \cdot 13}{16} \approx 2,55$ (m²)

15.5. Với $n \in N$

a) $P = n + (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + 98) + (n + 99)$

$$P = 100n + (1 + 99) \cdot 99 : 2 \quad \text{hay} \quad P = 100n + 4950;$$

$$\text{Tại } n = 10 \text{ thì } P = 1000 + 4950 = 5950.$$

b) Số tự nhiên lẻ có dạng $2n+1$; hai số tự nhiên lẻ liên tiếp hơn kém nhau 2 đơn vị nên:

$$Q = (2n+1) + (2n+3) + \dots + (2n+17) + (2n+19)$$

$$Q = 20n + 100$$

$$\text{Ta có: } Q = 20n + 100 = 200 \Leftrightarrow n = 5.$$

Vậy 10 số lẻ liên tiếp đó là 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; 25; 27; 29.

c) Gọi số tự nhiên chẵn nhỏ nhất trong ba số chẵn liên tiếp là $2n$, hai số tự nhiên chẵn liên tiếp hơn kém nhau 2 đơn vị nên tổng ba số là:

$$2n + (2n+2) + (2n+4) = 36$$

$$\Leftrightarrow n = 5 \text{ số chẵn nhỏ nhất trong ba số là } 2n = 10 \Rightarrow H = 14^2 - 10^2 = 96.$$

(Chú ý: Ở câu c) ta có thể gọi số tự nhiên chẵn nhỏ nhất trong ba số chẵn liên tiếp là a . Ta có $a + (a+2) + (a+4) = 36 \Leftrightarrow a = 10 \Rightarrow H = 14^2 - 10^2 = 96$).

15.6.

$$\text{a) } E = 4, 3;$$

$$\text{b) Do } |z| = 4 \text{ nên } z = \pm 4.$$

$$\text{Tại } x = 2; y = -3; z = 4 \text{ thì } F = 8;$$

$$\text{Tại } x = 2; y = -3; z = -4 \text{ thì } F = -16.$$

$$\text{c) Do } |x| = 3 \text{ nên } x = \pm 3;$$

$$\text{Tại } x = 3; y = -2; z = -1 \text{ thì } G = 2 \cdot |3-5| - 2 \cdot 3 \cdot (-2)^2 + 3(-1)^3 = -23;$$

$$\text{Tại } x = -3; y = -2; z = -1 \text{ thì } G = 2 \cdot |-3-5| - 2 \cdot (-3) \cdot (-2)^2 + 3(-1)^3 = 37.$$

15.7.

$$\text{a) } S = a^2 - b^2.$$

$$\text{b) } N = \frac{a^2 - b^2}{c \cdot d}.$$

$$\text{c) Với } a = 40m; b = 12m; c = 0,2m; d = 0,1m \text{ thì } N = \frac{40^2 - 12^2}{0,2 \times 0,1} = 72800 \text{ (viên gạch).}$$

15.8.

$$a) \quad V = a \left(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - \frac{t}{4} \right)$$

$$b) \quad V = 15 \cdot \left(20 + \frac{60}{2} + \frac{45}{3} - \frac{40}{4} \right) = 825 \quad (\text{lít nước}).$$

15.9.

$$a) \quad A = \frac{3}{14} \quad (\text{cách giải như ví dụ 5}).$$

$$b) \quad \text{Thay } 2018 = 2a + b \text{ vào biểu thức B ta có } B = 2$$

$$c) \quad \text{Lưu ý } 2a + 2018 = 2a + a - b = 3a - b \text{ và } 6a - 2b = 2(3a - b).$$

$$\text{Mặt khác: } 3b - a = 3b - (2018 + b) = 2b - 2018. \text{ Do đó } C = 2 - 1 = 1.$$

✓ *Chú ý:* Bài có nhiều cách giải

15.10. Bài có nhiều cách giải. Sau đây là một cách:

$$a) \quad \text{Từ } \frac{x^2}{5} = \frac{y^2}{9} \Rightarrow 9x^2 = 5y^2 \quad M = \frac{5y^2 + 5y^2}{10y^2 - 5y^2} = \frac{10y^2}{5y^2} = 2.$$

$$b) \quad \text{Từ } \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y^2 = 9x^2 \quad M = \frac{y^2 + 5y^2}{2y^2 - 5y^2} = \frac{6y^2}{-3y^2} = -2.$$

15.11.

$$a) \quad A = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \\ y^2 - 16 = 0 \\ z^3 + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{Đáp số: } (x; y; z) = (5; 4; -1); (x; y; z) = (5; -4; -1)$$

$$b) \quad (x^2 + 2) - (2xy - 2016) = 2018 \Leftrightarrow x^2 - 2xy = 0 \Leftrightarrow x(x - 2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$c) \quad C < x + 7 \Leftrightarrow x(x - 5) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 5.$$

$$15.12. \quad D = 1 - \frac{9}{x+3}; D \in Z \quad \text{khi } x+3 \text{ là ước số của } 9 \Rightarrow x \in \{-12; -6; -4; -2; 0; 6\}.$$

$$15.13. \quad E = \frac{b+a}{b} \cdot \frac{c+b}{c} \cdot \frac{a+c}{a} \cdot \left(\frac{-c}{d} - 5 \right) = \frac{-c}{b} \cdot \frac{-a}{c} \cdot \frac{-b}{a} \cdot (-3 - 5) = 8.$$

15.14. Từ $x + y - 6 = 0$ suy ra $x + y = 6$; $x - 6 = -y$; $y - 6 = -x$. Vậy $G = 48$.

15.15*.

a) $E = 0$ vì tại $a = 4$; $b = 2$ thì $a^2 - 2b^3 = 4^2 - 2 \cdot 2^3 = 0$.

b) $E = (-1)(-1)^2 \cdot (-1)^3 \dots (-1)^{2016} \cdot (-1)^{2017} = -1$.

vì có $\frac{2017-1}{2} + 1 = 1009$ thừa số (-1) và $\frac{2016-2}{2} + 1 = 1008$ thừa số $(+1)$.

15.16. Tính được $a = 5$; $b = -2$.

Thay vào a) $M = -\frac{15}{23}$; b) $P = \frac{1169}{155}$.

Chuyên đề 16

ĐƠN THỨC – ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

A. Kiến thức cần nhớ

- Đơn thức là biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến.
- Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến, mà mỗi biến đã được nâng lên lũy thừa với số mũ nguyên dương. Số nói trên gọi là hệ số, phần còn lại gọi là phần biến của đơn thức thu gọn.
 - * Một số cũng được coi là một đơn thức thu gọn
 - * Trong đơn thức thu gọn, mỗi biến chỉ được viết một lần. Thông thường ta viết hệ số trước, các biến được viết tiếp theo thứ tự bảng chữ cái.
- Bậc của đơn thức có hệ số khác 0 là tổng số mũ của tất cả các biến có trong đơn thức đó. Số thực khác 0 là đơn thức bậc 0. Số 0 được coi là đơn thức không có bậc.
- Để nhân hai đơn thức ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.
- Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức có hệ số khác 0 và có cùng phần biến. Các số khác 0 cũng được coi là các đơn thức đồng dạng.
- Để cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức. Thu gọn các đơn thức. Những đơn thức nào đồng dạng?

a) $15x^2 - 3x^3y^3$;

b) $5, 3x^3, (-3)x^5y^2$;

c) $25x^2 + 3x^4y^3$;

d) $25(x^2 + 3x^4y^3)$;

e) $-\frac{5bc}{6a}$;

f) $-\frac{5bc}{6a}x^5y^2z^3 \cdot 1,2bxy^3$;

g) $-\frac{5bc}{6a}x^5y^2z^3 + 1,2bxy^3$;

h) $-25ax^3y^2 \cdot (-3bx^4y^3) \cdot 0,4cx^5y^4$;

i) $-25ax^3y^2 - 3bx^4y^3 \cdot 0,4cx^5y^4$;

k) $(-25ax^3y^2 - 3bx^4y^3) \cdot 0,4cx^5y^4$;

l) $-\frac{2a}{3c}$;

m) $-\frac{2a}{3c}x^8$;

n) $-\frac{2a}{3c}x^8(-y^2)$

p) $-\frac{2a}{3c}x^8 - y^2$.

✓ *Tìm cách giải:* Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến, mà mỗi biến đã được nâng lên lũy thừa với số mũ nguyên dương. Do đó muốn thu gọn đơn thức ta thực hiện nhân các số với nhau nhân các lũy thừa của cùng một biến (cơ số) với nhau.

Giải

Đơn thức:

b) $5,3x^3 \cdot (-3)x^5y^2 = -15,9x^8y^2$;

e) $-\frac{5bc}{6a}$;

f) $-\frac{5bc}{6a}x^5y^2z^3 \cdot 1,2bxy^3 = -\frac{b^2c}{a}x^6y^5z^3$;

h) $-25ax^3y^2(-3bx^4y^3) \cdot 0,4cx^5y^4 = 30abcx^{12}y^9$;

l) $-\frac{2a}{3c}$;

m) $-\frac{2a}{3c}x^8$;

$$n) -\frac{2a}{3c}x^8(-y^2) = \frac{2a}{3c}x^8y^2$$

Hai đơn thức $15,9x^8y^2$ và $\frac{2a}{3c}x^8y^2$ đồng dạng. Bậc của đơn thức là 10.

Hai đơn thức $-\frac{2a}{3c}$ và $-\frac{5bc}{6a}$ đồng dạng. Bậc của đơn thức: bậc 0.

Ví dụ 2: Tính tích của các đơn thức và tìm bậc của các đơn thức, sau đó tính tổng các đơn thức đồng dạng:

$$a) \left(\frac{25}{36}x^6y^5z^3\right) \text{ và } \left(-\frac{3}{5}\right)^2 x^3y^4z^5;$$

$$b) -0,5x^3y^2z^4t \text{ và } (2yz^3)^3;$$

$$c) -2,5x^5y^6z^3 \text{ và } -8,4x^4y^3z^5;$$

$$d) (3xy^2z^3)^2 \text{ và } -8xyz^4t.$$

✓ *Tìm cách giải:*

Để nhân hai đơn thức ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.

Lưu ý các phép tính về lũy thừa $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ và $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Để cộng các đơn thức đồng dạng, ta cộng các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

Giải

$$a) \left(\frac{25}{36}x^6y^5z^3\right) \cdot \left[\left(-\frac{3}{5}\right)^2 x^3y^4z^5\right] = \frac{1}{4}x^9y^9z^8 = 0,25x^9y^9z^8. \text{ Bậc 26.}$$

$$b) (-0,5x^3y^2z^4t) \cdot (2yz^3)^3 = (-0,5x^3y^2z^4t) \cdot 8y^3z^9 = -4x^3y^5z^{13}t. \text{ Bậc 22.}$$

$$c) (-2,5x^5y^6z^3)(-8,4x^4y^3z^5) = 21x^9y^9z^8. \text{ Bậc 26.}$$

$$d) (2xy^2z^3)^2 \cdot (-8xyz^4t) = 4x^2y^4z^6 \cdot (-8xyz^4t) = -32x^3y^5z^{10}t. \text{ Bậc 22.}$$

Tổng các đơn thức đồng dạng:

$$0,25x^9y^9z^8 + 21x^9y^9z^8 = 21,25x^9y^9z^8.$$

$$-4x^3y^5z^{13}t - 32x^3y^5z^{13}t = -36x^3y^5z^{13}t.$$

Ví dụ 3: Cho 3 đơn thức: $3a^2x^m y^{n-1}$; $\frac{2}{15}b^2(x^n y^m)^3$; $-2,5c^2x^{m+2n}y^3$ với a; b; c là các hằng số, m; n là các số tự nhiên.

a) Tìm tích P của ba đơn thức trên.

b) Tính giá trị của tích P với $a = -1; b = -\frac{1}{2}; c = 2; m = 2; n = 3; x = -1; y = 1$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad P &= 3a^2 x^m y^{n-1} \cdot \frac{2}{15} b^2 (x^n y^m)^3 \cdot (-2,5 c^2 x^{m+2n} y^3) \\ &= 3a^2 \cdot \frac{2}{15} b^2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) c^2 \cdot x^m \cdot x^{3n} \cdot x^{m+2n} \cdot y^{n-1} \cdot y^{3m} \cdot y^3 \\ &= -a^2 b^2 c^2 x^{2m+5n} y^{n+3m+2} \end{aligned}$$

Thay $a = -1; b = -\frac{1}{2}; c = 2; m = 2; n = 3; x = -1; y = 1$

$$P = -a^2 b^2 c^2 x^{2m+5n} y^{n+3m+2} = -(-1)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot (-1)^{19} \cdot 1^{11} = 1$$

Ví dụ 4*: Tìm tích B của các đơn thức $B_1; B_2; B_3; \dots; B_{2018}$ với

$$B_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)x; B_2 = \left(1 - \frac{1}{3}\right)x^2; B_3 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)x^3; \dots; B_{2018} = \left(1 - \frac{1}{2019}\right)x^{2018}$$

✓ **Tìm cách giải:** Lưu ý nhân nhiều lũy thừa của cùng cơ số: $a^m \cdot a^n \dots a^p = a^{m+n+\dots+p}$

Và tổng $1 + 2 + 3 + \dots + n = (1 + n)n : 2$

Với $n = 2018$ thì $1 + 2 + 3 + \dots + 2018 = 2019 \cdot 2018 : 2 = 2037171$

Giải

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}; 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}; \dots; 1 - \frac{1}{2019} = \frac{2018}{2019}$$

Do đó: $B = \frac{1}{2}x \cdot \frac{2}{3}x^2 \cdot \frac{3}{4}x^3 \dots \frac{2018}{2019}x^{2018} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2018}{2019} \cdot x \cdot x^2 \cdot x^3 \dots x^{2018}$

Ta có: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2018}{2019} = \frac{1}{2019}$

$$x \cdot x^2 \cdot x^3 \dots x^{2018} = x^{1+2+3+\dots+2018} = x^{\frac{(1+2018)2018}{2}} = x^{2037171}$$

Vậy $B = \frac{1}{2019} x^{1+2+3+\dots+2018} = \frac{1}{2019} x^{2037171}$

Ví dụ 5: Viết các đơn thức sau dưới dạng tích của hai đơn thức trong đó một đơn thức bằng $2,5x^3y^2$.

a) $-25x^6y^4$;

b) $15x^3y^{6+n}z^3 \quad (n \in \mathbb{N})$.

✓ *Tìm cách giải:*

a) Gọi đơn thức nhân với $2,5x^3y^2$ để được đơn thức $-25x^6y^4$ là B.

Ta có $-25x^6y^4 = 2,5x^3y^2 \cdot B$ và $B = ax^m y^n$, trong đó:

$$a \cdot 2,5 = -25; x^3 \cdot x^m = x^6; y^2 \cdot y^n = y^4$$

Suy ra $a = (-25) : 2,5 = -10; 3 + m = 6 \Rightarrow m = 3; 2 + n = 4 \Rightarrow n = 2$

b) Ta có: $15x^3y^{6+n}z^3 = 2,5x^3y^2bx^d y^e z^g$

Suy ra $b = 15 : 2,5 = 6; 3 + d = 3 \Rightarrow d = 0;$

$2 + e = 6 + n \Rightarrow e = 4 + n$ và $g = 3$. Lại có $x^0 = 1$.

Giải

a) Ta có $-25x^6y^4 = 2,5x^3y^2 \cdot (-10x^3y^2);$

b) $15x^3y^{6+n}z^3 = 2,5x^3y^2 \cdot 6y^{4+n}z^3$.

Ví dụ 6: Xác định hằng số a và b để tổng các đơn thức sau đây bằng $1975x^{32}y^{23}z^{54}$

a) $68ax^{32}y^{23}z^{54}; -8ax^{32}y^{23}z^{54}; 86ax^{32}y^{23}z^{54}; -67ax^{32}y^{23}z^{54}.$

b) $ax^{32}z^{50} \cdot 2y^{23}z^4 + (a-b)x^{32}y^{23}z^{54} + (-7bx^{23}y^{23}z^{51} \cdot 4x^9z^3)$ với $a = 2b$.

✓ *Tìm cách giải:* Để cộng các đơn thức đồng dạng, ta cộng các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến. Các đơn thức ở câu a) và đơn thức ở câu b) sau khi thu gọn đều là đơn thức đồng dạng. Do đó 1975 chính là tổng các hệ số của các đơn thức.

Giải

a) $68ax^{32}y^{23}z^{54} + (-8ax^{32}y^{23}z^{54}) + 86ax^{32}y^{23}z^{54} + (-67ax^{32}y^{23}z^{54}) = 1975x^{32}y^{23}z^{54}$

Do đó: $68a + (-8a) + 86a + (-67a) = 1975$ hay $79a = 1975 \Rightarrow a = 25$

b) $ax^{32}z^{50} \cdot 2y^{23}z^4 + (a-b)x^{32}y^{23}z^{54} + (-7bx^{23}y^{23}z^{51} \cdot 4x^9z^3) = 1975x^{32}y^{23}z^{54}$

Hay $ax^{32}y^{23}z^{54} + (a-b)x^{32}y^{23}z^{54} + (-28bx^{32}y^{23}z^{54}) = 1975x^{32}y^{23}z^{54}$

Ta có: $a + a - b - 28b = 1975$ hay $2b + 2b - b - 28b = -25b = 1975$

$\Rightarrow b = -79; a = -158$

C. Bài tập áp dụng

16.1. Thu gọn các đơn thức sau và chỉ ra phần hệ số, phần biến và bậc của đơn thức thu gọn: (a; b; c là các hằng số)

- a) $2xy \cdot (-0,5x^2y)^2 \cdot 3x^3yz$;
 b) $2,5ax^2 \cdot 6a^2xy^2$;
 c) $\frac{2c}{3}(ax^3y^2)^2 \cdot (-6a^2bx^2y)$
 d) $-\frac{2(a-b)}{3}x^2yz \cdot (-2cx^3y^2)^3$.

16.2. Hãy xếp các đơn thức sau thành nhóm các đơn thức đồng dạng với nhau sau đó tìm tổng các đơn thức đồng dạng đó. (với a, b là các hằng số)

$$3x^2yz; 5axyz^2; 7,5axy^2z; -\frac{2}{5}bxyz^2; -18x^2yz; 2,5xy^2z; -\frac{3}{5}bxyz^2; 2,5axy^2z$$

16.3. Tìm các đơn thức A, B, C, D thích hợp trong các trường hợp sau:

- a) $-75x^3y^2 + A = 25x(xy)^2$;
 b) $B - \frac{1}{2}ax^3y^4z^2 = \frac{1}{6}ax^3y^4z^2 - \frac{2}{3}ax^3y^4z^2$ (a là hằng số);
 c) $C - 4000b^2x^3y^4 + D = 34b^2x^3y^4$ và $C - 98b^2x^3y^4 - D = -96b^2x^3y^4$

16.4. 1) Tính tích của các đơn thức, tìm bậc của các đơn thức tích vừa tìm (a, b là các hằng số khác 0):

- a) $\frac{14}{15}x^5y^2$ và $\frac{5}{7}x^3y^2z^4t$;
 b) $-0,2ax^3y^2t$ và $4,5abx^3yzt^2$;
 c) $-5ax^2y^3$ và $\frac{1}{6a}x^4zt^6$;
 d) $-\frac{a+1}{5}(x^2y^4t^2)^3$ và $\left(\frac{1}{2b}x^3y\right)^2$.

16.5. Cho a, b, c là những số khác 0:

- a) Hai đơn thức $-5a^6b^2$ và $4a^2b^5$ có thể có cùng giá trị dương không. Tại sao? Khi nào chúng có cùng giá trị âm?
 b) Hai đơn thức $4a^5b^2$ và $-5a^4b^6$ cùng dấu. Tìm dấu của a.
 c) Xác định dấu của c biết $3a^2b^5c$ và $-12a^4b^5c^2$ trái dấu nhau.

16.6. Cho ba đơn thức $\frac{2}{3}x^3y^2z^5; -\frac{3}{4}x^2yz^3; \frac{4}{5}xy^5z^2$. Chứng minh rằng khi x, y, z lấy những giá trị bất kỳ khác 0 thì trong ba đơn thức đã cho có ít nhất một đơn thức có giá trị âm.

16.7. Cho $M = -10^n - 10^{n+1} - 10^{n+2} - 10^{n+3} + 10^{n+4}$

$$P = 2^{n+4} - 2^{n+3} + 2^{n+2} - 2^{n+1} - 2^n \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$$

a) Tính $M + P$;

b) Tính $M \cdot P$.

16.8*. Tìm tích A của các đơn thức $A_1; A_2; A_3; \dots; A_{100}$ với

$$A_1 = \left(\frac{1}{2} - 1\right)x; A_2 = \left(\frac{1}{3} - 1\right)x^2; A_3 = \left(\frac{1}{4} - 1\right)x^3; \dots; A_{100} = \left(\frac{1}{101} - 1\right)x^{100}.$$

Sau đó tính giá trị của A với $x = \frac{-2015.2016 - 2}{2014.2016 + 2018}$.

16.9. Cho $C = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{10^2} - 1\right) x^3 y^4 z^5 t^6$

$$D = \left(\frac{7}{2.5} - \frac{13}{5.8} + \frac{19}{8.11} - \frac{25}{11.14} + \frac{31}{14.17} - \frac{37}{17.20}\right) x^6 y^5 z^4 t^3$$

Tính tích $E = -\frac{20^2}{11} CD$.

16.10*. Cho $Q_1 = \frac{5}{10.15} x^8 y^9 z^{10}; Q_2 = \frac{6}{15.21} x^8 y^9 z^{10}; Q_3 = \frac{7}{21.28} x^8 y^9 z^{10};$

$$Q_4 = \frac{8}{28.36} x^8 y^9 z^{10}; Q_5 = \frac{14}{36.50} x^8 y^9 z^{10}$$

Tính $T = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5$

16.11*. Cho $G = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{10}\right) \left(1 - \frac{1}{15}\right) x^{m+1} y^{m+2} z^{m+3};$

$$H = \left(1 - \frac{1}{21}\right) \left(1 - \frac{1}{28}\right) \left(1 - \frac{1}{36}\right) \left(1 - \frac{1}{45}\right) x^{n-1} y^{n-2} z^{m-3} \text{ với } m, n \in \mathbb{N}; n \geq 2; m \geq 3;$$

Tính $G \cdot H$.

16.1.

$$a) 2xy \cdot (-0,5x^2y)^2 \cdot 3x^3yz = -3x^8y^4z$$

Hệ số: -3 ; phần biến: x^8y^4z ; bậc: 13.

$$b) 2,5ax^2 \cdot 6a^2xy^2 = 15a^3x^3y^2$$

Hệ số: $15a^3$; phần biến: x^3y^2 ; bậc: 5.

$$c) \frac{2c}{3} (ax^3y^3)^2 \cdot (-6a^2bx^2y^5) = -4a^4bcx^8y^{11}$$

Hệ số: $-4a^4bc$; phần biến: x^8y^{11} ; bậc: 19;

$$d) -\frac{2(a-b)^2}{3} x^2y^2z \cdot (-2cx^3y^2)^3 = \frac{4c(a-b)^2}{3} x^{11}y^8z$$

Hệ số: $\frac{4c(a-b)^2}{3}$; phần biến: $x^{11}y^8z$; bậc: 20.

16.2.

$$\text{Nhóm 1: } 3x^2yz + (-18x^2yz) = -15x^2yz$$

$$\text{Nhóm 2: } 5axyz^2 + \left(-\frac{2}{5}bxyz^2\right) + \left(-\frac{3}{5}bxyz^2\right) = (5a-b)xyz^2$$

$$\text{Nhóm 3: } 7,5axy^2z + 2,5xy^2z + 2,5axy^2z = (10a+2,5)xy^2z$$

16.3.

$$a) A = 25x^3y^2 + 75x^3y^2 = 100x^3y^2;$$

$$b) B = \frac{1}{2}ax^3y^4z^2 - \frac{1}{6}ax^3y^4z^2 + \frac{2}{3}ax^3y^4z^2 = ax^3y^4z^2$$

$$c) C + D = 4034b^2x^3y^4 \text{ và } C - D = 2b^2x^3y^4$$

$$\text{Tìm được } C = 2018b^2x^3y^4 \text{ và } D = 2016b^2x^3y^4.$$

16.4.

$$a) \frac{14}{15}x^5y^2 \cdot \frac{5}{7}x^3y^2z^4t^{10} = \frac{2}{3}x^8y^4z^4t^{10} \text{ . Bậc 26.}$$

$$b) -0,2ax^3y^2t \cdot 4,5abx^3yzt^2 = -0,9a^2bx^6y^3zt^3 \text{ . Bậc 13.}$$

c) $-5ax^2y^3 \cdot \frac{1}{6a}x^4zt^6 = -\frac{5}{6}x^6y^3zt^6$. Bậc 16.

d) $-\frac{a+1}{5}(x^2y^4t^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{2b}x^3y\right)^2 = -\frac{a+1}{20b^2}x^{12}y^{14}t^6$. Bậc 32.

16.5.

a) $-5a^6b^2 < 0$ với mọi giá trị của a và b nên không thể có giá trị dương. Do đó hai đơn thức $-5a^6b^2$ và $4a^2b^5$ không thể có cùng giá trị dương.

Xét $4a^2b^5$ nhận giá trị âm khi $b < 0$ nên hai đơn thức $-5a^6b^2$ và $4a^2b^5$ có cùng giá trị âm khi $b < 0$.

b) Hai đơn thức cùng dấu nên $4a^3b^2 \cdot (-5a^4b^6) = -20a^7b^8 > 0$
 $b^8 > 0$; do đó $a^7 < 0$. Khi ấy $a < 0$.

c) $3a^2b^5c$ và $-12a^4b^5c^2$ trái dấu nhau nên

$$3a^2b^5c \cdot (-12a^4b^5c^2) = -36a^6b^{10}c^3 < 0 \text{ mà } a^6b^{10} > 0 \Rightarrow c^3 > 0 \Rightarrow c > 0.$$

16.6.

Xét tích ba đơn thức $\frac{2}{3}x^3y^2z^5 \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2yz^3\right) \cdot \frac{4}{5}xy^5z^2 = -\frac{2}{5}x^6y^8z^{10} < 0$ với mọi giá trị khác 0 của x, y, z.

Do đó có ít nhất một đơn thức có giá trị âm.

16.7.

$$M = 10000 \cdot 10^n - 1000 \cdot 10^n - 100 \cdot 10^n - 10 \cdot 10^n - 10^n = 8889 \cdot 10^n$$

$$P = 2^{n+4} - 2^{n+3} + 2^{n+2} - 2^{n+1} - 2^n = 16 \cdot 2^n - 8 \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n - 2^n = 9 \cdot 2^n$$

a) $M + P = 8889 \cdot 10^n + 9 \cdot 2^n$;

b) $M \cdot P = 80001 \cdot 20^n$.

16.8*.

Lưu ý: $a^m \cdot a^n \cdot \dots \cdot a^p = a^{m+n+\dots+p}$;

Ta có $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = (1 + 100) \cdot 100 : 2 = 5050$;

và $\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$; ...; $\frac{1}{101} - 1 = -\frac{100}{101}$.

Do đó $A = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{100}{101}\right) \cdot x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \dots \cdot x^{100}$.

Tích có 100 thừa số âm nên tích dương và

$$A = \frac{1}{101} x^{1+2+3+\dots+100} = \frac{1}{101} x^{5050}$$

$$x = \frac{-2015.2016-2}{2014.2016+2018} = -\frac{(2014+1).2016+2}{2014.2016+2018} = -\frac{2014.2016+2018}{2014.2016+2018} = -1$$

Vậy $A = \frac{1}{101} (-1)^{5050} = \frac{1}{101}$

16.9. Ta thấy tích $P = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{10^2} - 1\right)$ có 9 thừa số âm nên tích âm. Do đó:

$$P = -\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \dots \frac{80}{81} \cdot \frac{99}{100} = -\frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \dots \frac{8.10}{9.9} \cdot \frac{9.11}{10.10}$$

$$= -\frac{1.2.3 \dots 8.9}{2.3.4 \dots 9.10} \cdot \frac{3.4.5 \dots 10.11}{2.3.4 \dots 9.10} = -\frac{11}{20}$$

Xét $Q = \frac{7}{2.5} - \frac{13}{5.8} + \frac{19}{8.11} - \frac{25}{11.14} + \frac{31}{14.17} - \frac{37}{17.20}$

mỗi số hạng đều có dạng $\frac{a+b}{a.b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$ do đó

$$Q = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} + \frac{1}{8} - \frac{1}{14} - \frac{1}{11} + \frac{1}{14} + \frac{1}{17} - \frac{1}{20} - \frac{1}{17}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$$

Do đó $E = 9x^9 y^9 z^9 t^9$

16.10*.

$$T = \left(\frac{5}{10.15} + \frac{6}{15.21} + \frac{7}{21.28} + \frac{8}{28.36} + \frac{14}{36.50} \right) x^8 y^9 z^{10}$$

$$= \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{21} + \frac{1}{21} - \frac{1}{28} + \frac{1}{28} - \frac{1}{36} + \frac{1}{36} - \frac{1}{50} \right) x^8 y^9 z^{10}$$

$$= \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{50} \right) x^8 y^9 z^{10} = \frac{2}{25} x^8 y^9 z^{10}$$

16.11*. Ta có:

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{10}\right) \left(1 - \frac{1}{15}\right) \left(1 - \frac{1}{21}\right) \left(1 - \frac{1}{28}\right) \left(1 - \frac{1}{36}\right) \left(1 - \frac{1}{45}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{2}{2.3}\right) \left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \left(1 - \frac{2}{4.5}\right) \left(1 - \frac{2}{5.6}\right) \left(1 - \frac{2}{6.7}\right) \left(1 - \frac{2}{7.8}\right) \left(1 - \frac{2}{8.9}\right) \left(1 - \frac{2}{9.10}\right)$$

$$= \frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \cdot \frac{4.7}{5.6} \cdot \frac{5.8}{6.7} \cdot \frac{6.9}{7.8} \cdot \frac{7.10}{8.9} \cdot \frac{8.11}{9.10} = \frac{11}{27}.$$

$$\text{Vậy } G.H = \frac{11}{27} x^{m+n} y^{m+n} z^{2m}.$$

Chuyên đề 17

ĐA THỨC – ĐA THỨC MỘT BIẾN - CỘNG TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Đa thức là một tổng của những đơn thức. Mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó.

* Mỗi đơn thức được coi là một đa thức.

* Bậc của đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.

2. Để cộng (hay trừ) các đa thức ta dựa vào quy tắc “dấu ngoặc” và tính chất của các phép tính.

3. Phép cộng các đa thức có tính chất giao hoán và kết hợp.

4. Đa thức một biến là tổng của những đơn thức của cùng một biến.

* Đa thức một biến x được ký hiệu $f(x)$; $g(x)$... hoặc $A(x)$; $B(x)$

* Mỗi số được coi là một đa thức một biến.

* Giá trị của đa thức một biến $f(x)$ tại $x = a$ được ký hiệu $f(a)$

* Đa thức một biến (sau khi rút gọn) thường được sắp theo lũy thừa giảm dần hay tăng dần của biến.

* Bậc của đa thức một biến (khác với đa thức không) là số mũ cao nhất của biến.

5. Đa thức một biến bậc n có dạng thu gọn:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 \quad (\text{với } a_n \neq 0)$$

Trong đó $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{n-1}; a_n$ là các hệ số; a_0 là số hạng độc lập hay hệ số tự do.

* $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) là nhị thức bậc nhất.

* $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là tam thức bậc hai.

6. Để cộng hay trừ hai đa thức một biến, ta có hai cách:

a) Dựa vào quy tắc “dấu ngoặc” và tính chất của các phép tính.

b) Sắp xếp các hạng tử của hai đa thức cùng theo lũy thừa giảm (hoặc tăng) của biến, rồi đặt phép tính theo cột dọc tương tự như các số (chú ý đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột).

7. Nếu tại $x = a$, đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 0 thì ta nói a (hoặc $x = a$) là một nghiệm của đa thức đó.

* a là nghiệm của $P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$.

* Một đa thức (khác đa thức không) có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ... hoặc không có nghiệm.

* Số nghiệm số của một đa thức không vượt quá bậc của nó.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Thu gọn các đa thức sau và cho biết bậc của mỗi đa thức:

a) $A = 15x^2y^3 - 3xy^3 + 16x^2y^3 - 16xy^3 - 15x^2y^3 + 18xy^3 - 3,75x^3y^4$

b) $B = \frac{3}{5}xy - 0,25x^2yz - 13xy + 6,75x^2yz + 6xy - 2,5x^2yz + \frac{2}{5}xy$

✓ *Tìm cách giải:* Để thu gọn đa thức ta xem trong đa thức có những đơn thức nào đồng dạng rồi thực hiện phép cộng các đơn thức đồng dạng.

a) $A = (15x^2y^3 - 15x^2y^3 + 16x^2y^3) + (-3xy^3 - 16xy^3 + 18xy^3) - 3,75x^3y^4;$

b) $B = \left(\frac{3}{5}xy + \frac{2}{5}xy - 13xy + 6xy\right) + (-0,25x^2yz + 6,75x^2yz - 2,5x^2yz)$

Giải

a) $A = 16x^2y^3 - xy^3 - 3,75x^3y^4$ Bậc của đa thức là 7.

b) $B = -6xy + 4x^2yz$. Bậc của đa thức là 4.

Ví dụ 2: Cho hai đa thức: $C = 9,5x^2 - 5xy + 3,2y^2$ và $D = -3,5x^2 + 4xy - 1,8y^2$.

a) Tính $C + D$ sau đó tìm giá trị của tổng tại $x = 1$ và $y = -2$;

b) Tính $C - D$;

c) Tìm đa thức E sao cho $E + C = D$;

d) Tìm đa thức M biết: $M + 2(x^2 - 4y^2) + D = 16x^2 - 4xy + 5y^2 + C$.

✓ *Tìm cách giải:* Thực hiện các phép toán cộng trừ hai đa thức ta làm tương tự như việc dựa vào quy tắc “dấu ngoặc” và tính chất của các phép tính trên số để cộng trừ các biểu thức số.

Giải

a)
$$\begin{aligned} C + D &= (9,5x^2 - 5xy + 3,2y^2) + (-3,5x^2 + 4xy - 1,8y^2) \\ &= 9,5x^2 - 5xy + 3,2y^2 - 3,5x^2 + 4xy - 1,8y^2 \\ &= (9,5x^2 - 3,5x^2) + (-5xy + 4xy) + (3,2y^2 - 1,8y^2) \\ &= 6x^2 - xy + 1,4y^2 \end{aligned}$$

Tại $x = 1; y = -2$ thì $C + D = 6 \cdot 1^2 - 1 \cdot (-2) + 1,4 \cdot (-2)^2 = 13,6$

b)
$$\begin{aligned} C - D &= (9,5x^2 - 5xy + 3,2y^2) - (-3,5x^2 + 4xy - 1,8y^2) \\ &= 9,5x^2 - 5xy + 3,2y^2 + 3,5x^2 - 4xy + 1,8y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (9,5x^2 + 3,5x^2) + (-5xy - 4xy) + (3,2y^2 + 1,8y^2) \\
&= 13x^2 - 9xy + 5y^2
\end{aligned}$$

$$c) E + C = D \Leftrightarrow E = D - C = -(C - D) = -13x^2 + 9xy - 5y^2$$

$$d) M + 2(x^2 - 4y^2) + D = 16x^2 - 4xy + 5y^2 + C$$

$$\begin{aligned}
M &= (16x^2 - 4xy + 4y^2) - 2(x^2 - 4y^2) + C - D \\
&= 16x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x^2 + 8y^2 + 13x^2 - 9xy + 5y^2 \\
&= (16x^2 + 13x^2 - 2x^2) + (-4xy - 9xy) + (5y^2 + 8y^2 + 5y^2) \\
&= 27x^2 - 13xy + 18y^2
\end{aligned}$$

Ví dụ 3: Cho đa thức

$$A(x) = bx + (b-2)x^5 - (a-12)x^6 + 0,5ax^3 - 5x^2 - bx^3 + 4cx^4 - 10 + 11x^5 + 6x^6 + ax - c(x-1)$$

a) Viết đa thức dưới dạng thu gọn với các hệ số bằng số, biết rằng $A(x)$ có bậc là 5; hệ số cao nhất là 19 và hệ số tự do là -15;

b) Tính $3A(1) - 2A(-1)$.

✓ *Tìm lời giải:* a) Bậc của đa thức một biến (khác với đa thức không) là số mũ cao nhất của biến. $A(x)$ có bậc là 5 nên hệ số của x^6 trong đa thức rút gọn phải là 0. Hệ số cao nhất chính là hệ số của x^5 và hệ số tự do chính là $(c-10)$ của đa thức rút gọn. Từ đó tìm ra a, b, c.

b) $A(m)$ là giá trị của $A(x)$ khi thay $x = m$.

Giải

$$\begin{aligned}
a) A(x) &= 6x^6 - (a-12)x^6 + 11x^5 + (b-2)x^5 + 4cx^4 + 0,5ax^3 - bx^3 - 5x^2 + (a-c)x + bx + c - 10 \\
&= (-a+18)x^6 + (b+9)x^5 + 4cx^4 + (0,5a-b)x^3 - 5x^2 + (a-c+b)x + (c-10)
\end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} -a+18=0 \\ b+9=19 \\ c-10=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=18 \\ b=10 \\ c=-5 \end{cases}$$

$$A(x) = 19x^5 - 20x^4 - x^3 - 5x^2 + 33x - 15$$

$$b) A(1) = 19 - 20 - 1 - 5 + 33 - 15 = 11$$

$$\begin{aligned}
A(-1) &= 19(-1)^5 - 20(-1)^4 - (-1)^3 - 5(-1)^2 + 33(-1) - 15 \\
&= -19 - 20 + 1 - 5 - 33 - 15 = -91
\end{aligned}$$

Nên $3A(1) - 2A(-1) = 3.11 - 2.(-91) = 33 + 182 = 215$

Ví dụ 4: Cho $f(x) = 2x + 10(x^3 - 1) + 20x^6 - 5(x^7 + x^5) + 1,5x^4 - 10 + 6x$

và $g(x) = 2(x^3 + x^5) - 5x^7 - 7x^2 - 11x^3 + 2,5x^4 - 9 + 4,2x^2 + 1,5x^4 + 13x^8$

- a) Thu gọn và sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của các đa thức;
 b) Tính $g(x) + f(x)$ theo cách bỏ dấu ngoặc;
 c) Tính $g(x) - f(x)$ theo cách đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột.

Giải

a) $f(x) = 2x + 10x^3 - 10 + 20x^6 - 5x^7 - 5x^5 + 1,5x^4 - 10 + 6x$

$$= -5x^7 + 20x^6 - 5x^5 + 1,5x^4 + 10x^3 + 8x - 10$$

và $g(x) = 2x^3 + 2x^5 - 5x^7 - 7x^2 - 11x^3 + 2,5x^4 - 9 + 4,2x^2 + 1,5x^4 + 13x^8$

$$= 13x^8 - 5x^7 + 2x^5 + 4x^4 - 9x^3 - 2,8x^2 - 9$$

b)

$$\begin{aligned} g(x) + f(x) &= (13x^8 - 5x^7 + 2x^5 + 4x^4 - 9x^3 - 2,8x^2 - 9) + (-5x^7 + 20x^6 - 5x^5 + 1,5x^4 + 10x^3 + 8x - 10) \\ &= 13x^8 + (-5x^7 - 5x^7) + 20x^6 + (2x^5 - 5x^5) + (4x^4 + 1,5x^4) + (-9x^3 + 10x^3) - 2,8x^2 + 8x + (-9 - 10) \\ &= 13x^8 - 10x^7 + 20x^6 - 3x^5 + 5,5x^4 + x^3 - 2,8x^2 + 8x - 19 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{array}{r} g(x) = 13x^8 - 5x^7 \quad \quad \quad + 2x^5 \quad + 4x^4 \quad - 9x^3 - 2,8x^2 \quad \quad - 9 \\ f(x) = \quad \quad - 5x^7 + 20x^6 - 5x^5 + 1,5x^4 + 10x^3 \quad \quad + 8x - 10 \\ \hline g(x) - f(x) = 13x^8 - 20x^6 + 7x^5 + 2,5x^4 - 19x^3 - 2,8x^2 - 8x + 1 \end{array}$$

Ví dụ 5:

a) Tìm đa thức $A(x) = ax + b$ biết rằng $A(-1) = -15$ và $A(2) = -9$.

b) Tìm các hệ số a, b, c của đa thức

$B(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ biết rằng $B(0) = 2; B(-1) = 2; B(1) = 8$ và $a = 2c$

✓ *Tìm cách giải:*

a) $A(-1) = -15$ có nghĩa là -15 là giá trị của $A(x)$ tại $x = -1$.

Thay $x = -1$ vào đa thức sẽ tìm được $-a + b = -15$. Tương tự thay $x = 2$ vào đa thức ta sẽ tìm được $2a + b = -9$. Từ hai đẳng thức trên ta tìm được a và b.

b) $B(0) = 2$ ta thấy ngay $d = 2$. Tìm a, b và c tương tự như câu a) lưu ý là $a = 2c$.

Giải

a) Ta có $A(-1) = a(-1) + b = -a + b = -15 \Rightarrow b = a - 15$

$$A(2) = a.2 + b = -9 \text{ hay } 2a + b = -5$$

Thay $b = a - 15$ vào ta có $2a + a - 15 = -9 \Rightarrow 3a = 6$
 $\Rightarrow a = 2; b = 2 - 15 = -13$.

Vậy $A(x) = 2x - 13$.

b) $B(0) = a.0^2 + b.0 + c.0 + d = 2$ nên $d = 2$ và do $a = 2c$ nên

$$B(1) = a.1^3 + b.1^2 + c.1 + 2 = 8 \Rightarrow a + b + c = 6 \Rightarrow 3c + b = 6 \quad (1)$$

$$B(-1) = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + 2 = 2 \Rightarrow -a + b - c = 0$$

$$\Rightarrow -3c + b = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$

Thay $b = 3$ vào (1) ta có: $3c + 3 = 6 \Rightarrow c = 1$. Do $a = 2c$ nên $a = 2$.

Vậy đa thức là $B(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 2$.

Ví dụ 6: Cho đa thức $C(x) = 2015x^2 + mx + n$ (m và n là các hằng số)

Biết $C(-1) = 2018$ và $C(2) = 8069$. Tính $\frac{C(-2) - C(1)}{671}$.

✓ *Tìm cách giải:* Từ $C(-1) = 2018$ và $C(2) = 8069$ ta tìm được các hệ số m và n của đa thức.

Từ đó tính $C(1); C(-2)$ và giá trị biểu thức cần tìm.

Giải

Ta có $C(-1) = 2015(-1)^2 + m(-1) + n = 2018 \Rightarrow n = 3 + m$

và $C(2) = 2015.2^2 + m.2 + n = 8069 \Rightarrow 2m + n = 9$ thay $n = 3 + m$ vào ta có

$$2m + (3 + m) = 9 \Leftrightarrow 3m = 6 \Leftrightarrow m = 2; n = 5$$

Vậy $C(x) = 2015x^2 + 2x + 5$.

$$C(1) = 2015.1^2 + 2.1 + 5 = 2022$$

$$C(-2) = 2015.(-2)^2 + 2.(-2) + 5 = 8061$$

$$\frac{C(-2) - C(1)}{671} = \frac{8061 - 2022}{671} = 9$$

Ví dụ 7: Hai đa thức đồng nhất (ký hiệu $\equiv$) là hai đa thức có giá trị bằng nhau với mọi giá trị của biến. hãy xác định a, b, c để hai đa thức sau là hai đa thức đồng nhất:

$$f(x) = ax^2 + 10(x + x^2) - 76x - (36x^2 + 2x) + 2019$$

$$g(x) = 15x^2 + (3-b)x + 8x - 9x^2 + c + 2018$$

✓ *Tìm lời giải:* Để hai đa thức đồng nhất (tức là hai đa thức có giá trị bằng nhau với mọi giá trị của biến) thì các hệ số tương ứng với mỗi lũy thừa cùng bậc của biến phải bằng nhau. Do đó trước hết rút gọn từng đa thức và tìm a, b, c để hệ số tương ứng của mỗi lũy thừa cùng bậc của biến của hai đa thức bằng nhau.

Giải

Ta có: $f(x) = ax^2 + 10(x + x^2) - 76x - (36x^2 + 2x) + 2019$

$$= ax^2 + 10x^2 - 36x^2 - 66x - 2x + 2019$$

$$= (a - 26)x^2 - 68x + 2019$$

$$g(x) = 15x^2 + (3-b)x + 8x - 9x^2 + c + 2018$$

$$= 6x^2 + (11-b)x + c + 2018$$

Để $f(x) \equiv g(x)$ ta phải có
$$\begin{cases} a - 26 = 6 \\ 11 - b = -68 \\ 2019 = c + 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 32 \\ b = 79 \\ c = 1 \end{cases}$$

Ví dụ 8: Dạng tổng quát của đa thức một biến là:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

($a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ là các hằng số)

a) Chứng minh rằng tổng các hệ số của đa thức $f(x)$ chính là giá trị của đa thức đó tại $x = 1$;

b) Chứng minh rằng giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x = -1$ bằng tổng các hệ số của các lũy thừa bậc chẵn của biến trừ đi tổng các hệ số của các lũy thừa bậc lẻ của biến.

✓ *Tìm lời giải:*

a) Tìm giá trị của đa thức đó tại $x = 1$; nhận xét kết quả rồi rút ra kết luận.

b) Tìm giá trị của đa thức đó tại $x = -1$; lưu ý lũy thừa bậc chẵn của (-1) là số $(+1)$ và lũy thừa bậc lẻ của (-1) là (-1) . Xét hai trường hợp: n chẵn và n lẻ; nhận xét kết quả rồi rút ra kết luận.

Giải

a) Ta có : $f(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + a_{n-2} \cdot 1^{n-2} + \dots + a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0$

$$= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$$

Vậy tổng các hệ số của đa thức $f(x)$ chính là giá trị của đa thức đó tại $x = 1$.

b) Với n chẵn ta có:

$$\begin{aligned} f(-1) &= a_n \cdot (-1)^n + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + a_{n-2} \cdot (-1)^{n-2} + \dots + a_3 \cdot (-1)^3 + a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0 \\ &= a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \dots - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 \\ &= (a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{n-2} + a_n) - (a_1 + a_3 + \dots + a_{n-3} + a_{n-1}) \end{aligned}$$

Với n lẻ ta có:

$$\begin{aligned} f(-1) &= a_n \cdot (-1)^n + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + a_{n-2} \cdot (-1)^{n-2} + \dots + a_3 \cdot (-1)^3 + a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0 \\ &= -a_n + a_{n-1} - a_{n-2} + \dots - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 \\ &= (a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{n-3} + a_{n-1}) - (a_1 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_n) \end{aligned}$$

Vậy giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x = -1$ bằng tổng các hệ số của các lũy thừa bậc chẵn của biến trừ đi tổng các hệ số của các lũy thừa bậc lẻ của biến.

C. Bài tập áp dụng

17.1. Cho hai đa thức: $E = 2,5x^2 - \frac{1}{6}y^5 + 6xy - \frac{1}{3}y^5$ và $F = 7,5x^2 - 2xy - 1,5y^5$.

a) Tính $E + F$ sau đó tìm giá trị của tổng tại $|x| = 2; y = -1$;

b) Tính $E - F$ sau đó tìm giá trị của hiệu tại $x = y - 1; |y - 2| = 1$,

17.2*.

a) Thu gọn đa thức sau:

$$D = (x^2 - 2x^2y) + (2x^2 - 4x^2y) + (3x^2 - 6x^2y) + \dots + (10x^2 - 20x^2y)$$

b) Cho $g(x-1) = 2x + 2017$ với mọi x

Tính tổng $g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \dots + g(x+99)$.

17.3. Tìm các đa thức M và N biết:

a) $M + (15x^2 - 22y^2) = 16x^2 - 25xy - 32y^2$;

b) $(47,5x^2y - 6,8xy^2 + 1,2xy) - N = 1,2xy + 22,5x^2y - 1,8xy^2$.

17.4. Cho các đa thức: $T = 2x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 5y + 3$;

$$U = 2x^2 - 2y^2 + 4xy - 2x + 4y - 3$$

Tìm đa thức R; S và V sao cho:

a) $S - U = T$;

b) $T + V = U$;

c) $R - (T - U) = 5x^2 - 4xy - y^2$.

17.5. Cho đa thức $P(x) = 12,5 - 3,5x^5 - 28x^3 + 15x^6 + 8x^3 - 16x - 5x^4 + 4,5x^5 - 4x^2 + 19x^8$

a) Thu gọn và sắp xếp đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Tìm hệ số cao nhất, hệ số tự do, hệ số của x^5 , hệ số của x^7 trong $P(x)$ với

$$P(x) = 12,5 - 3,5x^5 - 28x^3 + 15x^6 + 8x^3 - 16x - 5x^4 + 4,5x^5 - 4x^2 + 19x^8$$

17.6. Cho các đa thức:

$$Q(x) = 15,4x^3 - 2,4x^7 + 1,2x^4 + 6x^8 + 2,8x^4 + 7,2x^2 - 6x + (5 + b) - 1\frac{2}{3}x^5$$

$$G(x) = x^2 - 3,7x^4 + ax^8 - 2,3x^4 + 7,5x^6 - 5,6x^7 - 2x - (3 + a - 4b) - 2\frac{1}{3}x^5$$

a) Với a, b là hằng số, thu gọn rồi sắp xếp Q(x), G(x) theo lũy thừa giảm dần của biến số.

Tính Q(x) + G(x) rồi sắp xếp tổng theo lũy thừa tăng dần của biến số.

b) Tìm a và b biết hệ số cao nhất và hệ số tự do đều là 2018.

17.7*. Tính giá trị các đa thức sau tại $|x| = 1$:

a) $f(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + 2018x^{2018} + 2019x^{2019}$

b) $g(x) = 2x + 4x^2 + 6x^3 + 8x^4 + \dots + 200x^{100} + 202x^{101}$

17.8. Cho $A(x) = 2x^6 + 12x^5 - 2,5x^3 + 3x^4 - 7,5x^3 - 2x^2 - 6x + 5x^2 + 5$

$$B(x) = 3x^6 + 3x - 2,8x^2 - 6x^3 + 2x^5 + 0,8x^2 + 15$$

a) Tính $2A(x) + 3B(x)$;

b) Tính $A(x) - B(x)$;

c) Tính $B(x) - A(x)$;

d) Nhận xét về các hệ số của $A(x) - B(x)$ với $B(x) - A(x)$.

17.9. Cho $C(x) = 5x^4 - 4,8x^3 + 2,5x^2 - 16x + 25$.

Tìm đa thức $D(x); E(x); F(x)$ sao cho:

- a) $C(x) + D(x) = 2x^5 - 4,8x^3 + 4x + 20$;
- b) $C(x) - E(x) = 4x^3 - 5,5x^2 + 6x$;
- c) $F(x) - C(x) + 12x^5 - 4,5x^3 = -6,5x^2 + 4,5x + 18$.

17.10. Cho $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2018}x^{2018} + a_{2019}x^{2019}$;

$$g(x) = b_0 + 2b_1x + 3b_2x^2 + \dots + 2019b_{2018}x^{2018} + 2020b_{2019}x^{2019}$$

với $a_0, a_1, \dots, a_{2018}, a_{2019}, b_0, b_1, \dots, b_{2018}, b_{2019}$ là các hằng số

- a) Tính $2f(1) + g(1)$;
- b) $f(-1) - g(-1)$;
- c) Tính $f(n) + g(n)$ với n là hằng số.

17.11. Tìm nghiệm của các đa thức sau:

- a) $(x-1) + (x-2) + (x-3) + \dots + (x-99) + (x-100)$;
- b) $3x^2 - \sqrt{8}x$.

17.12. Chứng minh các đa thức $f(x) = 2x^2 + 5,2$ và $g(x) = -(x-3)^2 - 8$ không có nghiệm.

17.13. Tìm nghiệm các đa thức sau:

- a) $h(x) = (x-2,5)(x+2,5)$;
- b) $k(x) = (2x+1)(x-7)(x-5)(2x-9)(4x-30)$
- c) $p(x) = (x+2\sqrt{5})(x^2+9)$
- d) $q(x) = x^2 - 8$.

17.14. Chứng minh:

- a) Nếu $x=1$ là một nghiệm của đa thức

$A(x) = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ thì $a_{10} + a_9 + \dots + a_2 + a_1 + a_0 = 0$;

b) Nếu đa thức $B(y) = b_{10}y^{10} + b_9y^9 + \dots + b_3y^3 + b_2y^2 + b_1y + b_0$

có $b_{10} + b_8 + b_6 + b_4 + b_2 + b_0 = b_9 + b_7 + b_5 + b_3 + b_1$ thì $y = -1$ là một nghiệm của đa thức.

17.15. Tìm giá trị của m biết đa thức:

$f(y) = 14y^4 - 5my^3 + 6my^2 + 8m(y+1)$ có một nghiệm là $y = -2$.

17.16*. Cho đa thức $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 4a$ ($a \neq 0$).

a) Tìm quan hệ giữa các hệ số a và c; b và d của đa thức $f(x)$ để $f(x)$ có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = -2$.

Thử lại với $a = 3; b = 4$;

b) Với $a = 1; b = 1$. Hãy cho biết $x = 1$ và $x = -1$ có phải là nghiệm của đa thức vừa tìm?

17.17. Hãy xác định a, b, c, d để hai đa thức sau là hai đa thức đồng nhất:

$$f(x) = 16x^3 + 2bx^2 + 8x - 5bx - 10(x^2 - 2x) + 24;$$

$$g(x) = (a-6)x^3 - 15x^2 + (2-3b)x + 3cx + x^2 + 6(c-d).$$

17.18. Cho số $\overline{abc}$. Ta gọi số có ba chữ số mà vị trí các chữ số a; b; c đổi chỗ cho nhau (chẳng hạn $\overline{bac}$) là một hoán vị của nó. Tìm số $\overline{abc}$ có ba chữ số đều khác nhau và khác 0 có $a < b < c$. Biết tổng của số ấy với tất cả các hoán vị của nó là 1998.

17.19. Tìm tổng tất cả các nghiệm của đa thức:

$$F(x) = \left(x^2 - \frac{1}{100^2}\right) \dots \left(x^2 - \frac{1}{3^2}\right) \left(x^2 - \frac{1}{2^2}\right) (x^2 - 1) (x^2 - 2^2) (x^2 - 3^2) \dots (x^2 - 100^2)$$

17.20. Tìm tổng các hệ số của đa thức sau khi bỏ dấu ngoặc biết:

a) $f(x) = (-3x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1)^{2019}$;

b) $g(x) = (19x^2 - 8x - 10)^{1945} \cdot (30x^3 + 4x^2 + 1975x - 2010)^{2018}$.

c) $h(x) = 81 + 77x + 73x^2 + 69x^3 + 65x^4 + \dots + 9x^{18} + 5x^{19} + x^{20}$.

17.21*. Cho đa thức $f(x) = ax + b$ với $a, b \in R$ và $a \neq 0$.

a) Chứng minh rằng nếu đa thức có nghiệm là $x = x_0$ thì $f(x) = a(x - x_0)$;

b) Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in R$ và $a \neq 0$ nếu có nghiệm -1 thì $b = a + c$.

17.22. Cho đa thức $Q(x) = ax^2 + bx + c$ với $(a, b, c) \in R$.

Biết $Q(0), Q(1), Q(2)$ là các số nguyên;

a) Chứng minh rằng $c, a+b, 2a$ là các số nguyên;

b) Chứng minh rằng với mọi x là số nguyên thì $Q(x)$ luôn là một số nguyên.

(Đề thi vào trường THPT chuyên tỉnh Hà Tây năm học 2006-2007)

17.23. Cho hai đa thức:

$$P(x) = 2x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

$$Q(x) = -x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 5x - 2007$$

Tính giá trị của $P(x) - Q(x)$ biết rằng $\frac{2008 \times 2010 - 1}{2007 + 2008 \times 2009}(x+1) = 2$.

(Đề khảo sát chất lượng học sinh giỏi lớp 7 huyện Thường Tín Hà Nội, năm học 2008-2009)

17.24. Cho hai đa thức: $f(x) = 4x^2 + 3x + 1$ và $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$

a) Tính $h(x) = f(x) - g(x)$;

b) Tìm nghiệm của đa thức $h(x)$;

c) Tính giá trị của đa thức $h(x)$

$$(x^2 - 9)^{2011} = \left(\frac{3}{4} - 81\right) \left(\frac{3^2}{5} - 81\right)^2 \left(\frac{3^3}{6} - 81\right)^3 \dots \left(\frac{3^{2010}}{2013} - 81\right)^{2010}$$

với

17.25. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) Tính $f(1); f(-2)$;

b) Cho biết $5a - b + 2c = 0$. Chứng minh rằng $f(1) \times f(2) \leq 0$;

c) Cho $a = 1; b = 2; c = 3$. Chứng minh rằng khi đó đa thức $f(x)$ không có nghiệm.

17.26. Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn $P(x) + 3P(2) = 5x^2$ với mọi giá trị của x . Tính $P(3)$.

17.27. Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a là số nguyên dương, biết: $f(5) - f(4) = 2012$.
Chứng minh $f(7) - f(2)$ là hợp số.

(Đề thi tuyển sinh vào THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP Hồ Chí Minh, năm học 2012-2013).

17.28. Tìm nghiệm của đa thức $f(x) = |3 - |x - 1|| - 2x$.

(Đề thi học sinh giỏi Toán lớp 7 huyện Yên Lạc, Vĩnh Phúc, năm học 2012-2013)

17.1.

a) $E + F = 10x^2 + 4xy - 2y^5$;

Nếu $|x| = 2$ ta có $x = \pm 2$.

+ Với $x = 2$ và $y = -1$.

Ta có: $E + F = 10.2^2 + 4.2.(-1) - 2(-1)^5 = 34$.

+ Với $x = -2$ và $y = -1$.

Ta có: $E + F = 10.(-2)^2 + 4.(-2).(-1) - 2.(-1)^5 = 50$.

b) $E - F = -5x^2 + 8xy + y^5$;

Nếu $|y - 2| = 1$ ta có $y - 2 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

+ Với $y = 3$ thì $x = 2$.

Ta có: $E - F = -5.2^2 + 8.2.3 + 3^5 = 271$.

+ Với $y = 1$ thì $x = 0$.

Ta có: $E - F = 1^5 = 1$.

17.2*.

a) Cách 1:

$$D = (1 + 2 + 3 + \dots + 10)x^2 - (2 + 4 + 6 + \dots + 20)x^2y = 55x^2 - 110x^2y$$

Cách 2:

$$D = (x^2 - 2x^2y) + 2(x^2 - 2x^2y) + 3(x^2 - 2x^2y) + \dots + 10(x^2 - 2x^2y)$$

$$= (1 + 2 + 3 + \dots + 10)(x^2 - 2x^2y)$$

$$= 55(x^2 - 2x^2y) = 55x^2 - 110x^2y$$

b) Do $g(x-1) = 2x + 2017$ với mọi x nên:

Đặt $y = x - 1$ thì $y + 1 = x$ khi đó $g(y) = 2(y + 1) + 2017 = 2y + 2019$.

Vậy $g(x) = 2x + 2019$.

Ta có: $g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \dots + g(x+99)$

$$= 2x + 2019 + [2(x+1) + 2019] + [2(x+2) + 2019] + \dots + [2(x+99) + 2019]$$

$$= 2x.100 + (2 + 4 + 6 + \dots + 198) + 2019.100$$

$$= 200x + (2 + 198).99 : 2 + 201900 = 200x + 9900 + 201900$$

$$= 200x + 211800$$

17.3.

$$a) M = (16x^2 - 25xy - 22y^2) - (15x^2 - 22y^2) = x^2 - 25xy$$

$$b) N = (47,5x^2y - 6,8xy^2 + 1,2xy) - (1,2xy + 22,5x^2y - 1,8xy^2)$$

$$= 25x^2y - 5xy^2$$

17.4.

$$a) S = T + U = 4x^2 - 3y^2 + 6xy - y$$

$$b) V = U - T = -y^2 + 2xy - 4x + 9y - 6$$

$$c) R = 5x^2 - 4xy - y^2 - (U - T) = 5x^2 - 4xy - y^2 - V$$

$$= 5x^2 - 6xy + 4x - 9y + 6$$

17.5.

$$a) P(x) = 19x^8 + 15x^6 + x^5 - 5x^4 - 20x^3 - 4x^2 - 16x + 12,5;$$

b) Hệ số cao nhất là 19; hệ số tự do là 12,5; hệ số của x^5 là 1; hệ số của x^7 là 0

17.6.

$$a) Q(x) = 6x^8 - 2,4x^7 - \frac{5}{3}x^5 + 4x^4 + 15,4x^3 + 7,2x^2 - 6x + (5 + b)$$

$$G(x) = ax^8 - 5,6x^7 + 7,5x^6 - \frac{7}{3}x^5 - 6x^4 + x^2 - 2x - (3 + a - 4b)$$

$$Q(x) + G(x) = (2 - a + 5b) - 8x + 8,2x^2 + 15,4x^3 - 2x^4 - 4x^5 + 7,5x^6 - 8x^7 + (a + 6)x^8$$

$$b) \text{Ta có: } a + 6 = 2018 \Leftrightarrow a = 2012$$

$$2 - a + 5b = 2018 \Leftrightarrow 5b = 2018 + 2012 - 2 \Leftrightarrow b = 805,6$$

$$17.7. \quad |x| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$a) f(1) = 1 + 2 + 3 + \dots + 2018 + 2019 = (1 + 2019).2019 = 2039190$$

$$f(-1) = -1 + 2 - 3 + 4 - \dots - 2017 + 2018 - 2019 = 1009 - 2019 = -1010$$

$$b) \quad g(1) = 2 + 4 + 6 + \dots + 200 + 202 = \frac{(2 + 202) \cdot 101}{2} = 10302$$

$$g(-1) = (-2 + 4) + (-6 + 8) + \dots + (-198 + 200) - 202$$

Có 50 cặp mỗi cặp có kết quả bằng 2 vậy $g(-1) = 100 - 202 = -102$.

$$17.8. \quad A(x) = 2x^6 + 12x^5 + 3x^4 - 10x^3 + 3x^2 - 6x + 5$$

$$B(x) = 3x^6 + 2x^5 - 6x^3 - 2x^2 + 3x + 15$$

$$a) \quad 2A(x) + 3B(x) = 13x^6 + 30x^5 + 6x^4 - 38x^3 - 3x + 55$$

$$b) \quad A(x) - B(x) = -x^6 + 10x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 9x - 10$$

$$c) \quad B(x) - A(x) = x^6 - 10x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 9x + 10$$

d) Dấu các hệ số của các lũy thừa tương ứng của biến ngược dấu nhau.

17.9.

$$a) \quad D(x) = 2x^5 - 5x^4 - 2,5x^2 + 20x - 5$$

$$b) \quad E(x) = 5x^4 - 8,8x^3 + 8x^2 - 22x + 25$$

$$c) \quad F(x) = -6,5x^2 + 4,5x + 18 - 12x^5 + 4,5x^3 + 5x^4 - 4,8x^3 + 2,5x^2 - 16x + 25 \\ = -12x^5 + 5x^4 - 0,3x^3 - 4x^2 - 11,5x + 43$$

17.10.

$$a) \quad 2f(1) + g(1) = (2a_0 + b_0) + (2a_1 + 2b_1) + (2a_2 + 3b_2) + \dots + (2a_{2018} + 2019b_{2018}) + (a_{2019} + 2020b_{2019}),$$

$$b) \quad f(-1) - g(-1) = (a_0 - b_0) + (2b_1 - a_1) + (a_2 - 3b_2) + (4b_3 - a_3) + \dots + (a_{2018} - 2019b_{2018}) + (2020b_{2019} - a_{2019})$$

$$c) \quad f(n) + g(n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + 2b_1)n + (a_2 + 3b_2)n^2 + \dots + (a_{2018} + 2019b_{2018})n^{2018} + (a_{2019} + 2020b_{2019})n^{2019}$$

17.11.

$$a) \quad x = 50,5$$

$$b) \quad x = 0 \text{ và } x = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

17.12.

Do $x^2 \geq 0$ với mọi giá trị của x (ký hiệu: $\forall x$) nên $2x^2 + 5,2 \geq 5,2$ hay $2x^2 + 5,2 \neq 0 \forall x$ nên đa thức $f(x) = 2x^2 + 5,2$ không có nghiệm.

Tương tự: $-(x-3)^2 - 8 \neq 0 \forall x$ nên $g(x)$ không có nghiệm

17.13.

- a) $x = 2,5$ và $x = -2,5$ là hai nghiệm của $h(x)$;
 b) $x = -0,5$; $x = 7$; $x = 5$; $x = -4,5$ và $x = 7,5$ là năm nghiệm của $k(x)$;
 c) $x = -2\sqrt{5}$ là nghiệm của $p(x)$.

d)
$$x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{8} \\ x = -\sqrt{8} \end{cases}$$

17.14.

- a) $x = 1$ là nghiệm của đa thức $A(x)$ nên $A(1) = 0$

hay $a_{10} \cdot 1^{10} + a_9 \cdot 1^9 + \dots + a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 = 0$

hay $a_{10} + a_9 + \dots + a_2 + a_1 + a_0 = 0$

- b) Theo đầu bài: $b_{10} + b_8 + b_6 + b_4 + b_2 + b_0 = b_9 + b_7 + b_5 + b_3 + b_1$

Hay $b_{10} - b_9 + b_8 - b_7 + b_6 - b_5 + b_4 - b_3 + b_2 - b_1 + b_0 = 0$

Xét $B(-1) = b_{10} \cdot (-1)^{10} + b_9 \cdot (-1)^9 + b_8 \cdot (-1)^8 + b_7 \cdot (-1)^7 + b_6 \cdot (-1)^6 + b_5 \cdot (-1)^5$
 $+ b_4 \cdot (-1)^4 + b_3 \cdot (-1)^3 + b_2 \cdot (-1)^2 + b_1 \cdot (-1) + b_0$
 $= b_{10} - b_9 + b_8 - b_7 + b_6 - b_5 + b_4 - b_3 + b_2 - b_1 + b_0 = 0$

Chứng tỏ (-1) là một nghiệm của $B(y)$.

17.15.

$y = -2$ là nghiệm thì $f(-2) = 0$

Nghĩa là: $14 \cdot (-2)^4 - 5m(-2)^3 + 6m(-2)^2 + 8m(-2+1) = 0$

Hay $224 + 40m + 24m - 8m = 0 \Leftrightarrow 224 + 56m = 0 \Leftrightarrow m = -4$

17.16*.

$$a) f(2) = 16a + 8b + 4c + 2d + 4a = 0 \quad (1)$$

$$\text{và } f(-2) = 16a - 8b + 4c - 2d + 4a = 0 \quad (2)$$

$$\text{Cộng (1) và (2)} \Rightarrow 40a + 8c = 0 \text{ hay } c = -5a$$

$$\text{Trừ (1) và (2)} \Rightarrow 16b + 4d = 0 \text{ hay } d = -4b$$

$$\text{Ta có: } f(x) = ax^4 + bx^3 - 5ax^2 - 4bx + 4a$$

$$\text{Thử lại với } a = 3; b = 4 \text{ thì } c = -15; d = -16$$

$$\text{Ta có: } f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 16x + 12$$

$$f(2) = 48 + 32 - 60 - 32 + 12 = 0 \text{ chứng tỏ } x = 2 \text{ là nghiệm của đa thức.}$$

$$f(-2) = 48 - 32 - 60 + 32 + 12 = 0 \text{ chứng tỏ } x = -2 \text{ là nghiệm của đa thức.}$$

$$b) a = 1; b = 1 \text{ ta có: } f(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$f(1) = -3 \text{ nên } x = 1 \text{ không phải là nghiệm của } f(x)$$

$$f(-1) = 3 \text{ nên } x = -1 \text{ không phải là nghiệm của } f(x)$$

17.17.

$$f(x) = 16x^3 + (2b - 10)x^2 + (28 - 5b)x + 24$$

$$g(x) = (a - 6)x^3 - 14x^2 + (2 - 3b + 3c)x + 6(c - d)$$

$$\text{Để } f(x) \equiv g(x) \text{ ta phải có } \begin{cases} a - 6 = 16 \\ 2b - 10 = -14 \\ 28 - 5b = 2 - 3b + 3c \\ 6(c - d) = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 22 \\ b = -2 \\ c = 10 \\ d = 6 \end{cases}$$

17.18. $(a, b, c \in \mathbb{N}; 0 < a, b, c < 9)$

$$\text{Ta có: } \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 222(a + b + c) = 1998$$

$$\Rightarrow a + b + c = 9$$

$$\Rightarrow a = 1; b = 2; c = 6. \quad \overline{abc} = 126$$

$$\Rightarrow a = 1; b = 3; c = 5. \quad \overline{abc} = 135$$

$$\Rightarrow a = 2; b = 3; c = 4. \quad \overline{abc} = 234$$

17.19. Nghiệm: $x \in \left\{ \pm \frac{1}{100}; \dots; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{1}{2}; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots; \pm 100 \right\}$

Tổng tất cả các nghiệm là 0

17.20. Tổng các hệ số của đa thức bằng giá trị của đa thức đó tại $x = 1$.

a) $f(1) = (-3 \cdot 1^4 + 4 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 1)^{2019} = (-1)^{2019} = -1$

b) $g(1) = (19 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 - 10)^{1945} \cdot (30 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 1975 \cdot 1 - 2010)^{2018}$
 $= 1^{1945} \cdot (-1)^{2018} = 1$

c) $h(1) = 81 + 77 + 73 + 69 + 65 \dots + 9 + 5 + 1 = \frac{(81+1) \cdot 21}{2} = 861$

17.21.

a) Đa thức có nghiệm là $x = x_0$ nghĩa là $f(x_0) = ax_0 + b = 0$

hay $x_0 = -\frac{b}{a}$. Mà $f(x) = ax + b = a \left(x + \frac{b}{a} \right) = a(x - x_0)$ (đpcm).

b) $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in R$ và $a \neq 0$ có nghiệm -1 có nghĩa là:

$f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + c = 0$ hay $a - b + c = 0$

Suy ra $b = a + c$ (đpcm)

17.22.

a) Ta có $Q(0) \in Z$ nên $c \in Z$; $Q(1) = a + b + c \in Z \Rightarrow a + b \in Z$

$Q(2) = 4a + 2b + c \in Z$ mà $2(a + b + c) \in Z \Rightarrow (4a + 2b + c) - 2(a + b + c) \in Z$

hay $2a - c \in Z \Rightarrow 2a \in Z \Rightarrow a \in Z$ và $b \in Z$.

b) Với $x \in Z$ thì $x^2 - x \in Z$, mà $a \in Z$ nên $a(x^2 - x) \in Z$; $a + b \in Z$ nên $(a + b)x \in Z$.

Do đó $Q(x) = a(x^2 - x) + (a + b)x + c = ax^2 + bx + c \in Z, \forall x \in Z$

17.23. $P(x) - Q(x) = 3x^5 + 2006$

$$\frac{2008 \times 2010 - 1}{2007 + 2008 \times 2009} = \frac{2008 \times (2009 + 1) - 1}{2007 + 2008 \times 2009} = \frac{2008 \times 2009 + 2007}{2007 + 2008 \times 2009} = 1$$

Nên $x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1$ và $P(x) - Q(x) = 3x^5 + 2006 = 2009$

17.24.

a) $h(x) = x^2 + 5x$

b) $h(x) = x(x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 5$.

c) Do $\left(\frac{3^6}{9} - 81\right)^6 = 0$ nên $(x^2 - 9)^{2011} = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Từ đó $h(3) = 24; h(-3) = -6$.

17.25.

a) $f(1) = a + b + c; f(-2) = 4a - 2b + c$

b) $f(1) + f(-2) = 5a - b + 2c = 0 \Rightarrow f(1) = -f(-2)$

$$f(1) \times f(2) = -[f(1)]^2 \leq 0$$

c) Với $a = 1; b = 2; c = 3$

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 = (x^2 + x) + (x + 1) + 2 = x(x + 1) + (x + 1) + 2$$

$$= (x + 1)(x + 1) + 2 = (x + 1)^2 + 2 > 0 \quad \forall x \Rightarrow f(x) \text{ không có nghiệm.}$$

17.26.

Từ $P(x) + 3P(2) = 5x^2 \Rightarrow P(2) + 3P(2) = 20 \Rightarrow 4P(2) = 20 \Rightarrow P(2) = 5$.

Như vậy $P(x) = 5x^2 - 15 \Rightarrow P(3) = 5 \cdot 9 - 15 = 30$.

17.27.

$$f(5) - f(4) = (125a + 25b + 5c + d) - (64a + 16b + 4c + d) = 2012$$

$$\Leftrightarrow 61a + 9b + c = 2012$$

$$f(7) - f(2) = (343a + 49b + 7c + d) - (8a + 4b + 2c + d)$$

$$= 335a + 45b + 5c = 305a + 45b + 5c + 30a$$

$$= 5(61a + 9b + c) + 30a = 5 \cdot 2012 + 30a$$

$$= 10(1006 + 3a)$$

Vì a nguyên dương nên $10(1006 + 3a) \vdots 10$

Vậy $f(7) - f(2)$ là hợp số.

17.28. Nếu $x < 0$ thì $f(x) > 0$ đa thức vô nghiệm.

+ Với $0 \leq x < 1$ thì $f(x) = |2+x| - 2x = 2-x = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (loại)

+ Với $x \geq 1$ thì $f(x) = |4-x| - 2x$

* Với $1 \leq x \leq 4$; $f(x) = 4-3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ (thỏa mãn)

* Với $x > 4$; $f(x) = -x-4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ (loại)

Vậy nghiệm của $f(x)$ là $x = \frac{4}{3}$.

Chuyên đề 18

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp D :

a) Nếu $f(x) \geq m$ mà m là một hằng số và $f(x) = m$ tại $x = x_0 \in D$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là m , đạt được tại $x = x_0$.

Ta viết $\min(f(x)) = m$ tại $x = x_0$.

b) Nếu $f(x) \leq n$ mà n là một hằng số và $f(x) = n$ tại $x = x_0 \in D$ thì giá trị lớn nhất của $f(x)$ là n , đạt được tại $x = x_0$. Ta viết $\max(f(x)) = n$ tại $x = x_0$.

B. Một số ví dụ

1. Dạng bài đưa biểu thức về dạng $f(x) \geq m$ hoặc $f(x) \leq n$

Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A(x) = (19x-5)^2 + 1890$;

b) $B(x) = 3x + \sqrt{15x} - 10$;

c) $C(x) = \sqrt{30-4x} + \sqrt{1975}$;

d) $D(x) = (x^{2018} + x^{2020} + 2019)^{2019}$.

✓ *Tìm cách giải:* Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ ta tìm hằng số m trong tập xác định D của $f(x)$ mà $f(x) \geq m$. Sau đó tìm $x = x_0 \in D$ để $f(x_0) = m$.

a) $(19x-5)^2$ là bình phương của một biểu thức nên giá trị của nó luôn không âm $\forall x$. Do đó tìm được $(19x-5)^2 + 1890 \geq ?$. Dấu “=” xảy ra khi nào? tại $x = ?$

b), c) Điều kiện để biểu thức có nghĩa?

Lưu ý: Căn bậc hai không âm của a được kí hiệu là $\sqrt{a}$. Khi viết $\sqrt{a}$ phải có $a \geq 0$.

d) Nhận xét về bậc của các lũy thừa của x và giá trị của cả biểu thức.

Giải

a) Do $(19x-5)^2 \geq 0, \forall x$ nên $(19x-5)^2 + 1890 \geq 1890, \forall x$.

$$A(x) = 1890 \Leftrightarrow (19x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{19}.$$

Ta có $A(x) \geq 1890, \forall x$; dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{5}{19}$.

Vậy $\min A(x) = 1890$ tại $x = \frac{5}{19}$.

b) Điều kiện để $\sqrt{15x}$ có nghĩa: $x \geq 0$.

Ta có: $B(x) = 3x + \sqrt{15x} - 10 \geq -10$ do $x \geq 0$ và $\sqrt{15x} \geq 0$ nên

$$B(x) \geq -10 \text{ với } x \geq 0; \text{ dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy $\min B(x) = -10$ tại $x = 0$.

c) Điều kiện để $\sqrt{30-4x}$ có nghĩa: $30-4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 7,5$

Ta có: $C(x) = \sqrt{30-4x} + \sqrt{1975} \geq \sqrt{1975}$ do $\sqrt{30-4x} \geq 0$ nên

$$C(x) \geq \sqrt{1975}. \text{ Lại có } C(7,5) = \sqrt{1975}$$

Do đó $C(x) \geq \sqrt{1975}$ với $x \leq 7,5$; dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 7,5$.

Vậy $\min C(x) = \sqrt{1975}$ tại $x = 7,5$.

d) Ta có $x^{2018} \geq 0; x^{2020} \geq 0, \forall x$ nên $(x^{2018} + x^{2020} + 2019)^{2019} \geq 2019^{2019}, \forall x$. Lại có $D(0) = 2019^{2019}$.

Do đó $D(x) \geq 2019^{2019} \forall x$; dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $\min D(x) = 2019^{2019}$ tại $x = 0$.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

$$a) E(y) = 1945 - (2y + 9)^2;$$

$$b) F(y) = \frac{2016}{(y-5)^2 + 9}.$$

✓ *Tìm cách giải:* Tìm giá trị lớn nhất của $f(y)$ ta tìm hằng số n trong tập xác định D của $f(y)$ mà $f(y) \leq n$. Sau đó tìm $y = y_0 \in D$ để $f(y_0) = n$.

a) $(2y + 9)^2$ là bình phương của một biểu thức nên giá trị của nó luôn không âm $\forall y$. Do đó $1945 - (2y + 9)^2$ sẽ như thế nào? Dấu “=” xảy ra khi nào?

Lưu ý $2y + 9 = 0 \Leftrightarrow 2y = -9 \Leftrightarrow y = -4,5$.

$$b) \text{ Trước hết xét } F(y) = \frac{2016}{(y-5)^2 + 9}.$$

$$(y-5)^2 + 9 \geq 9 \quad \forall x \Rightarrow \frac{1}{(y-5)^2 + 9} \leq \frac{1}{9}$$

Ta có:

(theo tính chất lấy nghịch đảo: Cho hai số dương a và b , nếu $a \geq b$ thì $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$). Từ đó suy ra

$$\frac{2016}{(y-5)^2 + 9} \leq \frac{2016}{9} = 224$$

Giải

$$a) E(y) = 1945 - (2y + 9)^2$$

Ta có $(2y + 9)^2 \geq 0, \forall y$ nên $1945 - (2y + 9)^2 \leq 1945, \forall y$.

Do đó $E(y) \leq 1945, \forall y$. Mặt khác, $E(-4,5) = 1945$ nên $E(y) \leq 1945, \forall y$; dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow y = -4,5$.

Vậy $\max E(y) = 1945$ tại $y = -4,5$.

$$b) F(y) = \frac{2016}{(y-5)^2 + 9}, \forall y, \text{ ta có: } (y-5)^2 \geq 0 \Rightarrow (y-5)^2 + 9 \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(y-5)^2 + 9} \leq \frac{1}{9}$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \frac{2016}{(y-5)^2 + 9} \leq \frac{2016}{9}. \text{ Mặt khác, } F(5) = \frac{2016}{(5-5)^2 + 9} = \frac{2016}{9} = 224$$

Nên $F(y) \leq 224 \forall y$; dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow y = 5$.

Vậy $\max F(y) = 224$ tại $y = 5$.

2. Dạng bài mà biến số có giá trị nguyên (hoặc tự nhiên)

Ví dụ 3: Tìm số nguyên x để:

a) Biểu thức A đạt giá trị lớn nhất với $A = \frac{2015}{2019 - x}$;

b) Biểu thức B đạt giá trị nhỏ nhất với $B = \frac{1930}{x - 5}$.

✓ *Tìm cách giải:* Với $x \in \mathbb{Z}$ thì A và B là những phân số.

Với các phân số dương có tử số dương không đổi thì phân số có giá trị lớn nhất khi mẫu số dương nhỏ nhất.

Với các phân số âm có tử số dương không đổi thì phân số có giá trị nhỏ nhất khi đối của phân số đó có giá trị lớn nhất.

Giải

a) Điều kiện $x \neq 2019$. Ta xét hai trường hợp sau:

* Nếu $x < 2019$ thì $2019 - x > 0$, mà $2015 > 0$ nên $A > 0$.

* Nếu $x > 2019$ thì $2019 - x < 0$, mà $2015 > 0$ nên $A < 0$.

Do đó muốn $A_{\max}$ thì phải chọn x sao cho $A > 0$, tức là chọn $x < 2019$.

Khi đó $A_{\max}$ khi và chỉ khi $(2019 - x)_{\min}$ do 2015 là hằng số dương. Ta có $2019 - x > 0$ mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $(2019 - x)_{\min} \Leftrightarrow 2019 - x = 1$ hay $x = 2018$.

Vậy $A = \frac{2015}{2019 - x}$ đạt giá trị lớn nhất là $2015 \Leftrightarrow x = 2018$.

b) Điều kiện $x \neq 5$. Ta xét hai trường hợp sau:

* Nếu $x < 5$ thì $x - 5 < 0$, mà $1930 > 0$ nên $B < 0$.

* Nếu $x > 5$ thì $x - 5 > 0$, mà $1930 > 0$ nên $B > 0$.

Do đó muốn $B_{\min}$ phải chọn x sao cho $B < 0$, tức là chọn $x < 5$.

Khi đó $B_{\min}$ khi số đối của $B_{\max}$ hay $\left(\frac{1930}{5 - x}\right)_{\max} \Leftrightarrow (5 - x)_{\min}$ do 1930 là hằng số dương.

Ta có $5 - x > 0$ mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $(5 - x)_{\min} \Leftrightarrow 5 - x = 1$ hay $x = 4$.

Vậy $B = \frac{1930}{x - 5}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $-1930 \Leftrightarrow x = 4$.

Ví dụ 4: Tìm số nguyên y để:

a) Biểu thức C đạt giá trị lớn nhất với $C = \frac{58 - 3y}{19 - y}$;

b) Biểu thức D đạt giá trị nhỏ nhất với $D = \frac{59 - 2y}{y - 25}$.

✓ *Tìm cách giải:* Với $y \in \mathbb{Z}$ thì C và D là những phân số. Ta biến đổi

$$C = \frac{57-3y+1}{19-y} = \frac{3(19-y)+1}{19-y} = 3 + \frac{1}{19-y} = 3 + E$$

$$D = \frac{9+50-2y}{y-25} = \frac{9-2(y-25)}{y-25} = \frac{9}{y-25} - 2 = F - 2$$

và lý luận tương tự ví dụ 3.

Giải

a) Điều kiện $y \neq 19$ ta có:

$$C = \frac{57-3y+1}{19-y} = \frac{3(19-y)+1}{19-y} = 3 + \frac{1}{19-y} = 3 + E \quad \text{với} \quad E = \frac{1}{19-y}.$$

* Nếu $y < 19$ thì $19-y > 0$ mà $1 > 0$ nên $E > 0$.

* Nếu $y > 19$ thì $19-y < 0$ mà $1 > 0$ nên $E < 0$.

Ta có $C_{\max} \Leftrightarrow E_{\max}$. Muốn $E_{\max}$ thì phải chọn y sao cho $E > 0$ tức là chọn $y < 19$. Khi đó $E_{\max} \Leftrightarrow (19-y)_{\min}$ (do 1 là hằng số dương).

Ta có $19-y > 0; y \in \mathbb{Z}$ nên $(19-y)_{\min} \Leftrightarrow 19-y=1 \Leftrightarrow y=18$.

Ta có $\max C = 4$ khi và chỉ khi $y=18$.

b) Điều kiện $y \neq 25$, ta có:

$$D = \frac{9+50-2y}{y-25} = \frac{9-2(y-25)}{y-25} = \frac{9}{y-25} - 2 = F - 2$$

Ta xét hai trường hợp sau:

* Nếu $y > 25$ thì $y-25 > 0$ mà $9 > 0$ nên $F > 0$.

* Nếu $y < 25$ thì $y-25 < 0$ mà $9 > 0$ nên $F < 0$.

Do đó muốn $F_{\min}$ phải chọn y sao cho $F < 0$, tức là chọn $y < 25$.

Khi đó $F_{\min}$ khi số đối của $F_{\max}$ hay $\left(\frac{9}{25-y}\right)_{\max} \Leftrightarrow (25-y)_{\min}$ do 9 là hằng số dương.

Ta có $25-y > 0$ mà $y \in \mathbb{Z}$ nên $(25-y)_{\min} \Leftrightarrow 25-y=1$ hay $y=24$.

Vậy $D = \frac{59-2y}{y-25}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $-11 \Leftrightarrow y=24$.

3. Dạng tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của một biểu thức chứa nhiều biến.

Ví dụ 5:

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 + 4;$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P(x, y) = \frac{2016}{(x+2018)^2 + (y-2019)^2 + 224};$$

c) Tìm giá trị lớn nhất của $Q(x, y) = xy$ biết rằng $3(x-y)^2 + 5xy = 180$.

✓ *Tìm cách giải:*

a) Biểu thức có ba biến, xác định với mọi giá trị của x, y và z .

Lưu ý: $(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in R; (y+2)^2 \geq 0, \forall y \in R$

và $(z-3)^2 \geq 0 \forall z \in R$.

b) Lưu ý tính chất nghịch đảo của số dương. Với a và b là hai số dương:

Nếu $a \geq b$ thì $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

c) Từ $3(x-y)^2 + 5xy = 180$ tìm hệ thức $Q(x, y)$ nhỏ hơn hoặc bằng một hằng số.

Giải

a) $M(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 + 4$.

Do $(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in R; (y+2)^2 \geq 0, \forall y \in R; (z-3)^2 \geq 0, \forall z \in R$.

Nên $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 + 4 \geq 4, \forall x \in R, \forall y \in R, \forall z \in R$.

$$M(1; -2; 3) = (1-1)^2 + (-2+2)^2 + (3-3)^2 + 4 = 4$$

Do đó $M(x, y, z) \geq 4, \forall x \in R, \forall y \in R, \forall z \in R$ dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 1; y = -2; z = 3$.

Vậy $\min M(x, y, z) = 4$ tại $x = 1; y = -2; z = 3$.

b) $\forall x \in R, \forall y \in R$ ta có $(x+2018)^2 + (y-2019)^2 + 224 \geq 224$

do đó $P(x, y) = \frac{2016}{(x+2018)^2 + (y-2019)^2 + 224} \leq \frac{2016}{224}$.

Mặt khác

$$P(-2018; 2019) = \frac{2016}{(-2018+2018)^2 + (2019-2019)^2 + 224} = \frac{2016}{224} = 9$$

Ta có $P(x, y) \leq \frac{2016}{224} = 9 \forall x \in R, \forall y \in R$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = -2018; y = 2019$.

c) Do $3(x-y)^2 + 5xy = 180$ nên $Q(x, y) = xy = 36 - \frac{3}{5}(x-y)^2$

Do $\forall x \in R, \forall y \in R$ ta có $\frac{3}{5}(x-y)^2 \geq 0$ nên $Q(x, y) = 36 - \frac{3}{5}(x-y)^2 \leq 36$

Và $Q(x, y) = xy = 36$ khi và chỉ khi $x = y = 6$ hoặc $x = y = -6$.

Vậy $\max Q(x, y) = 36$ tại $x = y = 6$ hoặc $x = y = -6$.

Ví dụ 6: Cho a, b là các số tự nhiên khác 0. Biết $1 > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{7}{10}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{2020}{a+b}$.

✓ *Tìm cách giải:* A là phân số dương có tử số là 2020 không đổi. Vì vậy muốn A đạt giá trị lớn nhất thì $(a+b)$ phải đạt giá trị nhỏ nhất. Để tìm $(a+b)_{\min}$ ta phải tìm các giá trị có thể có của a và b rồi tìm các

giá trị nhỏ nhất của a và b . Ta thấy ngay từ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow a, b > 1$. Chú ý tính chất nghịch đảo của hai số tự

nhiên m, n khác 0: $m > n$ thì $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$

Giải

Do $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow a, b > 1$ không mất tổng quát giả sử $1 < a \leq b$

$\Rightarrow 1 > \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$. Ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{a}$ hay $\frac{7}{10} \leq \frac{2}{a} \Rightarrow a \leq 2 \frac{6}{7}$

Do $a \in N$ và $a > 1$ nên $a = 2$ (1)

Với $a = 2$ ta có $\frac{7}{10} < \frac{1}{2} + \frac{1}{b} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2} \Rightarrow b \in \{3; 4\}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $\min(a+b) = 2+3 = 5$

Vậy $\max A = \frac{2020}{5} = 404$.

C. Bài tập vận dụng

1. Dạng bài đưa biểu thức về dạng $f(x) \geq m$ hoặc $f(x) \leq n$

18.1. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $f(x) = (1,5x - 4,5)^2 - 12$;

b) $g(x) = 2x + 3\sqrt{3x-6} + 16$;

c) $h(x) = \sqrt{64+2x} - \sqrt{23}$;

$$d) P(x) = (x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{98} + x^{100} + 2)^{2015} + 2^{2015}.$$

18.2. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

$$a) A(y) = 15 - (30 + 2y)^2;$$

$$b) B(y) = \frac{2015}{(4 - 5y)^2 + 2018};$$

$$c) C(y) = \frac{2 + 4 + 6 + \dots + 198 + 200}{(10y - 5)^2 + (1 + 3 + 5 + \dots + 17 + 19)^2 + 100};$$

$$d) D(y) = \sqrt{5} - (\sqrt{2y - 4} - \sqrt{6})^2.$$

18.3.

$$a) \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: } S = \frac{5x^2 + 4x^2 + 10}{x^4 + 2};$$

$$b) \text{ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: } T = \frac{2x^4 - 4x^2 + 8}{x^4 + 4};$$

c) Cho a là hằng số và $a > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{8y^8 + 2a(y - 3)^2 + 2a^2}{4y^8 + a^2}.$$

2. Dạng bài mà biến số có giá trị nguyên (hoặc tự nhiên)

18.4. Tìm số nguyên x để:

$$a) \text{ Biểu thức A đạt giá trị lớn nhất với } A = \frac{16}{6 - x};$$

$$b) \text{ Biểu thức B đạt giá trị nhỏ nhất với } B = \frac{1945}{x - 1930}.$$

18.5. Tìm số nguyên y để:

$$a) \text{ Biểu thức C đạt giá trị lớn nhất với } C = \frac{36 - 3y}{11 - y};$$

$$b) \text{ Biểu thức D đạt giá trị nhỏ nhất với } D = \frac{21 - y}{y - 2};$$

18.6. Tìm giá trị của số tự nhiên n để phân số $P = \frac{11n - 47}{2n - 9}$ có giá trị lớn nhất.

3. Dạng tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của một biểu thức chứa nhiều biến.

18.7. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

$$a) f(x, y) = (x - 2)^2 + (2y + 1)^2 - 25;$$

$$b) g(x, y) = (x + y - 1)^2 + (y - 3)^2 + 4.$$

$$c) \quad h(x, y) = \frac{-2}{6 + (2x - y)^2 + (x + 1)^2};$$

$$d) \quad k(x, y, z) = (x + y - 2z)^2 + (x - y - 3)^4 + (y - 1)^6 + 5.$$

18.8. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

$$a) \quad A(x, y) = 2017 - (11y - 7)^2 - (x - 100)^2;$$

$$b) \quad B(x, y) = 16 - (x + y + 2)^2 - (y^2 - 9)^2;$$

$$c) \quad C(x, y) = \frac{24}{3 + (2x^3 - y - 1)^2 + (x^2 - 4)^2};$$

$$d) \quad D(x, y) = \frac{2(x - 1)^2 + 2(y - 2)^2 + 100}{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 2}.$$

18.9.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M(x, y, z) = (x + 1)^2 + 2(y - 2)^2 + 3(2z - 3) + 4;$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$N(x, y, z) = \frac{15}{(2x - 4)^2 + (y + 3)^2 + 10} + \frac{5}{(4z - 2016)^2 + 2};$$

$$c) \text{ Tìm giá trị lớn nhất của } P(x, y) = 2xy \text{ biết rằng } (x - y)^2 + 0,1xy = 10.$$

18.10. Cho a, b, c là các số nguyên. Biết $a < 5b; b < 5c$ và $c < 25$. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $(a + b + c)$.

18.11. Tìm giá trị lớn nhất của tỷ số giữa một số có ba chữ số với tổng các chữ số của nó.

18.1.

a) $\min f(x) = -12 \Leftrightarrow x = 3$.

b) Điều kiện để căn thức có nghĩa: $x \geq 2$

Ta có: $g(x) = 2x + 3\sqrt{3x-6} + 16 \geq 20$ do $x \geq 2$ và $3\sqrt{3x-6} \geq 0$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$. Vậy $\min g(x) = 20 \Leftrightarrow x = 2$.

c) Điều kiện để căn thức có nghĩa: $64 + 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -32$

với $x \geq -32$ thì $\sqrt{64+2x} \geq 0$. Ta có $h(x) = \sqrt{64+2x} - \sqrt{23} \geq -\sqrt{23}$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = -32$. Vậy $\min h(x) = -\sqrt{23} \Leftrightarrow x = -32$.

d) Ta có $\forall x$ thì $x^2 \geq 0; x^4 \geq 0; x^6 \geq 0; \dots; x^{98} \geq 0; x^{100} \geq 0$;

nên $p(x) = (x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{98} + x^{100} + 2)^{2015} + 2^{2015} \geq 2^{2015} + 2^{2015} = 2^{2016}$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $\min p(x) = 2^{2016} \Leftrightarrow x = 0$

18.2.

a) $\max A(y) = 15$ tại $y = -15$.

b) $\forall y$ ta có $(4-5y)^2 \geq 0 \Rightarrow (4-5y)^2 + 2018 \geq 2018$.

Từ đó suy ra $B(y) = \frac{2015}{(4-5y)^2 + 2018} \leq \frac{2015}{2018}$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow y = 0,8$

Vậy $\max B(y) = \frac{2015}{2018} \Leftrightarrow y = 0,8$.

c) Ta có $2 + 4 + 6 + \dots + 198 + 200 = (2 + 200) \cdot 100 : 2 = 10100$

$(1 + 3 + 5 + \dots + 17 + 19)^2 + 100 = [(1 + 19) \cdot 10 : 2]^2 + 100 = 10100$

$\max C(y) = 1 \Leftrightarrow y = 0,5$;

d) Điều kiện để $\sqrt{2y-4}$ có nghĩa là $2y-4 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 2$.

Ta có với $y \geq 2$ thì $(\sqrt{2y-4} - \sqrt{6})^2 \geq 0$

Do đó $\sqrt{5} - (\sqrt{2y-4} - \sqrt{6})^2 \leq \sqrt{5}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow y = 5$.

Vậy $\max D = \sqrt{5}$ tại $y = 5$.

18.3.

$$a) S = \frac{5x^4 + 4x^2 + 10}{x^4 + 2} = \frac{5(x^4 + 2) + 4x^2}{x^4 + 2} = 5 + \frac{4x^2}{x^4 + 2} \geq 5$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $\min S = 5 \Leftrightarrow x = 0$.

$$b) T = \frac{2x^4 - 4x^2 + 8}{x^4 + 4} = \frac{2(x^4 + 4) - 4x^2}{x^4 + 4} = 2 - \frac{4x^2}{x^4 + 4} \leq 2$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $\max T = 2 \Leftrightarrow x = 0$.

$$c) M = \frac{8y^8 + 2a(y-3)^2 + 2a^2}{4y^8 + a^2} = \frac{2(4y^8 + a^2) + 2a(y-3)^2}{4y^8 + a^2} = 2 + \frac{2a(y-3)^2}{4y^8 + a^2}$$

Ta có $a > 0$ và $4y^8 + a^2 > 0; \forall y$ nên $\frac{2a(y-3)^2}{4y^8 + a^2} \geq 0 \quad \forall y \Rightarrow M \geq 2 \quad \forall y$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow y = 3$

Vậy $\min M = 2 \Leftrightarrow y = 3$.

18.4.

a) Điều kiện $x \neq 6$. Nếu $x < 6$ thì $6 - x > 0$, mà $16 > 0$ nên $A > 0$. Nếu $x > 6$ thì $6 - x < 0$, mà $16 > 0$ nên $A < 0$. Do đó muốn $A_{\max}$ thì phải chọn $x < 6$ để $A > 0$. Khi đó $A_{\max}$ khi và chỉ khi $(6 - x)_{\min}$ mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $(6 - x)_{\min} \Leftrightarrow 6 - x = 1$ hay $x = 5$. Vậy $\max A = 16 \Leftrightarrow x = 5$.

b) Điều kiện $x \neq 1930$. Nếu $x < 1930$ thì $x - 1930 < 0 \Rightarrow B < 0$.

Nếu $x > 1930$ thì $x - 2019 > 0 \Rightarrow B > 0$. Do đó muốn $B_{\min}$ thì phải chọn x sao cho $B < 0$, tức là chọn

$x < 1930$. Khi đó $B_{\min}$ khi số đối của $B_{\max}$ hay $\left(\frac{1945}{1930 - x}\right)_{\max} \Leftrightarrow (1930 - x)_{\min} \Leftrightarrow 1930 - x = 1$ hay $x = 1929$.

Ta có B đạt giá trị nhỏ nhất là $-1945 \Leftrightarrow x = 1929$.

18.5.

a) Với $y \in \mathbb{Z}; y \neq 11$ thì C là một phân số và

$$C = \frac{36 - 3y}{11 - y} = \frac{3(11 - y) + 3}{11 - y} = 3 + \frac{3}{11 - y}$$

Đáp số: $\max C = 6 \Leftrightarrow y = 10$

b) Điều kiện $y \neq 2$, ta có: $D = \frac{21-y}{y-2} = \frac{19-(y-2)}{y-2} = \frac{19}{y-2} - 1$

Đáp số: $\min D = -20 \Leftrightarrow y = 1$.

18.6.

$$P = \frac{2(11n-47)}{2(2n-9)} = \frac{22n-94}{2(2n-9)} = \frac{11(2n-9)+5}{2(2n-9)} = \frac{11}{2} + \frac{5}{2(2n-9)}$$

Đáp số: $\max P = 8 \Leftrightarrow n = 5$.

18.7.

a) $f(x, y) = (x-2)^2 + (2y+1)^2 - 25 \geq -25$.

Đấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ 2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-0,5 \end{cases}$.

Vậy $\min f(x, y) = -25 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-0,5 \end{cases}$

b) $g(x, y) = (x+y-1)^2 + (y-3)^2 + 4 \geq 4$.

Đấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} y-3=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=-2 \end{cases}$.

Vậy $\min f(x, y) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$

c) $h(x, y) = \frac{-2}{6+(2x-y)^2+(x+1)^2}$

Ta có: $\forall x; y$ thì $6 + [(2x-y)^2 + (x+1)^2] \geq 6$. Đấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

Do đó: $0 \leq \frac{1}{6+(2x-y)^2+(x+1)^2} \leq \frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow 0 \geq \frac{-2}{6+(2x-y)^2+(x+1)^2} \geq -\frac{1}{3}$

Vậy $\min h(x, y) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$.

d) $\forall x; y; z$ thì $k(x, y, z) = (x+y-2z)^2 + (x-y-3)^4 + (y-1)^6 + 5 \geq 5$.

Đấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ x-y-3=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=2,5 \end{cases}$.

$$\min k(x, y, z) = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 2,5 \end{cases}$$

Vậy

18.8.

$$a) A(x, y) = 2017 - \left[(11y - 7)^2 + (x - 100)^2 \right] \leq 2017$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow 11x - 7 = 0 \text{ và } x - 100 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{7}{11} \text{ và } x = 100$$

$$\max A(x, y) = 2017 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = \frac{7}{11} \end{cases}$$

Vậy

$$b) \forall x, y \text{ thì } B(x, y) = 16 - \left[(x + y + 2)^2 + (y^2 - 9)^2 \right] \leq 16$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta tìm được } \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \max B(x, y) = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$c) \forall x, y \text{ thì } C(x, y) = \frac{24}{3 + (2x^3 - y - 1)^2 + (x^2 - 4)^2} \leq 8$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - y - 1 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta tìm được } \begin{cases} x = 2 \\ y = 15 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = -17 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \max C(x, y) = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 15 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = -17 \end{cases}$$

$$d) D(x, y) = \frac{2 \left[(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2 \right] + 96}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2} = 2 + \frac{96}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2}$$

$$\text{Do } \forall x, y \text{ ta có } (x-1)^2 + (y-2)^2 + 2 \geq 2 \text{ nên } \frac{96}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2} \leq \frac{96}{2} = 48$$

$$\text{Và } 2 + \frac{96}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2} \leq 50$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$. Vậy $\max D(x, y) = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$.

18.9.

a) $\min M(x, y, z) = 4 \Leftrightarrow (x = -1; y = 2; z = 1, 5)$

b) $\max N(x, y) = 4 \Leftrightarrow (x = 2; y = -3; z = 504)$

c) Do $(x - y)^2 + 0,1xy = 10$ nên $P(x, y) = 2xy = 200 - 20(x - y)^2$

Do $\forall x \in R, \forall y \in R$ ta có $20(x - y)^2 \geq 0$

Nên $P(x, y) = 200 - 20(x - y)^2 \leq 200$

Và $P(x, y) = 2xy = 200$ khi và chỉ khi $x = y = 10$ hoặc $x = y = -10$.

Vậy $\max P(x, y) = 200 \Leftrightarrow x = y = 10$ hoặc $x = y = -10$.

18.10. Ta có $c \in Z$, mà $c < 25$ nên $\max(c) = 24$

$b < 5c$ mà $\max(c) = 24$ nên $b < 120$ và $b \in Z \Rightarrow \max(b) = 119$

$a < 5b$ mà $\max(b) = 119$ nên $a < 595$ và $a \in Z \Rightarrow \max(a) = 594$

Vậy $\max(a + b + c) = 594 + 119 + 24 = 737$.

18.11. Gọi số có ba chữ số là $\overline{abc}$ với $a, b, c \in N; 1 \leq a \leq 9; 0 \leq b, c \leq 9$.

Ta phải tìm $\max A$ với $A = \frac{\overline{abc}}{a + b + c}$.

Ta có $A = \frac{\overline{abc}}{a + b + c} = \frac{100a + 10b + c}{a + b + c} = \frac{(a + b + c) + 99a + 9b}{a + b + c}$

$= 1 + \frac{99a + 9b}{a + b + c} \leq 1 + \frac{99a + 9b}{a + b}$ (1)

Mặt khác, ta lại có: $\frac{99a + 9b}{a + b} = \frac{9(10a + a + b)}{a + b} = \frac{9(a + b)}{a + b} + \frac{90a}{a + b}$

$= 9 + \frac{90a}{a + b} \leq 9 + \frac{90a}{a}$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra: $A \leq 1 + 9 + \frac{90a}{a} = 10 + 90 = 100$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a \in \{1; 2; 3; \dots; 8; 9\}; b = 0$ và $c = 0$.

Vậy $\max A = 100 \Leftrightarrow a \in \{1; 2; 3; \dots; 8; 9\}; b = 0$ và $c = 0$.

Chuyên đề 19. NGUYÊN LÝ DIRICHLET

A. Kiến thức cần nhớ

1. Nội dung: Dirichlet (Điriklê) là tên của một nhà toán học người Đức (Pôngutáp Lêgien Điriklê) ông sinh năm 1805 và mất năm 1859. Trong quá trình nghiên cứu và giảng dạy toán ở các trường phổ thông ông đã đưa ra được một nguyên tắc giải toán rất hữu hiệu và được sử dụng nhiều trong lĩnh vực số học, hình học và đại số. Ngày nay người ta thường gọi nguyên tắc này là nguyên tắc Dirichlet hay nguyên lý Dirichlet (hay còn gọi là nguyên tắc “nhốt thỏ vào lồng”)

* Cụ thể: *Nếu nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng thì tồn tại ít nhất một lồng có từ 3 con thỏ trở lên. (Hay: Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng lại không có cái lồng nào nhốt nhiều hơn 2 con thỏ).*

* Tổng quát:

a. *Nếu ta nhốt n chú thỏ vào $n-1$ cái lồng thì tồn tại một lồng có từ hai chú thỏ trở lên.*

b. *Khi nhốt n con thỏ vào k cái lồng:*

+ *Nếu $n = kp + r$ ($0 < r \leq k-1$) thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn $p+1$ con thỏ.*

+ *Nếu $n = kp$ thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn p con thỏ và tồn tại ít nhất một lồng chứa không nhiều hơn p con thỏ.*

2. Chú ý:

+ Nguyên lý Dirichlet thường được sử dụng để giải các bài toán chứng minh sự tồn tại của sự vật, sự việc mà không cần chỉ ra một cách tường minh sự vật, sự việc đó.

+ Khi giải bài toán vận dụng nguyên lý Dirichlet, điều quan trọng là phải nhận ra (hay tạo ra) các yếu tố “thỏ”; “lồng”; “nhốt thỏ vào lồng”. Khi giải diễn đạt theo ngôn ngữ toán học.

+ Nhiều bài toán sau một số bước trung gian mới sử dụng được nguyên lý Dirichlet.

+ Thường kết hợp với phương pháp chứng minh phản chứng.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Chứng minh nguyên lý Dirichlet.

✓ *Tìm cách giải:* Chứng minh trực tiếp hoặc sử dụng phản chứng.

Giải

* Chứng minh: *Nếu nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng thì tồn tại ít nhất một lồng có từ 3 con thỏ trở lên. (Hay: Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng mà lại không có lồng nào nhốt nhiều hơn 2 con thỏ).* Thật vậy, nếu mỗi lồng chứa không quá 2 con thỏ thì 3 lồng chứa không quá $2 \cdot 3 = 6$ con thỏ, vô lý. Vậy không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng mà không có lồng nào nhốt nhiều hơn 2 con thỏ.

* Chứng minh tổng quát:

a. *Nếu ta nhốt n con thỏ vào $n-1$ cái lồng thì tồn tại một lồng có từ hai con thỏ trở lên.*

Thật vậy giả sử không có lồng nào chứa từ hai con thỏ trở lên thì nhiều nhất mỗi lồng chỉ chứa một con thỏ. $(n-1)$ cái lồng chứa nhiều nhất $(n-1)$ con thỏ. Vô lý.

Vậy nếu ta nhốt n con thỏ vào $n-1$ cái lồng thì tồn tại một lồng có từ hai con thỏ trở lên.

b. Khi nhốt n con thỏ vào k cái lồng:

+ Nếu $n = kp + r$ ($0 < r \leq k-1$) thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn $p+1$ con thỏ.

Thật vậy: Giả sử lồng nào cũng có không quá p con thỏ thì k lồng không có kp con thỏ, ít hơn số n con thỏ, vô lý.

+ Nếu $n = kp$ thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn p con thỏ và tồn tại ít nhất một lồng chứa không nhiều hơn p con thỏ.

Thật vậy giả sử lồng nào cũng chứa ít hơn p con thỏ thì k lồng không có quá $k(p-1)$ thỏ, vô lý. Giả sử lồng nào cũng chứa nhiều hơn p con thỏ thì k lồng có ít nhất là $k(p+1)$ thỏ, vô lý.

Ví dụ 2: Thả 257 viên bi nhỏ vào bàn cờ Quốc tế 64 ô vuông. Chứng minh tồn tại một ô chứa ít nhất 5 viên bi (kể cả trường hợp viên bi nằm trên cạnh ô vuông).

✓ *Tìm cách giải:* Coi 64 ô vuông như 64 cái lồng. 257 viên bi là 257 con thỏ. Ta thấy $257 = 64 \cdot 4 + 1$. Thả 257 con thỏ vào 64 cái lồng, theo nguyên lý Đì-rich-lê tồn tại một lồng chứa ít nhất 5 con thỏ.

Giải

Giải trực tiếp như trên. Tuy nhiên có thể dùng phản chứng:

Giả sử không tồn tại một ô nào chứa ít nhất 5 viên bi, thì nhiều nhất mỗi ô chỉ chứa 4 viên. 64 ô chứa nhiều nhất $64 \cdot 4 = 256$ viên bi. Vô lý.

Ví dụ 3: Một lớp học có 41 học sinh làm bài kiểm tra Toán, không có ai bị điểm dưới 3. Có bốn học sinh đạt điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

✓ *Tìm cách giải:* Trong bài toán này số “thỏ” là $41 - 4 = 37$ điểm từ 3 đến 9. “Lồng” là 7 loại điểm nói trên. Phép chia 37 cho 7 được 5 còn dư. Tồn tại $5 + 1 = 6$ học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau.

Giải

Có $41 - 4 = 37$ học sinh phân chia vào 7 loại điểm từ 3 đến 9. Giả sử không tồn tại một loại điểm nào có ít nhất 6 bạn đạt, thì nhiều nhất mỗi loại điểm chỉ có 5 bạn đạt; 7 loại điểm có nhiều nhất $7 \cdot 5 = 35$ bạn đạt. Lớp học ít hơn 41 học sinh. Vô lý. Vậy tồn tại ít nhất 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau.

Ví dụ 4: Người ta chia một hình vuông thành 16 hình vuông nhỏ bằng cách chia mỗi cạnh thành 4 phần bằng nhau. Người ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số $-a; 0; a$ sau đó tính tổng các số theo từng cột, từng hàng và từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại 2 tổng có giá trị bằng nhau.

✓ *Tìm cách giải:* Có bao nhiêu tổng theo cột, theo hàng, theo đường chéo đó chính là “số thỏ”. Mỗi tổng có thể có giá trị bao nhiêu. Số giá trị của tổng sẽ là số “lồng”.

Giải

Số hàng: 4; Số cột: 4; Số đường chéo: 2. Như vậy sẽ có 10 tổng.

Các giá trị có thể có khi cộng các số trong mỗi hàng, cột hoặc đường chéo là $-4a, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, 4a$.

Có 10 tổng, mỗi tổng nhận 1 trong 9 giá trị mà $10 = 9 \cdot 1 + 1$. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng: Trong $n+1$ số tự nhiên bất kỳ $a_1; a_2; \dots; a_n; a_{n+1}$ luôn tìm được hai số sao cho hiệu của chúng chia hết cho n .

✓ *Tìm cách giải:* Trong bài toán “thỏ” là các số tự nhiên bất kỳ, “lồng” là số số dư trong phép chia một số cho n . Chia một số bất kỳ cho n có thể nhận được một trong n số dư $0; 1; 2; \dots; n-2; n-1$. Có $n+1$ con thỏ, có n cái lồng

Giải

Chia một số bất kỳ cho n có thể nhận được một trong n số dư $0; 1; 2; \dots; n-2; n-1$. Có $n+1$ số, có n số dư. Do đó theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho n . Không mất tổng quát

giả sử hai số đó là a_p và a_q ($p, q \in \{1; 2; \dots; n; n+1\}$) và $a_p > a_q$. Ta có:

$$a_p = n.k_p + r \quad (r \in \mathbb{N}; 0 \leq r \leq n-1)$$

$$a_q = n.k_q + r$$

$$\text{Khi đó } a_p - a_q = n.(k_p - k_q); n.$$

Đây chính là hai số có hiệu của chúng chia hết cho n . Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 6: Trong 2016 số tự nhiên bất kỳ $a_1; a_2; \dots; a_{2016}$ luôn tìm được một số chia hết cho 2016 hoặc hai số có hiệu chia hết cho 2016.

✓ *Tìm cách giải:* Trong bài toán số “thỏ” là số 2016 số tự nhiên bất kỳ, “Lồng” là số số dư trong phép chia một số cho 2016. Có hai khả năng xảy ra: hoặc có số chia hết cho 2016, hoặc tất cả các số đều không chia hết cho 2016.

Giải

Nếu một trong n số chia hết cho 2016, bài toán được chứng minh.

Nếu tất cả 2016 số không có số nào chia hết cho 2016 thì mỗi số khi chia cho 2016 sẽ nhận một trong 2015 số dư $1; 2; 3; \dots; 2014; 2015$.

Có 2016 số mà có 2015 số dư nên tồn tại 2 số có cùng số dư khi chia cho 2016 $\Rightarrow$ hiệu của hai số chia hết cho 2016. (đpcm).

Ví dụ 7:

a) Cho một dãy số gồm 100 số tự nhiên bất kỳ $a_1; a_2; \dots; a_{100}$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 100 hoặc tổng một số số chia hết cho 100.

b) Hãy tổng quát hóa bài toán.

✓ *Tìm cách giải:* Trong bài toán số “thỏ” là số 100 số tự nhiên bất kỳ, “Lồng” là số số dư trong phép chia một số cho 100.

Có hai khả năng xảy ra: hoặc có số bằng 0, hoặc tất cả các số đều khác không.

Giải

a) Trường hợp có số bằng 0 ta chọn số này thỏa mãn đầu bài.

Trường hợp tất cả các số đều khác 0 ta lập 100 tổng sau:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.....

$$S_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}$$

Nếu một trong 100 tổng này chia hết cho 100, bài toán được chứng minh.

Nếu tất cả 100 tổng này không chia hết cho 100, thì khi chia cho 100 chúng nhận 99 số dư 1; 2; 3; ...; 99.

Có 100 tổng và có 99 số dư khi chia cho 100, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai tổng có số dư bằng nhau khi chia cho 100. Giả sử là hai tổng là

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k \text{ và } S_h = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_h \quad (100 \geq k > h \geq 1)$$

$$\text{Thì } S_k - S_h = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k) - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_h) =$$

$$= (a_{h+1} + a_{h+2} + a_{h+3} + \dots + a_k) : 100.$$

b) Tổng quát hóa:

Cho một dãy số gồm n số tự nhiên bất kỳ $a_1; a_2; \dots; a_n$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho n hoặc tổng một số số chia hết cho n .

Ví dụ 8: Chứng minh tồn tại lũy thừa của 79 mà các chữ số tận cùng của nó là 00001.

✓ *Tìm cách giải:* Nhận xét 79^n . Nếu n chẵn thì chữ số tận cùng là 1. Nếu n lẻ thì chữ số tận cùng là 9.

Do đó ta xét 10^5 lũy thừa của 79 với các số mũ chẵn khác nhau.

Giải

➤ *Cách 1.*

- Xét 10^5 lũy thừa của 79 với các số mũ chẵn khác nhau. Nếu một trong các lũy thừa đó có tận cùng là 00001 thì bài toán được chứng minh.

- Nếu không có lũy thừa nào có tận cùng là 00001 thì số các số có 5 chữ số tận cùng khác nhau kể từ số 00002; 00003; ...; đến 99998; 99999 nhỏ hơn 10^5 . Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai lũy thừa nào đó có 5 chữ số tận cùng giống nhau. Nếu n chẵn thì số 79^{2k} chữ số tận cùng là 1. Giả sử đó là hai số:

$$A_1 = 79^{2k_1} = B_1 \cdot 10^5 + \overline{abcd1}$$

$$A_2 = 79^{2k_2} = B_2 \cdot 10^5 + \overline{abcd1} \text{ với } A_1 > A_2.$$

$$A_1 - A_2 = 79^{2k_1} - 79^{2k_2} = 79^{2k_2} \left[79^{2(k_1 - k_2)} - 1 \right] = 10^5 (B_1 - B_2).$$

Do 79^{2k_2} có tận cùng là 1 và $10^5 (B_1 - B_2)$ có tận cùng không ít hơn 5 số 0 nên $\left[79^{2(k_1 - k_2)} - 1 \right]$ có tận cùng không ít hơn 5 số 0 suy ra $79^{2(k_1 - k_2)}$ có tận cùng là 00001. Vậy tìm được số $k = 2(k_1 - k_2)$ thỏa mãn yêu cầu của bài.

➤ *Cách 2.* Ta cần chứng minh tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $79^k - 1$ chia hết cho 10^5 .

Xét $10^5 + 1$ số: $79; 79^2; 79^3; 79^4; \dots; 79^{10^5 + 1}$. Tất cả các số này đều không chia hết cho 10^5 nên nếu lấy $10^5 + 1$ số này chia cho số 10^5 thì theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư trong phép chia cho 10^5 . Khi đó hiệu của chúng chia hết cho 10^5 . Giả sử hai số đó là 79^m và 79^n ($m, n \in \mathbb{N}; 1 \leq n < m \leq 10^5 - 1$).

Ta có $79^m - 79^n : 10^5$ hay $79^n (79^{m-n} - 1) : 10^5$.

Vì $(79^n; 10^5) = 1$ nên $(79^{m-n} - 1) : 10^5$

Ta chọn $m - n = k$ lúc đó 79^k chia cho 10^5 dư 1 tức là 79^k có chữ số tận cùng là 00001 (đpcm).

Ví dụ 9: Để chuẩn bị cho buổi sinh hoạt câu lạc bộ toán của khối 7 của một trường THCS, 6 bạn học sinh giỏi toán của 6 lớp 7A, 7B, 7C, 7D, 7E, 7G viết thư trao đổi với nhau về hai nội dung: (I): “Thống kê” và (II): “Biểu thức đại số”. Biết rằng mỗi bạn đều viết thư cho 5 bạn còn lại (trong các bạn nói trên) về một trong hai nội dung trên.

Chứng minh rằng có ít nhất 3 bạn cùng trao đổi với nhau về một nội dung.

✓ *Tìm cách giải:* Ta gọi 6 học sinh giỏi toán (ta coi là 6 “thỏ”) của 6 lớp lần lượt là A, B, C, D, E, G. Giả sử một bạn nào đó A chẳng hạn viết thư cho 5 bạn còn lại về mỗi bạn một trong hai nội dung “Thống kê” và “Biểu thức đại số”.

Ta thành lập các “lồng” bằng cách sau đây:

- “Lồng I” nhốt những ai trao đổi với A về nội dung (I).
- “Lồng II” nhốt những ai trao đổi với A về nội dung (II).

Như vậy sẽ có 5 chỗ nhốt vào “2 lồng”. Theo nguyên lí Dirichlet phải có một lồng nhốt không ít hơn 3 “thỏ”, nghĩa là phải có ít nhất 3 bạn nào đó trong số 5 bạn (không kể A) cùng trao đổi với A về một trong hai nội dung trên. Không mất tổng quát ta có thể giả sử 3 bạn cùng trao đổi với A về nội dung (I).

+ Trong ba bạn đó nếu có hai bạn nào đó trao đổi với nhau về nội dung (I) thì hai bạn đó với A tạo thành 3 bạn cùng trao đổi với nhau về một nội dung.

+ Nếu trong ba bạn đó nếu có không có hai bạn nào trao đổi với nhau về nội dung (I) thì ba bạn đó chỉ có thể trao đổi với nhau về nội dung (II). Bài toán cũng được chứng minh.

Ta trình bày lời giải như sau:

Giải

Ta gọi 6 học sinh giỏi toán của 6 lớp lần lượt là A, B, C, D, E, G. Giả sử một bạn nào đó A chẳng hạn viết thư cho 5 bạn còn lại về hai nội dung (I) và (II). Ta có $5 = 2 \cdot 2 + 1$. Theo nguyên lí Dirichlet A phải viết cho ít nhất 3 bạn về một nội dung, không mất tổng quát ta giả sử 3 bạn đó là B, C, D và nội dung trao đổi là (I).

+ Trong ba bạn B, C, D nếu có hai bạn nào đó trao đổi với nhau về nội dung (I) chẳng hạn B và C thì hai bạn B và C với A tạo thành 3 bạn cùng trao đổi với nhau về một nội dung.

+ Nếu trong ba bạn B, C, D đó nếu có không có hai bạn nào trao đổi với nhau về nội dung (I) thì ba bạn đó chỉ có thể trao đổi với nhau về nội dung (II) tạo thành 3 bạn cùng trao đổi với nhau về một nội dung.

Bài toán cũng được chứng minh.

Tóm lại dù khả năng nào xảy ra ta luôn có ít nhất 3 bạn cùng trao đổi với nhau về một nội dung.

C. Bài tập vận dụng

19.1. Một tổ có 12 học sinh, trong một giờ kiểm tra Toán ngoài 2 bạn An và Bình đạt điểm 10 còn lại các bạn khác đạt số điểm thấp hơn nhưng không bạn nào bị điểm 0; 1; 2 (điểm số của các bạn đều là số tự nhiên). Chứng minh ngoài hai bạn đạt điểm 10 còn ít nhất có hai bạn có điểm số như nhau.

19.2. Một lớp học có 37 học sinh cùng tuổi. Chứng minh rằng trong năm có một tháng ít nhất 4 học sinh cùng tổ chức sinh nhật.

19.3. Một vòng chung kết bóng bàn có 8 đấu thủ tham gia thi đấu vòng tròn nghĩa là mỗi đấu thủ đều phải gặp 7 đấu thủ còn lại. Chứng minh trong mọi thời điểm giữa các cuộc đấu bao giờ cũng có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

19.4. Chứng minh rằng trong 5 người bất kỳ ít ra cũng có 2 người có cùng số người quen như nhau trong 5 người đó. Hãy tổng quát hóa bài toán!

19.5.

a) Trên một bảng ô vuông kích thước 6×6 ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số $-1; 0; 1$ sau đó tính tổng của các số theo từng cột, theo từng dòng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

b) Trên bảng ô vuông kích thước 6×6 ấy ta viết các số tự nhiên từ 1 đến 36, mỗi số viết vào một ô một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 4.

19.6. Chứng minh rằng trong 2016 số tự nhiên bất kỳ tồn tại hai số có hiệu chia hết cho 2015.

19.7. Chứng minh rằng trong n số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số chia hết cho n .

19.8. Trong n số tự nhiên bất kỳ $a_1; a_2; \dots; a_n$ luôn tìm được một số chia hết cho n hoặc hai số có hiệu chia hết cho n .

19.9. Chứng minh rằng trong ba số lẻ bất kỳ bao giờ cũng tìm được hai số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 8.

19.10. Chứng minh rằng luôn tìm được số có dạng

$\overline{19741974\dots 19740000\dots 0000}$ chia hết cho 1975.

19.11. Tồn tại hay không một số có dạng $\overline{20162016\dots 20162016}$ chia hết cho 2017.

19.12. Chứng minh rằng trong 20 số tự nhiên liên tiếp bất kỳ ta luôn tìm được một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 10.

19.13.

a) Cho 1001 số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn 2000. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra 3 số mà một số bằng tổng của hai số còn lại.

b) Hãy tổng quát hóa bài toán và chứng minh.

19.14. Chứng minh rằng trong 52 số tự nhiên tùy ý luôn tồn tại hai số sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100.

19.15. Có 17 nhà khoa học viết thư cho nhau trao đổi về ba đề tài: “*Biến đổi khí hậu*”; “*Môi trường*”; “*Dân số*”. Mỗi người viết thư cho một người về một đề tài. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 3 nhà khoa học trao đổi với nhau về cùng một đề tài.

(**Chú ý:** Bài toán trên có thể diễn đạt cách khác theo ngôn ngữ hình học như sau: “Cho 17 điểm phân biệt nằm trên một đường tròn.. Hai điểm bất kì trong 17 điểm này đều được nối bằng một đoạn màu xanh, màu đỏ hoặc màu vàng. Chứng minh luôn tồn tại ít nhất một tam giác có ba cạnh cùng màu”).

19.16. Cho dãy số $10^1; 10^2; 10^3; 10^4; \dots; 10^{20}$. Chứng minh rằng có một số trong dãy số ấy chia cho 19 thì dư 1.

(Thi chọn học sinh giỏi lớp 9. Quận 10. TP Hồ Chí Minh,
năm học 2005 – 2006)

19.17. Cho X là một tập hợp gồm 700 số nguyên dương đôi một khác nhau mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

(Đề thi vào khối THPT Chuyên, Đại học Sư phạm Hà Nội,

19.18. Cho lưới ô vuông 5×5 . Người ta điền vào mỗi ô một trong các số $-1; 0; 1$. Xét tổng các số được tính theo hàng, theo cột và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

(Thi vào lớp 10 THPT chuyên Toán Thành phố Hà Nội,

năm học 2007 – 2008)

19.19. Trên một đường tròn cho 6 điểm phân biệt. Hai điểm bất kỳ trong 6 điểm này đều được nối bằng một đoạn màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng màu.

(Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9, Thanh Hóa, năm học 2009 -2010)

19.20. Mỗi ô vuông của bảng kích thước 10×10 (10 dòng, 10 cột) được ghi một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho bất kỳ hai số nào ghi trong hai ô chung một cạnh hoặc hai ô chung một đỉnh của bảng là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng có số được ghi ít nhất 17 lần.

(Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9, Vĩnh Phúc, năm học 2009 – 2010)

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

19.1. Trừ hai bạn đạt điểm 10 còn lại 10 bạn đạt 7 loại điểm 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Giả sử trong số đó không có ít nhất hai bạn nào có số điểm giống nhau thì mỗi loại điểm chỉ nhiều nhất có một bạn đạt nên tổ còn lại nhiều nhất 7 bạn. Vô lý.

19.2. Một năm có 12 tháng. Giả sử trong năm không có một tháng nào có ít nhất 4 học sinh cùng tổ chức sinh nhật, thì một tháng nhiều nhất có 3 học sinh tổ chức sinh nhật. Số học sinh của lớp nhiều nhất là $21.3 = 36 < 37$. Vô lý.

19.3. Số trận đấu của mỗi đấu thủ với các đấu thủ khác gồm 8 loại là 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Các số 0 và 7 không đồng thời tồn tại vì nếu có 1 ai chưa đấu trận nào thì không ai đấu đủ 7 trận. Nếu đã có một người đấu đủ 7 trận thì không ai chưa đấu trận nào. Có 8 đấu thủ, có 7 loại số trận đấu do đó phải tồn tại ít nhất hai đấu thủ có số trận đấu như nhau ở mọi thời điểm giữa các cuộc đấu.

19.4. Giả sử trong số 5 người có một người không quen với tất cả những người còn lại thì mỗi người còn lại không ai có thể có số người quen quá 3 người. Số người quen chỉ có thể có các loại 0; 1; 2; 3. Có 5 người (5 thỏ) mà chỉ có 4 loại số người quen (4 lồng). Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai người có số người quen như nhau trong 5 người đó.

Giả sử trong số 5 người có một người quen với tất cả những người còn lại thì mỗi người còn lại có số người quen chỉ có thể là 1; 2; 3; 4. Có 5 người (5 thỏ) mà chỉ có 4 loại số người quen (4 lồng). Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai người có số người quen như nhau trong 5 người đó.

Tổng quát: Một phòng họp có n người, bao giờ cũng có ít nhất 2 người có số người quen như nhau trong số n người đó.

19.5.

a) Bảng ô vuông kích thước 6×6 có 6 dòng, 6 cột và 2 đường chéo nên sẽ có 14 tổng của các số được tính theo dòng, theo cột và theo đường chéo. Mỗi dòng, mỗi cột và đường chéo đều ghi 6 số thuộc tập $\{-1; 0; 1\}$. Vì vậy giá trị mỗi tổng thuộc tập hợp $\{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ có 13 phần tử. Có 14 tổng nhận trong tập 13 giá trị khác nhau nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai tổng có cùng một giá trị.

b) Xét hàng có ô ghi số 1 và cột có ô ghi số 36. Hiệu giữa hai số này là 35 (coi như là 35 thỏ). Số cặp ô kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 36 nhiều nhất là 10 (gồm 5 cặp ô chung cạnh tính theo hàng và 5 cặp ô chung cạnh tính theo cột) (coi như có 10 lồng). Ta có: $35 = 10.3 + 5$.

Vậy theo nguyên lý Dirichlet luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 4.

19.6. Chia một số cho 2015 ta nhận được một trong 2015 số dư: 0; 1; 2; ...; 2013; 2014. Có 2016 số tự nhiên bất kỳ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 2 số có cùng số dư khi chia cho 2015 $\Rightarrow$ hiệu của hai số chia hết cho 2015.

19.7. Giả sử không tìm được số nào trong n số tự nhiên liên tiếp đã cho mà chia hết cho n . Khi đó n số này chia cho n chỉ nhận được nhiều nhất là $n-1$ số dư khác nhau $(1; 2; 3; 4; \dots; n-1)$, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số chia cho n có cùng số dư, chẳng hạn là a và b với $a > b$, khi đó số $a-b$ chia hết cho n . Điều này mâu thuẫn với $0 < a-b < n$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

19.8. Nếu một trong n số chia hết cho n , bài toán được chứng minh.

Nếu tất cả n số không có số nào chia hết cho n thì khi chia cho n chúng nhận $n-1$ số dư $1; 2; 3; \dots; n-2; n-1$. Có n số, có $n-1$ số dư nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 2 số có cùng số dư khi chia cho $n \Rightarrow$ hiệu của hai số chia hết cho n .

19.9. Một số lẻ khi chia cho 8 sẽ có số dư là 1; 3; 5 hoặc 7. Ta chia các số dư này thành hai nhóm: Nhóm 1 là (1; 7) nhóm 2 là (3; 5). Có ba số lẻ chia cho 8 mà có hai nhóm số dư, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số có số dư khi chia cho 8 vào cùng một nhóm.

Nếu hai số dư giống nhau thì hiệu của hai số chia hết cho 8.

Nếu hai số dư khác nhau thì tổng của chúng chia hết cho 8.

Vậy trong ba số lẻ bất kỳ bao giờ cũng tìm được hai số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 8.

19.10. Xét 1975 số có dạng sau:

$$A_1 = 1974$$

$$A_2 = 19741974$$

$$A_3 = 197419741974$$

.....

$$A_{1974} = \overbrace{19741974 \dots 1974}^{1974 \text{ số } 1974}$$

$$A_{1975} = \overbrace{19741974 \dots 19741974}^{1975 \text{ số } 1974}$$

Tất cả 1975 số này đều không chia hết cho 5 nên không chia hết cho 1975. Do đó mỗi số khi chia cho 1975 nhận một trong 1974 số dư 1; 2; 3; ...; 1974. Do đó theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 1975 nghĩa là hiệu của chúng chia hết cho 1975.

$$\text{Giả sử đó là } A_i = \overbrace{19741974 \dots 19741974}^{i \text{ số } 1974} \quad \text{và} \quad A_k = \overbrace{19741974 \dots 19741974}^{k \text{ số } 1974}$$

$(i > k; i, k \in \{1; 2; \dots; 1975\})$ hiệu của chúng sẽ là:

$$\begin{aligned} A_i - A_k &= \overbrace{19741974 \dots 19741974}^{i \text{ số } 1974} - \overbrace{19741974 \dots 19741974}^{k \text{ số } 1974} \\ &= \overbrace{19741974 \dots 19740000 \dots 0000}^{i-k \text{ số } 1974; 4k \text{ số } 0} : 1975. \end{aligned} \quad (\text{đpcm})$$

19.11. Xét 2017 số có dạng

$$B_1 = 2016$$

$$B_2 = 20162016$$

$$B_3 = 20162016$$

$$B_{2017} = \overbrace{20162016 \dots 20162016}^{2017 \text{ số } 2016}$$

Nếu một trong số 2017 số này chia hết cho 2017 ta có số cần tìm.

Nếu 2017 số này đều không chia hết cho 2017 thì tương tự bài trên ta có số

$$B_i - B_k = \overbrace{20162016 \dots 20160000 \dots 0000}^{i-k \text{ số } 2016; 4k \text{ số } 0} \quad (i > k; i, k \in \{1; 2; \dots; 2017\})$$

$$= \overbrace{20162016 \dots 2016}^{i-k \text{ số } 2016} \cdot 10^{4k} : 2017$$

. Do $10^{4k} \not\vdots 2017$

$$\overbrace{20162016 \dots 2016}^{i-k \text{ số } 2016} : 2017.$$

Nên

Vậy tồn tại một số có dạng $\overbrace{20162016 \dots 20162016}$ chia hết cho 2017.

19.12. Trong 20 số tự nhiên liên tiếp bất kỳ bao giờ cũng tìm được 10 số tự nhiên liên tiếp có chữ số hàng chục giống nhau còn chữ số hàng đơn vị là 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Viết các số đó dưới dạng: $\overline{ab \dots c0}$; $\overline{ab \dots c1}$; $\overline{ab \dots c2}$; ..., $\overline{ab \dots c9}$. Gọi tổng các chữ số là $S = a + b + \dots + c$ thì các số vừa viết có tổng các chữ số $S; S+1; S+2; \dots; S+9$ là 10 số tự nhiên liên tiếp do đó có 1 số chia hết cho 10.

19.13.

a) Gọi 1001 số nguyên dương khác nhau đã cho là $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{1001}$ với $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{1001} < 2000$.

Đặt $A = \{a_2; a_3; \dots; a_{1001}\}$ gồm 1000 phân tử có dạng a_m với $m \in \{2; 3; \dots; 1001\}$ và $B = \{a_2 - a_1; a_3 - a_1; \dots; a_{1001} - a_1\}$ gồm 1000 phân tử có dạng $a_n - a_1$ với $n \in \{2; 3; \dots; 1001\}$.

Ta thấy các phân tử của hai tập hợp A và B đều thuộc tập hợp gồm 1999 phân tử $\{1; 2; 3; \dots; 1998; 1999\}$ trong khi tổng số các phân tử của tập A và B là $1000 + 1000 = 2000$ phân tử. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau mà chúng không thể thuộc cùng một tập hợp, nên có một số thuộc tập hợp A, một số thuộc tập hợp B tức là $a_m = a_n - a_1$ do đó $a_n = a_m + a_1$. Ba số $a_m; a_n; a_1$ đôi một khác nhau. Thật vậy $a_m \neq a_1; a_n \neq a_1$ theo cách đặt các tập hợp A và B, còn $a_m \neq a_n$ vì nếu $a_m = a_n$ thì $a_1 = 0$, trái với giả thiết của bài toán.

Vậy tồn tại ba số $a_n; a_m; a_1$ trong các số đã cho mà $a_n = a_m + a_1$.

b) Tổng quát hóa: Cho $n+1$ số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn $2n$. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra 3 số mà một số bằng tổng của hai số còn lại. (Chứng minh tương tự như câu a). (Bạn đọc tự chứng minh).

19.14. Một số tự nhiên chia cho 100 có 1 trong các số dư 0; 1; 2; ...; 98; 99. Tất cả các số dư trong phép chia cho 100 được chia thành 51 nhóm sau: (0); (1;99); (2; 98); (3; 97);...; (49; 51); (50)

Đem 52 số tự nhiên chia cho 100 nhận được 52 số dư; 52 số dư này thuộc 51 nhóm trên. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai số dư thuộc vào một nhóm, tức là tồn tại hai số có tổng số dư trong phép chia cho 100 bằng 100 hoặc hiệu số dư trong phép chia cho 100 bằng 0. Hai số này có tổng hoặc hiệu chia hết cho 100.

19.15. Giả sử A là 1 trong 17 nhà khoa học. A phải trao đổi với 16 nhà khoa học còn lại về 3 đề tài. Theo nguyên lý Dirichlet thì A phải trao đổi với ít nhất 6 nhà khoa học khác về cùng một đề tài chẳng hạn “Dân số”.

Gọi 6 nhà khoa học khác cùng một đề tài chẳng hạn “Dân số” với A là B; C; D; E; F; G.

+ Nếu 2 trong 6 nhà khoa học trao đổi với nhau về đề tài “Dân số” thì bài toán được chứng minh vì khi ấy 2 trong 6 nhà khoa học cùng với A trao đổi với nhau về cùng một đề tài “Dân số”.

+ Nếu tất cả 6 nhà khoa học B; C; D; E; F; G. không ai trao đổi với nhau về đề tài “Dân số” thì họ chỉ còn trao đổi với nhau về hai đề tài “Biến đổi khí hậu”; “Môi trường”. Xét nhà khoa học B trong 6 nhà khoa học trên. B phải trao đổi với 5 người còn lại về hai đề tài “Biến đổi khí hậu”; “Môi trường”. Theo nguyên lý Dirichlet B phải trao đổi với ít nhất 3 nhà khoa học khác chẳng hạn C; D; E về cùng một đề tài chẳng hạn “Môi trường”.

Nếu C; D; E có hai người chẳng hạn D và E trao đổi với nhau về cùng đề tài “Môi trường” thì B; E; D chính là ba người cùng trao đổi với nhau về một đề tài.

Nếu C; D; E không có ai trao đổi với nhau về cùng đề tài “Môi trường” thì C; D; E chỉ còn một đề tài duy nhất là “Biến đổi khí hậu”; để trao đổi. Vậy ta có ba người cùng trao đổi với nhau về một đề tài.

Vậy trong mọi trường hợp ta luôn có ít nhất 3 nhà khoa học trao đổi với nhau về cùng một đề tài.

19.16. Xét dãy số $10^1; 10^2; 10^3; 10^4; \dots; 10^{20}$ có 20 số nên khi chia mỗi số trong dãy cho 19 ta nhận được 1 trong 19 số dư $r \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 17; 18\}$.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 19. Không mất tổng quát giả sử hai số đó là 10^a và 10^b ($a, b \in \mathbb{N}^*$ và $b < a \leq 20$) khi đó $10^a - 10^b = 10^b \cdot (10^{a-b} - 1) : 19$. Mà $(10^b; 19) = 1$ nên $(10^{a-b} - 1) : 19$ hay $10^{a-b} : 19$ dư 1 và $1 \leq a - b \leq 19$. Ta có điều phải chứng minh.

19.17. Gọi 700 số nguyên dương đôi một khác nhau đã cho là $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{700}$. Như vậy $X = \{a_1; a_2; a_3; \dots; a_{700}\}$. Xét $700 \cdot 4 = 2800$ số sau đây: $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{700}; a_1 + 3; a_2 + 3; a_3 + 3; \dots; a_{700} + 3; a_1 + 6; a_2 + 6; a_3 + 6; \dots; a_{700} + 6; a_1 + 9; a_2 + 9; a_3 + 9; \dots; a_{700} + 9$.

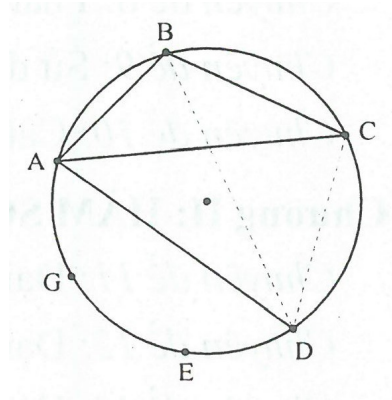
Do mỗi số không lớn hơn 2006 nên mỗi số trên đều không lớn hơn: $2006 + 9 = 2015$. Có 2800 số mà mỗi số nhận giá trị từ 1 đến không quá 2015. Theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ít nhất hai số bằng nhau. Giả sử đó là 2 số $a_i + 9 = a_k + 3$ với $(i; k \in \{1; 2; 3; \dots; 700\})$.

Khi ấy $a_k - a_i = x - y = 9 - 3 = 6$.

(Tương tự nếu có số $a_i + 6 = a_k + 3$ ta có $x - y = 3$; $a_i + 9 = a_k$ ta có $x - y = 9$...). Suy ra tồn tại hai phần tử $x, y \in X$ sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

19.18. Tổng số có 12 tổng đó là: 5 tổng theo hàng; 5 tổng theo cột và 2 tổng theo đường chéo. Vì mỗi tổng có 5 số hạng chỉ gồm 3 số là $-1; 0; 1$ nên mỗi tổng chỉ nhận không quá 11 giá trị $\{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Do đó theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai tổng có giá trị bằng nhau.

19.19. Giả sử 6 điểm phân biệt trên đường tròn là A, B, C, D, E, G. Từ 1 điểm nối với 5 điểm còn lại được 5 đoạn thẳng với 2 màu xanh hoặc đỏ. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất ba đoạn thẳng cùng màu. Không mất tổng quát, giả sử ba đoạn thẳng AB, AC, AD cùng màu đỏ (nếu màu xanh lập luận tương tự).



Xét $\triangle BCD$ nếu có một cạnh chẳng hạn BC màu đỏ thì $\triangle ABC$ có ba cạnh màu đỏ. Trái lại thì $\triangle BCD$ sẽ có ba cạnh màu xanh. Vậy luôn tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng màu.

19.20. Trên mỗi hình vuông con kích thước 2×2 có không quá 1 số chia hết cho 2, không quá 1 số chia hết cho 3.

Lát kín bằng bởi 25 hình vuông, kích thước 2×2 , có nhiều nhất 25 số chia hết cho 2, có nhiều nhất 25 số chia hết cho 3. Do đó, có ít nhất 50 số còn lại không chia hết cho 2 và cũng không chia hết cho 3. Vì vậy chúng phải là một trong ba số 1; 5; 7. Ta có $50 = 3 \cdot 16 + 2$. Từ đó theo nguyên lý Dirichlet có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.