

A. $x = \frac{3}{2}; x = 2$

B. $x = -\frac{3}{2}; x = 2$

C. $x = \frac{3}{2}; x = -2$

D. $x = -\frac{3}{2}; x = -2$

Lời giải

Chọn C

$$(2x-3)(x+2)=0 \text{ suy ra } \begin{cases} 2x-3=0 \\ x+2=0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=-2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{3}{2}; x = -2$.

Câu 5. [TH] Cho biết phương trình $(x+5)(x+1)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$(x+5)(x+1)=0 \text{ suy ra } \begin{cases} x+5=0 \\ x+1=0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x=-5 \\ x=-1 \end{cases}$$

Phương trình có 2 nghiệm.

Câu 6. [TH] Số nghiệm của phương trình $2x(x+5)(2x-1)=0$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$2x(x+5)(2x-1)=0 \text{ suy ra } \begin{cases} 2x=0 \\ x+5=0 \\ 2x-1=0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x=0 \\ x=-5 \\ x=0,5 \end{cases}$$

Phương trình có 3 nghiệm.

Câu 7. [TH] Nghiệm của phương trình $x(x-5)+2(x-5)=0$ là

A. $x=2; x=5$

B. $x=-2; x=-5$

C. $x=-2; x=5$

D. $x=2; x=-5$

Lời giải

Chọn C

$$x(x-5)+2(x-5)=0$$

$$(x-5)(x+2)=0$$

$$x=5 \text{ hoặc } x=-2$$

Vậy nghiệm của phương trình $x = -2; x = 5$.

Câu 8. [TH] Phương trình $(x-3)^2+2(x-3)=0$ có nghiệm là

A. $x=3; x=1$

B. $x=-3; x=1$

C. $x=3; x=-1$

D. $x=-3; x=-1$

Lời giải

Chọn A

$$(x-3)^2+2(x-3)=0 \text{ suy ra } (x-3)(x-1)=0 \text{ suy ra } \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình $x = 3; x = 1$.

Câu 9. [VD] Phương trình $(x-6)^2=(x+2)(6-x)$ có nghiệm là

A. $x = 2; x = -6$

B. $x = -2; x = 6$

C. $x = 2; x = 6$

D. $x = 2; x = -6$

Lời giải

Chọn C

$$(x-6)^2 = (x+2)(6-x)$$

$$(x-6)^2 + (x+2)(x-6) = 0$$

$$(x-6)(x-6+x+2) = 0$$

$$(x-6)(2x-4) = 0$$

$$\text{Suy ra} \begin{cases} x = 6 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình $x = 2; x = 6$ Câu 10. [VD] Phương trình $(2x+7)^2 = 9(x+2)^2$ có nghiệm là

A. $x = 1; x = \frac{13}{5}$

B. $x = -1; x = \frac{13}{5}$

C. $x = 1; x = -\frac{13}{5}$

D. $x = -1; x = -\frac{13}{5}$

Lời giải

Chọn C

$$(2x+7)^2 = 9(x+2)^2$$

$$[(2x+7)-3(x+2)][(2x+7)+3(x+2)] = 0$$

$$(-x+1)(5x+13) = 0$$

$$\text{Suy ra} \begin{cases} -x+1=0 \\ 5x+13=0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{13}{5} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình $x = 1; x = -\frac{13}{5}$ Câu 11. [VD] Phương trình $x^2 - 10x + 24 = 0$ có tập nghiệm là

A. $x = 6; x = 4$

B. $x = -6; x = -4$

C. $x = 6; x = -4$

D. $x = -6; x = 4$

Lời giải

Chọn A

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$x^2 - 6x - 4x + 24 = 0$$

$$x(x-6) - 4(x-6) = 0$$

$$(x-6)(x-4) = 0$$

$$\text{Suy ra} \begin{cases} x = 6 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $x = 6; x = 4$ Câu 12. [VDC] Phương trình $x(x+1)(x-1)(x+2) = 24$ có nghiệm là

A. $x = -2; x = -3$

B. $x = 2; x = -3$

C. $x = -2; x = 3$

D. $x = 2; x = 3$

Lời giải

Chọn B

$$x(x+1)(x-1)(x+2) = 24$$

$$(x^2+x)(x^2+x-2) = 24$$

Đặt $t = x^2 + x$.

Từ đó ta có: $t(t-2) = 24$

$$t^2 - 2t - 24 = 0$$

$$t^2 - 2t + 1 - 25 = 0$$

$$(t-1)^2 - 25 = 0$$

$$(t-6)(t+4) = 0$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} t = -4 \\ t = 6 \end{cases}$$

Thay vào $t = x^2 + x$, ta có:

$$* x^2 + x = -4 \text{ suy ra } x^2 + x + 4 = 0 \text{ hay } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{15}{4} \text{ (loại)}$$

$$* x^2 + x = 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$\text{suy ra } (x-2)(x+3) = 0 \text{ hay } \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2; x = 3$.

2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai

Câu 1.

a) Phương trình $(x-2)(x+3) = 0$ là phương trình tích.

b) Phương trình $(x-2)(x+3) = 2$ là phương trình tích.

c) Phương trình $(x-2)(x^2+3) = 0$ chỉ có 1 nghiệm.

d) Phương trình $-4(x+3) = 0$ chỉ có 2 nghiệm.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) Đ

d) S

- Phương trình $(x-2)(x+3) = 0$ là phương trình tích vì vế trái là 1 tích, vế phải bằng 0.

- Phương trình $(x-2)(x+3) = 2$ không là phương trình tích vì vế phải khác 0 nên b sai.

- Phương trình $(x-2)(x^2+3) = 0$ chỉ có 1 nghiệm $x-2=0 \Rightarrow x=2$ vì $x^2+3 \neq 0$ với mọi giá trị của x nên c đúng.

- Phương trình $-4(x+3) = 0$ có 2 nghiệm là sai vì $-4(x+3) = 0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3$ nên d sai.

Câu 2. Cho phương trình $9x^2 - 1 - 2x(3x-1) = 0$, khi đó

$$x = 1; x = \frac{1}{3}$$

a) Phương trình có nghiệm là

b) Phương trình có một nghiệm nguyên.

c) Tổng hai nghiệm của phương trình là $\frac{-2}{3}$

d) Tích hai nghiệm của phương trình là $\frac{2}{3}$

Lời giải

a) S

b) Đ

c) Đ

d) S

$$9x^2 - 1 - 2x(3x - 1) = 0 \quad (2)$$

$$9x^2 - 1 - 2x(3x - 1) = 0$$

$$(3x - 1)(3x + 1) - 2x(3x - 1) = 0$$

$$(3x - 1)(3x + 1 - 2x) = 0$$

$$(3x - 1)(x + 1) = 0$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -1; x = \frac{1}{3}$. Do đó

- Phương trình có nghiệm là $x = 1; x = \frac{1}{3}$ nên a sai.

- Phương trình có nghiệm nguyên là $x = -1$ nên b là đúng.

- Tổng hai nghiệm của phương trình là $-1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$ nên c là đúng.

- Tích hai nghiệm của phương trình là $-1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ nên d sai.

Câu 3. Cho phương trình $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$, khi đó

a) Nghiệm của phương trình là $x = 1; x = 2$

b) Nghiệm của phương trình là có một nghiệm nguyên.

c) Nghiệm của phương trình là $x = 1$.

d) Nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) Đ

d) S

$$x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x^2(x - 1) + 4(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + 4) = 0$$

Suy ra $x = 1$ hoặc $x^2 = -4$ (vô nghiệm)

Vậy $x = 1$.

Do đó a và c là đúng; b, d là sai.

Câu 4. Cho phương trình $x^4 + 9x^3 - x^2 - 9x = 0$. Khi đó

a) Phương trình này có duy nhất 1 nghiệm dương.

b) Phương trình này có duy nhất 1 nghiệm âm.

c) Phương trình này có 2 nghiệm dương.

d) Phương trình này có 2 nghiệm dương và 2 nghiệm âm.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) S

d) S

$$x^4 + 9x^3 - x^2 - 9x = 0$$

$$x(x^3 + 9x^2 - x - 9) = 0$$

$$x[x^2(x+9)-(x+9)]=0$$

$$x(x+9)(x^2-1)=0$$

$$x(x+9)(x-1)(x+1)=0$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x=0 \\ x=-9 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có bốn nghiệm, trong đó chỉ có 1 nghiệm dương nên đáp án A là đúng.

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. [NB] Biến đổi phương trình $x(x-5)+2(x-5)=0$ thành phương trình tích?

Lời giải

Đáp án: $(x-5)(x+2)=0$

$$x(x-5)+2(x-5)=0$$

$$(x-5)(x+2)=0 \text{ là phương trình tích.}$$

Câu 2. [NB] Phương trình $(x^2+4)(2x-3)=0$ có nghiệm là?

Lời giải

Đáp án: $x=\frac{3}{2}$

$$(x^2+4)(2x-3)=0$$

Suy ra $2x-3=0$ hay $x=\frac{3}{2}$ vì $x^2+4 \neq 0$ với mọi x

Câu 3. [TH] Nghiệm của phương trình $(x-6)^2=(x+2)(6-x)$ là

Lời giải

Đáp án: $x=6; x=2$

$$(x-6)^2=(x+2)(6-x)$$

$$(x-6)^2+(x+2)(x-6)=0$$

$$(x-6)(x-6+x+2)=0$$

$$(x-6)(2x-4)=0$$

Suy ra $x=6; x=2$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=6; x=2$.

Câu 4. [TH] Phương trình $(x-3)^2+2(x-3)=0$ có tập nghiệm là gì?

Lời giải

Đáp án: $S=\{3;1\}$

$$(x-3)^2+2(x-3)=0$$

Suy ra $(x-3)(x-1)=0$ hay $\begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\{3;1\}$.

Câu 5. [VD] Phương trình $x^2 - 9x - 10 = 0$ có tổng các nghiệm là ?

Lời giải

Đáp án: 9

$$x^2 - 9x - 10 = 0$$

$$x^2 - 10x + x - 10 = 0$$

$$x(x - 10) + (x - 10) = 0$$

$$(x - 10)(x + 1) = 0$$

Suy ra $x = 10$ hoặc $x = -1$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $10 + (-1) = 9$.

Câu 6. [VDC] Phương trình $(2x^2 + x - 6)^2 + 3(2x^2 + x - 3) = 9$ có số nghiệm là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 4

$$(2x^2 + x - 6)^2 + 3(2x^2 + x - 3) = 9$$

Đặt $t = 2x^2 + x - 6$.

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 3 = t + 3$$

Từ đó ta có:

$$t^2 + 3(t + 3) = 9$$

$$t^2 + 3t = 0$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} t = 0 \\ t = -3 \end{cases}$$

Thay vào $t = 2x^2 + x - 6$, ta có:

$$* 2x^2 + x - 6 = 0 \text{ suy ra } (x + 2)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0 \text{ hay } \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$* 2x^2 + x - 6 = -3$$

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

$$\text{suy ra } (x - 1)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 \text{ hay } \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm.

PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp giải: Để giải phương trình tích, ta áp dụng công thức:

$$A(x) \cdot B(x) = 0 \text{ suy ra } A(x) = 0 \text{ hoặc } B(x) = 0$$

Ta giải hai phương trình $A(x) = 0$ và $B(x) = 0$, rồi lấy tất cả các nghiệm của chúng.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1 [NB]: Giải phương trình:

a) $(x + 5)(2x - 3) = 0$

b) $(x - 1)(3 - x) = 0$

c) $(x + 2)(4x - 1) = 0$

c) $x^2 - 1 = 0$

Lời giải

a) Ta có $(x+5)(2x-3)=0$ nên $x+5=0$ hoặc $2x-3=0$
 $x+5=0$ hay $x=-5$

$2x-3=0$ hay $x=\frac{3}{2}$. Vậy phương trình có nghiệm $x=-5$ và $x=\frac{3}{2}$.

b) Ta có $(x-1)(3-x)=0$ nên $x-1=0$ hoặc $3-x=0$

* $x-1=0$ suy ra $x=1$

* $3-x=0$ suy ra $x=3$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$ và $x=3$.

c) Ta có $(x+2)(4x-1)=0$ nên $x+2=0$ hoặc $4x-1=0$

* $x+2=0$ hay $x=-2$

* $4x-1=0$ hay $x=\frac{1}{4}$

Vậy phương trình có nghiệm $x=-2$ và $x=\frac{1}{4}$.

d) $x^2-1=0$

$(x-1)(x+1)=0$ suy ra $\begin{cases} x-1=0 \\ x+1=0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1; x=-1$.

Ví dụ 2 [TH]: Giải phương trình:

a) $2x(x-7)+5x-35=0$

b) $x(x-3)-7x+21=0$

c) $2(x+3)-x^2-3x=0$

d) $2x(3x-5)=10-6x$

Lời giải

a) $2x(x-7)+5x-35=0$

$2x(x-7)+5(x-7)=0$

$(2x+5)(x-7)=0$

Ta có $(2x+5)(x-7)=0$ nên $2x+5=0$ hoặc $x-7=0$

* $x-7=0$ hay $x=7$

* $2x+5=0$ hay $2x=-5$, suy ra $x=-\frac{5}{2}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=7$ và $x=-\frac{5}{2}$.

b) $x(x-3)-7x+21=0$

$x(x-3)-7(x-3)=0$

$(x-3)(x-7)=0$

Ta có $(x-3)(x-7)=0$ nên $x-3=0$ hoặc $x-7=0$.

* $x-3=0$ hay $x=3$.

* $x-7=0$ hay $x=7$

Vậy phương trình có nghiệm $x=3$ và $x=7$.

c) $2(x+3)-x^2-3x=0$

$$2(x+3) - x(x+3) = 0$$

$$(x+3)(2-x) = 0$$

Ta có $(x+3)(2-x) = 0$ nên $x+3=0$ hoặc $2-x=0$.

$$* x+3=0 \text{ hay } x=-3.$$

$$* 2-x=0 \text{ hay } x=2$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=-3$ và $x=2$.

$$d) 2x(3x-5) = 15-9x$$

$$2x(3x-5) + 9x - 15 = 0$$

$$2x(3x-5) + 3(3x-5) = 0$$

$$(3x-5)(2x+3) = 0$$

Ta có $(3x-5)(2x+3) = 0$ nên $3x-5=0$ hoặc $2x+3=0$.

$$* 3x-5=0 \text{ hay } x=\frac{5}{3}.$$

$$* 2x+3=0 \text{ hay } x=-\frac{3}{2}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{5}{3}$ và $x=-\frac{3}{2}$.

Ví dụ 3 [TH]: Giải phương trình

$$a) (2x-1)^2 = 81$$

$$c) (x-5)(3-2x)(3x+4) = 0$$

$$b) (2x+5)(x-4) = (x-5)(4-x)$$

$$d) (2x-1)(3x+2)(5-x) = 0$$

Lời giải

$$a) (2x-1)^2 = 81$$

$$(2x-1)^2 - 81 = 0$$

$$(2x-1-9)(2x-1+9) = 0$$

$$(2x-10)(2x+8) = 0$$

Suy ra $2x-10=0$ hoặc $2x+8=0$ hay $x=5$ hoặc $x=-4$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=5; x=-4$.

$$b) (2x+5)(x-4) = (x-5)(4-x)$$

$$(2x+5)(x-4) - (x-5)(4-x) = 0$$

$$(2x+5)(x-4) + (x-5)(x-4) = 0$$

$$(x-4)(2x+5+x-5) = 0$$

$$(x-4).3x = 0$$

Suy ra $x-4=0$ hoặc $3x=0$ hay $x=4$ hoặc $x=0$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=0; x=4$.

$$c) (x-5)(3-2x)(3x+4) = 0$$

suy ra $x-5=0$ hoặc $3-2x=0$ hoặc $3x+4=0$ hay $x=5; x=\frac{-4}{3}; x=\frac{3}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=5; x=\frac{-4}{3}; x=\frac{3}{2}$.

$$d) (2x-1)(3x+2)(5-x) = 0$$

suy ra $2x - 1 = 0$ hoặc $3x + 2 = 0$ hoặc $5 - x = 0$ hay $x = 5; x = \frac{-2}{3}; x = \frac{1}{2}$
 $x = 5; x = \frac{-2}{3}; x = \frac{1}{2}$.

Vậy phương trình có nghiệm là

Ví dụ 4 [VD]: Giải phương trình:

a) $x^2 - 10x = -25;$

b) $(1 - 2x)^2 = (3x - 2)^2;$

c) $(x - 2)^3 + (5 - 2x)^3 = 0.$

d) $x^4 - 8x^3 - 9x^2 = 0$

Lời giải

a) $x^2 - 10x = -25$

$x^2 - 10x + 25 = 0$

$(x - 5)^2 = 0$ suy ra $x = 5$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 5$.

b) $(1 - 2x)^2 = (3x - 2)^2$

$[(1 - 2x) - (3x - 2)][(1 - 2x) + (3x - 2)] = 0$

$(3 - 5x)(x - 1) = 0$

suy ra $\begin{cases} 3 - 5x = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ x = 1 \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1; x = \frac{3}{5}$.

c) $(x - 2)^3 + (5 - 2x)^3 = 0.$

suy ra $(x - 2)^3 = (2x - 5)^3$

hay $x - 2 = 2x - 5$

$x = 3$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

d) $x^2(x^2 - 8x - 9) = 0$

$x^2(x^2 + x - 9x - 9) = 0$

$x^2[x(x + 1) - 9(x + 1)] = 0$

$x^2(x + 1)(x - 9) = 0$

Ta có $x^2(x + 1)(x - 9) = 0$ nên $x^2 = 0$ hoặc $x + 1 = 0$ hoặc $x - 9 = 0$

* $x^2 = 0$ suy ra $x = 0$

* $x + 1 = 0$ hay $x = -1$

* $x - 9 = 0$ hay $x = 9$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0; x = 2; x = 9$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. [NB] Giải các phương trình sau:

a) $(5x - 4)(4x + 6) = 0$

b) $(3,5x - 7)(2,1x - 6,3) = 0$

c) $(4x - 10)(24 + 5x) = 0$

d) $(x - 3)(2x + 1) = 0$

a) $(5x - 4)(4x + 6) = 0$

suy ra $5x - 4 = 0$ hoặc $4x + 6 = 0$ hay $x = \frac{4}{5}; x = -\frac{3}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{4}{5}; x = -\frac{3}{2}$.

b) $(3, 5x - 7)(2, 1x - 6, 3) = 0$

suy ra $3, 5x - 7 = 0$ hoặc $2, 1x - 6, 3 = 0$ hay $x = 2; x = 3$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2; x = 3$

c) $(4x - 10)(24 + 5x) = 0$

suy ra $4x - 10 = 0$ hoặc $24 + 5x = 0$ hay $x = \frac{5}{2}; x = -\frac{24}{5}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{5}{2}; x = -\frac{24}{5}$

d) $(x - 3)(2x + 1) = 0$

suy ra $x - 3 = 0$ hoặc $2x + 1 = 0$ hay $x = \frac{-1}{2}; x = 3$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{-1}{2}; x = 3$

Bài 2. [TH] Giải các phương trình sau:

a) $2x(x - 5) + 7x - 35 = 0$

b) $x(x + 3) - 7x - 21 = 0$

c) $(x^2 + 1)(6x + 3) = 0$

d) $(x + 3)(2x + 4)(x - 5) = 0$

Hướng dẫn

a) $2x(x - 5) + 7x - 35 = 0$

$2x(x - 5) + 7(x - 5) = 0$

$(2x + 7)(x - 5) = 0$

Suy ra $\begin{cases} 2x + 7 = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -\frac{7}{2} \\ x = 5 \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{7}{2}; x = 5$

b) $x(x + 3) - 7(x + 3) = 0$

$(x + 3)(x - 7) = 0$

Suy ra $\begin{cases} x + 3 = 0 \\ x - 7 = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -3 \\ x = 7 \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 7; x = -3$

c) $(x^2 + 1)(6x + 3) = 0$

suy ra $x^2 + 1 = 0$ hoặc $6x + 3 = 0$

$$* 6x + 3 = 0 \text{ hay } x = -\frac{1}{2}$$

* $x^2 + 1 = 0$, phương trình vô nghiệm vì $x^2 + 1 \neq 0$ với mọi x .

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.

$$d) (x+3)(2x+4)(x-5)=0$$

$$\text{suy ra } \begin{cases} x+3=0 \\ 2x+4=0 \\ x-5=0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x=-3 \\ x=-2 \\ x=5 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -3; x = -2; x = 5$.

Bài 3. [VD] Giải các phương trình:

$$a) (4x-10)\left(\frac{4x-3}{5} - \frac{2(x+3)}{7}\right) = 0$$

$$b) \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$c) (x-2)^2 - (2x+3)^2 = 0$$

$$d) (x+1)^2 + 2(x+1) + 1 = 0$$

Hướng dẫn

$$a) (4x-10)\left(\frac{4x-3}{5} - \frac{2(x+3)}{7}\right) = 0$$

$$\text{Ta có } (4x-10)\left(\frac{4x-3}{5} - \frac{2(x+3)}{7}\right) = 0 \text{ nên } 4x+10=0 \text{ hoặc } \frac{4x-3}{5} - \frac{2(x+3)}{7} = 0$$

$$* 4x+10=0 \text{ suy ra } x = \frac{-5}{2}$$

$$* \frac{4x-3}{5} - \frac{2(x+3)}{7} = 0$$

$$\frac{7(4x-3)}{35} - \frac{5 \cdot 2(x+3)}{35} = 0$$

$$28x - 21 - 10x - 30 = 0$$

$$18x - 51 = 0$$

$$18x = 51$$

$$x = \frac{51}{18}$$

$$x = \frac{17}{6}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{-5}{2}$ và $x = \frac{17}{6}$.

$$c) (x-2)^2 - (2x+3)^2 = 0$$

$$(x-2-2x-3)(x-2+2x+3) = 0$$

$$(-x-5)(3x+1) = 0$$

$$\text{Suy ra } -x-5=0 \text{ hoặc } 3x+1=0$$

$$\text{Hay } x = -5 \text{ hoặc } x = -\frac{1}{3}$$

$$x = -5; x = -\frac{1}{3}$$

Vậy phương trình có nghiệm

$$d) (x+1)^2 + 2(x+1) + 1 = 0$$

$$(x+1+1)^2 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0$$

Suy ra $x+2=0$ suy ra $x=-2$

Vậy phương trình có nghiệm $x=-2$.

Bài 4. [VD] Giải các phương trình:

$$a) (x+2)(x+3)(x-5)(x-6) = 180$$

$$b) (x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$$

$$c) (x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24$$

Hướng dẫn

$$a) (x+2)(x+3)(x-5)(x-6) = 180$$

$$[(x+2)(x-5)][(x+3)(x-6)] = 180$$

$$(x^2 - 3x - 10)(x^2 - 3x - 18) = 180$$

Đặt $x^2 - 3x - 14 = y$ ta được: $(y+4)(y-4) = 180$ suy ra $y^2 = 196$ hay $y = \pm 14$.

Với $y = -14$ thì $x^2 - 3x = 0$ suy ra $x = 0; x = 3$

Với $y = 14$ thì $x^2 - 3x - 28 = 0$ suy ra $x = 7; x = -4$

Vậy phương trình có 4 nghiệm là $x = -4, x = 0, x = 3, x = 7$.

$$b) (x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0 \quad (1)$$

Đặt $x^2 - 5x = t$ khi đó (1) trở thành $t^2 + 10t + 24 = 0 \Rightarrow (t+4)(t+6) = 0 \Rightarrow t = -4$ hoặc $t = -6$

Với $t = -4$ ta có $x^2 - 5x = -4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = 4$

Với $t = -6$ ta có $x^2 - 5x = -6 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2$ hoặc $x = 3$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là $x = 1; x = 2; x = 3; x = 4$.

$$c) (x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24$$

Đặt $x^2 + 5x = t$ khi đó (1) trở thành $t^2 - 2t - 24 = 0$ hay $(t+4)(t-6) = 0$ suy ra $t = -4$ hoặc $t = 6$

Với $t = -4$ ta có $x^2 + 5x = -4$ hay $x^2 + 5x + 4 = 0$ suy ra $(x+1)(x+4) = 0$ suy ra $x = -1$ hoặc $x = -4$

Với $t = 6$ ta có $x^2 + 5x = 6$ hay $x^2 + 5x - 6 = 0$ suy ra $(x-1)(x+6) = 0$ suy ra $x = 1$ hoặc $x = -6$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là $x = 1; x = -1; x = -4; x = -6$.

$$x^3 + 3x^2 - 15x + 11 = \frac{(x^2 + 5x - 12)^2}{4}$$

Bài 5. [VDC] Giải phương trình:

Hướng dẫn

Ta có $x^3 + 3x^2 - 15x + 11 = x^3 - x^2 + 4x^2 - 4x - 11x + 11 = (x-1)(x^2 + 4x - 11)$

Mặt khác $x^2 + 4x - 11 + x - 1 = x^2 + 5x - 12$ nên

$$\text{Đặt } \begin{cases} x-1=a \\ x^2+4x-11=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3+3x^2-15x+11=a.b \\ x^2+5x-12=a+b \end{cases}$$

Phương trình trở thành

$$\frac{(a+b)^2}{4} = a.b$$

$$(a+b)^2 = 4ab$$

$$(a-b)^2 = 0$$

Suy ra $a-b=0$

hay $a=b$.

Khi đó phương trình đã cho đưa về giải phương trình

$$x^2+4x-11=x-1$$

$$x^2+3x-10=0$$

$$(x-2)(x+5)=0$$

Suy ra $x=-5; x=2$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=-5; x=2$.

DẠNG 2: TÌM ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN

Câu 1. [NB] Điều kiện xác định của phương trình $\frac{1-2x}{x^2} = \frac{1}{2}$ là:

A. $x \neq \frac{1}{2}$.

B. $x \neq 0$.

C. $x \neq 2$.

D. $x \neq \frac{1}{2}$ và $x \neq 0$.

Câu 2. [NB] Điều kiện xác định của phương trình $\frac{4x-3}{x-5} = \frac{29}{3}$ là:

A. $x \geq \frac{3}{4}$.

B. $x \geq 5$.

C. $x \leq 5$.

D. $x \neq 5$.

Câu 3. [NB] Điều kiện xác định của phương trình $\frac{2x+5}{2x} - \frac{x}{x+5} = 0$ là:

A. $x \neq 0$ và $x \geq -5$.

B. $x \neq 0$ và $x \neq -5$.

C. $x \neq \pm 5$.

D. $x \geq 0$ và $x \geq -5$.

Câu 4. [NB] Điều kiện xác định của phương trình $\frac{4x-5}{x-1} = 2x + \frac{1}{x^2}$ là:

A. $x \neq 1$.

B. $x \neq -1$.

C. $x \neq 1$ và $x \neq 0$.

D. $x \neq 0$.

Câu 5. [TH] Điều kiện xác định của phương trình $\frac{12}{1-9x^2} = \frac{1-3x}{1+3x} - \frac{1+3x}{1-3x}$ là:

A. $x \neq \frac{1}{9}$.

B. $x \neq -\frac{1}{9}$.

C. $x \neq \frac{1}{9}$ và $x \neq -\frac{1}{9}$.

D. $x \neq \frac{1}{3}$ và $x \neq -\frac{1}{3}$.

Câu 6. [TH] Điều kiện xác định của phương trình $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{16}{x^2-1}$ là:

A. $x \neq 1$.

B. $x \neq -1$.

C. $x \neq 1$ và $x \neq -1$.

D. $x \neq 0$.

Câu 7. [TH] Điều kiện xác định của phương trình $\frac{6x+1}{x^2-7x+10} + \frac{5}{x-2} = \frac{3}{x-5}$ là:

A. $x \neq 2$ và $x \neq 5$.

B. $x \neq 2$.

C. $x \neq 5$.

D. $x \neq 0$.

- Câu 8. [TH]** Điều kiện xác định của phương trình $\frac{x+5}{x^2-5x} - \frac{x+25}{2x^2-50} = \frac{x-5}{2x^2+10x}$ là:
A. $x \neq 0$ và $x \neq \pm 5$. **B.** $x \neq \pm 5$. **C.** $x \neq 0$ và $x \neq 5$. **D.** $x \neq 0$ và $x \neq -5$.
- Câu 9. [VD]** Điều kiện xác định của phương trình $\frac{1}{3-x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x-3} - \frac{(x-1)^2}{x^2-2x-3}$ là:
A. $x \neq 3$. **B.** $x \neq -1$ và $x \neq 3$. **C.** $x \neq 1$ và $x \neq 3$. **D.** $x \neq \pm 1$ và $x \neq 3$.
- Câu 10. [VD]** Điều kiện xác định của phương trình $\frac{1}{x-2} - \frac{6}{x+3} = \frac{5}{6-x^2-x}$ là:
A. $x \neq 2$ và $x \neq 3$. **B.** $x \neq -2$ và $x \neq 3$. **C.** $x \neq -2$ và $x \neq 6$. **D.** $x \neq 2$ và $x \neq -3$.
- Câu 11. [VD]** Điều kiện xác định của phương trình $\frac{2}{x+2} - \frac{2x^2+16}{x^3+8} = \frac{5}{x^2-2x+4}$ là:
A. $x \neq -2$. **B.** $x \neq -8$. **C.** $x \neq 2$ và $x \neq -2$. **D.** $x \neq -2$ và $x \neq -8$.
- Câu 12. [VDC]** Điều kiện xác định của phương trình $\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{2(x+2)^2}{x^6-1}$ là:
A. $x \neq 0$. **B.** $x \neq 1$. **C.** $x \neq -1$. **D.** $x \neq \pm 1$.

2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai

- Câu 1.** Cho phương trình $\frac{4}{x(x-1)} + \frac{3}{x} = \frac{4}{x-1}$, khi đó

- a) Điều kiện xác định $x \neq 0$ và $x \neq 1$.
 b) Phương trình có nghiệm là $x = 1$.
 c) Phương trình có nghiệm là $x = 0$.
 d) Phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) S

d) Đ

Điều kiện xác định: $x \neq 0$ và $x-1 \neq 0$ hay $x \neq 0$ và $x \neq 1$

$$\frac{4}{x(x-1)} + \frac{3}{x} = \frac{4}{x-1}$$

Ta có:

$$4 + 3(x-1) = 4x$$

$$4 + 3x - 3 = 4x$$

$x = 1$ (không thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Nên a, d đúng; b, c sai.

- Câu 2.** Cho phương trình $\frac{40}{27+x} + \frac{40}{27-x} = 3$, khi đó

- a) Điều kiện xác định $x \neq 27$.
 b) Phương trình có hai nghiệm là $x = 27$ và $x = -27$.
 c) Tổng hai nghiệm của phương trình là 0 .
 d) Phương trình có nghiệm là $x = 27$.

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) S

Điều kiện xác định: $27+x \neq 0$ và $27-x \neq 0$ hay $x \neq -27$ và $x \neq 27$

$$\frac{40}{27+x} + \frac{40}{27-x} = 3$$

Ta có:

$$40(27-x) + 40(27+x) = 3(27-x)(27+x)$$

$$1080 - 40x + 1080 + 40x = 2187 - 3x^2$$

$$3x^2 = 27$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \text{ hoặc } x = -3 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định)}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 3$ và $x = -3$.

Nên c đúng; a, b, d sai.

Câu 3. Cho phương trình $\frac{6x-1}{3x+2} = \frac{2x+5}{x-3}$, khi đó

a) Điều kiện xác định $x \neq \frac{-2}{3}$ và $x \neq 3$.

b) Nghiệm của phương trình là một nghiệm nguyên.

c) Nghiệm của phương trình là $x = 3$.

d) Nghiệm của phương trình là $x = -\frac{7}{38}$.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) S

d) Đ

Điều kiện xác định: $3x+2 \neq 0$ và $x-3 \neq 0$ hay $x \neq \frac{-2}{3}$ và $x \neq 3$

Ta có: $\frac{6x-1}{3x+2} = \frac{2x+5}{x-3}$

$$(6x-1)(x-3) = (2x+5)(3x+2)$$

$$6x^2 - 18x - x + 3 = 6x^2 + 4x + 15x + 10$$

$$38x = -7$$

$$x = \frac{-7}{38} \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x = \frac{-7}{38}$.

Nên a, d đúng; b, c sai.

Câu 4. Cho phương trình $\frac{x}{x-3} - \frac{x}{x-5} = \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-6}$. Khi đó

a) Phương trình này có duy nhất 1 nghiệm dương.

b) Phương trình này có duy nhất 1 nghiệm âm.

c) Phương trình này có nghiệm là $x = 0$.

d) Tích hai nghiệm của phương trình là 0.

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) Đ

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-3 \neq 0 \\ x-5 \neq 0 \\ x-4 \neq 0 \\ x-6 \neq 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 5 \\ x \neq 4 \\ x \neq 6 \end{cases}$

Ta có: $\frac{x}{x-3} - \frac{x}{x-5} = \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-6}$

$$\frac{x(x-5)-x(x-3)}{(x-3)(x-5)} = \frac{x(x-6)-x(x-4)}{(x-4)(x-6)}$$

$$\frac{x^2-5x-x^2+3x}{(x-3)(x-5)} = \frac{x^2-6x-x^2+4x}{(x-4)(x-6)}$$

$$\frac{-2x}{(x-3)(x-5)} = \frac{-2x}{(x-4)(x-6)}$$

$x=0$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=0$.

Nên c, d đúng; a, b sai.

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. [NB] Phương trình $\frac{x-3}{-3-x} + \frac{x+3}{-3+x} = \frac{24}{9-x^2}$ có điều kiện xác định là gì?

Đáp án: $x \neq 3$ và $x \neq -3$

Câu 2. [NB] Phương trình $\frac{x^2}{2-x} + \frac{3x-1}{3} = \frac{5}{3}$ có nghiệm là gì?

Đáp án: $x=1$

Câu 3. [TH] Nghiệm của phương trình $\frac{1}{x-1} - \frac{4x}{x^3-1} = \frac{x}{x^2+x+1}$ là giá trị x nào?

Đáp án: $x = \frac{1}{2}$.

Câu 4. [TH] Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-1} + \frac{2}{x-2} = 0$ là gì?

Đáp án: $x \geq 1$ và $x \neq 2$.

Câu 5. [VD] Phương trình $\frac{x-3}{-3-x} + \frac{x+3}{-3+x} = \frac{24}{3^2-x^2}$ có bao nhiêu nghiệm?

Đáp án: Có một nghiệm $x = -6$

Câu 6. [VDC] Phương trình $\frac{9x^2}{x^3-8} + \frac{6}{x^2+2x+4} = \frac{3}{x-2}$ có bao nhiêu nghiệm?

Đáp án: Có một nghiệm

PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN (GV chép phần bài tập tự luyện trên file đáp án vào)

Bài 1 [NB]: Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau: giãn cách chưa hợp lý. Các bài giải cô phải trình bày từng bước như dạy HS giải phương trình, ở đây cô chỉ ghi đáp án là chưa hợp lý

a) $\frac{3x-1}{x-4} = 2$

b) $\frac{3x-1}{2x+1} = 1$

c) $\frac{2}{x+1} + 5 = \frac{1}{x-2}$

d) $\frac{2x+3}{x} = \frac{4x+9}{2x-3}$

Lời giải:

a) Điều kiện xác định: $x-4 \neq 0$ hay $x \neq 4$

b) Điều kiện xác định: $2x+1 \neq 0$ hay $x \neq -\frac{1}{2}$

c) Điều kiện xác định: $x+1 \neq 0$ và $x-2 \neq 0$ hay $x \neq -1$ và $x \neq 2$

d) Điều kiện xác định: $x \neq 0$ và $2x - 3 \neq 0$ hay $x \neq 0$ và $x \neq \frac{3}{2}$

Bài 2 [TH]: Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\frac{x-2}{x+2} - \frac{3}{x-2} = \frac{2x-22}{x^2-4}$

b) $\frac{x-5}{x+5} - \frac{2x}{x-5} - \frac{x(x+10)}{25-x^2}$

c) $\frac{3}{1-3x} = \frac{2}{1+3x} - \frac{7+5x}{9x^2-1}$

d) $\frac{x^2-3x-4}{x^2-16} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-5}{x-4}$

Lời giải:

a) Ta có: $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

Điều kiện xác định: $x+2 \neq 0$ và $x-2 \neq 0$ hay $x \neq -2$ và $x \neq 2$

b) Ta có: $25 - x^2 = -(x^2 - 25) = -(x+5)(x-5)$

Điều kiện xác định: $x+5 \neq 0$ và $x-5 \neq 0$ hay $x \neq -5$ và $x \neq 5$

c) Ta có: $9x^2 - 1 = -[1^2 - (3x)^2] = -(1+3x)(1-3x)$

Điều kiện xác định: $1-3x \neq 0$ và $1+3x \neq 0$ hay $x \neq \frac{1}{3}$ và $x \neq -\frac{1}{3}$

d) Ta có: $x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$

Điều kiện xác định: $x+4 \neq 0$ và $x-4 \neq 0$ hay $x \neq -4$ và $x \neq 4$

Bài 3 [TH]: Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\frac{7}{x+2} + \frac{2}{x+3} = \frac{1}{x^2+5x+6}$

b) $\frac{x}{x+2} - \frac{x^2+1}{x^2-2x-8} = \frac{3}{x-4}$

c) $\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^2+x}$

d) $\frac{2}{3x+1} - \frac{15}{6x^2-x-1} = \frac{3}{2x-1}$

Lời giải:

a) Ta có: $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

Điều kiện xác định: $x+2 \neq 0$ và $x+3 \neq 0$ hay $x \neq -2$ và $x \neq -3$

b) Ta có: $x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$

Điều kiện xác định: $x+2 \neq 0$ và $x-4 \neq 0$ hay $x \neq -2$ và $x \neq 4$

c) Ta có: $x^2 + x = x(x+1)$

Điều kiện xác định: $x+1 \neq 0$ và $x \neq 0$ hay $x \neq -1$ và $x \neq 0$

d) Ta có: $6x^2 - x - 1 = (3x+1)(2x-1)$

Điều kiện xác định: $3x+1 \neq 0$ và $2x-1 \neq 0$ hay $x \neq -\frac{1}{3}$ và $x \neq \frac{1}{2}$

Bài 4 [VD]: Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\frac{2x}{x^2+x+1} - \frac{1}{1-x} = \frac{3x^2}{x^3-1}$

b) $\frac{9x^2}{8-x^3} - \frac{6}{x^2+2x+4} = \frac{3}{x-2}$

c) $\frac{1}{x+2} - \frac{2x-9}{x^3+8} = -\frac{2}{2x-4-x^2}$

d) $\frac{10}{2x-2} - \frac{5}{2x^2+2x+2} = 5 \cdot \frac{x^2+2}{1-x^3}$

Lời giải:

a) Ta có: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ và $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x

Điều kiện xác định: $x - 1 \neq 0$ hay $x \neq 1$

b) Ta có: $8 - x^3 = (2-x)(4 + 2x + x^2)$ và $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 > 0$ với mọi x

Điều kiện xác định: $x - 2 \neq 0$ hay $x \neq 2$

c) Ta có: $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$ và $x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 > 0$ với mọi x

Điều kiện xác định: $x + 2 \neq 0$ hay $x \neq -2$

$$d) \frac{10}{2x-2} - \frac{5}{2x^2+2x+2} = 5 \cdot \frac{x^2+2}{1-x^3}$$

$$\frac{5}{x-1} - \frac{5}{2(x^2+x+1)} = -5 \cdot \frac{x^2+2}{x^3-1}$$

Ta có: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ và $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x

Điều kiện xác định: $x - 1 \neq 0$ hay $x \neq 1$

Bài 5 [VD]: Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

$$a) \frac{x}{2x-6} - \frac{1}{2x+2} = \frac{3x+1}{x^2-2x-3}$$

$$b) \frac{3}{4x-2} + \frac{1}{x+4} = \frac{5x+11}{2x^2+7x-4}$$

Lời giải:

$$a) \frac{x}{2x-6} - \frac{1}{2x+2} = \frac{3x+1}{x^2-2x-3}$$

$$\frac{x}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x+1)} = \frac{3x+1}{x^2-2x-3}$$

Ta có: $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

Điều kiện xác định: $x - 3 \neq 0$ và $x + 1 \neq 0$ hay $x \neq 3$ và $x \neq -1$

$$b) \frac{3}{4x-2} + \frac{1}{x+4} = \frac{5x+11}{2x^2+7x-4}$$

$$\frac{3}{2(2x-1)} + \frac{1}{x+4} = \frac{5x+11}{2x^2+7x-4}$$

Ta có: $2x^2 + 7x - 4 = (2x-1)(x+4)$

Điều kiện xác định: $2x - 1 \neq 0$ và $x + 4 \neq 0$ hay $x \neq \frac{1}{2}$ và $x \neq -4$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. [NB] Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

$$a) \frac{x^2}{3-x} + \frac{3x-1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$b) \frac{3x+1}{3x} = 1 - \frac{3}{x-3}$$

$$c) \frac{x-1}{2+x} = \frac{x+3}{x-4}$$

$$d) \frac{7}{x+2} + \frac{2}{x+3} = \frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

Lời giải:

a) Điều kiện xác định: $3 - x \neq 0$ hay $x \neq 3$

b) Điều kiện xác định: $3x \neq 0$ và $x - 3 \neq 0$ hay $x \neq 0$ và $x \neq 3$

c) Điều kiện xác định: $2+x \neq 0$ và $x-4 \neq 0$ hay $x \neq -2$ và $x \neq 4$

d) Điều kiện xác định: $x+2 \neq 0$ và $x+3 \neq 0$ hay $x \neq -2$ và $x \neq -3$

Bài 2. [TH] Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x}{x-2} = \frac{6-7x}{x^2-4}$

b) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$

c) $\frac{1}{x^2-x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{x-1}$

d) $\frac{x+2}{x+3} + \frac{2x-1}{x-3} = \frac{x^2+9}{x^2-9}$

Lời giải:

a) Ta có: $x^2-4 = (x+2)(x-2)$

Điều kiện xác định: $x+2 \neq 0$ và $x-2 \neq 0$ hay $x \neq -2$ và $x \neq 2$

b) Ta có: $x^2-1 = (x+1)(x-1)$

Điều kiện xác định: $x+1 \neq 0$ và $x-1 \neq 0$ hay $x \neq -1$ và $x \neq 1$

c) Ta có: $x^2-x = x(x-1)$

Điều kiện xác định: $x \neq 0$ và $x-1 \neq 0$ hay $x \neq 0$ và $x \neq 1$

d) Ta có: $x^2-9 = (x+3)(x-3)$

Điều kiện xác định: $x+3 \neq 0$ và $x-3 \neq 0$ hay $x \neq -3$ và $x \neq 3$

Bài 3. [VD] Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\frac{4}{x-2} + \frac{x}{x+1} = \frac{x^2-2}{x^2-x-2}$

b) $\frac{3}{2x-1} + \frac{1}{x+4} = \frac{5x+1}{2x^2+7x-4}$

c) $\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{2}{-x^2+5x-6}$

d) $\frac{5}{x-2} + \frac{2}{x+4} = \frac{3x}{x^2+2x-8}$

Lời giải:

a) Ta có: $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$

Điều kiện xác định: $x-2 \neq 0$ và $x+1 \neq 0$ hay $x \neq 2$ và $x \neq -1$

b) Ta có: $2x^2+7x-4 = (2x-1)(x+4)$

Điều kiện xác định: $2x-1 \neq 0$ và $x+4 \neq 0$ hay $x \neq \frac{1}{2}$ và $x \neq -4$

c) Ta có: $-x^2+5x-6 = -(x^2-5x+6) = -(x-2)(x-3)$

Điều kiện xác định: $x-2 \neq 0$ và $x-3 \neq 0$ hay $x \neq 2$ và $x \neq 3$

d) Ta có: $x^2+2x-8 = (x-2)(x+4)$

Điều kiện xác định: $x-2 \neq 0$ và $x+4 \neq 0$ hay $x \neq 2$ và $x \neq -4$

Bài 4. [VD] Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\frac{2}{x^2-x+1} = \frac{3x^2}{x^3+1} + \frac{x}{1+x}$

b) $\frac{x^2}{8+x^3} - \frac{7x}{x^2-2x+4} = \frac{1}{x(x+2)}$

c) $\frac{1}{x-3} - \frac{x-3}{x^3-27} = -\frac{1}{3x+9+x^2}$

c) $\frac{1}{2x-4} + \frac{x^2+2}{8-x^3} = \frac{5}{x^2+2x+4}$

Lời giải:

a) Ta có: $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ và $x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x

Điều kiện xác định: $x+1 \neq 0$ hay $x \neq -1$

b) Ta có: $8+x^3 = (2+x)(4-2x+x^2)$ và $x^2-2x+4 = (x-1)^2 + 3 > 0$ với mọi x

Điều kiện xác định: $x+2 \neq 0$ hay $x \neq -2$

c) Ta có: $x^3-27 = (x-3)(x^2+3x+9)$ và $x^2+3x+9 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0$ với mọi x

Điều kiện xác định: $x-3 \neq 0$ hay $x \neq 3$

$$d) \frac{1}{2x-4} + \frac{x^2+2}{8-x^3} = \frac{5}{x^2+2x+4}$$

$$\frac{1}{2(x-2)} - \frac{x^2+2}{x^3-8} = \frac{5}{x^2+2x+4}$$

Ta có: $x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$ và $x^2+2x+4 = (x+1)^2 + 3 > 0$ với mọi x

Điều kiện xác định: $x-2 \neq 0$ hay $x \neq 2$

Bài 5. [VDC] Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\frac{1}{x^2-8x+15} = \frac{1}{x^2-10x+24}$

b) $\frac{4}{x^2-3x+2} - \frac{3}{x^2-6x+5} = 0$

Lời giải:

a) Ta có: $x^2-8x+15 = (x-3)(x-5)$ và $x^2-10x+24 = (x-4)(x-6)$

Điều kiện xác định: $x-3 \neq 0$, $x-4 \neq 0$, $x-5 \neq 0$ và $x-6 \neq 0$

hay $x \neq 3$, $x \neq 4$, $x \neq 5$ và $x \neq 6$

b) Ta có: $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$ và $x^2-6x+5 = (x-1)(x-5)$

Điều kiện xác định: $x-1 \neq 0$, $x-2 \neq 0$ và $x-5 \neq 0$

hay $x \neq 1$, $x \neq 2$ và $x \neq 5$

DẠNG 3: PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN

Câu 1. [NB] Nghiệm của phương trình $\frac{8-x}{x-7} - 8 = \frac{1}{x-7}$ là

A. $x = 7$.

B. $x = -\frac{49}{9}$.

C. Vô nghiệm.

D. vô số nghiệm.

Lời giải

Chọn C

$$\frac{8-x}{x-7} - 8 = \frac{1}{x-7} \quad \text{ĐKXD } x \neq 7$$

$$8-x-8(x-7) = 1$$

$$8-x-8x+56 = 1$$

$$-9x = -63$$

$$x = 7 \text{ (không thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu 2. [NB] Nghiệm của phương trình $\frac{6}{x-1} + \frac{3}{x-3} = \frac{8}{2x-6}$ là:

A. $x = \frac{19}{5}$.

B. $x = \frac{5}{19}$.

C. $x = \frac{5}{17}$.

D. $x = \frac{17}{5}$.

Chọn D

$$\frac{6}{x-1} + \frac{3}{x-3} = \frac{8}{2x-6} \quad \text{ĐKXĐ: } x \neq 1; x \neq 3$$

$$\frac{6}{x-1} + \frac{3}{x-3} = \frac{8}{2(x-3)}$$

$$\frac{6}{x-1} + \frac{3}{x-3} - \frac{4}{x-3} = 0$$

$$\frac{6}{x-1} = \frac{1}{x-3}$$

$$6(x-3) - (x-1) = 0$$

$$5x - 17 = 0$$

$$x = \frac{17}{5} \quad (\text{thỏa mãn ĐK})$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{17}{5}$.

Câu 3. [NB] Phương trình $\frac{x+5}{3x-6} - \frac{1}{2} = \frac{2x-3}{2x-4}$ có tập nghiệm là

A. $x = \frac{-14}{5}$.

B. $x = \frac{25}{7}$.

C. $x = \frac{-6}{7}$.

D. $x = -1$.

Lời giải

Chọn B

$$\frac{x+5}{3x-6} - \frac{1}{2} = \frac{2x-3}{2x-4} \quad (\text{ĐKXĐ } x \neq 2)$$

$$\frac{x+5}{3(x-2)} - \frac{1}{2} = \frac{2x-3}{2(x-2)}$$

$$\frac{2(x+5)}{6(x-2)} - \frac{3(x-2)}{6(x-2)} = \frac{3(2x-3)}{6(x-2)}$$

$$2(x+5) - 3(x-2) = 3(2x-3)$$

$$2x + 10 - 3x + 6 = 6x - 9$$

$$2x - 3x - 6x = -9 - 10 - 6$$

$$-7x = -25$$

$$x = \frac{25}{7} \quad (\text{thỏa mãn ĐKXĐ})$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{25}{7}$.

Câu 4. [NB] Phương trình $\frac{4x-5}{x-1} = 2 + \frac{x}{x-1}$ có tập nghiệm là

A. $x = 3$.

B. $x = 4$.

C. $x = \frac{3}{7}$.

D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\frac{4x-5}{x-1} = 2 + \frac{x}{x-1} \quad (\text{ĐKXĐ } x \neq 1)$$

$$\frac{4x-5}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{x}{x-1}$$

$$4x-5 = 2(x-1) + x$$

$$4x-2x-x = -2+5$$

$$x = 3 \quad (\text{thỏa mãn ĐKXĐ})$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 3$.

Câu 5. [TH] Phương trình $\frac{2x+5}{2x} - \frac{x}{x+5} = 0$ có tập nghiệm là

A. $x = \frac{-5}{3}$.

B. $x = \frac{5}{3}$.

C. vô nghiệm.

D. vô số nghiệm.

Lời giải

Chọn A

$$\frac{2x+5}{2x} - \frac{x}{x+5} = 0 \quad (\text{ĐKXĐ } x \neq 0; x \neq -5)$$

$$\frac{(2x+5)(x+5)}{2x(x+5)} - \frac{x \cdot 2x}{(x+5) \cdot 2x} = \frac{0 \cdot (x+5) \cdot 2x}{(x+5) \cdot 2x}$$

$$(2x+5)(x+5) - x \cdot 2x = 0$$

$$2x^2 + 10x + 5x + 25 - 2x^2 = 0$$

$$15x + 25 = 0$$

$$x = \frac{-5}{3} \quad (\text{thỏa mãn ĐKXĐ})$$

Nghiệm của phương trình là $x = \frac{-5}{3}$.

Câu 6. [TH] Nghiệm của phương trình $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} = 0$ là

A. $x = -4$.

B. $x = 0$.

C. $x = 4$.

D. Vô nghiệm.

Lời giải

Chọn C

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} = 0 \quad (\text{ĐKXĐ } x \neq 1; x \neq -2)$$

$$\frac{1(x+2)}{(x-1)(x+2)} - \frac{2(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{0(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)}$$

$$1 \cdot (x+2) - 2(x-1) = 0$$

$$x+2-2x+2=0$$

$$-x = -4$$

$$x = 4 \quad (\text{thỏa mãn ĐKXĐ})$$

Nghiệm của phương trình là $x = 4$.

Câu 7. [TH] Phương trình $\frac{7}{x+2} = \frac{3}{x-5}$ có nghiệm là

A. $\frac{11}{4}$.

B. $\frac{21}{4}$.

C. $\frac{31}{4}$.

D. $\frac{41}{4}$.

Chọn D

$$\frac{7}{x+2} = \frac{3}{x-5} \quad (\text{ĐKXĐ } x \neq -2; x \neq 5)$$

$$\frac{7(x-5)}{(x+2)(x-5)} = \frac{3(x+2)}{(x-5)(x+2)}$$

$$7(x-5) = 3(x+2)$$

$$7x - 3x = 6 + 35$$

$$4x = 41$$

$$x = \frac{41}{4}$$

$$x = \frac{41}{4} \quad (\text{thỏa mãn ĐKXĐ})$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{41}{4}$

Câu 8. [TH] Phương trình $\frac{x+3}{x-1} - 3 = 0$ có nghiệm là
A. $x = -3$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\frac{x+3}{x-1} - 3 = 0 \quad (\text{ĐKXĐ } x \neq 1)$$

$$\frac{x+3}{x-1} - \frac{3(x-1)}{x-1} = \frac{0(x-1)}{x-1}$$

$$x+3-3(x-1) = 0$$

$$x+3-3x+3 = 0$$

$$-2x+6 = 0$$

$$x = 3$$

$x = 3$ thỏa mãn ĐKXĐ nên nghiệm của phương trình là $x = 3$.

Câu 9. [VD] Cho hai biểu thức: $A = 1 + \frac{1}{2+x}$ và $B = \frac{12}{x^3+8}$. Tìm x sao cho $A = B$.
A. $x = 0$; $x = 1$ và $x = -2$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 0$ và $x = 1$. **D.** $x = 0$

Lời giải

Chọn C

Để $A = B$ thì $1 + \frac{1}{2+x} = \frac{12}{x^3+8}$ (ĐKXĐ $x \neq -2$)

$$1 + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$\frac{x^3+8}{x^3+8} + \frac{1(x^2-2x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{12}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$x^3+8+x^2-2x+4 = 12$$

$$x^3+x^2-2x = 0$$

$$x(x^2+x-2) = 0$$

$$x(x^2 - x + 2x - 2) = 0$$

$$x(x-1)(x+2) = 0$$

Suy $x = 0$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = -2$

Ta thấy:

$x = 0$ thỏa mãn ĐKXD; $x = 1$ thỏa mãn ĐKXD; $x = -2$ không thỏa mãn ĐKXD nên Đê $A = B$

thì $x = 0$; $x = 1$.

Câu 10. [VD] Phương trình $\frac{1}{x+1} + \frac{2x^2-5}{x^3+1} = \frac{4}{x^2-x+1}$ có nghiệm là

- A.** $x = -1$. **B.** $x = \frac{8}{3}$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = \frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn B

$$x^2 - x + 1 + 2x^2 - 5 = 4x + 4 \text{ (ĐKXD } x \neq -1)$$

$$3x^2 - 5x - 8 = 0$$

$$(3x-8)(x+1) = 0$$

$$\text{suy ra } x = -1 \text{ hoặc } x = \frac{8}{3}$$

Ta thấy: $x = -1$ (không thỏa mãn ĐKXD); $x = \frac{8}{3}$ (thỏa mãn ĐKXD).

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{8}{3}$.

Câu 11. [VD] Tập nghiệm của phương trình $\frac{8}{x-8} + \frac{11}{x-11} = \frac{9}{x-9} + \frac{10}{x-10}$ là

- A.** Phương trình vô số nghiệm. **B.** Phương trình vô nghiệm.
C. $x = 0$. **D.** Phương trình có một nghiệm.

Lời giải

Chọn C

$$\frac{8}{x-8} + \frac{11}{x-11} = \frac{9}{x-9} + \frac{10}{x-10} \text{ ĐKXD: } x \neq 8; x \neq 10; x \neq 9; x \neq 11.$$

$$\frac{8}{x-8} + 1 + \frac{11}{x-11} + 1 = \frac{9}{x-9} + 1 + \frac{10}{x-10} + 1$$

$$\frac{x}{x-8} + \frac{x}{x-11} = \frac{x}{x-9} + \frac{x}{x-10}$$

$$\frac{x}{x-8} + \frac{x}{x-11} - \frac{x}{x-9} - \frac{x}{x-10} = 0$$

$$x \left(\frac{1}{x-8} + \frac{1}{x-11} - \frac{1}{x-9} - \frac{1}{x-10} \right) = 0$$

$$x = 0 \text{ (tm) vì } \frac{1}{x-8} + \frac{1}{x-11} - \frac{1}{x-9} - \frac{1}{x-10} \neq 0$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 0$.

Câu 12. [VDC] Phương trình $\frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12} + \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} = \frac{1}{8}$ có tích các nghiệm là

A. -8 . **B.** 20 . **C.** -12 . **D.** -20 .

Lời giải

Chọn D

a) $\frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12} + \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} = \frac{1}{8}$
 $x \neq 8; x \neq 10; x \neq 9; x \neq 11$.

ĐKXD:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} = \frac{1}{8} \\ & \frac{1}{(x+2)} - \frac{1}{(x+3)} + \frac{1}{(x+3)} - \frac{1}{(x+4)} + \frac{1}{(x+4)} - \frac{1}{(x+5)} + \frac{1}{(x+5)} - \frac{1}{(x+6)} = \frac{1}{8} \\ & \frac{1}{(x+2)} - \frac{1}{(x+6)} = \frac{1}{8} \\ & \frac{x+6-x-2}{(x+2)(x+6)} = \frac{1}{8} \\ & \frac{4}{(x+2)(x+6)} = \frac{1}{8} \\ & (x+2)(x+6) = 32 \\ & x^2 + 8x - 20 = 0 \\ & (x-2)(x+10) = 0 \end{aligned}$$

Suy ra $x = 2$ hoặc $x = -10$

Ta thấy: $x = 2$ (thỏa mãn ĐKXD); $x = -10$ (thỏa mãn ĐKXD)

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2; x = -10$, do đó tích của hai nghiệm là $-10 \cdot 2 = -20$.

2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (Soạn khoảng 4 câu):

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai

Câu 1.

- a) Phương trình $\frac{3x+1}{x-1} = 0$ là phương trình chứa ẩn ở mẫu.
- b) Phương trình $\frac{3x+1}{x-1} = 0$ được xác định khi $3x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{3}$.
- c) Phương trình $\frac{3x+1}{x-1} = 0$ có nghiệm là $x = 1$.
- d) Phương trình $\frac{3x+1}{x-1} = 0$ được xác định khi $x \neq 1$ và có nghiệm là $x = -\frac{1}{3}$.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) S

d) Đ

- Phương trình $\frac{3x+1}{x-1} = 0$ là dạng phương trình chứa ẩn ở mẫu nên a đúng
- Phương trình $\frac{3x+1}{x-1} = 0$ được xác định khi $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ nên b sai.

- Ta có $\frac{3x+1}{x-1} = 0 \Rightarrow 3x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$. Dp đó phương trình $\frac{3x+1}{x-1} = 0$ có nghiệm là $x = 1$ là sai.

- Phương trình $\frac{3x+1}{x-1} = 0$ được xác định khi $x \neq 1$ và có nghiệm là $x = -\frac{1}{3}$ là đúng.

Câu 2. Cho hai biểu thức $A = \frac{3}{3x+1} + \frac{2}{1-3x}$; $B = \frac{x-5}{9x^2-1}$, với giá trị nào của x thì hai biểu thức A và B có cùng một giá trị. Khi đó

a. Hai biểu thức A và B có cùng một giá trị nên $\frac{3}{3x+1} + \frac{2}{1-3x} = \frac{x-5}{9x^2-1}$.

b. ĐKXD của biểu thức A và B là $x \neq \frac{-1}{3}$.

c. Khi $x = 0$ thì $A = B$.

d. Không có giá trị x để hai biểu thức A và B có cùng một giá trị.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) Đ

d) S

$A = B$

Hay $\frac{3}{3x+1} + \frac{2}{1-3x} = \frac{x-5}{9x^2-1}$ ĐKXD: $x \neq \frac{1}{3}; x \neq -\frac{1}{3}$

$$\frac{3}{3x+1} - \frac{2}{3x-1} = \frac{x-5}{(3x+1)(3x-1)}$$

$$3(3x-1) - 2(3x+1) = x-5$$

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0 (t/m)$$

Vậy $x = 0$ thì $A = B$.

Do đó a, c đúng, b, d sai.

Câu 3. Cho phương trình $\frac{x-2}{x-4} + \frac{x-3}{x-2} = \frac{m}{3}$ trong đó m là một số cho trước. Biết $x = 5$ là một trong các nghiệm của phương trình, tìm các nghiệm còn lại.

a) Với $x = 5$ nên $\frac{x-2}{x-4} + \frac{x-3}{x-2} = \frac{5}{3}$.

b) Vì $x = 5$ là một trong các nghiệm của phương trình nên ta tìm được $m = 11$.

c) Biết $x = 5$ là một trong các nghiệm của phương trình, nghiệm còn lại là $x = \frac{8}{5}$.

d) Với $m = 11$ thì nghiệm còn lại của phương trình là $x = \frac{5}{8}$.

Lời giải

a) S

b) Đ

c) Đ

d) S

Vì $x = 5$ là một trong các nghiệm của phương trình nên $\frac{5-2}{5-4} + \frac{5-3}{5-2} = \frac{m}{3}$ suy ra $m = 11$.

Với $m = 11$, ta thay vào phương trình ta có $\frac{x-2}{x-4} + \frac{x-3}{x-2} = \frac{11}{3}$ ĐKXD: $x \neq 2; x \neq 4$

$$3(x-2)^2 + 3(x-4)(x-3) = 11(x-4)(x-2)$$

$$3(x^2 - 4x + 4) + 3(x^2 - 7x + 12) = 11(x^2 - 6x + 8)$$

$$3x^2 - 12x + 12 + 3x^2 - 21x + 36 = 11x^2 - 66x + 88$$

$$5x^2 - 33x + 40 = 0$$

$$(x-5)(5x-8) = 0$$

Suy ra $x = 5$ (T/m) hoặc $x = \frac{8}{5}$ (T/m)

Ta thấy

- với $x = 5$ nên $\frac{x-2}{x-4} + \frac{x-3}{x-2} = \frac{5}{3}$ là sai, do đó a sai.

- Vì $x = 5$ là một trong các nghiệm của phương trình nên ta tìm được $m = 11$ nên b đúng,

- Biết $x = 5$ là một trong các nghiệm của phương trình, nghiệm còn lại là $x = \frac{8}{5}$ nên c đúng và d sai.

$$\frac{2x+m}{x-1} = \frac{5(x-1)}{x+1} \quad (1)$$

Câu 4. Cho phương trình

a) Khi $x = \pm 1$ thì phương trình (1) không xác định.

b) Phương trình (1) là phương trình chứa ẩn ở mẫu.

c) Khi $x = \frac{1}{3}$, ta thay vào phương trình (1) ta tìm được $m = 0$.

d) Nếu $x = \frac{1}{3}$ là một nghiệm của phương trình thì phương trình còn có một nghiệm nguyên.

Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) S

d) Đ

Nếu $x = \frac{1}{3}$ ta thay vào phương trình ta có

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{3} + m}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{5(\frac{1}{3} - 1)}{\frac{1}{3} + 1} \Rightarrow \left(\frac{2}{3} + m\right) \cdot \frac{4}{3} = 5 \cdot \frac{4}{9} \Rightarrow m = 1$$

Ta thay $m = 1$ vào phương trình (1) ta có

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{5(x-1)}{x+1} \quad \text{ĐKXĐ: } x \neq 1; x \neq -1$$

$$(2x+1)(x+1) = 5(x-1)^2$$

$$2x^2 + 3x + 1 = 5(x^2 - 2x + 1)$$

$$3x^2 - 13x + 4 = 0$$

$$(x-4)(3x-1) = 0$$

Suy ra $x = \frac{1}{3}$ (T/m) hoặc $x = 4$ (T/m)

Phương trình (1) là có nghiệm của phương trình $x = 4$ là nghiệm nguyên do đó a, b, d đúng, c là sai.

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. [NB] Phương trình $\frac{2x-1}{5-3x} = 2$ có nghiệm là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $x = \frac{11}{8}$

$$\frac{2x-1}{5-3x} = \frac{2(5-3x)}{5-3x} \quad \text{ĐKXD: } x \neq \frac{5}{3}$$

$$2x-1 = 10-6x$$

$$8x = 11$$

$$x = \frac{11}{8} \quad (\text{T/m ĐKXD})$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{11}{8}$

Câu 2. [NB] Phương trình $\frac{5x-1}{3x+2} = \frac{5x-7}{3x-1}$ có nghiệm là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $x = -5$

Điều kiện xác định: $3x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{2}{3}; 3x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{3}$.

$$\frac{5x-1}{3x+2} = \frac{5x-7}{3x-1}$$

$$\frac{(5x-1)(3x-1)}{(3x+2)(3x-1)} = \frac{(5x-7)(3x+2)}{(3x+2)(3x-1)}$$

$$(5x-1)(3x-1) = (5x-7)(3x+2)$$

$$15x^2 - 5x - 3x + 1 = 15x^2 + 10x - 21x - 14$$

$$-8x + 1 = -11x - 14$$

$$3x = -15$$

$x = -5$ (Thoả mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -5$.

Câu 3. [TH] Biểu thức $\frac{y-1}{y-2} - \frac{3+y}{y-4}$ và biểu thức $\frac{-2}{(y-2)(y-4)}$ có giá trị bằng nhau thì các giá trị của y là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: Không tìm được giá trị của y thỏa mãn đề bài.

Điều kiện xác định: $y-2 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 2; y-4 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 4$

Theo bài ra ta có:

$$\frac{y-1}{y-2} - \frac{3+y}{y-4} = \frac{-2}{(y-2)(y-4)}$$

$$(y-1)(y-4) - (3+y)(y-2) = -2$$

$$y^2 - 4y - y + 4 - 3y + 6 - y^2 + 2y = -2$$

$$-6y = -12$$

$y = 2$ (Không thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy không tìm được giá trị của y để $\frac{y-1}{y-2} - \frac{3+y}{y-4} = \frac{-2}{(y-2)(y-4)}$

Câu 4. [TH] Giá trị y để biểu thức $\frac{8-y}{y-7} + \frac{1}{7-y}$ có giá trị bằng 8 là

Lời giải

Đáp án: Không tìm được giá trị của y thỏa mãn đề bài.

Biểu thức $\frac{8-y}{y-7} + \frac{1}{7-y}$ có giá trị bằng 8

Điều kiện xác định: $y \neq 7$

Theo bài ra ta có:

$$\frac{8-y}{y-7} + \frac{1}{7-y} = 8$$

$$\frac{8-y}{y-7} - \frac{1}{y-7} = \frac{8(y-7)}{y-7}$$

$$8-y-1 = 8y-56$$

$$9y = 63$$

$$y = 7 \text{ (không t/m đkxđ).}$$

Vậy không tìm được giá trị của y để $\frac{8-y}{y-7} + \frac{1}{7-y} = 8$

Câu 5. [VD] Cho phương trình ẩn y: $\frac{m}{y+m} + \frac{y}{y+2m} = \frac{3}{(y+m)(y+2m)} + 1$, nghiệm của phương trình là bao nhiêu khi $m = 1$?

Lời giải

Đáp án: $y = -3$

Với $m = 1$ thì phương trình trở thành: $\frac{1}{y+1} + \frac{y}{y+2} = \frac{3}{(y+1)(y+2)} + 1$

$$\frac{1}{y+1} + \frac{y}{y+2} = \frac{3}{(y+1)(y+2)} + 1$$

$$\text{ĐKXĐ: } y \neq -1; y \neq -2$$

$$y+2 + y(y+1) = 3 + (y+1)(y+2)$$

$$y+2 + y^2 + y = 3 + y^2 + 3y + 2$$

$$y = -3 \text{ (t/m)}$$

Câu 6. [VDC] Phương trình $\frac{x-a+1}{x-a} - \frac{x-b+1}{x-b} = \frac{a}{(x-a)(x-b)}$ với a, b là hằng số có bao nhiêu nghiệm?

Lời giải

Đáp án: Phương trình không có nghiệm hoặc Phương trình vô nghiệm.

Điều kiện xác định: $x \neq a; x \neq b$ (với a, b là hằng số)

$$\frac{x-a+1}{x-a} - \frac{x-b+1}{x-b} = \frac{a}{(x-a)(x-b)}$$

$$\frac{(x-a+1)(x-b)}{(x-a)(x-b)} - \frac{(x-b+1)(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \frac{a}{(x-a)(x-b)}$$

$$(x-a+1)(x-b) - (x-b+1)(x-a) = a$$

$$x^2 - bx - ax + ab + x - b - (x^2 - ax - bx + ab + x - a) = a$$

$$x^2 - bx - ax + ab + x - b - x^2 + ax + bx - ab - x + a = a$$

$$b = 0 \text{ (Vô lý)}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp giải: Các bước giải phương trình chứa ẩn ở mẫu:

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu hai vế của phương trình, rồi khử mẫu.

Bước 3: Giải phương trình vừa nhân được.

Bước 4: (Kết luận) Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1 [NB]: Giải các phương trình sau:

a. $\frac{7x-3}{x-1} = \frac{2}{3}$

c. $\frac{5x-1}{3x+2} = \frac{5x-7}{3x-1}$

b. $\frac{2(3-7x)}{1+x} = \frac{1}{2}$

d. $\frac{4x+7}{x-1} = \frac{12x+5}{3x+4}$

Lời giải

a. Điều kiện xác định: $x \neq 1$.

$$\frac{7x-3}{x-1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{3(7x-3)}{3(x-1)} = \frac{2(x-1)}{3(x-1)}$$

$$3(7x-3) = 2(x-1)$$

$$21x-9 = 2x-2$$

$$21x-2x = 9-2$$

$$19x = 7$$

$$x = \frac{7}{19} \text{ (thoả mãn điều kiện xác định)}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{7}{19}$.

b. $\frac{2(3-7x)}{1+x} = \frac{1}{2}$

Điều kiện xác định: $x \neq -1$

$$2(3-7x) \cdot 2 - 1 \cdot (1+x) = 0$$

$$12 - 28x - 1 - x = 0$$

$$-29x = -11$$

$$x = \frac{11}{29} \text{ (t/m)}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{11}{29}$.

c. Điều kiện xác định: $x \neq -\frac{2}{3}; x \neq \frac{1}{3}$.

$$\frac{5x-1}{3x+2} = \frac{5x-7}{3x-1} \Leftrightarrow \frac{(5x-1)(3x-1)}{(3x+2)(3x-1)} = \frac{(5x-7)(3x+2)}{(3x+2)(3x-1)}$$

$$(5x-1)(3x-1) = (5x-7)(3x+2)$$

$$15x^2 - 5x - 3x + 1 = 15x^2 + 10x - 21x - 14$$

$$-8x + 1 = -11x - 14$$

$$3x = -15$$

$x = -5$ (Thoả mãn điều kiện xác định)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -5$.

$$\text{d. } \frac{4x+7}{x-1} = \frac{12x+5}{3x+4} \quad \text{ĐKXĐ: } x \neq 1; x \neq -\frac{4}{3}$$

$$(4x+7)(3x+4) - (x-1)(12x+5) = 0$$

$$12x^2 + 16x + 21x + 28 - 12x^2 - 5x + 12x + 5 = 0$$

$$44x = -33$$

$$x = \frac{-3}{4} \text{ (t/m)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{-3}{4}$.

Ví dụ 2 [TH]: Giải phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{4x-3}{x-5} = \frac{29}{3}$$

$$\text{c) } \frac{x^2+6x-16}{x-2} = x+8$$

$$\text{b) } \frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)}$$

$$\text{d) } \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = 0$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{4x-3}{x-5} = \frac{29}{3} \quad \text{ĐKXĐ: } x \neq 5$$

$$\frac{3(4x-3)}{3(x-5)} = \frac{29(x-5)}{3(x-5)}$$

$$12x - 9 = 29x - 145$$

$$17x = 136$$

$$x = 8 \text{ (t/m)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 8$.

$$\text{b) } \frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)} \quad \text{ĐKXĐ } x \neq 0; x \neq 5$$

$$\frac{x(x-3)}{x(x-5)} + \frac{x-5}{x(x-5)} = \frac{x+5}{x(x-5)}$$

$$x^2 - 3x + x - 5 = x + 5$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x^2 - 5x + 2x - 10 = 0$$

$$x(x-5) + 2(x-5) = 0$$

$$(x-5)(x+2) = 0$$

Suy ra $x-5=0$ hay $x=5$ (loại) hoặc $x+2=0$ hay $x=-2$ (t/m).

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -2$.

$$\text{c) } \frac{x^2+6x-16}{x-2} = x+8 \quad \text{Điều kiện: } x \neq 2.$$

$$\frac{x^2+6x-16}{x-2} = \frac{(x+8)(x-2)}{x-2}$$

$$x^2+6x-16 = (x+8)(x-2)$$

$$x^2+6x-16 = x^2-2x+8x-16$$

$0x = 0$ (luôn đúng)

Vậy phương trình vô số nghiệm.

$$\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = 0$$

d) ĐKXĐ: $x \neq 2; x \neq 0$

$$3x - (x-2) - 4 = 0$$

$$2x = 2$$

$$x = 1(t/m)$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$.

Ví dụ 3 [VD]: Giải phương trình sau

$$\text{a) } \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{16}{x^2-1}$$

$$\text{c) } \frac{-7x^2+4}{x^3+1} = \frac{5}{x^2-x+1} - \frac{1}{1+x}$$

$$\text{b) } \frac{2}{x^2-4} - \frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0$$

$$\text{d) } \frac{1}{x-2} - \frac{6}{x+3} = \frac{5}{6-x^2-x}$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{16}{x^2-1} \quad (\text{ĐK } x \neq \pm 1)$$

$$\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{x^2-1} = \frac{16}{x^2-1}$$

$$x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 16$$

$$4x = 16$$

$$x = 4(t/m)$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 4$.

$$\text{b) } \frac{2}{x^2-4} - \frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0 \quad (\text{ĐK: } x \neq 0; x \neq \pm 2)$$

$$2x - (x-1)(x+2) + (x-4)(x-2) = 0$$

$$2x - x^2 - 2x + x + 2 + x^2 - 2x - 4x + 8 = 0$$

$$-5x + 10 = 0$$

$$-5x = -10$$

$$x = 2(\text{không t/m})$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

$$\text{c) } \frac{-7x^2+4}{x^3+1} = \frac{5}{x^2-x+1} - \frac{1}{1+x} \quad (\text{ĐK } x \neq -1;)$$

$$\frac{-7x^2+4}{x^3+1} = \frac{5 \cdot (x+1)}{(x^2-x+1)(x+1)} - \frac{1 \cdot (x^2-x+1)}{(1+x)(x^2-x+1)}$$

$$-7x^2+4 = 5 \cdot (x+1) - (x^2-x+1)$$

$$-7x^2+4 = 5x+5-x^2+x-1$$

$$6x^2+6x=0$$

$$6x(x+1)=0$$

$$\text{Suy ra } x=0 \text{ hoặc } x=-1.$$

$$\text{Ta thấy } x=0(t/m); x=-1(\text{Không T/m ĐKXĐ})$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 0$.

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{1}{x-2} - \frac{6}{x+3} &= \frac{5}{6-x^2-x} \quad (\text{ĐK } x \neq -3; x \neq 2) \\ x+3-6(x-2) &= -5 \\ x+3-6x+12 &= -5 \\ -5x &= -20 \\ x &= 4(tm) \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 4$.

Ví dụ 4 [VD]: Cho hai biểu thức $A = \frac{3}{3x+1} + \frac{2}{1-3x}; B = \frac{x-5}{9x^2-1}$ với giá trị nào của x thì hai biểu thức A và B có cùng một giá trị ?

Lời giải

$$\begin{aligned} A = B &\Rightarrow \frac{3}{3x+1} + \frac{2}{1-3x} = \frac{x-5}{9x^2-1} \quad \text{ĐKXD: } x \neq \frac{1}{3}; x \neq -\frac{1}{3} \\ \frac{3(3x-1)}{(3x+1)(3x-1)} - \frac{2(3x+1)}{(3x+1)(3x-1)} &= \frac{x-5}{(3x+1)(3x-1)} \\ 9x-3-6x-2 &= x-5 \\ 2x &= 0 \\ x &= 0(t/m) \end{aligned}$$

Vậy $x = 0$ thì hai biểu thức $A = \frac{3}{3x+1} + \frac{2}{1-3x}; B = \frac{x-5}{9x^2-1}$ có cùng một giá trị.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. [NB] Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{7x+7}{x-1} = \frac{2}{3}$$

$$\text{c) } \frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3-x}{x-2}$$

$$\text{b. } \frac{2}{1+x} = \frac{1}{3-7x}$$

$$\text{d. } \frac{14}{3x-12} - \frac{2+x}{x-4} = \frac{3}{8-2x} - \frac{5}{6}$$

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{7x+7}{x-1} &= \frac{2}{3} \quad (\text{ĐK } x \neq 1) \\ 3(7x+7) &= 2(x-1) \\ 21x+21 &= 2x-2 \\ 19x &= -23 \\ x &= \frac{-23}{19}(tm) \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{-23}{19}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{2}{1+x} &= \frac{1}{3-7x} \quad (\text{ĐK } x \neq -1; x \neq \frac{3}{7}) \\ 6-14x &= x+1 \\ 15x &= 5 \\ x &= \frac{1}{3}(tm) \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{1}{3}$

$$c) \frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3-x}{x-2} \text{ (ĐK } x \neq 2)$$

$$\frac{1}{x-2} + \frac{3(x-2)}{x-2} = \frac{3-x}{x-2}$$

$$\frac{1+3x-6}{x-2} = \frac{3-x}{x-2}$$

$$3x-5 = 3-x$$

$$4x = 8$$

$$x = 2 \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

$$d) \frac{14}{3x-12} - \frac{2+x}{x-4} = \frac{3}{8-2x} - \frac{5}{6} \text{ (ĐK } x \neq 4)$$

$$\frac{14}{3(x-4)} - \frac{2+x}{x-4} = \frac{3}{2(4-x)} - \frac{5}{6}$$

$$\frac{56-24-12x}{12(x-4)} = \frac{-18-10x+40}{12(x-4)}$$

$$32-12x = 22-10x$$

$$10 = 2x$$

$$x = 5 \text{ (tm)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 5$.

Bài 2. [TH] Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{2}{x-3} + \frac{x-5}{x-1} = 1$$

$$b) \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2+3}{x^2-1}$$

$$c) \frac{96}{x^2-16} - \frac{2x+1}{x+4} = \frac{1-3x}{4-x} - 5$$

$$d) \frac{x+25}{2x^2-50} - \frac{x+5}{x^2-5x} = \frac{5-x}{2x^2+10x}$$

Hướng dẫn

$$a) \frac{2}{x-3} + \frac{x-5}{x-1} = 1 \quad (1) \quad \text{ĐKXĐ: } x \neq 3, x \neq 1$$

$$\frac{2}{x-3} + \frac{x-5}{x-1} = 1$$

$$\frac{2(x-1)}{(x-3)(x-1)} + \frac{(x-5)(x-3)}{(x-3)(x-1)} = \frac{1(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-1)}$$

$$2(x-1) + (x-5)(x-3) = (x-3)(x-1)$$

$$-2x+10=0$$

$$x = 5 \text{ (t/m ĐKXĐ)}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 5$

$$b) \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2+3}{x^2-1} \quad \text{ĐKXĐ: } x \neq \pm 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+3}{(x-1)(x+1)}$$

$$x^2+2x+1-(x^2-2x+1)=x^2+3$$

$$4x = x^2+3$$

$$x^2-4x+3=0$$

$$x^2-x-3x+3=0$$

$$x(x-1)-3(x-1)=0$$

$$(x-1)(x-3)=0$$

Suy ra $x-1=0$ hay $x=1$ (không t/m ĐKXĐ) hoặc $x-3=0$ hay $x=3$ (t/m)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=3$

$$c) \frac{96}{x^2-16} - \frac{2x+1}{x+4} = \frac{1-3x}{4-x} - 5 \quad \text{ĐKXĐ: } x \neq \pm 4$$

$$\frac{96}{(x-4)(x+4)} - \frac{2x+1}{x+4} = \frac{3x-1}{x-4} - 5$$

$$96 - (2x+1)(x-4) = (3x-1)(x+4) - 5(x^2-16)$$

$$96 - 2x^2 + 7x + 4 = 3x^2 + 11x - 4 - 5x^2 + 80$$

$$4x = 24$$

$$x = 6 \text{ (T/M)}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=6$.

$$d) \frac{x+25}{2x^2-50} - \frac{x+5}{x^2-5x} = \frac{5-x}{2x^2+10x} \quad \text{ĐKXĐ: } x \neq \pm 5, x \neq 0$$

$$\frac{x+25}{2(x-5)(x+5)} - \frac{x+5}{x(x-5)} = \frac{5-x}{2x(x+5)}$$

$$(x+25)x - (x+5)2(x+5) = (5-x)(x-5)$$

$$x^2 + 25x - 2x^2 - 20x - 50 = -x^2 + 10x - 25$$

$$5x = -25$$

$$x = -5 \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Bài 3. [VD] Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{4}{x^2+2x-3} = \frac{2x-5}{x+3} - \frac{2x}{x-1}$$

$$c) \frac{2}{-x^2+6x-8} - \frac{x-1}{x-2} = \frac{x+3}{x-4}$$

$$b) \frac{3}{x^2+x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{-7}{x+2}$$

$$d) \frac{2}{x^3-x^2-x+1} = \frac{3}{1-x^2} - \frac{1}{x+1}$$

Hướng dẫn

$$a) \frac{4}{x^2+2x-3} = \frac{2x-5}{x+3} - \frac{2x}{x-1} \quad \text{ĐKXĐ: } x \neq 1, x \neq -3$$

$$\frac{4}{(x+3)(x-1)} = \frac{2x-5}{x+3} - \frac{2x}{x-1}$$

$$4 = (2x-5)(x-1) - 2x(x+3)$$

$$4 = -7x + 5 - 6x$$

$$x = \frac{1}{13} \text{ (t/m)}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{1}{13}$.

$$b) \frac{3}{x^2+x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{-7}{x+2} \quad \text{ĐKXĐ: } x \neq 1, x \neq -2$$

$$\frac{3}{(x-1)(x+2)} - \frac{1}{x-1} = \frac{-7}{x+2}$$

$$3 - 1(x+2) = -7(x-1)$$

$$6x = 6$$

$$x = 1 \text{ (loại).}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

$$\text{c) } \frac{2}{-x^2+6x-8} - \frac{x-1}{x-2} = \frac{x+3}{x-4} \quad \text{ĐKXĐ: } x \neq 2, x \neq 4$$

$$\frac{-2}{(x-2)(x-4)} - \frac{x-1}{x-2} = \frac{x+3}{x-4}$$

$$-2 - (x-1)(x-4) = (x+3)(x-2)$$

$$-2 - x^2 + 5x - 4 = x^2 + x - 6$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$2x(x-2) = 0$$

Suy ra $x = 0$ (t/m) hoặc $x = 2$ (loại).

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 0$.

$$\text{d) } \frac{2}{x^3-x^2-x+1} = \frac{3}{1-x^2} - \frac{1}{x+1} \quad \text{ĐKXĐ: } x \neq \pm 1$$

$$\frac{2}{(x^2-1)(x+1)} = \frac{-3}{x^2-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$2 = -3(x+1) - 1(x^2-1)$$

$$2 = -3x - 3 - x^2 + 1$$

$$x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{-7}{4}$$

Ta thấy $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0$ và $\frac{-7}{4} < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Bài 4 [VD] Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{4}{x^2+2x-3} = \frac{2x-5}{x+3} - \frac{2x}{x-1}$$

$$\text{b) } \frac{3}{x^2+x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{-7}{x+2}$$

$$\text{c) } \frac{2}{-x^2+6x-8} - \frac{x-1}{x-2} = \frac{x+3}{x-4}$$

$$\text{d) } \frac{2}{x^3-x^2-x+1} = \frac{3}{1-x^2} - \frac{1}{x+1}$$

Hướng dẫn

$$\text{a) } \frac{4}{x^2+2x-3} = \frac{2x-5}{x+3} - \frac{2x}{x-1} \quad \text{ĐKXĐ: } x \neq -3, x \neq 1$$

$$\frac{4}{(x+3)(x-1)} = \frac{2x-5}{x+3} - \frac{2x}{x-1}$$

$$4 = (2x-5)(x-1) - 2x(x+3)$$

$$4 = -7x + 5 - 6x$$

$$x = \frac{1}{13} \text{ (TM)}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{1}{13}$.

$$\text{b) } \frac{3}{x^2+x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{-7}{x+2} \quad \text{ĐKXĐ: } x \neq 1, x \neq -2$$

$$\frac{3}{(x-1)(x+2)} - \frac{1}{x-1} = \frac{-7}{x+2}$$

$$3 - 1(x+2) = -7(x-1)$$

$$6x = 6$$

$$x = 1 \text{ (ko t/m)}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

$$\text{c) } \frac{2}{-x^2+6x-8} - \frac{x-1}{x-2} = \frac{x+3}{x-4} \quad \text{ĐKXĐ: } x \neq 2, x \neq 4$$

$$\frac{-2}{(x-2)(x-4)} - \frac{x-1}{x-2} = \frac{x+3}{x-4}$$

$$-2 - (x-1)(x-4) = (x+3)(x-2)$$

$$-2 - x^2 + 5x - 4 = x^2 + x - 6$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$2x(x-2) = 0$$

Suy ra $x = 0$ (t/m) hoặc $x = 2$ (không t/m)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 0$.

$$\text{d) } \frac{2}{x^3-x^2-x+1} = \frac{3}{1-x^2} - \frac{1}{x+1} \quad \text{ĐKXĐ: } x \neq \pm 1$$

$$\frac{2}{(x^2-1)(x+1)} = \frac{-3}{x^2-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$2 = -3(x+1) - 1(x^2-1)$$

$$2 = -3x - 3 - x^2 + 1$$

$$x^2 + 3x + 4 = 0$$

Suy ra $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{-7}{4}$ (Vô nghiệm vì $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0$ với mọi x và $\frac{-7}{4} < 0$)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 5 [VDC] Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \left(\frac{15}{x} - 25\right) = (x^2 + 5) \left(\frac{3}{x} - 5\right)$$

$$\text{b) } \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{x(x^4+x^2+1)}$$

$$\text{c) } \frac{x^2+8x+17}{x+4} + \frac{x^2+2x+5}{x+1} = \frac{x^2+6x+11}{x+3} + \frac{x^2+4x+7}{x+2}$$

$$\text{d) } \frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2}{x^2-2x+3} = \frac{6}{x^2-2x+4}$$

Hướng dẫn

$$\text{a) } \left(\frac{15}{x} - 25\right) = (x^2 + 5) \left(\frac{3}{x} - 5\right) \quad \text{ĐKXĐ: } x \neq 0$$

$$5 \left(\frac{3}{x} - 5\right) - (x^2 + 5) \left(\frac{3}{x} - 5\right) = 0$$

$$\left(\frac{3}{x} - 5\right) [5 - (x^2 + 5)] = 0$$

$$\left(\frac{3}{x} - 5\right)(-x^2) = 0$$

Suy ra $\frac{3}{x} - 5 = 0$ hay $x = \frac{3}{5}$ (t/m) hoặc $x^2 = 0$ hay $x = 0$ (không t/m)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{3}{5}$.

$$\text{b) } \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{x(x^4+x^2+1)}$$

ĐKXĐ: $x \neq 0$

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{x(x^4+x^2+1)}$$

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{x(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

$$(x+1)(x^2-x+1).x - (x-1)(x^2+x+1)x = 3$$

$$(x^3+1)x - (x^3-1)x = 3$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ (t/m)}$$

Vậy phương trình có nghiệm của đã cho là $x = \frac{3}{2}$

$$\text{c) } \frac{x^2+8x+17}{x+4} + \frac{x^2+2x+5}{x+1} = \frac{x^2+6x+11}{x+3} + \frac{x^2+4x+7}{x+2}$$

ĐK: $x \neq -1; x \neq -2; x \neq -3; x \neq -4$

$$\frac{x^2+8x+17}{x+4} + \frac{x^2+2x+5}{x+1} = \frac{x^2+6x+11}{x+3} + \frac{x^2+4x+7}{x+2}$$

$$x+4 + \frac{1}{x+4} + x+1 + \frac{4}{x+1} = x+3 + \frac{2}{x+3} + x+2 + \frac{3}{x+2}$$

$$\frac{1}{x+4} + \frac{4}{x+1} = \frac{2}{x+3} + \frac{3}{x+2}$$

$$\frac{4}{x+1} - \frac{3}{x+2} = \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+4}$$

$$\frac{4x+8-3x-3}{(x+1)(x+2)} = \frac{2x+8-x-3}{(x+3)(x+4)}$$

$$\frac{x-5}{(x+1)(x+2)} = \frac{x-5}{(x+3)(x+4)}$$

$$(x-5) \left[\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+3)(x+4)} \right] = 0$$

Suy ra $x-5=0$ suy ra $x=5$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+3)(x+4)} = 0$$

hoặc

$$(x+3)(x+4) = (x+1)(x+2)$$

$$7x + 12 = 3x + 2$$

Suy ra $x = \frac{-5}{2}$ (thỏa mãn ĐKXD)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 5; x = \frac{-5}{2}$.

d) $\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$

Đặt $x^2 - 2x + 2 = t, t > 0$

Khi đó phương trình đã cho trở thành $\frac{1}{t} + \frac{2}{t+1} = \frac{6}{t+2}$

$$(t+1)(t+2) + 2t(t+2) = 6t(t+1)$$

$$t^2 + 3t + 2 + 2t^2 + 4t = 6t^2 + 6t$$

$$3t^2 - t - 2 = 0$$

$$(3t+2)(t-1) = 0$$

Suy ra $t = \frac{-3}{2}$ (loại); $t = 1$ (t/m)

Với $t = 1$ thì $x^2 - 2x + 2 = 1$ hay $(x-1)^2 = 0$ suy ra $x = 1$ (t/m)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 1$.

DẠNG 4: MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ (GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH)

PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN

Câu 1. [NB] Chu vi một mảnh vườn hình chữ nhật là 30 m. Biết chiều dài hơn chiều rộng 5 m. Tính diện tích hình chữ nhật.

A. 100 m².

B. 70 m².

C. 50 m².

D. 55 m².

Lời giải

Chọn C

Gọi chiều rộng của mảnh vườn là x (m), $x > 0$, chiều dài của mảnh vườn là $x + 5$ (m).

Theo bài chu vi mảnh vườn là 30 m nên

$$[x + (x + 5)] \cdot 2 = 30 \text{ suy ra } x = 5 \text{ (TM)}$$

Vậy chiều rộng của mảnh vườn là 5 m, chiều dài mảnh vườn là 10 m.

Do đó diện tích mảnh vườn là 50 m².

Câu 2. [NB] Một ca nô xuôi dòng từ A đến B hết 80 phút và ngược dòng hết 2 giờ. Biết vận tốc dòng nước là 3 km/h. Tính vận tốc riêng của ca nô.

A. 16 km/h.

B. 18 km/h.

C. 20 km/h.

D. 15 km/h.

Lời giải

Chọn D

Đổi 80 phút $= \frac{4}{3}$ giờ. Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h, $x > 0$).

Vận tốc ca nô xuôi dòng là $x + 3$ (km/h).

Vận tốc ca nô ngược dòng là $x - 3$ (km/h). Theo bài ta có phương trình

$$\frac{4}{3}(x+3) = 2(x-3) \Leftrightarrow x = 15 \text{ (TM)}$$

Vận tốc riêng của ca nô là 15 km/h.

Câu 3. [NB] Năm nay tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi Phương. Phương tính rằng 13 năm nữa thì tuổi mẹ gấp 2 lần tuổi Phương. Hỏi năm nay Phương bao nhiêu tuổi?

- A.** 13 tuổi. **B.** 14 tuổi. **C.** 15 tuổi. **D.** 16 tuổi.

Lời giải

Chọn A

Giả sử năm nay Phương x tuổi ($x > 0$), mẹ Phương $3x$ tuổi.

Theo đề bài, 13 năm nữa tuổi mẹ Phương gấp 2 lần tuổi Phương nên ta có phương trình $3x + 13 = (x + 13) \cdot 2 \Leftrightarrow x = 13$ (TM).

Vậy năm nay Phương 13 tuổi.

Câu 4. [NB] Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc 25 km/h. Lúc về, người đó đi với vận tốc 30 km/h nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính quãng đường AB.

- A.** 40 km. **B.** 70 km. **C.** 50 km. **D.** 60 km.

Lời giải

Chọn C

Gọi thời gian đi từ A đến B là x (giờ, $x > 0$), suy ra thời gian về là $x - \frac{1}{3}$.

$$25x = 30 \left(x - \frac{1}{3} \right) \Leftrightarrow x = 2 \text{ (TM)}$$

Theo đề bài, ta có phương trình:

Vậy thời gian đi từ A đến B là 2 giờ. Khi đó, quãng đường AB dài $25 \cdot 2 = 50$ km.

Câu 5. [TH] Hai trường A và B của một thị trấn có 210 học sinh thi đỗ hết lớp 9, đạt tỉ lệ trúng tuyển 84%. Tính riêng thì trường A đỗ 80%, trường B đỗ 90%. Tính xem trường A có bao nhiêu học sinh lớp 9 dự thi?

- A.** 150. **B.** 100. **C.** 250. **D.** 200.

Lời giải

Chọn A

Số học sinh dự thi của cả hai trường A và B là $210 : 84\% = 250$ (học sinh)

Gọi số học sinh dự thi của trường A là x (học sinh), $x \in \mathbb{N}$, $x < 250$.

Số học sinh dự thi của trường B là $250 - x$ (học sinh).

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$80\%x + 90\%(250 - x) = 210$$

$$0,1x = 15$$

$$x = 150 \text{ (TM)}$$

Vậy số học sinh dự thi của trường A là 150 (học sinh)

Câu 6. [TH] Sau một buổi sinh hoạt ngoại khóa, nhóm bạn của Thư rủ nhau đi ăn kem ở một quán gần trường. Do quán mới khai trương nên có khuyến mại, bắt đầu từ que kem thứ 5, mỗi ly kem được giảm 1500 đồng so với ban đầu. Nhóm của Thư mua 9 ly kem với số tiền là 154500 đồng. Hỏi giá của mỗi ly kem ban đầu?

- A.** 15000. **B.** 16000. **C.** 17000. **D.** 18000.

Lời giải

Chọn D

Gọi giá của một ly kem ban đầu là: x (đồng) ($x > 0$).

Giá một ly kem (từ ly thứ 5) sau khi được giảm giá đồng 1500 là: $x - 1500$ (đồng).

Với số tiền 154500 đồng nên ta có phương trình:

$$4x + 5(x - 1500) = 154500$$

$$4x + 5x - 7500 = 154500$$

$$9x = 162000$$

$$x = 18000(tm)$$

Vậy giá của một ly kem ban đầu là 18000 đồng.

Câu 7. [TH] Lớp 9A có ^{45} học sinh dự định tổ chức một chuyến đi chơi nhân dịp tổng kết học kì I (chi phí cho chuyến đi du lịch chỉ đều cho mỗi học sinh). Sau khi đã hợp đồng xong với công ty du lịch, vào giờ chót có ^{5} học sinh bận việc đột xuất không đi được nên họ không đóng tiền. Cả nhóm thống nhất mỗi bạn còn lại sẽ đóng thêm 25000 đồng so với dự kiến ban đầu để bù lại cho ^{5} bạn không tham gia. Hỏi tổng chi phí chuyến đi là bao nhiêu?

- A. 8 triệu đồng. B. 9 triệu đồng. C. 18 triệu đồng. D. ^{4,5} triệu đồng.

Lời giải

Chọn B

Gọi số tiền dự định mỗi học sinh phải đóng là x (đồng), $(x \in \mathbb{Q}^+)$.

Tổng chi phí chuyến đi là ^{45}x (đồng).

Có ^{5} học sinh bận việc đột xuất không đi được nên thực tế số tiền dự định mỗi học sinh phải đóng là $x + 25000$ (đồng)

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$40(x + 25000) = 45x$$

$$40x + 1000000 = 45x$$

$$x = 200000 (TM)$$

Vậy tổng chi phí chuyến đi là $200000.45 = 90000000$ (đồng)

Câu 8. [TH] Một trường THPT nhận được ^{650} hồ sơ đăng kí dự tuyển sinh vào lớp 10 với hai hình thức đăng kí trực tuyến và đăng kí trực tiếp tại nhà trường. Số hồ sơ đăng kí trực tuyến nhiều hơn số hồ sơ đăng kí trực tiếp là ^{120} hồ sơ. Hỏi nhà trường đã nhận bao nhiêu hồ sơ đăng kí trực tuyến?

- A. 350. B. 385. C. 400. D. 430.

Lời giải

Chọn B

Gọi số hồ sơ đăng kí trực tuyến là x (hồ sơ) $(x \in \mathbb{Q}^+, x < 650)$.

Vì trường THPT nhận được ^{650} hồ sơ nên số hồ sơ đăng kí trực tiếp là: $^{650} - x$ (hồ sơ).

Mà số hồ sơ đăng kí trực tiếp nhiều hơn số hồ sơ đăng kí trực tiếp là ^{120} hồ sơ nên ta có phương trình:

$$x - (650 - x) = 120$$

$$x - 650 + x = 120$$

$$2x = 120 + 650$$

$$2x = 770$$

$$x = 385 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy số hồ sơ đăng kí trực tuyến là 385 hồ sơ.

Câu 9. [VD] Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc $^{30} \text{km/h}$; lúc trở về người đó đi với vận tốc $^{40} \text{km/h}$ nên thời gian lúc về ít hơn thời gian lúc đi 30 phút. Tính quãng đường AB.

- A. 50 km. B. 60 km. C. 70 km. D. 80 km.

Lời giải

Chọn B

Gọi độ dài quãng đường AB là x (km) (điều kiện $x > 0$)

Thời gian xe máy đi từ A đến B là $\frac{x}{30}$ (giờ)

Thời gian xe máy đi từ A đến B là $\frac{x}{40}$ (giờ)

Vì thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ nên ta có phương trình

$$\frac{x}{30} - \frac{x}{40} = \frac{1}{2}$$

$$x \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{40} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{120} = \frac{1}{2}$$

$$x = 60 (km)$$

Vậy độ dài quãng đường AB dài 60km

Câu 10. [VD] Căn cứ diễn biến mực nước hồ Dầu Tiếng và tình hình khí tượng thủy văn trên lưu vực, để chủ động phòng chống lũ cho công trình và khu vực hạ du, Công ty khai thác thủy lợi hồ Dầu Tiếng dự định xả một lượng nước ở hồ với lưu lượng 15 triệu m^3 trong một ngày. Do tình hình thời tiết có chiều hướng xấu Công ty đã quyết định điều chỉnh lưu lượng xả lên 20 triệu m^3 mỗi ngày nên đã hoàn thành công việc sớm hơn thời gian dự kiến 2 ngày. Hỏi Công ty đã xả bao nhiêu m^3 nước?

A. 120 triệu m^3 .

B. 150 triệu m^3 .

C. 170 triệu m^3 .

D. 180 triệu m^3 .

Lời giải

Chọn A

Gọi x (triệu m^3) là lượng nước công ty đã xả ra.

Điều kiện: $x > 20$

Thời gian xả nước theo dự định $\frac{x}{15}$ (ngày)

Thời gian xả nước theo tình hình thực tế $\frac{x}{20}$ (ngày)

Do công ty điều chỉnh lưu lượng xả mỗi ngày nên đã hoàn thành công việc sớm hơn dự kiến 2 ngày, ta có phương trình

$$\frac{x}{15} - \frac{x}{20} = 2$$

$$x = 120 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy lượng nước công ty đã xả ra là 120 triệu m^3

Câu 11. [VD] Một số tự nhiên có hai chữ số. Tổng các chữ số của nó bằng 16 . Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì được một số lớn hơn số đã cho là 18 . Tìm số đã cho

A. 36.

B. 63.

C. 79.

D. 97.

Lời giải

Chọn C

Gọi chữ số hàng chục của số phải tìm là x .

Điều kiện: $x > 20$

Chữ số hàng đơn vị là $16 - x$.

Số phải tìm có dạng $\overline{x(16-x)}$.

Sau khi đổi chỗ chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị cho nhau ta được số mới là $\overline{(16-x)x}$. Theo đề bài số mới lớn hơn số đã cho là 18 đơn vị, nên ta có phương trình:

$$\overline{x(16-x)} + 18 = \overline{(16-x)x}$$

$$10x + (16-x) + 18 = 10(16-x) + x$$

$$10x + 16 - x + 18 = 160 - 10x + x$$

$$18x = 126$$

$$x = 7 \text{ (TMĐK)}$$

Chữ số hàng đơn vị là $16 - 7 = 9$

Vậy số cần tìm là 79 .

Câu 12. [VDC] Hai công nhân cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ

nhất làm trong 3 giờ, người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Khi đó công nhân thứ nhất và thứ hai làm một mình xong công việc lần lượt là:

A. 24 giờ, 48 giờ. **B.** 48 giờ, 24 giờ. **C.** 28 giờ, 21 giờ. **D.** 21 giờ, 28 giờ.

Lời giải

Chọn A

Gọi thời gian người thứ nhất làm riêng xong công việc là x (h). Điều kiện: $0 < x < 60$

Trong 1 giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Trong 1 giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{16} - \frac{1}{x}$ (công việc)

Theo đề bài ta có phương trình:

$$\frac{3}{x} + 6\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4}$$

$$16 \cdot 3 + 6x - 16 \cdot 6 = 4x$$

$$x = 24 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy người thứ nhất làm riêng xong công việc trong 24 giờ, người thứ hai làm riêng xong công việc trong 48 giờ.

2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Hiện nay bố hơn con 30 tuổi. Sáu năm sau tuổi bố gấp $2,5$ lần tuổi con. Gọi x là tuổi của con (x nguyên dương). Biết hiện nay bố 44 tuổi.

a) Phương trình biểu diễn tuổi của bố hiện nay là $x + 30 = 44$.

b) Hiện nay tuổi của con là 12 tuổi.

c) Phương trình biểu diễn theo ẩn x đủ kiện sau 6 năm tuổi bố gấp $2,5$ lần tuổi con là $2,5 \cdot (x + 6) = 44$.

d) Sáu năm sau tuổi con là 20 tuổi.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) S

d) Đ

Gọi x là tuổi của con (x nguyên dương)

Hiện nay bố 44 tuổi và bố hơn con 30 tuổi nên hiện nay số tuổi của con là: $44 - 30 = 14$ tuổi.

Sau 6 năm tuổi con là: $x + 6$; tuổi bố là: $44 + 6 = 50$ và gấp $2,5$ lần tuổi con nên ta có phương trình

$$2,5 \cdot (x + 6) = 50$$

Sáu năm sau tuổi con là 20 tuổi

Do đó a, d đúng, b, c sai.

Câu 2. Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kỹ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II đã vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Gọi x là số sản phẩm của tổ I theo kế hoạch (x nguyên dương, $x < 600$).

a) Số sản phẩm của tổ II theo kế hoạch là $600 - x$.

b) Số sản phẩm tăng thêm của tổ I là $\frac{118}{100}x$, số sản phẩm tăng thêm của tổ II là $\frac{121}{100}(600 - x)$.

c) Phương trình bài toán là: $\frac{18}{100}x + \frac{21}{100}(600 - x) = 120$

d) Số sản phẩm được giao của tổ I theo kế hoạch là 200 sản phẩm, của tổ II là 400 sản phẩm.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) Đ

d) Đ

Gọi x là số sản phẩm của tổ I theo kế hoạch (x nguyên dương, $x < 600$).

Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm nên số sản phẩm của tổ II theo kế hoạch là $600 - x$.

Do áp dụng kỹ thuật mới nên số sản phẩm tăng thêm của tổ I là $\frac{118}{100}x$, số sản phẩm tăng thêm của tổ II là $\frac{21}{100}(600 - x)$.

Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm nên ta có phương trình

$$\frac{18}{100}x + \frac{21}{100}(600 - x) = 120$$

$$18x + 21(600 - x) = 120 \cdot 100$$

$$18x + 12600 - 21x = 12000$$

$$3x = 600$$

$$x = 200 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy số sản phẩm được giao của tổ I theo kế hoạch là 200 sản phẩm, của tổ II là 400 sản phẩm.

Do đó a, c, d đúng, b sai.

Câu 3. Một khách du lịch đi trên ô tô 4 giờ, sau đó đi tiếp bằng tàu hỏa trong 7 giờ được quãng đường dài 640 km. Gọi vận tốc của tàu hỏa là x (km/h, $x > 5$), biết rằng mỗi giờ tàu hỏa đi nhanh hơn ô tô 5 km.

a) Vận tốc của ô tô là $x + 5$ (km/h).

b) Phương trình bài toán là: $7x + 4(x + 5) = 640$.

c) Vận tốc của tàu hỏa là 60 km/h.

d) Vận tốc của ô tô là 55 km/h.

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) Đ

Gọi vận tốc của tàu hỏa là x (km/h, $x > 5$).

Vì mỗi giờ tàu hỏa đi nhanh hơn ô tô 5 km nên vận tốc của ô tô là $x + 5$ (km/h).

Một khách du lịch đi trên ô tô 4 giờ được $4(x + 5)$ (km), đi tiếp bằng tàu hỏa trong 7 giờ được $7x$ (km)

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$7x + 4(x + 5) = 640$$

$$7x + 4x + 20 = 640$$

$$11x = 620$$

$$x = 60 \text{ (TMĐK)}$$

Vận tốc của ô tô là 55 km/h , vận tốc của tàu hỏa là 60 km/h .

Do đó c, d đúng; a, b sai.

Câu 4. Một canô ngược dòng từ bến A đến bến B với vận tốc 30 km/h , sau đó lại xuôi từ bến B trở về bến A . Thời gian canô ngược dòng từ A đến B nhiều hơn thời gian canô xuôi dòng từ B trở về A là 2 giờ 30 phút. Biết vận tốc dòng nước là 4 km/h , vận tốc riêng của canô lúc xuôi dòng và lúc ngược dòng bằng nhau. Gọi vận tốc thực của ca nô là $x \text{ (km/h)}$, $x > 4$.

a) Phương trình biểu diễn canô ngược dòng từ bến A đến bến B với vận tốc 30 km/h là $x - 4 = 30$.

b) Vận tốc của canô lúc xuôi dòng là 34 km/h .

c) Gọi thời gian ca nô đi xuôi dòng là y (giờ); $y > 0$. Khi đó phương trình bài toán là $38y = 30(y + 2,5)$.

d) Khoảng cách giữa hai bến A và B là 356 km .

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) S

Đổi: 2 giờ 30 phút = 2,5 giờ

Gọi vận tốc thực của ca nô là $x \text{ (km/h)}$, $x > 4$.

Vì canô ngược dòng từ bến A đến bến B với vận tốc 30 km/h nên ta có phương trình là:

$$x - 4 = 30$$

$$x = 34 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy vận tốc thực của ca nô là 34 km/h

Khi đó, vận tốc của canô lúc xuôi dòng là 38 km/h

Một khách du lịch đi trên ô tô 4 giờ được $4(x - 5) \text{ km}$, đi tiếp bằng tàu hỏa trong 7 giờ được $7x \text{ km}$

Gọi thời gian ca nô đi xuôi dòng là y (giờ); $y > 0$.

Khi đó phương trình bài toán là:

$$38y = 30(y + 2,5)$$

$$38y = 30y + 75$$

$$8y = 75$$

$$y = \frac{75}{8} \text{ (TMĐK)}$$

Khoảng cách giữa hai bến A và B là $38 \cdot \frac{75}{8} = 356,25 \text{ (km)}$

Do đó c đúng; a, b, d sai.

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. [NB] Một xưởng dệt theo kế hoạch mỗi ngày phải dệt 30 áo. Trong thực tế mỗi ngày xưởng dệt được 40 áo nên đã hoàn thành trước thời hạn 3 ngày, ngoài ra còn làm thêm được 20 chiếc áo nữa. Nếu gọi tổng số áo xưởng cần làm theo kế hoạch là x (cái, $x > 40, x \in \mathbb{N}$) thì phương trình của bài toán là:

Lời giải

Đáp án: $\frac{x}{30} - \frac{x + 20}{40} = 3$

Gọi tổng số áo xưởng cần làm theo kế hoạch là x (cái, $x > 40, x \in \mathbb{N}$)

Thực tế tổng số áo xường sản xuất là $x + 20$ (cái).

Thời gian dự định là: $\frac{x}{30}$ (ngày)

Thời gian thực tế là $\frac{x + 20}{40}$ (ngày).

Vì thực tế đã hoàn thành trước thời hạn 3 ngày nên ta có phương trình: $\frac{x}{30} - \frac{x + 20}{40} = 3$

Câu 2. [NB] Một tổ sản xuất theo kế hoạch mỗi ngày phải sản xuất 50 sản phẩm. Khi thực hiện tổ đã sản xuất được 57 sản phẩm một ngày. Do đó hoàn thành trước kế hoạch 1 ngày và còn vượt mức 13 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch tổ sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Nếu gọi tổng sản phẩm tổ cần làm theo kế hoạch là x (sản phẩm), ($x > 0, x \in \mathbb{N}$) thì phương trình của bài toán là:

Lời giải

Đáp án: $\frac{x}{50} - \frac{x + 13}{57} = 1$

Gọi tổng sản phẩm tổ cần làm theo kế hoạch là x (sản phẩm), ($x > 0, x \in \mathbb{N}$).

Thời gian dự kiến là $\frac{x}{50}$ (ngày).

Thời gian thực tế là $\frac{x + 13}{57}$ (ngày).

Do đó hoàn thành trước kế hoạch 1 ngày nên ta có phương trình: $\frac{x}{50} - \frac{x + 13}{57} = 1$

Câu 3. [TH] Hai ca nô cùng khởi hành từ A đến B cách nhau 85 km và đi ngược chiều nhau. Sau 1 giờ 40 phút thì gặp nhau. Tính vận tốc thật của mỗi ca nô, biết rằng vận tốc ca nô đi xuôi

dòng lớn hơn vận tốc ca nô đi ngược dòng là 9 km/h và vận tốc dòng nước là 3 km/h.

Gọi vận tốc thật của ca nô đi ngược dòng là x (km/h), vận tốc ca nô đi xuôi dòng là $x + 9$ (km/h); $x > 3$. Phương trình của bài toán là

Lời giải

Đáp án: $\frac{5}{3}(x - 3) + \frac{5}{3}(x + 12) = 85$

Đổi: 1 giờ 40 phút $= \frac{5}{3}$ giờ

Gọi vận tốc thật của ca nô đi ngược dòng là x (km/h), vận tốc ca nô đi xuôi dòng là $x + 9$ (km/h); $x > 3$

Quãng đường ca nô đi ngược dòng là $\frac{5}{3}(x - 3)$ (km)

Quãng đường ca nô đi xuôi dòng là $\frac{5}{3}(x + 9 + 3)$ (km)

Vì hai ca nô cùng khởi hành từ A đến B cách nhau 85 km và đi ngược chiều nhau nên phương

trình của bài toán là: $\frac{5}{3}(x - 3) + \frac{5}{3}(x + 12) = 85$

Câu 4. [TH] Một ô tô đi quãng đường AB với vận tốc 50 km/h , rồi đi tiếp quãng đường BC với vận tốc 45 km/h . Biết quãng đường dài 165 km và thời gian ô tô đi trên quãng đường AB ít hơn thời gian đi trên quãng đường BC là 30 phút. Gọi thời gian ô tô đi trên đoạn đường AB là x (giờ, $x > 0$). Phương trình của bài toán là

Lời giải

$$50x + 45\left(x + \frac{1}{2}\right) = 165$$

Đáp án:

Đổi: $30 \text{ phút} = \frac{1}{2} \text{ giờ}$

Gọi thời gian ô tô đi trên đoạn đường AB là x (giờ, $x > 0$).

Thời gian ô tô đi trên đoạn đường BC là $x + \frac{1}{2}$ (giờ).

Khi đó, quãng đường AB dài $50x \text{ (km)}$, quãng đường BC dài $45\left(x + \frac{1}{2}\right) \text{ (km)}$.

$$50x + 45\left(x + \frac{1}{2}\right) = 165$$

Vì cả quãng đường dài 165 km nên ta có phương trình:

Câu 5. [VD] Năm ngoái tổng số dân của hai tỉnh A và B là 4 triệu người. Dân số tỉnh A năm nay tăng $1,2\%$, còn tỉnh B tăng $1,1\%$. Tổng số dân của cả hai tỉnh năm nay là 4045000 người. Gọi x là số số dân của tỉnh A trong năm ngoái (x nguyên dương). Phương trình của bài toán là

Lời giải:

$$\frac{1,2}{100}x + \frac{1,1}{100}(4000000 - x) = 45000$$

Đáp án:

Gọi x là số dân của tỉnh A trong năm ngoái (x nguyên dương).

Số dân của tỉnh B trong năm ngoái là $4000000 - x$

Dân số tỉnh A năm nay tăng $\frac{1,2}{100}x$, dân số tỉnh B năm nay tăng là $\frac{1,1}{100}(4000000 - x)$

Do dân số hai tỉnh tăng 45000 người nên ta có phương trình $\frac{1,2}{100}x + \frac{1,1}{100}(4000000 - x) = 45000$

Câu 6. [VDC] Hai trường A, B có 250 học sinh lớp 9 dự thi vào lớp 10, kết quả có 210 học sinh đã trúng tuyển. Tính riêng tỉ lệ đỗ thi trường A đạt 80% , trường B đạt 90% . Gọi x là số học sinh dự thi vào lớp 10 của trường A (x nguyên dương). Phương trình của bài toán là

Lời giải:

$$\frac{80}{100}x + \frac{90}{100}(250 - x) = 210$$

Đáp án:

Gọi x là số học sinh dự thi vào lớp 10 của trường A (x nguyên dương)

Số học sinh dự thi vào lớp 10 của trường B là $250 - x$

Tỉ lệ đỗ của trường A là $\frac{80}{100}x$, tỉ lệ đỗ của trường B là $\frac{90}{100}(250 - x)$

Do cả hai trường có 210 học sinh trúng tuyển nên ta có phương trình $\frac{80}{100}x + \frac{90}{100}(250 - x) = 210$

PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1 [NB]: Bạn Hoàng làm việc tại nhà hàng nọ, bạn ấy được trả tám trăm nghìn đồng cho 40 giờ làm việc tại quán trong một tuần. Mỗi giờ làm thêm trong tuần bạn ấy được trả bằng 150% số tiền mà bạn ấy được trả trong 40 giờ đầu. Nếu trong tuần đó bạn Hoàng được trả chín trăm hai mươi nghìn đồng thì bạn ấy đã phải làm thêm bao nhiêu giờ?

Lời giải:

Gọi số giờ bạn Hoàng phải làm thêm trong tuần là: x (giờ) ($x > 0$).

Số tiền mỗi giờ làm việc trong 40 giờ đầu là: $800000 : 40 = 20000$ (đồng/giờ).

Số tiền bạn nhận được khi tăng ca là: $20000 \cdot 150\% = 30000$ (đồng/giờ).

Theo bài ra ta có phương trình: $800000 + 30000x = 920000$ suy ra $x = 4$ (thỏa mãn)

Vậy bạn Hoàng đã làm thêm 4 giờ.

Bài 2 [TH]: Một vật là hợp kim của đồng và kẽm có khối lượng 505 g và thể tích là 64 cm^3 . Tính xem trong hợp kim đó có bao nhiêu gam đồng và bao nhiêu gam kẽm? Biết rằng 178 gam đồng có thể tích là 20 cm^3 và bằng nửa thể tích của 280 gam kẽm.

Lời giải:

Do 178 gam đồng có thể tích là 20 cm^3 nên :

1 cm^3 đồng có khối lượng là $178 : 20 = 8,9 \text{ g}$

Do 280 gam kẽm có thể tích là 40 cm^3 nên:

1 cm^3 kẽm có khối lượng là $280 : 40 = 7 \text{ (g)}$

Gọi khối lượng đồng có trong vật là: x (g, $0 < x < 505$)

Khối lượng kẽm có trong vật là: $505 - x \text{ (g)}$

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{x}{8,9} + \frac{505 - x}{7} = 64$$

$$7x + 4494,5 - 8,9x = 3987,2$$

$$1,9x = 507,3$$

$$x = 267 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy khối lượng đồng có trong vật là 267 g

Khối lượng kẽm có trong vật là $505 - 267 = 238 \text{ g}$.

Bài 3 [TH]: Có hai loại dung dịch muối I và II. Người ta hòa 200 gam dung dịch muối I với 300 gam dung dịch muối II thì được một dung dịch có nồng độ 33%. Tính nồng độ muối trong mỗi dung dịch, biết rằng nồng độ muối trong dung dịch I lớn hơn nồng độ muối trong dung dịch II là 20%.

Lời giải:

Gọi nồng độ muối trong dung dịch thứ nhất là x (% , $x > 0$)

Nồng độ muối trong dung dịch thứ hai là $x - 20$ (%)

Theo bài ra ta có phương trình:

$$200 \frac{x}{100} + 300 \frac{x - 20}{100} = 500 \frac{33}{100}$$

$$x = 45 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy nồng độ muối trong dung dịch 1 là 45%.

Nồng độ muối trong dung dịch 2 là 25%.

Bài 4 [VD]: Một trường THCS A tổ chức cho giáo viên và học sinh đi thăm quan tại một khu du lịch sinh thái vào cuối năm học. Giá vé vào cổng của mỗi giáo viên và học sinh lần lượt là 70000 đồng và 50000 đồng. Nhằm thu hút du khách du lịch vào dịp hè, khu du lịch này đã giảm 10%

cho mỗi vé vào cổng. Biết đoàn thăm quan có 150 người và tổng số tiền mua vé là 7290000 đồng. Hỏi trường THCS A đó có bao nhiêu giáo viên và bao nhiêu học sinh đi du lịch?

Lời giải:

Gọi số giáo viên của trường THCS A là: x (người) ($x \in \mathbb{N}^*, x < 150$)

Số học sinh của trường THCS A là: $150 - x$ (người).

Số tiền phải trả cho số vé của giáo viên là: $70000x$ (đồng).

Số tiền phải trả cho số vé của học sinh là: $50000(150 - x)$ (đồng).

Tổng số tiền phải trả là: $70000x + 50000(150 - x)$ (đồng).

Vì khu du lịch giảm 10% cho mỗi vé vào cổng và đoàn thăm quan phải trả 7290000 đồng nên ta có phương trình:

$$[70000x + 50000(150 - x)] \cdot 90\% = 7290000$$

$$[7x + 5 \cdot (150 - x)] \cdot 90\% = 729$$

$$7x + 5 \cdot (150 - x) = 810$$

$$2x = 60$$

$$x = 30 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy trường THCS A có 30 giáo viên và 120 học sinh.

Bài 5 [VD]: Hai anh An và Bình góp vốn cùng kinh doanh. Anh An góp 13 triệu đồng, anh Bình góp 15 triệu đồng. Sau một thời gian kinh doanh lãi được 7 triệu đồng. Tính số tiền lãi mỗi anh được hưởng biết lãi chia theo tỉ lệ góp vốn?

Lời giải:

Gọi số tiền lãi anh An được hưởng là x (triệu đồng) ($0 < x < 7$)

Số tiền lãi anh Bình được hưởng là $7 - x$ (triệu đồng)

Vì số tiền lãi mỗi người được hưởng tỉ lệ với vốn góp nên ta có phương trình

$$\frac{x}{7 - x} = \frac{13}{15}$$

$$15x - 13(7 - x) = 0$$

$$15x - 91 + 13x = 0$$

$$28x = 91$$

$$x = 3,25 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy tiền lãi anh An và anh Bình được hưởng lần lượt là 3,25 triệu đồng và 3,75 triệu đồng.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. [NB] Hai trường A và B có 420 học sinh thi đỗ vào lớp 10, đạt tỉ lệ là 84%. Riêng trường A tỉ lệ đỗ là 80%. Riêng trường B tỉ lệ đỗ là 90%. Tính số học sinh dự thi của mỗi trường.

Hướng dẫn

Số học sinh dự thi của hai trường A và B là: $420 : 84\% = 500$ (học sinh)

Gọi số học sinh dự thi của trường A là: x (học sinh) (x nguyên dương)

Số học sinh dự thi vào lớp 10 của trường B là $500 - x$ (học sinh)

Tỉ lệ đỗ của trường A là $\frac{80}{100}x$, tỉ lệ đỗ của trường B là $\frac{90}{100}(500 - x)$

Do cả hai trường có 420 học sinh trúng tuyển nên ta có phương trình:

$$\frac{80}{100}x + \frac{90}{100}(500 - x) = 420$$

$$80x + 45000 - 90x = 42000$$

$$10x = 3000$$

$$x = 300 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy số học sinh dự thi của trường A và B lần lượt là 300 HS và $500 - 300 = 200$ HS.

Bài 2. [TH] Hai xí nghiệp theo kế hoạch phải làm 360 dụng cụ. Nhờ sắp xếp hợp lý nên xí nghiệp I vượt mức 12% kế hoạch, xí nghiệp II vượt mức 10% kế hoạch. Do đó cả hai xí nghiệp vượt mức 40 dụng cụ. Tính số dụng cụ mỗi xí nghiệp phải làm theo kế hoạch.

Hướng dẫn

Gọi số dụng cụ của xí nghiệp I phải làm theo kế hoạch là x (dụng cụ) (x nguyên dương)

Số dụng cụ của xí nghiệp I phải làm theo kế hoạch là $360 - x$ (dụng cụ)

Trên thực tế, số dụng cụ của xí nghiệp I đã làm được là $112\% \cdot x$ (dụng cụ)

số dụng cụ của xí nghiệp II đã làm được là $110\% \cdot (360 - x)$ (dụng cụ)

Do đó cả hai xí nghiệp vượt mức 40 dụng cụ nên ta có phương trình là

$$112\% \cdot x + 110\% \cdot (360 - x) = 360 + 40$$

$$1,12x + 396 - 1,1x = 400$$

$$0,02x = 4$$

$$x = 200 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy số dụng cụ xí nghiệp I và II phải làm theo kế hoạch lần lượt là 200 và $360 - 200 = 160$ dụng cụ.

Bài 3. [VD] Năm ngoái tổng số dân của hai tỉnh A và B là 5 triệu người. Dân số tỉnh A năm nay tăng $1,1\%$ còn tỉnh B tăng $1,2\%$. Tổng số dân của cả hai tỉnh năm nay là 5056000 người. Tính số dân của mỗi tỉnh trong năm ngoái?

Hướng dẫn

Gọi số dân của tỉnh A trong năm ngoái là: x (triệu người) (x nguyên dương)

Số dân của tỉnh B trong năm ngoái là: $5 - x$ (triệu người)

Dân số tỉnh A năm nay là $101,1\% \cdot x$ (triệu người)

Dân số tỉnh B năm nay là $101,2\% \cdot (5 - x)$ (triệu người)

Vì tổng số dân của cả hai tỉnh năm nay là 5056000 người (tức là $5,056$ triệu người) nên ta có phương trình là

$$101,1\% \cdot x + 101,2\% \cdot (5 - x) = 5,056$$

$$1,011x + 5,06 - 1,012x = 5,056$$

$$0,001x = 0,004$$

$$x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy số dân của tỉnh A và B trong năm ngoái lần lượt là 4 triệu người và $5 - 4 = 1$ triệu người.

Bài 4. [VD] Lớp 9A hơn lớp 9B 4 học sinh. Trong đợt quyên góp sách ủng hộ bạn nghèo, bình quân mỗi học sinh 9A nộp 2 quyển, mỗi học sinh 9B nộp 3 quyển. Vì vậy cả hai lớp ủng hộ được 198 quyển sách. Tính số học sinh mỗi lớp.

Hướng dẫn

Gọi số học sinh của lớp 9A là: x (học sinh) (x nguyên dương, $x > 4$)

Số học sinh của lớp 9B là: $x - 4$ (học sinh)

Số quyển sách của lớp 9A quyên góp là $2x$ (quyển sách), của lớp 9B quyên góp là $3(x - 4)$ (quyển sách).

Vì vậy cả hai lớp ủng hộ được 198 quyển sách nên ta có phương trình là:

$$2x + 3(x - 4) = 198$$

$$5x = 210$$

$$x = 42 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy số học sinh của lớp 9A và 9B lần lượt là 42 học sinh, 38 học sinh.

Bài 5. [VDC] Một vật có khối lượng 248g và thể tích 30cm^3 là hợp kim của đồng và kẽm. Tính xem trong đó có bao nhiêu gam đồng và bao nhiêu gam kẽm biết rằng cứ 89g đồng có thể tích là 10cm^3 và 7g kẽm có thể tích là 1cm^3 .

Hướng dẫn

Do 89g đồng có thể tích là 10cm^3 nên :

1cm^3 đồng có khối lượng là $89 : 10 = 8,9\text{g}$

1cm^3 kẽm có khối lượng là 7g

Gọi khối lượng đồng có trong vật là: x (g , $0 < x < 505$)

Khối lượng kẽm có trong vật là: $248 - x$ (g)

Theo bài ra ta có phương trình :

$$\frac{x}{8,9} + \frac{248 - x}{7} = 30$$

$$7x + 2207,2 - 8,9x = 1869$$

$$1,9x = 338,2$$

$$x = 178 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy khối lượng đồng có trong vật là 178g .

Khối lượng kẽm có trong vật là $248 - 178 = 70\text{g}$.

CHUYÊN ĐỀ: BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÍNH CHẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa.

Giả sử A và B là hai biểu thức bằng số hoặc bằng chữ. Khi đó

+ $A > B$; $A < B$; $A \geq B$; $A \leq B$ được gọi là các bất đẳng thức.

+ Các bất đẳng thức trên được viết lại như sau

$$A - B > 0; A - B < 0; A - B \geq 0; A - B \leq 0$$

+ Một bất đẳng thức bất kì có thể đúng, cũng có thể sai.

Quy ước: Khi nói về một bất đẳng thức mà không nói gì thêm thì ta hiểu đó là một bất đẳng thức đúng.

2. Tính chất cơ bản của bất đẳng thức.

+ Tính chất giao hoán

Với các số thực A và B bất kì, nếu $A \leq B$ (hoặc $A \geq B$; $A > B$; $A < B$) thì có thể viết lại $B \geq A$ (hoặc $B \leq A$; $A < B$; $A > B$).

+ Tính chất bắc cầu

Với các số thực A , B , C bất kì, ta luôn có $A \leq B$, $B \leq C$ suy ra $A \leq C$.

Tương tự: Nếu $A < B$; $B < C$ thì $A < C$.

Nếu $A \geq B$; $B \geq C$ thì $A \geq C$.

Nếu $A > B$; $B > C$ thì $A > C$.

+ Tính chất liên hệ với phép cộng

Với các số thực A , B và M bất kì, ta luôn có $A \leq B$ suy ra $A \pm M \leq B \pm M$.

Với các số thực A , B , C , D bất kì, ta luôn có

$$A \leq B; C \leq D \text{ suy ra } A + C \leq B + D.$$

$$A \leq B; C \leq D \text{ suy ra } A - D \leq B - C.$$

+ Tính chất liên hệ với phép nhân

Với các số thực A, B bất kì, ta luôn có

$$A \leq B; M > 0 \text{ suy ra } A.M \leq B.M.$$

$$A \leq B; M < 0 \text{ suy ra } A.M \geq B.M.$$

Với các số thực A, B, C, D bất kì, ta luôn có

$$\text{Nếu } 0 < A < B; 0 < C < D \text{ thì } 0 < A.C < B.D.$$

+ Tính chất liên hệ với lũy thừa

Với các số thực A, B bất kì, ta luôn có

$$A \geq B \geq 0 \text{ suy ra } A^n \geq B^n \geq 0, \text{ với } n \text{ là số thực dương.}$$

$$A \geq B \text{ suy ra } A^n \geq B^n, \text{ với } n \text{ là số tự nhiên lẻ.}$$

$$|A| \geq |B| \text{ suy ra } A^n \geq B^n \geq 0, \text{ với } n \text{ là số tự nhiên chẵn.}$$

$$m \geq n > 0; A \geq 1 \text{ suy ra } A^m \geq A^n.$$

$$m \geq n > 0; 0 < A < 1 \text{ suy ra } A^m \leq A^n.$$

+ Tính chất liên hệ với tính nghịch đảo

$$\text{Với các số thực dương } A, B \text{ bất kì, ta luôn có } A \geq B \text{ suy ra } \frac{1}{A} \leq \frac{1}{B}.$$

B. BÀI TẬP

PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1. Bất đẳng thức và so sánh.

1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN

Câu 1. [NB] Trong các cách viết sau, cách viết nào không phải là bất đẳng thức

- A.** $1 < 2$. **B.** $-3 > -1$. **C.** $a = 2$. **D.** $3 < b$.

Lời giải

Chọn C

Vì Hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b$; $a \geq b$; $a \leq b$) là bất đẳng thức.

Câu 2. [NB] Bất đẳng thức $a+1 < 3$ có vế trái là

- A.** $a+1$. **B.** a . **C.** 1 . **D.** 3 .

Lời giải

Chọn A

Hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b$; $a \geq b$; $a \leq b$) là bất đẳng thức. Trong đó, a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.

Câu 3. [NB] Cho bất đẳng thức $2 \geq 3a-1$. Bất đẳng thức nào cùng chiều với bất đẳng thức đã cho

- A.** $4 < 2a$. **B.** $3a-2 \leq 4$. **C.** $2 = 3a-1$. **D.** $a-1 \geq -2$.

Lời giải

Chọn D

- Hai bất đẳng thức $1 < 2$ và $-3 < 4$ được gọi là hai bất đẳng thức cùng chiều.

Câu 4. [NB] Với ba số a, b, c và $a > b$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng

- A.** $a-c > b+c$. **B.** $a+c < b+c$. **C.** $a+c > b+c$. **D.** $a-c < b-c$.

Lời giải

Chọn C

Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng: khi cộng cùng một số vào hai vế của một bất đẳng thức ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Câu 5. [TH] Bất đẳng thức mô tả tình huống buổi sáng nhiệt độ $t(^{\circ}C)$ không thấp hơn $12(^{\circ}C)$

- A.** $t < 12$. **B.** $t = 12$. **C.** $t \leq 12$. **D.** $t \geq 12$.

Lời giải

Chọn D

Không thấp hơn 12 nghĩa là lớn hơn hoặc bằng 12.

Câu 6. [TH] Nếu $a - 3 < b - 3$ thì

- A. $a > b$. B. $-a < -b$. C. $a + 2 < b + 2$. D. $3 - a < 3 - b$.

Lời giải

Chọn C

Vì $a - 3 < b - 3$ nên $a - 3 + 5 < b - 3 + 5$ hay $a + 2 < b + 2$.

Câu 7. [TH] Nếu $-5a + 5 > -5b + 5$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng

- A. $-a < -b$. B. $-a > -b$. C. $2a > 2b$. D. $-3a < -3b$.

Lời giải

Chọn B

Vì $-5a + 5 > -5b + 5$ nên $-5a + 5 - 5 > -5b + 5 - 5$

$$-5a > -5b$$

$$-5a \cdot \frac{1}{5} > -5b \cdot \frac{1}{5} \quad \text{mà } \frac{1}{5} > 0$$

$$-a > -b$$

Câu 8. [TH] Một cửa hàng, buổi sáng bán được a sản phẩm, buổi chiều bán được b sản phẩm, buổi tối bán được c sản phẩm. Biết số sản phẩm bán được buổi chiều nhiều hơn số sản phẩm bán được buổi sáng, số sản phẩm bán được buổi sáng lại nhiều hơn số sản phẩm bán được buổi tối. Khi đó hệ thức thể hiện số sản phẩm bán được buổi chiều và buổi tối là

- A. $a \geq c$. B. $a \leq c$. C. $b < c$. D. $b > c$.

Lời giải

Chọn D

Số sản phẩm bán được buổi chiều nhiều hơn số sản phẩm bán được buổi sáng ta có $b > a$.

Số sản phẩm bán được buổi sáng nhiều hơn số sản phẩm bán được buổi tối ta có $a > c$.

Khi đó số sản phẩm bán được buổi chiều nhiều hơn số sản phẩm bán được buổi tối.

Câu 9. [VD] Cho $x > 1,2$ và $y < 1,2$. So sánh x và y ta được

- A. $x \geq y$. B. $x > y$. C. $x = y$. D. $y > x > 1,2$.

Lời giải

Chọn B

Có $y < 1,2$ nghĩa là $1,2 > y$. Do $x > 1,2$ và $1,2 > y$ nên $x > y$.

Câu 10. [VD] So sánh $\frac{2025}{2024}$ và $\frac{2020}{2021}$ ta được

- A. $\frac{2025}{2024} > \frac{2020}{2021}$. B. $\frac{2025}{2024} < \frac{2020}{2021}$. C. $\frac{2025}{2024} = \frac{2020}{2021}$. D. $\frac{2025}{2024} \leq \frac{2020}{2021}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\frac{2025}{2024} = 1 + \frac{1}{2024}$ và $\frac{2020}{2021} = 1 - \frac{1}{2021} < 1$ nên $\frac{2025}{2024} > \frac{2020}{2021}$.

Câu 11. [VD] Cho $a < b$ khi đó bất đẳng thức đúng là

- A. $2a - 1 < 2b - 3$. B. $-3a + 2 > -3b - 1$. C. $2a + 1 > 2b + 1$. D. $3a - 1 < -3b + 3$.

Lời giải

Chọn B

Có $a < b$ suy ra $-3a > -3b$ (vì $-3 < 0$) mà $2 > -1$ nên $-3a + 2 > -3b - 1$.

Câu 12. [VDC] Cho $a > 7$. Kết quả so sánh $4 - \frac{a+3}{5}$ và 2 là

- A. $4 - \frac{a+3}{5} = 2$. B. $4 - \frac{a+3}{5} > 2$. C. $4 - \frac{a+3}{5} < 2$. D. $4 - \frac{a+3}{5} \leq 2$.
- Lời giải**

Chọn C

Có $a > 7$ nên $a + 3 > 7 + 3$ hay $a + 3 > 10$.

Do đó $(a+3) \cdot \frac{1}{5} > 10 \cdot \frac{1}{5}$ suy ra $-\frac{a+3}{5} < -2$

$$-\frac{a+3}{5} + 4 < -2 + 4$$

$$4 - \frac{a+3}{5} < 2$$

2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai

Câu 1.

- a) Hai bất đẳng thức $2a - 1 < 2$ và $3a - 3 > 4$ là hai bất đẳng thức ngược chiều.
 b) Nếu có $a \leq b$ thì $-3a \geq -3b$.
 c) Nếu $a \geq b$ thì $-2 - a \geq -2 - b$.
 d) Nếu $2a - 3 < 2b - 4$ thì $a > b$.

Lời giải

- a) **Đ** b) **Đ** c) **S** d) **S**

- Theo khái niệm bất đẳng thức cùng chiều, ngược chiều thì a) Đúng.

- Vì khi nhân cả hai vế với cùng một số âm nên bất đẳng thức mới ngược chiều. Do đó b)

Đúng; c) Sai.

- Vì $2a - 3 < 2b - 4$ nên $2a + 1 < 2b$

$$2a < 2b$$

$$a < b$$

Do đó d) Sai.

Câu 2. Cho bất đẳng thức $a \geq b$ thì

- a) Bất đẳng thức cùng chiều là $2a - 1 \geq 3 - 2b$.
 b) Vế trái bất đẳng thức là b .
 c) Ta sẽ có $2a + 3 \leq 2b + 3$.
 d) Ta có $-5a - 5 \leq -5b + 5$.

Lời giải

- a) **Đ** b) **S** c) **S** d) **Đ**

- Do cùng chứa dấu $\geq$ nên a) đúng.

- Do biểu thức bên trái dấu bất đẳng thức là a nên b) sai.

- Do nhân cả hai vế với cùng số dương nên bất đẳng thức không đổi chiều. Do đó c) sai.

- Do nhân cả hai vế với cùng số âm nên bất đẳng thức đổi chiều, mặt khác số bé hơn lại trừ bớt còn số lớn hơn lại được cộng thêm nên d) đúng.

Câu 3. Chiều cao của các bạn nam trong lớp 9A từ $1,5m$ đến $1,8m$.

- a) Bạn An là học sinh nam lớp 9A và có chiều cao $h > 1,8m$.
 b) Bạn My là bạn nữ lớp 9A và có chiều cao $h > 1,5m$.
 c) Chiều cao h của các bạn nam trong lớp 9A được biểu diễn là $1,5 \leq h < 1,8$.

d) Chiều cao h của các bạn nam trong lớp 9A được biểu diễn là $1,5 \leq h \leq 1,8$.

Lời giải

a) S

b) S

c) S

d) Đ

- Do các bạn nam trong lớp 9A có chiều cao từ $1,5m$ đến $1,8m$ nên a) Sai.

- Do thông tin cho về chiều cao các bạn nam nên chiều cao các bạn nữ chưa thể kết luận được. Do đó b) Sai.

- Do các bạn nam trong lớp 9A có chiều cao từ $1,5m$ đến $1,8m$ nghĩa là chiều cao lớn hơn hoặc bằng $1,5m$ đến nhỏ hơn hoặc bằng $1,8m$. Do đó c) sai; d) Đúng.

Câu 4. Xe ô tô A đi nhanh hơn xe ô tô B, xe B chở tải trọng lớn hơn xe C. Gọi a và b lần lượt là vận tốc của xe A và xe B, b và c là tải trọng trên xe B và xe C. Khi đó:

a) So sánh vận tốc của hai xe A và xe B là $a > b$.

b) Vì $a > b$ và $b > c$ nên $a > c$.

c) So sánh tải trọng của xe B và xe C là $b < c$.

d) So sánh vận tốc của xe A và xe C là $a < c$.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) S

d) S

- Do xe ô tô A đi nhanh hơn xe ô tô B nên a) Đúng.

- Do một a và b lần lượt là vận tốc của xe A và xe B, b và c là tải trọng trên xe B và xe C nên b) Sai.

- Do xe B chở tải trọng lớn hơn xe C nên c) Sai.

- Do trong bài không đề cập đến vận tốc cụ thể của xe A và xe B là bao nhiêu nên d) Sai.

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. [NB] Cho bất đẳng thức $-3a + 7 < 3b - 12$. Khi đó vế trái của bất đẳng thức là

Lời giải

Đáp án: $-3a + 7$.

Vế trái nằm bên trái dấu $<$.

Câu 2. [NB] Cho $a > 0$ và $c > 0$. Hãy điền dấu thích hợp vào chỗ (...) của hệ thức $a.c \dots b.c$.

Lời giải

Đáp án: $\geq$.

Vì $c > 0$ nên khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với số dương ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Câu 3. [TH] Cho $a < b$. Hãy điền dấu thích hợp vào chỗ (...) của hệ thức $-2a + 2025 \dots -2b + 2025$.

Lời giải

Đáp án: $>$.

Do $a < b$ nên $-2a > -2b$

$-2a + 2025 > -2b + 2025$.

Câu 4. [TH] Khi có $2024a - 4 > 2024b - 4$. Hãy điền dấu thích hợp vào chỗ (...) của hệ thức $a \dots b$

Lời giải

Đáp án: $>$

Do $2024a - 4 > 2024b - 4$ nên $2024a > 2024b$
 $a > b$.

Câu 5. [TH] Thay $\boxed{?}$ trong các biểu thức sau bởi dấu ($<$; $>$) để được khẳng định đúng

a) $15.(-12, 05) \boxed{?} 15.13, 45$.

b) $(-14).(-10,45) \boxed{?} (-14).9$.

Lời giải

Đáp án: a) $<$. b) $>$.

a) Có $-12,05 < 13,45$ nên $15.(-12,05) < 15.13,45$.

b) Có $-10,45 < 9$ nên $(-14).(-10,45) < 9.(-14)$.

Câu 6. [VD] Cho $2a - 1 < 3b + 2$ và số $c = 0$. Hãy điền dấu thích hợp vào chỗ (...) của hệ thức $(2a - 1).c \dots (3b + 2).c$.

Lời giải

Đáp án: $=$.

Do bất kì số nào nhân với 0 cũng bằng 0 nên điền dấu “=”.

Câu 7. [VDC] Với bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq (a + b + c)$ dấu “=” xảy ra với giá trị nào của a, b, c .

Lời giải

Đáp án: Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Từ $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq (a + b + c)$

$$a^2 + b^2 + c^2 - a - b - c + \frac{3}{4} \geq 0$$

$$\left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 - b + \frac{1}{4}\right) + \left(c^2 - c + \frac{1}{4}\right) \geq 0$$

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng})$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp giải:

Nắm chắc định nghĩa bất đẳng thức và các yếu tố của bất đẳng thức.

Thực hiện biến đổi theo thứ tự và phép cộng, phép nhân.

I. Dạng 1. SO SÁNH BẤT ĐẲNG THỨC

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. [NB] Trong các hệ thức sau đâu là bất đẳng thức? Với mỗi bất đẳng thức hãy chỉ ra vế trái, vế phải.

a) $2a - 1 < 3$

b) $3a = 4 - 2b$

c) $4 \geq -5a + 2$

d) $3a - 4b$

Lời giải

Các bất đẳng thức là: $2a - 1 < 3$ có vế trái là $2a - 1$; vế phải là 3
 $4 \geq -5a + 2$ có vế trái là 4 ; vế phải là $-5a + 2$

Ví dụ 2. [TH] Cho $-2a + 3 < -2b + 3$. Hãy so sánh a và b .

Lời giải

Ta có $-2a + 3 < -2b + 3$

$$-2a + 3 - 3 < -2b + 3 - 3$$

$$-2a < -2b$$

$$a > b$$

Ví dụ 3. [TH] Cho $a - 2 > b - 2$. Hãy so sánh a và b .

Lời giải

Ta có $a - 2 > b - 2$ nên $a - 2 + 2 > b - 2 + 2$ suy ra $a > b$. Vậy $a > b$.

Ví dụ 4. [VD] Không thực hiện phép tính hãy so sánh $2023 + \sqrt{3}$ và $2024 + \sqrt{3}$

Lời giải

Có $2023 < 2024$ nên $2023 + \sqrt{3} < 2024 + \sqrt{3}$

Ví dụ 5. [VD] so sánh $x^2 + 15$ và 15 , với x là số thực tùy ý.

Lời giải

Với x là số thực tùy ý nên luôn có $x^2 \geq 0$ suy ra $x^2 + 15 \geq 15$.

Ví dụ 6. [VD] Cho bất đẳng thức

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Lời giải

Từ $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(ab + bc + ca)$ nên $\frac{1}{3} \cdot 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{1}{3} \cdot 3(ab + bc + ca)$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (đpcm).

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. [NB] Cho các bất đẳng thức sau, hãy xác định các bất đẳng thức cùng chiều.

- a) $3a > 2b$. b) $3a - 2 < 2a + 1$. c) $3 > 2a - 4$. d) $-4 < a$.

Lời giải

Các bất đẳng thức cùng chiều là: $3a > 2b$ và $3 > 2a - 4$.
 $3a - 2 < 2a + 1$ và $-4 < a$.

Bài 2. [TH] Cho $a > b$. Hãy so sánh

- a) $1 - 3a$ và $1 - 3b$ b) $6a - 5$ và $-5 + 6b$. c) $-3a - 4$ và $-3b - 4$.

Lời giải

a) Ta có: $a > b$

$$-3a < -3b$$

$$1 - 3a < 1 - 3b$$

b) Ta có $a > b$

$$6a > 6b$$

$$6a - 5 > -5 + 6b$$

c) Ta có $a > b$

$$-3a < -3b$$

$$-3a - 4 < -3b - 4$$

Bài 3. [VD] So sánh hai số a và b , nếu

- a) $6a \leq 6b$. b) $3a + 1 \geq 3b + 1$. c) $5a - 1 > 5b - 1$.
d) $8 - a < 8 - b$. e) $-3a \geq -3b$. f) $-2a + 3 \geq 3 - 2b$.

Lời giải

a) Ta có $6a \leq 6b$

$$\frac{1}{6} \cdot 6a \leq \frac{1}{6} \cdot 6b$$

$$a \leq b$$

b) Ta có $3a + 1 \geq 3b + 1$

$$3a \geq 3b$$

$$a \geq b.$$

c) Ta có $5a - 1 > 5b - 1$
 $5a > 5b$
 $a > b.$

d) Ta có $8 - a < 8 - b$
 $-a < -b$
 $a > b.$

e) Ta có $-3a \geq -3b$
 $a \leq b.$

f) Ta có $-2a + 3 \geq 3 - 2b$
 $-2a \geq -2b$
 $a \leq b.$

Bài 4. [VD] So sánh hai số a và b , nếu

a) $a + 1954 < b + 1954.$ b) $a - 7 \geq b - 7.$

d) $-6 + a \leq b - 6.$ e) $3 - (-a) > b + 3.$

c) $a - (-4) \leq b + 4.$

Lời giải

a) Từ $a + 1954 < b + 1954$
 $a + 1954 - 1954 < b + 1954 - 1954$
 $a < b.$

b) Từ $a - 7 \geq b - 7$
 $a - 7 + 7 \geq b - 7 + 7$
 $a \geq b.$

c) Từ $a - (-4) \leq b + 4$
 $a + 4 \leq b + 4$
 $a + 4 - 4 \leq b + 4 - 4$
 $a \leq b.$

d) Từ $-6 + a \leq b - 6$
 $-6 + a + 6 \leq b - 6 + 6$
 $a \leq b.$

e) Từ $3 - (-a) > b + 3$
 $3 + a > b + 3$
 $3 + a - 3 > b + 3 - 3$
 $a > b.$

Bài 5. [VD] Cho $a > b$. So sánh

a) $-2a + 3$ và $-2b + 5.$

b) $4a + 1$ và $4b - 7.$

Lời giải

a) Ta có $a > b$
 $-2a < -2b$
 $-2a + 3 < -2b + 3 < -2b + 5$
 $-2a + 3 < -2b + 5$

b) Ta có $a > b$
 $4a > 4b$
 $4a + 1 > 4b + 1 > 4b - 7$
 $4a + 1 > 4b - 7.$

Bài 6. [VD] Cho $2a+1 \geq 2b-3$. So sánh $a+2$ và b .

Lời giải

Từ $2a+1 \geq 2b-3$

$$2a+1+3 \geq 2b-3+3$$

$$2a+4 \geq 2b$$

$$2(a+2) \geq 2b$$

$$a+2 \geq b$$

Vậy $a+2 \geq b$.

II. DẠNG 2. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Loại 1: Sử dụng tính chất $A^2 \geq 0$ để chứng minh đẳng thức

1. Kiến thức cần dùng

1.1. Một số bất đẳng thức cơ bản cần nhớ

$$+ A^2 \geq 0 \text{ với } \forall A.$$

$$+ A^{2k} \geq 0 \text{ với } \forall A \text{ và } k \text{ là số tự nhiên.}$$

1.2. Một số kỹ thuật cơ bản

+ Kỹ thuật xét hiệu hai biểu thức.

+ Kỹ thuật sử dụng các hằng đẳng thức.

+ Kỹ thuật thêm bớt một hằng số, một biểu thức.

+ Kỹ thuật đặt biến phụ.

2. Bài tập mẫu

Ví dụ 1. [TH] Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$.

Lời giải

Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức ta có biểu thức: $(a^2 + b^2 + c^2 + 3) - 2(a+b+c)$

$$= a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + c^2 - 2c + 1$$

$$= (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0$$

$$\text{Suy ra } a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c).$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 2. [VD] Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e).$$

Lời giải

Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức ta có biểu thức: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b+c+d+e)$

$$= \frac{4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) - 4(ab + ac + ad + ae)}{4}$$

$$= \frac{(a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) + (a^2 - 4ad + 4d^2) + (a^2 - 4ae + 4e^2)}{4}$$

$$= \frac{(a-2b)^2 + (a-2c)^2 + (a-2d)^2 + (a-2e)^2}{4} \geq 0$$

$$\text{Suy ra } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e).$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2b = 2c = 2d = 2e$.

Ví dụ 3. [VD] Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c).$$

Lời giải

Để chứng minh bất đẳng thức đã cho ta chứng minh bất đẳng thức:

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^2bc - b^2ac - c^2ab \geq 0 \quad \text{hay} \quad 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab \geq 0.$$

Thật vậy ta có: $2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab$

$$\begin{aligned} &= (a^2 - b^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2 - c^2)^2 + 2b^2c^2 + (c^2 - a^2)^2 + 2a^2c^2 - 2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab \\ &= (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 + (ab - bc)^2 + (bc - ac)^2 + (ab - ac)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 4. [VD] Cho a, b là các số thực thỏa mãn điều kiện $a, b \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}.$$

Lời giải

Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức ta có biểu thức:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{2}{1+ab} \\ &= \frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab} \\ &= \frac{ab - a^2}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{ab - b^2}{(1+b^2)(1+ab)} \\ &= \frac{a-b}{1+ab} \cdot \left[\frac{b}{1+b^2} - \frac{a}{1+a^2} \right] \\ &= \frac{a-b}{1+ab} \cdot \frac{b + a^2b - a - ab^2}{(1+a^2)(1+b^2)} \\ &= \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \geq 0 \quad \text{với } a, b \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Ví dụ 5. [VDC] Chứng minh rằng với mọi số thực a, b ta có:

$$ab(a-2)(b+6) + 12a^2 - 24a + 3b^2 + 18b + 36 > 0.$$

Lời giải

Ta có: $ab(a-2)(b+6) + 12a^2 - 24a + 3b^2 + 18b + 36$

$$= ab(a-2)(b+6) + 12(a-1)^2 + 3(b+3)^2 - 3$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a(a-2) \\ y = b(b+6) \end{cases} \text{ ta được } \begin{cases} x+1 = (a-1)^2 \geq 0 \\ y+9 = (b+3)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } ab(a-2)(b+6) + 12(a-1)^2 + 3(b+3)^2 - 3$$

$$= xy + 12(x+1) + 3(y+9) - 3 = (x+3)(y+12)$$

$$\text{Ta có: } (x+3)(y+12) > 0 \quad \text{vì } x+1 \geq 0; y+9 \geq 0.$$

$$\text{Vậy } ab(a-2)(b+6) + 12a^2 - 24a + 3b^2 + 18b + 36 > 0.$$

3. Bài tập tự luyện

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2.$$

Bài 1. [TH] Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

Lời giải

$$\begin{aligned} & \text{Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức} \\ & \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2 \\ &= \frac{3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2}{9} \\ &= \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{9} \geq 0 \end{aligned}$$

với mọi số thực a, b, c .

$$\text{Suy ra } \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 2. [TH] Cho a, b là các số thực khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{2a}{b} - \frac{2b}{a} - 1.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \text{Ta có } P = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{2a}{b} - \frac{2b}{a} - 1 \\ &= \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{2a}{b} + 1 \right) + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2b}{a} + 1 \right) - 3 \\ &= \left(\frac{a}{b} - 1 \right)^2 + \left(\frac{b}{a} - 1 \right)^2 - 3 \geq -3 \end{aligned}$$

với mọi $a \neq 0; b \neq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b; a \neq 0; b \neq 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -3 khi $a = b; a \neq 0; b \neq 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Bài 3. [VD] Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \geq (a^8 + b^8)(a^4 + b^4).$$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \text{Xét hiệu: } (a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) - (a^8 + b^8)(a^4 + b^4) \\ &= (a^{12} + a^{10}b^2 + a^2b^{10} + b^{12}) - (a^{12} + a^8b^4 + a^4b^8 + b^{12}) \\ &= a^8b^2(a^2 - b^2) + a^2b^8(b^2 - a^2) \\ &= a^2b^2(a^2 - b^2)(a^6 - b^6) \\ &= a^2b^2(a^2 - b^2)^2(a^4 + a^2b^2 + b^4) \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bài 4. [VD] Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Xét hiệu: } & \frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} + \frac{b}{c+a} - \frac{1}{2} + \frac{c}{a+b} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{a-b}{b+c} + \frac{a-c}{b+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{b-a}{c+a} + \frac{c-a}{a+b} + \frac{c-b}{a+b} \\
&= \left(\frac{a-b}{b+c} - \frac{a-b}{c+a} \right) + \left(\frac{b-c}{c+a} - \frac{b-c}{a+b} \right) + \left(\frac{c-a}{a+b} - \frac{c-a}{b+c} \right) \\
&= \frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} + \frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)} + \frac{(c-b)^2}{(a+b)(b+c)} \geq 0
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Loại 2: Sử dụng tính chất tỉ số để chứng minh bất đẳng thức.

1. Kiến thức cần dùng

Một số tính chất của tỉ số

- + Với các số thực dương a, b bất kì, ta luôn có $a \geq b$ thì $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.
- + Với các số thực dương a, b, c, d bất kì, ta có:

$$\text{Nếu } \frac{a}{b} < 1 \quad \text{thì} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}.$$

$$\text{Nếu } \frac{a}{b} > 1 \quad \text{thì} \quad \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}.$$

$$\text{Nếu } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{thì} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

2. Bài tập mẫu

Ví dụ 1. [TH] Cho a, b là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng: $\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{a+2b} < 1$.

Lời giải

Do a, b là các số dương nên ta có $2a+b > a+b$; $a+2b > a+b$.

Từ đó suy ra $\frac{a}{2a+b} < \frac{a}{a+b}$; $\frac{b}{2b+a} < \frac{b}{a+b}$.

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được $\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+a} < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1$.
 Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2. [VD] Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng:
 $\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$.

Lời giải

Từ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ suy ra $\frac{ab}{b^2} < \frac{cd}{d^2}$, theo tính chất tỉ số ta được $\frac{ab}{b^2} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{cd}{d^2} = \frac{c}{d}$.

Do đó ta có $\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 3. [VD] Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Lời giải

Ta có $a^3+b^3-ab(a+b) = (a+b)(a^2-ab+b^2) - ab(a+b)$
 $= (a+b)(a^2-ab+b^2-ab) = (a+b)(a^2-2ab+b^2)$
 $= (a+b)(a-b)^2 \geq 0$

Suy ra $a^3+b^3 \geq ab(a+b)$ hay $a^3+b^3+abc \geq ab(a+b)+abc$

Suy ra: $a^3+b^3+abc \geq ab(a+b+c)$

Từ đó ta được $\frac{1}{a^3+b^3+abc} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)} = \frac{c}{abc(a+b+c)}$

Chúng minh tương tự ta có $\frac{1}{b^3+c^3+abc} \leq \frac{1}{bc(a+b+c)} = \frac{a}{abc(a+b+c)}$

$$\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{ac(a+b+c)} = \frac{b}{abc(a+b+c)}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

3. Bài tập tự luyện

Bài 1. [TH] Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

Lời giải

Do a, b, c là các số dương nên ta có $\frac{a}{a+b} < 1$. Vì vậy theo tính chất của tỉ số ta được

$$\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$$

Áp dụng tương tự ta có $\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c} < \frac{a+b}{a+b+c}$; $\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a} < \frac{b+c}{a+b+c}$.

Cộng về theo về của ba bất đẳng thức kép trên ta được $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 2. [VD] Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$$

Lời giải

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có $0 < \frac{a}{b+c} < 1$ suy ra $\sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{b+c}$.

Vì a là số dương nên theo tính chất của tỉ số ta được $\frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c}$.

Do đó ta có $\sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{a+b+c}$.

Chúng minh tương tự ta được $\sqrt{\frac{b}{c+a}} > \frac{b}{a+b+c}; \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{c}{a+b+c}$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta được $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$.
 Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 3. [VDC] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2}.$$

Lời giải

Ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab; b^2 + 1 \geq 2b$ nên $a^2 + 2b^2 + 3 \geq 2(ab + b + 1)$.

Do đó ta được $\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ab + b + 1}$.

Chúng minh tương tự ta có $\frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{bc + c + 1}; \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ac + a + 1}$.

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ac + a + 1} \right)$$

Ta cần chứng minh $\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} = 1$.

Do $abc = 1$, nên tồn tại các số dương x, y, z để $a = \frac{x}{y}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x}$.

Khi đó ta có $\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1} + \frac{1}{\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + 1} + \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{z}{y} + 1} \\ &= \frac{z}{x + y + z} + \frac{x}{x + y + z} + \frac{y}{x + y + z} = 1 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 4. [VD] Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} = 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+a+bc} + \frac{b}{1+b+ca} + \frac{c}{1+c+ab} \geq \frac{3}{4}$.

Lời giải

Đặt $x = \frac{a}{1+bc}; y = \frac{b}{1+ca}; z = \frac{c}{1+ab}$. Suy ra $x + y + z = 3$.

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại là: $\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \geq \frac{3}{4}$.

Ta có $\frac{x}{1+x} \geq \frac{x}{1+x+y+z}; \frac{y}{1+y} \geq \frac{y}{1+x+y+z}; \frac{z}{1+z} \geq \frac{z}{1+x+y+z}.$

$$\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \geq \frac{3}{4}.$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=3; b=c=0$ và các hoán vị.

Loại 3: Sử dụng phương pháp làm trội, làm giảm để chứng minh bất đẳng thức.

1. Kiến thức cần dùng

Giả sử cần chứng minh $A \leq B$, khi đó ta cần làm trội biểu thức A thành $A \leq M$ rồi chứng minh $M \leq B$. Cũng có thể làm giảm B thành $M \leq B$ rồi chứng minh $A \leq M$.

Phương pháp làm trội, làm giảm thường được áp dụng cho bất đẳng thức về tổng hoặc tích của một dãy số. Khi đó dùng các tính chất bất đẳng thức để đưa một vế của bất đẳng thức về dạng tính được tổng hữu hạn hoặc tích hữu hạn.

+ **Ý tưởng chung cho bất đẳng thức dạng tổng của dãy số là:**

Giả sử ta cần chứng minh $A(x_1) + A(x_2) + A(x_3) + \dots + A(x_n) \leq M$, khi đó ta thực hiện làm trội $A(x_i) \leq B(y_{i+1}) - B(y_i)$ để thu được

$$A(x_1) + A(x_2) + A(x_3) + \dots + A(x_n) \leq B(y_n) - B(y_1)$$

Sau đó ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức $B(y_n) - B(y_1) \leq M$.

+ **Ý tưởng chung cho bất đẳng thức dạng tích của dãy số là:**

Giả sử ta cần chứng minh $A(x_1).A(x_2).A(x_3) \dots A(x_n) \leq M$, khi đó ta thực hiện làm trội $A(x_i) \leq \frac{B(y_{i+1})}{B(y_i)}$ để thu được

$$A(x_1).A(x_2).A(x_3) \dots A(x_n) \leq \frac{B(y_n)}{B(y_1)}$$

Sau đó ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức $\frac{B(y_n)}{B(y_1)} \leq M$.

+ **Một số tổng sai phân hay dùng**

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}; \quad \frac{a}{n(n+a)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+a};$$

$$\frac{2a}{n(n+a)(n+2a)} = \frac{1}{n(n+a)} - \frac{1}{(n+a)(n+2a)};$$

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n};$$

$$\frac{1}{n(n+a)} + \frac{1}{(n+a)(n+2a)} + \dots + \frac{1}{[n+(k-1)a](n+ka)} = \frac{k}{n(n+ka)};$$

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right].$$

Chú ý:

Ta cần áp dụng làm trội, làm giảm sao cho bất đẳng thức cuối cùng cần chứng minh phải càng đơn giản càng tốt.

Thông thường ta tìm quy luật viết các số hạng của dãy rồi đưa ra cách viết tổng quát, từ đó ta mới làm trội cho số hạng tổng quát và áp dụng cho các số hạng cụ thể.

2. Bài tập mẫu

Ví dụ 1. [TH] Với mọi số tự nhiên $n > 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$.

Lời giải

Nhận thấy tổng trên có n số hạng, do đó ta làm trội bằng cách thay mẫu $n+k$ với $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ bằng $n+n$. Tức là ta có:

$$\frac{1}{n+k} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n} \text{ với } k = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Khi đó ta được: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 2. [VD] Chứng minh rằng với n là số nguyên dương, ta luôn có: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$.

Lời giải

Để chứng minh bất đẳng thức trên ta cần làm trội mỗi phân số bằng các thay mẫu số bằng một số nhỏ hơn. Để ý đến đánh giá $k^2 > k(k-1)$, khi đó ta thu được các đánh giá có dạng

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \text{ cho } k = 2, 3, \dots, n \text{ ta thì ta được một bất đẳng thức}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

. Bây giờ ta cần kiểm tra xem $1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} < 2$ có đúng không. Dễ thấy bất đẳng thức trên đúng, do đó ta trình bày lại lời giải như sau:

Ta có: $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \forall k$ là số nguyên dương.

Cho $k = 2, 3, \dots, n$ ta có:

$$\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3};$$

...

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$.

Suy ra $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 3. [VD] Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , ta luôn có: $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{1}{(2.2)^2} + \frac{1}{(2.3)^2} + \frac{1}{(2.4)^2} + \dots + \frac{1}{(2.n)^2}$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \frac{1}{4 \cdot 4^2} + \dots + \frac{1}{4 \cdot n^2}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét: Bất đẳng thức tổng quát của ví dụ trên là:

$$\frac{1}{(k \cdot 2)^2} + \frac{1}{(k \cdot 3)^2} + \frac{1}{(k \cdot 4)^2} + \dots + \frac{1}{(k \cdot n)^2} < \frac{1}{k^2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Ta thay k bởi một số tự nhiên khác 0 tùy ý sẽ được các bài toán mới, chẳng hạn với $k = 5$ ta có

$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2} + \dots + \frac{1}{(5n)^2} < \frac{1}{25}$$

Ví dụ 4. [VD] Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , ta luôn có: $\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}$.

Lời giải

$$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{k(k^2 - 1)} = \frac{1}{(k-1) \cdot k \cdot (k+1)}, \quad \forall k \geq 2$$

Ta có:

Cho $k = 2, 3, 4, \dots, n$ ta có:

$$\frac{1}{2^3} < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$\frac{1}{3^3} < \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4};$$

...

$$\frac{1}{n^3} < \frac{1}{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}.$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}.$$

$$\text{Mặt khác ta lại có } \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} - \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{1}{4}.$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 5. [VDC] Với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

$$\text{Chứng minh rằng: } 1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+1} < 2.$$

Lời giải

$$+ \text{ Trước hết ta chứng minh: } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+1} < 2$$

$$\frac{2n+1}{n+1} < \frac{2n+2}{n+1} = 2$$

Tổng trên có $2n+1$ số hạng và lại thấy $\frac{2n+1}{n+1} < \frac{2n+2}{n+1} = 2$, do đó áp dụng tư tưởng như ví dụ trên ta làm trội bằng cách thay mỗi số hạng bằng số hạng lớn nhất. Tức là ta được

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \dots + \frac{1}{3n+1} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \dots + \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} < 2$$

+ Bây giờ ta chứng minh: $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \dots + \frac{1}{3n+1}$

Tổng trên có $2n+1$ số hạng và số hạng chính giữa là $\frac{1}{2n+1}$, ta chuyển bất đẳng thức cần chứng minh thành $\frac{2n+1}{2n+1} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+1}$.

Ở đây ta lại nhận thấy $\frac{2n+1}{2n+1} = n \cdot \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}$ có chứa số hạng chính giữa, do đó ý tưởng ở đây

là ghép các cặp dạng $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+1}$; $\frac{1}{n+2} + \frac{1}{3n}$; ...; $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2}$ thì được n tổng, rồi chứng minh mỗi tổng đó đều lớn hơn $\frac{2}{2n+1}$. Để chứng minh các tổng trên đều lớn hơn $\frac{2}{2n+1}$ ta chỉ cần

chứng minh được $\frac{1}{2n+1-k} + \frac{1}{2n+1+k}$, trong đó k nhận các giá trị từ $1; 2; \dots; n$. Thật vậy:

$$\frac{1}{2n+1-k} + \frac{1}{2n+1+k} = \frac{4n+2}{(2n+1)^2 - k^2} > \frac{4n+2}{(2n+1)^2} = \frac{2}{2n+1}$$

Đến đây ta có lời giải như sau:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} \dots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} \\ &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{3n} \right) + \dots + \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{4n+2}{(n+1)(3n+1)} + \frac{4n+2}{(n+1)3n} + \dots + \frac{1}{2n+1} \geq \frac{2}{2n+1} \cdot n + \frac{1}{2n+1} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy ta được } 1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \dots + \frac{1}{3n+1}.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

3. Bài tập tự luyện

Bài 1. [VD] Chứng minh rằng: $\frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \dots + \frac{1}{2014^3} < \frac{1}{40}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{k(k^2 - 1)} = \frac{1}{(k-1)k(k+1)}; \\ & \frac{1}{k^3} > \frac{1}{k^3 + 3k^2 + 2k} = \frac{1}{k(k^2 + 3k + 2)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}. \end{aligned}$$

$$\text{Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta được: } \frac{1}{k(k+1)(k+2)} < \frac{1}{k^3} < \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$$

$$\text{Cho } k = 5, 6, 7, \dots, 2014 \text{ ta có: } \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} < \frac{1}{5^3} < \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6};$$

$$\frac{1}{6.7.8} < \frac{1}{6^3} < \frac{1}{5.6.7};$$

...

$$\frac{1}{2014.2015.2016} < \frac{1}{2014^3} < \frac{1}{2013.2014.2015}.$$

Đặt $A = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \dots + \frac{1}{2014^3}$, cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2014.2015.2016} < A < \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \dots + \frac{1}{2013.2014.2015}$$

Ta cần chứng minh: $\frac{1}{65} < \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2014.2015.2016}$

Và $\frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \dots + \frac{1}{2013.2014.2015} < \frac{1}{40}$

+ Chứng minh: $\frac{1}{65} < \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2014.2015.2016}$

Ta có: $\frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2014.2015.2016} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5.6} - \frac{1}{2015.2016} \right) > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{390} \right) = \frac{1}{65}$

+ Chứng minh: $\frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \dots + \frac{1}{2013.2014.2015} < \frac{1}{40}$

Ta có: $\frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \dots + \frac{1}{2013.2014.2015} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{2014.2015} \right) < \frac{1}{40}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 2. [VD] Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2015^2} < \frac{2014}{2015}$.

Lời giải

Ta có với mọi $k \geq 1$ thì $k^2 > k(k-1) > 0$ nên $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

Cho $k = 2, 3, 4, \dots, 2015$, ta có:

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3};$$

...

$$\frac{1}{2015^2} < \frac{1}{2014.2015} = \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức cùng chiều, ta được

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2015^2} < 1 - \frac{1}{2015} = \frac{2014}{2015}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 3. [VD] Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta luôn có:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n+1)^2} < \frac{9}{20}$$

Lời giải

Ta có:
$$\frac{1}{k^2 + (k+1)^2} < \frac{1}{2k(k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

Cho $k = 2, 3, 4, \dots, n$ ta có:

$$\frac{1}{2^2 + 3^2} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right);$$

$$\frac{1}{3^2 + 4^2} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right);$$

...

$$\frac{1}{n^2 + (n+1)^2} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{2^2 + 3^2} + \frac{1}{3^2 + 4^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n+1)^2} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} < \frac{1}{4}$$

Hay
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2^2 + 3^2} + \frac{1}{3^2 + 4^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n+1)^2} < \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$$

$$S_n = \frac{1}{3(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$

Bài 4. [VD] Với số tự nhiên $n \geq 3$. Đặt

Chứng minh rằng:
$$S_n < \frac{1}{2}$$

Lời giải

Vì $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 > 4k^2 + 4k$ nên $2k+1 > 2\sqrt{k(k+1)}$

Do đó ta được:
$$\frac{1}{(2k+1)(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{2k+1} < \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{2\sqrt{k(k+1)}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{k}} - \frac{1}{2\sqrt{k+1}}$$

Cho $k = 1, 2, 3, \dots, n$ rồi cộng về với về ta có

$$S_n < \frac{1}{2\sqrt{1}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Loại 4. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, bất đẳng thức Bunhiacopxki để chứng minh bất đẳng thức

Các bất đẳng thức quan trọng là:

1. Bất đẳng thức AM-GM

+ Với hai số không âm a, b ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Chứng minh: Với hai số không âm a, b , xét hiệu:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Vậy $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ hay $a = b$.

Chú ý: Ta hay áp dụng dạng $a+b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

+ Với ba số không âm a, b, c ta có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Chứng minh: Với ba số không âm a, b, c ta có:

$$\begin{aligned} a+b &\geq 2\sqrt{ab}; \\ c+\sqrt[3]{abc} &\geq 2\sqrt{c\sqrt[3]{abc}} \end{aligned}$$

Cộng theo vế của hai bất đẳng thức trên ta được:

$$\begin{aligned} a+b+c+\sqrt[3]{abc} &\geq 2\sqrt{ab}+2\sqrt{c\sqrt[3]{abc}} \\ a+b+c+\sqrt[3]{abc} &\geq 2\left(\sqrt{ab}+2\sqrt{c\sqrt[3]{abc}}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Lại có: } \sqrt{ab} + \sqrt{c\sqrt[3]{abc}} \geq 2\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{c\sqrt[3]{abc}}} = 2\sqrt[3]{abc}$$

nên $a+b+c+\sqrt[3]{abc} \geq 4\sqrt[3]{abc}$ hay $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Do đó $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Chú ý: Ta hay áp dụng dạng $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki

Với bốn số thực bất kỳ a, b, x, y ta có: $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$.

Dấu "=" xảy ra khi $ay = bx$ hay $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ với $x \neq 0; y \neq 0$.

Chứng minh: Bất đẳng thức $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

Xét hiệu:

$$\begin{aligned} &(ax+by)^2 - (a^2+b^2)(x^2+y^2) \\ &= a^2x^2 + 2axby + b^2y^2 - (a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2) \\ &= a^2y^2 - 2axby + b^2x^2 \\ &= (ay-bx)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

1. Bài tập mẫu

Ví dụ 1. [VD] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$;

b) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$.

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{aligned} (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) &= 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 \\ &= 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Vì a, b, c là các số dương nên ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số $\frac{a}{b}; \frac{b}{a}$ dương ta được:

$$\begin{aligned} (a+b)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) &= 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} \\ &= 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

Vậy $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

b) Ta có $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1$

$$= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3 + 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} + 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}} + 2\sqrt{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}}.$$

Hay $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b}{a} \\ \frac{a}{b} = \frac{b}{a} \\ \frac{b}{c} = \frac{c}{b} \end{cases}$ hay $a = b = c$.

Vậy với a, b, c dương thì $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Chú ý: Các bất đẳng thức trên còn viết dưới dạng với a, b, c thì:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &\geq \frac{4}{a+b}; \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &\geq \frac{9}{a+b+c}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2. [VD] Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a > b; a.b = 1$ Chứng minh $\frac{a^2 + b^2}{a - b} = 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{a^2 + b^2}{a - b} &= \frac{(a - b)^2 + 2ab}{a - b} \\ &= \frac{(a - b)^2 + 2}{a - b} \\ &= a - b + \frac{2}{a - b}\end{aligned}$$

Vì $a > b > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2 \cdot \sqrt{(a - b) \frac{2}{a - b}} = 2\sqrt{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a - b = \sqrt{2}$. Vậy $a > b > 0$ và $a.b = 1$ thì $\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2\sqrt{2}$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a - b = \sqrt{2}$.

Ví dụ 3. [VD] Cho $x + y + z = 2$ Chứng minh $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{4}{3}$.

Lời giải

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned}(x + y + z)^2 &\leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ 3(x^2 + y^2 + z^2) &\geq (x + y + z)^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &\geq \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{2}{3}$.

Vậy với $x + y + z = 2$ thì $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{4}{3}$.

2. Bài tập tự luyện

Bài 1. [VD] Cho $x, y \neq 0$ Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \quad (1)$$

Lời giải

Nếu x, y trái dấu bất đẳng thức(1) luôn đúng.

Nếu x, y cùng dấu theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có :

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 \leq (1 + 1)\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right)$$

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq \frac{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2}{2}$$

Ta chứng minh

$$\frac{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2}{2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Vì x, y cùng dấu nên

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}}$$

$$\frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{2} \geq 1$$

$$\frac{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2}{2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Vậy $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

Bài 2. [VD] Cho x, y là các số dương. Chứng minh rằng:

Lời giải

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

Ta có

$$\frac{x+y}{x \cdot y} \geq \frac{4}{x+y}$$

$$(x+y)^2 \geq 4xy$$

Vì $x+y > 0$ và $x \cdot y > 0$

Do đó: $(x-y)^2 \geq 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do đó bất đẳng thức đã cho luôn đúng.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4.$$

Bài 3. [VD] Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn

Chứng minh: $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{2y+x+z} + \frac{1}{2z+x+y} \leq 1.$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ nên $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$

Ta có

$$\frac{1}{2x+y+z} = \frac{1}{x+y+x+z} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right)$$

$$\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad (1)$$

Tương tự như vậy ta có:

$$\frac{1}{2y+x+z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{2z+x+y} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2), (3) ta có

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{2y+x+z} + \frac{1}{2z+x+y} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} \right)$$

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{2y+x+z} + \frac{1}{2z+x+y} \leq \frac{1}{16} \cdot 4 \cdot 4 = 1.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{3}{4}$.

Bài 4. [VD] Cho $a \geq 4$. Chứng minh rằng:

$$a + \frac{1}{a} \geq \frac{17}{4}.$$

Lời giải

Ta có: $a + \frac{1}{a} = \frac{a}{16} + \frac{1}{a} + \frac{15a}{16}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương $\frac{a}{16}$ và $\frac{1}{a}$.

Ta có: $\frac{a}{16} + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{16} \cdot \frac{1}{a}} = 2\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$. Mà $a \geq 4 \Rightarrow \frac{15a}{16} \geq \frac{15}{16} \cdot 4 = \frac{15}{4}$. Vậy $a + \frac{1}{a} \geq \frac{17}{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi $a = 4$.

Bài 5. [VD] Tìm GTNN của các biểu thức:

a. $A = 4x^2 + 4x + 11$.

b. $B = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$.

c. $C = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 7$.

Lời giải

a) $A = 4x^2 + 4x + 11 = 4x^2 + 4x + 1 + 10 = (2x+1)^2 + 10 \geq 10$

nên giá trị nhỏ nhất của $A = 10$ khi $x = -\frac{1}{2}$.

b) $B = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

$$= (x-1)(x+6)(x+2)(x+3)$$

$$= (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6)$$

$$= (x^2 + 5x)^2 - 36 \geq -36.$$

Nên giá trị nhỏ nhất của $B = -36$ khi $x = 0$ hoặc $x = -5$.

c) $C = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 7$

$$= (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + 2$$

$$= (x-1)^2 + (y-2)^2 + 2 \geq 2.$$

Nên giá trị nhỏ nhất của $C = 2$ khi $x = 1; y = 2$.

Bài 6. [VD] Tìm GTLN của các biểu thức:

$$a) A = 5 - 8x - x^2$$

$$b) B = 5 - x^2 + 2x - 4y^2 - 4y$$

Lời giải

$$a) A = 5 - 8x - x^2 = -(x^2 + 8x + 16) + 21 = -(x + 4)^2 + 21 \leq 21$$

Vậy Max $A = 21$ khi $x = -4$.

$$b) B = 5 - x^2 + 2x - 4y^2 - 4y$$

$$= -(x^2 - 2x + 1) - (4y^2 + 4y + 1) + 7$$

$$= -(x - 1)^2 - (2y + 1)^2 + 7$$

$$\text{Vậy Max } B = 7 \text{ khi } x = 1; y = -\frac{1}{2}.$$

Bài 7. [VD] Tìm GTLN của hàm số: $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

Lời giải

$$y = \frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

Ta có thể viết:

$$\text{Vì } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \text{ . Do đó ta có: } y \leq \frac{4}{3} \text{ . Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy GTLN của } y = \frac{4}{3} \text{ tại } x = -\frac{1}{2}.$$

Loại 5. Sử dụng bất đẳng thức vào giải một số bài toán thực tế**1. Bài tập mẫu**

Ví dụ 1. [VD] Người ta dùng 100 m rào để rào một mảnh vườn hình chữ nhật để thả gia súc. Biết một cạnh của hình chữ nhật là bức tường (không phải rào). Tính diện tích lớn nhất của mảnh vườn để có thể rào được.

Lời giải

Đặt cạnh của hình chữ nhật lần lượt là x, y (m) (với $x > 0; y > 0$). Ta có $2x + y = 100$.

$$\begin{aligned} \text{Diện tích hình chữ nhật là } S = xy &= 2x \cdot \frac{y}{2} \leq 2 \cdot \left(\frac{x + \frac{y}{2}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(2x + y)^2 = \frac{1}{4}(100)^2 = 1250. \end{aligned}$$

Vậy diện tích lớn nhất của mảnh vườn là $1250 m^2$ khi $x = \frac{y}{2}$ và $2x + y = 100$ hay $x = 25; y = 50$.

Ví dụ 2. [VD] Từ một tờ giấy hình tròn bán kính R ta có thể cắt ra một hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi a, b là độ dài hai cạnh hình chữ nhật nội tiếp đường tròn bán kính R .

$$\text{Ta có } a^2 + b^2 = 4R^2.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức AG-MG ta có } S = ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{4R^2}{2} = 2R^2.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Vậy từ một tờ giấy hình tròn bán kính R ta có thể cắt ra một hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng $2R^2$.

Ví dụ 3. [VD] Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức

$f(x) = 0,025x^2(30 - x)$, trong đó x (miligam) là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân. Khi đó, liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất?

Lời giải

Ta có $f(x) = 0,025x^2(30 - x)$

$$= 0,0125 \cdot x \cdot x(60 - 2x)$$

$$\leq 0,0125 \cdot \left(\frac{x + x + 60 - 2x}{3} \right)^3$$

$$= 0,0125 \cdot 800$$

$$= 100.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 60 - 2x$ hay $x = 20$ (thỏa mãn).

Vậy liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20 miligam.

Ví dụ 4. [VDC] Trong mùa cao điểm du lịch, một tổ hợp nhà nghỉ ở Đà Nẵng gồm 100 phòng đồng giá luôn luôn kín phòng khi giá thuê là 480 nghìn đồng/phòng. Qua khảo sát các năm trước bộ phận kinh doanh của nhà nghỉ thấy rằng: cứ tăng giá phòng lên $x\%$ ($x \geq 0$) so với lúc kín

phòng (giá thuê là 480 nghìn đồng/phòng) thì số phòng cho thuê giảm đi $\frac{4x}{5}\%$. Hỏi nhà nghỉ phải niêm yết giá phòng là bao nhiêu để đạt doanh thu cao nhất?

Lời giải

Số phòng cho thuê lúc giá phòng tăng $x\%$ là:

$$100 - 100 \cdot \frac{4x}{5}\% = 100 - \frac{4x}{5}$$

$$\text{Tổng doanh thu tương ứng là } A(x) = \left(100 - \frac{4x}{5}\right)(480 + 4,8x) = 3,84(125 - x)(100 + x)$$

$$\leq 3,84 \cdot \left(\frac{125 - x + 100 + x}{2} \right)^2 = 48600 \text{ (nghìn đồng)}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $125 - x = 100 + x$ hay $x = 12,5$.

Vậy giá phòng niêm yết là $480 + 4,8 \cdot 12,5 = 540$ (nghìn đồng) thì khách sạn đạt doanh thu cao nhất.

3. Bài tập tự luyện

Bài 1. [VD] Một ca nô đi xuôi dòng trong 2 giờ 30 phút. Biết rằng tốc độ của ca nô khi nước yên lặng không quá 40 km/h và tốc độ của dòng nước là 6 km/h. Chứng minh rằng quãng đường đi được trong thời gian trên không vượt quá 115 km.

Lời giải

Gọi vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là x (km/h), điều kiện: $0 < x < 40$.

Khi đó quãng đường ca nô đi xuôi dòng trong thời gian 2 giờ 30 phút là: $S = \frac{5}{2}(x + 6)$ (km)

Vì $0 < x < 40$ nên $x + 6 < 40 + 6$ hay $x + 6 < 46$ suy ra $\frac{5}{2}(x + 6) < \frac{5}{2} \cdot 46$ hay $S = \frac{5}{2}(x + 6) < 115$.

Vậy quãng đường ca nô đi được trong thời gian trên không vượt quá 115 km.

Bài 2. [VD] Chỉ số khối cơ thể, thường được biết đến với tên viết tắt BMI cho phép đánh giá thể trạng của một người là gầy, bình thường hay béo. Chỉ số khối cơ thể của một người được tính

theo công thức $BMI = \frac{m}{h^2}$, trong đó m là khối lượng cơ thể tính theo kilogam, h là chiều cao tính theo mét. Căn cứ vào bảng đánh giá thể trạng ở người lớn theo BMI đối với khu vực châu Á – Thái Bình Dương, một người đàn ông có $BMI \geq 30$ sẽ bị béo phì độ II (trung bình) hoặc độ III (nặng), người đó cần phải có các biện pháp tập thể dục, thể thao hay thay đổi chế độ dinh dưỡng để có được cơ thể khỏe mạnh. Bác Dũng có chiều cao $1,65$ m và cân nặng ít nhất 82 kg. Hỏi bác Dũng có bị béo phì độ II hay độ III hay không?

Lời giải

Gọi m (kg) là khối lượng cơ thể của bác Dũng, h (m) là chiều cao của bác Dũng. Theo giả thiết, ta

có $m \geq 82, h = 1,65$. Do đó chỉ số BMI của bác Dũng là: $BMI = \frac{m}{(1,65)^2} = \frac{m}{2,7225}$.

Do $m \geq 82$ nên $\frac{m}{2,7225} \geq \frac{82}{2,7225} = 30,11938$.

Vậy bác Dũng bị béo phì độ II hoặc độ III.

Bài 3. [VDC] Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 2016 (cm). Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm) rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

Lời giải

Điều kiện $0 < x < 1008$, thể tích của hình hộp là $V = x(2016 - x)^2$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số không âm $4x; 2016 - 2x; 2016 - 2x$ ta có

$$V = x(2016 - 2x)^2 = \frac{1}{4}x(2016 - 2x)^2 \leq \frac{1}{4} \left(\frac{4x + 2016 - 2x + 2016 - 2x}{3} \right)^3 = 606928896$$

Dấu “=” xảy ra khi $4x = 2016 - 2x$ hay $x = 336$.

Vậy $x = 336$ (cm) thì thể tích lớn nhất.

Bài 4. [VDC] Ông Quang muốn xây một bể nước dạng hình hộp chữ nhật có nắp với dung tích 3000 lít. Đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng cho mỗi mét vuông. Hỏi chi phí thấp nhất ông Quang cần bỏ ra để xây bể nước là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi chiều rộng của đáy bể là x (m), điều kiện $x > 0$.

Khi đó chiều dài của đáy bể là $2x$ (m), diện tích đáy là $2x^2$ (m²).

Do thể tích của bể là $V = 3000$ (l) = 3 (m³) nên chiều cao của bể là $\frac{3}{2x^2}$.

Diện tích xây dựng là diện tích toàn phần của bể là

$$S = 2 \left(2x^2 + x \cdot \frac{3}{2x^2} + 2x \cdot \frac{3}{2x^2} \right) = 2 \left(2x^2 + \frac{9}{2x} \right) = 4x^2 + \frac{9}{x} + \frac{9}{x} \geq 3\sqrt[3]{81} = 9\sqrt[3]{3}.$$

Vậy diện tích xây dựng ít nhất là $S = 9\sqrt[3]{3}$ khi $4x^2 = \frac{9}{x}$ hay $x = \frac{\sqrt[3]{9}}{2}$ (thỏa mãn).

Chi phí xây dựng ít nhất là $9\sqrt[3]{3} \cdot 500000 \approx 6490123$ (đồng).

CHUYÊN ĐỀ: BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ****1. Khái niệm bất phương trình bậc nhất một ẩn.**

Bất phương trình dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b \geq 0$; $ax + b < 0$; $ax + b \leq 0$) trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$ được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn x

VD: Hệ thức $3x - 9 > 0$ bất phương trình bậc nhất một ẩn x

2. Nghiệm của bất phương trình

- Số x_0 là một nghiệm của bất phương trình $A(x) < B(x)$ nếu $A(x_0) < B(x_0)$ là khẳng định đúng.

- Giải bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình.

VD: Cho bất phương trình $3x - 9 > 0$

Với $x = 6$ ta có $3.6 - 9 > 0$ là một khẳng định đúng nên $x = 6$ là một nghiệm của bất phương trình $3x - 9 > 0$.

3. Cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Bất phương trình bậc nhất một ẩn $ax + b < 0$ ($a \neq 0$) được giải như sau:

$$ax + b < 0$$

$$ax < -b$$

$$+) \text{ Nếu } a > 0 \text{ thì } x < \frac{-b}{a}$$

$$+) \text{ Nếu } a < 0 \text{ thì } x > \frac{-b}{a}$$

Các bất phương trình $ax + b > 0; ax + b \geq 0; ax + b \leq 0$ được giải tương tự.

B. BÀI TẬP**DẠNG 1: Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn****PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN**

Câu 1. [NB] Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất một ẩn?

A. $\frac{1}{2}y^2 + 5 \geq 0$

B. $\frac{2}{y} - 3 > 0$

C. $3x - 9 > 0$

D. $0x - 6 < 0$

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình bậc nhất một ẩn có dạng $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$ ($a \neq 0$) nên bất phương trình $3x - 9 > 0$ là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Câu 2. [NB] Trong các số $-3; 4; 0; 2$ số nào là nghiệm của bất phương trình $3x - 7 \geq 0$

A. -3

B. 4

C. 0

D. 2

Lời giải

Chọn B

Thay $x = 4$ ta có $3.4 - 7 = 5 > 0$. Do đó $x = 4$ là nghiệm của bất phương trình $3x - 7 \geq 0$.

Câu 3. [NB] Số 3 là nghiệm của bất phương trình nào trong các phương trình sau?

A. $2x - 5 < 0$

B. $-5x + 7 \geq 0$

C. $2x + 1 > 0$

D. $5x - 10 \leq 0$

Lời giải

Chọn C

Ta có $2.3 + 1 = 7 > 0$. Do đó 3 là nghiệm của bất phương trình $2x + 1 > 0$

Câu 4. [NB] Nghiệm của bất phương trình $2x \geq 4$ là:

A. $x > 2$

B. $x \geq 2$

C. $x < 2$

D. $x \leq 2$

Chọn B

$$\begin{aligned} 2x &\geq 4 \\ x &\geq 4 : 2 \\ x &\geq 2 \end{aligned}$$

Câu 5. [TH] Nghiệm của bất phương trình $4x - 18 > 0$ là:

- A. $x > \frac{9}{2}$. B. $x > \frac{-9}{2}$. C. $x < \frac{9}{2}$. D. $x < \frac{-9}{2}$.

Lời giải**Chọn A**

$$\begin{aligned} 4x - 18 &> 0 \\ 4x &> 18 \\ x &> \frac{18}{4} \\ x &> \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình trên là $x > \frac{9}{2}$

Câu 6. [TH] Tất cả các nghiệm của bất phương trình $5x - 6 \leq 2x + 9$:

- A. $x \geq 5$. B. $x \geq \frac{3}{7}$. C. $x \leq 5$. D. $x \leq \frac{3}{7}$.

Lời giải**Chọn C**

Ta có $5x - 6 \leq 2x + 9$
 Suy ra $5x - 2x \leq 9 + 6$
 $3x \leq 15$
 $x \leq 5$

Vậy nghiệm của bất phương trình trên là $x \leq 5$

Câu 7. [TH] Tất cả các nghiệm của bất phương trình $8x - 12 \leq 14x - 5$ là

- A. $x \leq \frac{-7}{6}$. B. $x \geq \frac{-7}{6}$. C. $x \leq \frac{17}{24}$. D. $x \geq \frac{17}{24}$.

Lời giải**Chọn B**

Ta có $8x - 12 \leq 14x - 5$
 Suy ra $8x - 14x \leq -5 + 12$
 $-6x \leq 7$
 $x \geq \frac{-7}{6}$

Vậy nghiệm của bất phương trình trên là $x \geq \frac{-7}{6}$

Câu 8. [TH] Để $x = 2$ là một nghiệm của bất phương trình $mx + 2 < x + 3 + m$ thì m thoả mãn:

- A. $m = 2$. B. $m < 3$. C. $m > 1$. D. $m < -3$.

Lời giải**Chọn B**

Vì $x = 2$ là một nghiệm của bất phương trình nên
 $m.2 + 2 < 2 + 3 + m$

Suy ra $m \cdot 2 - m < 2 + 3 - 2$
 $m < 3$

Câu 9. [VD] Tất cả các nghiệm của bất phương trình $2(x-3) - 7(x+6) \geq 0$ là

- A. $x \leq \frac{-48}{5}$. B. $x \leq \frac{-48}{5}$. C. $x \geq \frac{36}{5}$. D. $x \leq \frac{36}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2(x-3) - 7(x+6) \geq 0$
 Suy ra $2x - 6 - 7x - 42 \geq 0$
 $-5x - 48 \geq 0$
 $-5x \geq 48$
 $x \leq \frac{-48}{5}$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq \frac{-48}{5}$.

Câu 10. [VD] Giải bất phương trình $\frac{x+2}{3} + 3x + 1 > \frac{x+2}{2}$ ta được nghiệm là:

- A. $x > \frac{-6}{7}$. B. $x < \frac{6}{5}$. C. $x > \frac{-4}{17}$. D. $x > \frac{-6}{11}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{x+2}{3} + 3x + 1 > \frac{x+2}{2}$
 Suy ra $\frac{2(x+2)}{6} + \frac{6(3x+1)}{6} > \frac{3(x+2)}{6}$
 $2x + 4 + 18x + 6 > 3x + 6$
 $17x > -4$
 $x > \frac{-4}{17}$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{-4}{17}$

Câu 11. [VD] Giải phương trình $(2x-1)(x+3) - 3x + 1 \leq (x-1)(2x+3)$ ta được nghiệm là

- A. $x \leq -1$. B. $x \geq -1$. C. $x \geq \frac{-5}{3}$. D. $x \leq \frac{-5}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(2x-1)(x+3) - 3x + 1 \leq (x-1)(2x+3)$
 Suy ra $2x^2 + 5x - 3 - 3x + 1 \leq 2x^2 + x - 3$
 $x \leq -1$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq -1$

Câu 12. [VDC] Bất phương trình $\frac{x+2004}{2005} + \frac{x+2005}{2006} < \frac{x+2006}{2007} + \frac{x+2007}{2008}$ có nghiệm là

- A. $x < 1$. B. $x > 1$. C. $x > -1$. D. $x < -1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có
$$\frac{x+2004}{2005} + \frac{x+2005}{2006} < \frac{x+2006}{2007} + \frac{x+2007}{2008}$$

Suy ra
$$-\frac{x+2004}{2005} - \frac{x+2005}{2006} > -\frac{x+2006}{2007} - \frac{x+2007}{2008}$$

$$1 - \frac{x+2004}{2005} + 1 - \frac{x+2005}{2006} > 1 - \frac{x+2006}{2007} + 1 - \frac{x+2007}{2008}$$

$$\frac{2005}{2005} - \frac{x+2004}{2005} + \frac{2006}{2006} - \frac{x+2005}{2006} > \frac{2007}{2007} - \frac{x+2006}{2007} + \frac{2008}{2008} - \frac{x+2007}{2008}$$

$$\frac{2005-x-2004}{2005} + \frac{2006-x-2005}{2006} > \frac{2007-x-2006}{2007} + \frac{2008-x-2007}{2008}$$

$$\frac{1-x}{2005} + \frac{1-x}{2006} > \frac{1-x}{2007} + \frac{1-x}{2008}$$

$$(1-x) \left(\frac{1}{2005} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008} \right) > 0$$

$$1-x > 0 \quad \left(\text{vì } \frac{1}{2005} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008} > 0 \right)$$

$$1 > x$$

Vậy bất phương trình trên có nghiệm là $1 > x$

2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (Soạn khoảng 4 câu): Các khẳng định đúng sai được sắp xếp theo thứ tự từ dễ đến khó, các khẳng định về cùng một nội dung hỏi.

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Cho bất phương trình $3x - 4 > x - 2$

- a) Vế trái của bất phương trình trên là $3x - 4$
 b) Vế phải của bất phương trình trên là $x - 2$
 c) $x = 2$ là một nghiệm của bất phương trình trên.
 d) $x = -3$ là một nghiệm của bất phương trình trên.

Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) Đ

d) S

- a) Vế trái của bất phương trình là $3x - 4$ nên a đúng
 b) Vế phải của bất phương trình là $x - 2$ nên b đúng

c) Ta có: $3 \cdot 2 - 4 = 2; 2 - 2 = 0$

Suy ra $3 \cdot 2 - 4 > 2 - 2$

Vậy $x = 2$ là một nghiệm của bất phương trình $3x - 4 > x - 2$. Nên c đúng

d) Ta có: $3 \cdot (-3) - 4 = -13; -3 - 2 = -5$

Suy ra $3 \cdot (-3) - 4 < -3 - 2$

Vậy $x = -3$ không là một nghiệm của bất phương trình $3x - 4 > x - 2$. Nên d sai

Câu 2. Cho bất phương trình $7x - 5 > -2$

- a) Ta có thể biến đổi bất phương trình trên về dạng $7x > -7$
 b) Ta có thể biến đổi bất phương trình trên về dạng $7x > 3$
 c) $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình trên.

d) Nghiệm của bất phương trình trên là $x < \frac{3}{7}$

a) S

b) Đ

c) Đ

d) S

a) Ta có: $7x - 5 > -2$

$$\text{Suy ra } 7x - 5 + 5 > -2 + 5 \\ 7x > 3$$

Nên a sai

b) Ta có: $7x - 5 > -2$

$$\text{Suy ra } 7x - 5 + 5 > -2 + 5 \\ 7x > 3$$

Nên b đúng

c) Ta có $7 \cdot 1 - 5 = 2 > -2$ Suy ra $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình $7x - 5 > -2$. Nên c đúngd) Ta có $7x - 5 > -2$

$$\text{Suy ra } 7x > -2 + 5 \\ 7x > 3 \\ x > \frac{3}{7}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình trên là $x > \frac{3}{7}$ nên

Câu 3. Cho bất phương trình $2(x - 3) - 5 > 2(x - 7)$

a) Bất phương trình trên vô nghiệm.

b) Bất phương trình trên có vô số nghiệm.

c) Nghiệm của bất phương trình trên là $x < -3$ d) Nghiệm của bất phương trình trên là $x > -3$

a) S

b) Đ

Lời giải

c) S

d) Sai

a) Ta có: $2(x - 3) - 5 > 2(x - 7)$

$$\text{Suy ra } 2x - 6 - 5 > 2x - 14 \\ 2x - 2x > -14 + 6 + 5 \\ 0x > -3 \text{ đúng với mọi } x$$

Vậy bất phương trình trên vô số nghiệm.

Nên a sai

b) Ta có: $2(x - 3) - 5 > 2(x - 7)$

$$\text{Suy ra } 2x - 6 - 5 > 2x - 14 \\ 2x - 2x > -14 + 6 + 5 \\ 0x > -3 \text{ đúng với mọi } x$$

Vậy bất phương trình trên vô số nghiệm.

Nên b đúng

c) Ta có: $2(x - 3) - 5 > 2(x - 7)$

$$\text{Suy ra } 2x - 6 - 5 > 2x - 14 \\ 2x - 2x > -14 + 6 + 5 \\ 0x > -3 \text{ đúng với mọi } x$$

Vậy bất phương trình trên vô số nghiệm.

Nên c sai

d) Ta có: $2(x - 3) - 5 > 2(x - 7)$

$$\text{Suy ra } 2x - 6 - 5 > 2x - 14$$

$$2x - 2x > -14 + 6 + 5$$

$$0x > -3 \text{ đúng với mọi } x$$

Vậy bất phương trình trên vô số nghiệm.

Nên d sai

$$\frac{x+4}{5} < \frac{x+3}{3} - \frac{x-2}{2}$$

Câu 4. Cho bất phương trình

a) Bất phương trình trên là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

$$\frac{x+4}{5} - \frac{x+3}{3} + \frac{x-2}{2} < 0$$

b) Có thể biến đổi bất phương trình trên về dạng

$$\frac{6(x+4)}{30} < \frac{10(x+3)}{30} - \frac{15(x-2)}{30}$$

c) Có thể biến đổi bất phương trình trên về dạng

d) Số nguyên lớn nhất thỏa mãn bất phương trình trên là 3

Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) Đ

d) Đ

a) Bất phương trình trên là bất phương trình bậc nhất một ẩn nên a đúng

$$\frac{x+4}{5} < \frac{x+3}{3} - \frac{x-2}{2}$$

b) Ta có

$$\frac{x+4}{5} - \frac{x+3}{3} + \frac{x-2}{2} < 0$$

Nên b đúng

$$\frac{x+4}{5} < \frac{x+3}{3} - \frac{x-2}{2}$$

c) Ta có

$$\frac{6(x+4)}{30} < \frac{10(x+3)}{30} - \frac{15(x-2)}{30}$$

Suy ra

Nên c đúng

$$\frac{x+4}{5} < \frac{x+3}{3} - \frac{x-2}{2}$$

d) Ta có

$$\frac{6(x+4)}{30} < \frac{10(x+3)}{30} - \frac{15(x-2)}{30}$$

Suy ra

$$6x + 24 < 10x + 30 - 15x + 30$$

$$6x - 10x + 15x < 30 + 30 - 24$$

$$11x < 36$$

$$x < \frac{36}{11}$$

$$x < 3,27$$

Vậy số nguyên lớn nhất thỏa mãn bất phương trình đã cho là 3

Nên d đúng

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN (soạn khoảng 6 câu)

Câu 1. [NB] Bất phương trình $3mx - 6 > 0$ là bất phương bậc nhất một ẩn khi m nhận giá trị là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $m \neq 0$

Bất phương trình $3mx - 6 > 0$ là bất phương bậc nhất một ẩn khi $3m \neq 0$. Do đó $m \neq 0$

Câu 2. [NB] Bất phương trình $5x - 6 > 3$ có nghiệm là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $x > \frac{9}{5}$

Ta có $5x - 6 > 3$

Suy ra $5x > 3 + 6$
 $x > 9$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x > \frac{9}{5}$

Câu 3. [NB] Khi thực hiện cộng cả hai vế của bất phương trình $7x - 9 > 8$ với 9 ta được bất phương trình nào?

Lời giải

Đáp án: $7x > 17$

Ta có $7x - 9 > 8$

Suy ra $7x - 9 + 9 > 8 + 9$
 $7x > 17$

Câu 4. [NB] Chia cả hai vế của bất phương trình $-5x \geq 20$ cho -5 ta được bất phương trình nào?

Lời giải

Đáp án: $x \leq -4$

Ta có $-5x \geq 20$

Suy ra $\frac{-5x}{-5} \geq \frac{20}{-5}$
 $x \leq -4$

Câu 5. [TH] Tìm nghiệm của bất phương trình $12x - 9 > 3x + 18$?

Lời giải

Đáp án: $x > 3$

Ta có $12x - 9 > 3x + 18$

Suy ra $12x - 3x > 18 + 9$
 $9x > 27$
 $x > 3$

Vậy nghiệm của bất phương trình trên là $x > 3$

Câu 6. [TH] Với giá trị nào của m thì phương trình $x - m + 2 = 0$ có nghiệm lớn hơn 3?

Lời giải

Đáp án: $m > 5$

Ta có $x = m - 2$

Để $x > 3$ thì $m - 2 > 3$

Suy ra $m > 5$

Câu 7. [VD] Cho bất phương trình $(m + 1)x < m^2 - 1$ với tham số $m > -1$. Điều kiện của m để bất phương trình trên có nghiệm $x < 3$ là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $m = 4$

Ta có $(m + 1)x < m^2 - 1$

Suy ra $(m + 1)x < (m + 1)(m - 1)$

$$x < \frac{(m + 1)(m - 1)}{m + 1} \quad (\text{vì } m + 1 > 0)$$

$$x < m - 1$$

Để bất phương trình trên có nghiệm $x < 3$ thì $m - 1 \geq 3 \Leftrightarrow m \geq 4$. Do đó $m \geq 4$

Câu 8. [VD] Cho biểu thức $A = 1 - \frac{2x+3}{2}$. Để biểu thức $A < 0$ thì x phải thỏa mãn điều kiện gì?
Lời giải

Đáp án: $x > -\frac{1}{2}$

Ta có $A = 1 - \frac{2x+3}{2}$

Suy ra $A = \frac{2}{2} - \frac{2x+3}{2}$

$$A = \frac{2-2x-3}{2}$$

$$A = \frac{-1-2x}{2}$$

$A < 0$ khi $\frac{-1-2x}{2} < 0$

Suy ra $-1-2x < 0$
 $-2x < 1$

$$x > -\frac{1}{2}$$

Câu 9. [VDC] Cho bất đẳng thức $\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ac}{a+c} > a+b+c$ ($a, b, c > 0$). Khi đó x thỏa mãn điều kiện gì?

Lời giải

Đáp án: $x > ab+ac+bc$

Ta có $\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ac}{a+c} > a+b+c$

$$\frac{x-ab}{a+b} - c + \frac{x-bc}{b+c} - a + \frac{x-ac}{a+c} - b > 0$$

$$\frac{x-ab-ac-bc}{a+b} + \frac{x-bc-ab-ac}{b+c} + \frac{x-ac-ab-bc}{a+c} > 0$$

$$(x-ab-ac-bc) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \right) > 0$$

$$x-ab-ac-bc > 0 \quad (vì \quad a, b, c > 0 \Rightarrow \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} > 0)$$

$$x > ab+ac+bc$$

PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp giải:

Đưa bất phương trình về dạng bất phương trình bậc nhất một ẩn $ax+b > 0$, $ax+b \geq 0$,
 $ax+b < 0$, $ax+b \leq 0$ ($a \neq 0$)

Sử dụng các phép biến đổi bất phương trình

+) $ax+b < 0$

$$ax < -b$$

$$+) \text{ Nếu } a > 0 \text{ thì } x < \frac{-b}{a}$$

$$+) \text{ Nếu } a < 0 \text{ thì } x > \frac{-b}{a}$$

Kết luận nghiệm của bất phương trình

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1 [NB]: Tìm điều kiện của tham số m để các bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

a) $mx + 5 < 0$

b) $(m+1)x - 7 \geq 0$

c) $(2m+1)x + 12 \geq 7$

d) $(m^2-1)x^2 + 5x < 0$

Lời giải

a) Bất phương trình $mx + 5 < 0$ là bất phương trình bậc nhất một ẩn khi $m \neq 0$

b) Bất phương trình $(m+1)x - 7 \geq 0$ là bất phương trình bậc nhất một ẩn khi $m+1 \neq 0$. Suy ra $m \neq -1$

c) Bất phương trình $(2m+1)x + 12 \geq 7$ là bất phương trình bậc nhất một ẩn khi $2m+1 \neq 0$. Suy ra $m \neq -\frac{1}{2}$.

d) Bất phương trình $(m^2-1)x^2 + 5x < 0$ là bất phương trình bậc nhất một ẩn khi $m^2-1 \neq 0$. Suy ra $m \neq \pm 1$.

Ví dụ 2 [TH]: Giải các bất phương trình sau.

a) $2x - 20 < 0$

b) $30 - 5x \geq 5$

c) $7x - 10 < 15x + 3$

c) $9x + 30 \geq 20x + 8$

Lời giải

a) $2x - 20 < 0$
 $2x < 20$
 $x < 10$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x < 10$

b) $30 - 5x \geq 5$
 $-5x \geq 5 - 30$
 $-5x \geq -25$
 $x \leq \frac{-25}{-5}$
 $x \leq 5$

Vậy nghiệm của bất phương trình trên là $x \leq 5$

Ví dụ 3 [TH]: Giải các bất phương trình sau.

a) $2(x-3) + 5 < 3(x-6) + 7$

b) $5(x-3) + 7 > 2(x+3) - 11$

c) $3(x+7) - 15 \geq 18 - 2(x-8)$

d) $-5(2x-2) - 13 \geq 20 - 3(x+7)$

Lời giải

a) Ta có: $2(x-3) + 5 < 3(x-6) + 7$
 $2x - 6 + 5 < 3x - 18 + 7$
 $2x - 3x < -18 + 7 + 6 - 5$
 $-x < -18 + 7 + 6 - 5$
 $-x < -10$

$$x > 10$$

Vậy nghiệm của bất phương trình trên là $x > 10$

b) Ta có $5(x-3)+7 > 2(x+3)-11$

Suy ra $5x-15+7 > 2x+6-11$

$$5x-2x > 6-11+15-7$$

$$3x > 6-11+15-7$$

$$3x > 3$$

$$x > 1$$

Vậy nghiệm của bất phương trình trên là $x > 1$

c) Ta có $3(x+7)-15 \geq 18-2(x-8)$

Suy ra $3x+21-15 \geq 18-2x+16$

$$3x+2x \geq 18+16-21+15$$

$$5x \geq 28$$

$$x \geq \frac{28}{5}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình trên là $x \geq \frac{28}{5}$

d) Ta có: $-5(2x-2)-13 \geq 20-3(x+7)$

Suy ra $-10x+10-13 \geq 20-3x-21$

$$-10x+3x \geq 20-21-10+13$$

$$-7x \geq 2$$

$$x \leq \frac{-2}{7}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình trên là $x \leq \frac{-2}{7}$

Ví dụ 4 [VD]: Giải các bất phương trình sau.

a) $x^2-3x+1 > 2(x-1)-x(3-x)$

b) $x(x^2-2)+7x+40 > 3(x+5)+x(x^2-3)$

c) $(x-1)^2+x^2 \leq (x+1)^2+(x+2)^2$

d) $(x^2+1)(x-6) \leq (x-2)^3$

Lời giải

a) Ta có $x^2-3x+1 > 2(x-1)-x(3-x)$

Suy ra $x^2-3x+1 > 2x-2-3x+x^2$

$$2x < 3$$

$$x < \frac{3}{2}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình trên là $x < \frac{3}{2}$

b) Ta có $x(x^2-2)+7x+40 > 3(x+5)+x(x^2-3)$

Suy ra $x^3-2x+7x+40 > 3x+15+x^3-3x$

$$5x > 15-40$$

$$5x > -25$$

$$x > -5$$

Vậy nghiệm của bất phương trình trên là $x > -5$

c) Ta có $(x-1)^2+x^2 \leq (x+1)^2+(x+2)^2$

Suy ra $x^2 - 2x + 1 + x^2 \leq x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4$
 $-2x - 2x - 4x \leq 4$
 $-8x \leq 4$
 $x \geq \frac{-4}{8}$
 $x \geq \frac{-1}{2}$

Vậy nghiệm của bất phương trình trên là $x \geq \frac{-1}{2}$

d) Ta có $(x^2 + 1)(x - 6) \leq (x - 2)^3$

Suy ra $x^3 - 6x^2 + x - 6 \leq x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 - 2^3$
 $x^3 - 6x^2 + x - 6 \leq x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
 $x - 12x \leq -8 + 6$
 $-11x \leq -2$
 $x \geq \frac{2}{11}$

Vậy nghiệm của bất phương trình trên là $x \geq \frac{2}{11}$

Ví dụ 5 [VD]: Giải các bất phương trình sau.

a) $\frac{2x-1}{2} - \frac{x+3}{3} < \frac{x+6}{6}$

c) $2x + \frac{2x+1}{2} > 3x - \frac{1}{5}$

b) $\frac{3x+7}{2} - \frac{x+5}{10} \geq \frac{2x-6}{5}$

d) $\frac{x-1}{2} - \frac{7x+3}{15} \leq \frac{2x+1}{3} + \frac{3-2x}{5}$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{2x-1}{2} - \frac{x+3}{3} < \frac{x+6}{6}$
Suy ra $\frac{3(2x-1) - 2(x+3)}{6} < \frac{x+6}{6}$
 $6x - 3 - 2x - 6 < x + 6$
 $6x - 2x - x < 6 + 6 + 3$
 $3x < 15$
 $x < 5$

Vậy nghiệm của bất phương trình trên là $x < 5$

b) Ta có $\frac{3x+7}{2} - \frac{x+5}{10} \geq \frac{2x-6}{5}$
Suy ra $\frac{5(3x+7) - (x+5)}{10} \geq \frac{2(2x-6)}{10}$
 $15x + 35 - x - 5 \geq 4x - 12$
 $15x - x - 4x \geq -12 + 5 - 35$
 $10x \geq -42$
 $x \geq -4,2$

Vậy nghiệm của bất phương trình trên là $x \geq -4,2$

c) Ta có

$$2x + \frac{2x+1}{2} > 3x - \frac{1}{5}$$

Suy ra

$$\frac{10.2x}{10} + \frac{5(2x+1)}{10} > \frac{10.3x}{10} - \frac{2}{10}$$
$$20x + 10x + 5 > 30x - 2$$
$$20x + 10x - 30x > -2 - 5$$
$$0x > -7 \text{ đúng với mọi } x$$

Vậy bất phương trình đã cho có vô số nghiệm.

d) Ta có

$$\frac{x-1}{2} - \frac{7x+3}{15} \leq \frac{2x+1}{3} + \frac{3-2x}{5}$$

Suy ra

$$\frac{15(x-1)}{30} - \frac{2(7x+3)}{30} \leq \frac{10(2x+1)}{30} + \frac{6(3-2x)}{30}$$
$$15x - 15 - 14x - 6 \leq 20x + 10 + 18 - 12x$$
$$15x - 14x - 20x + 12x \leq 10 + 18 + 15 + 6$$
$$-7x \leq 49$$
$$x \geq -7$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là $x \geq -7$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1 [NB]: Tìm điều kiện của tham số m để các bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

a) $mx - 7 > 0$
c) $(5m - 15)x + 5 \geq 20$

b) $(m + 7)x + 9 \geq 0$
d) $(m^2 - 9)x^2 + 6x - 4 < 13$

Hướng dẫn

a) $m \neq 0$
b) $m + 7 \neq 0$
Suy ra $m \neq -7$
c) $5m - 15 \neq 0$
Suy ra $m \neq 3$
d) $m^2 - 9 \neq 0$
Suy ra $m \neq \pm 3$

Bài 2 [TH]: Giải các bất phương trình sau.

a) $7x - 63 > 0$ b) $60 - 6x \geq 102$
c) $12x - 23 \geq 25x + 3$ c) $-21x + 20 \geq 20x - 103$

Hướng dẫn

a) $7x - 63 > 0$
Suy ra $x > 9$

b) $60 - 6x \geq 102$
Suy ra $-6x \geq 42$
 $x \leq -7$

c) $12x - 23 \geq 25x + 3$
Suy ra $-13x \geq 46$
 $x \leq -2$

d) $-21x + 20 \geq 20x - 103$
Suy ra $-21x - 20x \geq -103 - 20$
 $x \leq 3$

Bài 3 [TH]: Giải các bất phương trình sau.

a) $4(x-1)+9 < 2(x-3)+20$

b) $7(2-x)+9 > 3(x+6)-15$

c) $2(x-3)+20 > -27-4(x-10)$

d) $-7(3x+1)+4 \leq 35-5(x-10)$

Hướng dẫn

a) $4(x-1)+9 < 2(x-3)+20$

Suy ra $2x < 9$

$$x < \frac{9}{2}$$

b) $7(2-x)+9 > 3(x+6)-15$

Suy ra $-10x > -20$

$$x < 2$$

c) $2(x-3)+20 > -27-4(x-10)$

Suy ra $6x > -1$

$$x > \frac{-1}{6}$$

d) $-7(3x+1)+4 \leq 35-5(x-10)$

Suy ra $-16x \leq 88$

$$x \geq \frac{-11}{2}$$

Bài 4 [VD]: Giải các bất phương trình sau.

a) $2x^2+9x-3 > 3(x-5)+2x(x-7)$

b) $x(3-x^2)-2x < 10(x+1)-x(x^2-9)$

c) $(x+2)^2+x^2 \geq (x+3)^2+(x-2)^2$

d) $(2x^2+2)(4x+6) \leq (2x+1)^3$

Hướng dẫn

a) $2x^2+9x-3 > 3(x-5)+2x(x-7)$

Suy ra $20x > -12$

$$x > -\frac{3}{5}$$

b) $x(3-x^2)-2x < 10(x+1)-x(x^2-9)$

Suy ra $-18x < 10$

$$x > \frac{-5}{9}$$

c) $(x+2)^2+x^2 \geq (x+3)^2+(x-2)^2$

Suy ra $2x \geq 9$

$$x \geq \frac{9}{2}$$

d) $(2x^2+2)(4x+6) \leq (2x+1)^3$

Suy ra $5x \leq -11$

$$x \leq \frac{-11}{5}$$

Bài 5 [VD]: Giải các bất phương trình sau.

$$\text{a)} \quad \frac{x-5}{3} + \frac{2x-3}{4} < \frac{x+7}{12}$$

$$\text{c)} \quad 3x + \frac{x-1}{3} > 4x + \frac{1}{6}$$

$$\text{b)} \quad \frac{2x+5}{3} - \frac{x+7}{15} \leq \frac{5x+8}{5}$$

$$\text{d)} \quad \frac{x+2}{6} - \frac{x+5}{3} \leq \frac{x+3}{5} + \frac{x+6}{2}$$

Hướng dẫn

$$\text{a)} \quad \frac{x-5}{3} + \frac{2x-3}{4} < \frac{x+7}{12}$$

$$\text{Suy ra} \quad \frac{x-5}{3} + \frac{2x-3}{4} < \frac{x+7}{12}$$

$$\frac{4(x-5)}{12} + \frac{3(2x-3)}{12} < \frac{x+7}{12}$$

$$9x \leq 36$$

$$x \leq 4$$

$$\text{b)} \quad \frac{2x+5}{3} - \frac{x+7}{15} \leq \frac{5x+8}{5}$$

$$\text{Suy ra} \quad \frac{5(2x+5)}{15} - \frac{x+7}{15} \leq \frac{3(5x+8)}{15}$$

$$-6x \leq 6$$

$$x \geq -1$$

$$\text{c)} \quad 3x + \frac{x-1}{3} > 4x + \frac{1}{6}$$

$$\text{Suy ra} \quad \frac{6.3x}{6} + \frac{2(x-1)}{6} > \frac{6.4x}{6} + \frac{1}{6}$$

$$-4x > 3$$

$$x < \frac{-3}{4}$$

$$\text{d)} \quad \frac{x+2}{6} - \frac{x+5}{3} \leq \frac{x+3}{5} + \frac{x+6}{2}$$

$$\text{Suy ra} \quad \frac{5(x+2)}{30} - \frac{10(x+5)}{30} \leq \frac{6(x+3)}{30} + \frac{15(x+6)}{30}$$

$$-26x \leq 148$$

$$x \leq \frac{-74}{13}$$

DẠNG 2: BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN**PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN**

Câu 1. [NB] Ông Trí dự định chạy bộ tổng cộng ít nhất 6500m vào buổi sáng và buổi chiều trong ngày. Buổi sáng ông Trí chạy được 4000m . Gọi x là số mét ông Trí chạy bộ vào buổi chiều. Điều kiện quãng đường chạy của ông Trí là

- A. $4000 + x < 6500$ B. $4000 + x \geq 6500$ C. $4000 + x \leq 6500$ D. $4000 + x > 6500$

Lời giải

Chọn B

Biểu thức biểu thị điều kiện quãng đường chạy ông Trí là $4000 + x \geq 6500$.

Câu 2. [NB] Để hưởng ứng phong trào “Trồng cây gây rừng”, lớp 9A có kế hoạch trồng nhiều nhất 100 cây xanh. Lớp 9A đã trồng được 54 cây. Nếu gọi x là số cây cần trồng thêm thì điều kiện tổng số cây lớp 9A trồng là

- A. $54 + x < 100$ B. $x + 54 \geq 100$ C. $54 + x \leq 100$ D. $54 + 100 > x$

Lời giải

Chọn C

Biểu thức biểu thị điều kiện tổng số cây lớp 9A trồng là $54 + x \leq 100$

Câu 3. [NB] Bạn Lan dùng 85000 đồng đi mua vở: Loại 1 giá 7500 đồng/quyển, loại 2 giá 6000 đồng/quyển. Gọi x là số vở mỗi loại bạn mua thì bất phương trình lập được thể hiện mối quan hệ giữa số tiền Lan mua và Lan mang đi là

- A. $7500x + 6000x < 85000$ B. $7500x + 6000x \geq 85000$
C. $7500x + 6000x \leq 85000$ D. $7500x + 6000x = 85000$

Lời giải

Chọn C

Gọi số vở mỗi loại mà An có thể mua nhiều nhất là x ($x \in \mathbb{N}^*$).

Như vậy tổng số tiền mua x quyển giá 7500 đồng và x quyển giá 6000 nhỏ hơn hoặc bằng 85000 đồng hay $7500x + 6000x \leq 85000$.

Câu 4. [NB] Hai bạn Nga và An vào cửa hàng mua bút. Biết giá của một cái bút bi là x nghìn đồng và một cái bút chì là 10 nghìn đồng. Bạn Nga mua hai cái bút bi và hai bút chì. Bạn An mua ba cái bút bi và hai cái bút chì. Bất đẳng thức biểu thị đúng sự so sánh số tiền của hai bạn phải trả cho cửa hàng là

- A. $2x + 20 < 3x + 20$ B. $2x + 20 \geq 3x + 20$ C. $3x + 20 = 2x + 20$ D. $3x + 20 < 2x + 20$

Lời giải

Chọn A

Số tiền bạn Nga phải trả cho cửa hàng là $2x + 20$ (nghìn đồng)

Số tiền bạn An phải trả cho cửa hàng là $3x + 20$ (nghìn đồng)

Vì $2x < 3x$ nên $2x + 20 < 3x + 20$

Câu 5. [TH] Một người có số tiền không quá 72000 đồng gồm các tờ giấy bạc với mệnh giá 5000 đồng. Hỏi người đó có nhiều nhất bao nhiêu tờ giấy bạc loại 5000 đồng?

- A. 12. B. 13. C. 14. D. 15.

Lời giải

Chọn C

Gọi x (tờ) là số tờ giấy bạc loại 5000 đồng người đó có ($x \in \mathbb{N}^*$).

Số tiền ứng với x tờ giấy bạc loại 5000 đồng là $5000x$ (đồng)

Theo bài, người đó có không quá 72000 đồng nên ta có bất phương trình:

$$5000x \leq 72000$$

$$x \leq \frac{72}{5}$$

$$\forall x \in \mathbb{N}^*, x \leq \frac{72}{5} \Rightarrow x = 14$$

Vậy người đó có nhiều nhất 14 tờ loại 5000 đồng.

Câu 6. [TH] Bạn Thanh có 100 nghìn đồng. Bạn muốn mua một cái bút giá 18 nghìn đồng và một số quyển vở, mỗi quyển vở giá 7 nghìn đồng. Hỏi bạn Thanh mua được nhiều nhất bao nhiêu quyển vở?

A. 11.

B. 12.

C. 13.

D. 14.

Lời giải

Chọn A

Gọi x (quyển) là số vở mà Thanh có thể mua. ($x \in \mathbb{N}^*$).

Số tiền mua x quyển vở là $7x$ (nghìn đồng).

Số tiền mua một cái bút và một số quyển vở là $18 + 7x$ (nghìn đồng).

Theo bài, bạn Thanh có 100 nghìn đồng nên ta có bất phương trình:

$$18 + 7x \leq 100$$

$$7x \leq 100 - 18$$

$$7x \leq 82$$

$$x \leq \frac{82}{7}$$

Vì $x \in \mathbb{N}^*$ nên Thanh có thể mua được nhiều nhất là 11 quyển vở.

Câu 7. [TH] Một hãng taxi có giá mở cửa là 15 nghìn đồng và giá 12 nghìn đồng cho mỗi kilômét tiếp theo. Hỏi với 200 nghìn đồng thì hành khách có thể di chuyển được tối đa bao nhiêu kilômét (làm tròn đến hàng đơn vị)?

A. 20.

B. 14.

C. 10.

D. 15.

Lời giải

Chọn D

Gọi x là số kilômét mà hành khách đó có thể di chuyển với 200 nghìn đồng ($x > 0$).

Giá tiền cho x km là $12x$ (nghìn đồng).

Giá mở cửa của taxi là 15 nghìn đồng nên số tiền cần thanh toán khi đi x km là: $15 + 12x$ (nghìn đồng). Theo bài, ta có:

$$15 + 12x \leq 200$$

$$12x \leq 185$$

$$x \leq \frac{185}{12}$$

Mà $x > 0$ và làm tròn đến hàng đơn vị nên với 200 nghìn đồng thì hành khách có thể di chuyển được tối đa 15 kilômét.

Câu 8. [TH] Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn một tháng là $0,4\%$ / tháng. Hỏi nếu muốn có số tiền lãi hàng tháng ít nhất là 3 triệu đồng thì số tiền gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)?

A. 700.

B. 720.

C. 750.

D. 740.

Lời giải

Chọn C

Gọi x (triệu đồng) là số tiền gửi tiết kiệm ($x > 0$).

Khi đó số tiền lãi một tháng là $0,4\% \cdot x = 0,004x$ (triệu đồng).

Để số tiền lãi hàng tháng ít nhất là 3 triệu đồng thì ta phải có:

$$0,004x \geq 3$$

$$x \geq 750$$

Vậy số tiền tiết kiệm ít nhất là 750 triệu đồng để có số tiền lãi hàng tháng ít nhất là 3 triệu đồng.

Câu 9. [VD] Lan có số tiền không quá 50000 đồng gồm 15 tờ giấy bạc với hai loại mệnh giá: Loại 2000 đồng và loại 5000 đồng. Hỏi Lan có nhiều nhất bao nhiêu tờ giấy bạc loại 5000 đồng?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Gọi x là số tờ giấy bạc loại 5000 đồng Lan có ($0 < x < 10, x \in \mathbb{N}$)

Số tờ giấy bạc loại 2000 đồng Lan có là $15 - x$ (tờ)

Tổng số tiền Lan có là: $5x + 2(15 - x)$ (nghìn đồng)

Vì số tiền Lan có không quá 50 nghìn đồng nên ta có:

$$5x + 2(15 - x) \leq 50$$

$$x \leq \frac{20}{3}$$

Giải bất phương trình trên được

Kết hợp với điều kiện và x lớn nhất nên $x = 6$

Câu 10. [VD] Bạn Nam tham dự kì thi kiểm tra năng lực tiếng Anh gồm bốn bài, mỗi bài kiểm tra được cho điểm là số nguyên từ 0 đến 10. Điểm trung bình của ba bài kiểm tra An đã làm là 6,6. Hỏi bài kiểm tra thứ tư An cần làm được thấp nhất là bao nhiêu điểm để có điểm trung bình của cả bốn bài kiểm tra từ 7 điểm trở lên?

A. 8.

B. 7.

C. 6.

D. 9.

Lời giải

Chọn D

Gọi x là số điểm bài kiểm tra thứ tư của An (x nguyên, $0 \leq x \leq 10$)

Theo bài ra ta có bất phương trình

$$\frac{x + 6,6 \cdot 3}{4} \geq 7$$

Giải ra được $x \geq 8,2$

Mà x nguyên, $0 \leq x \leq 10$

Suy ra $x \in \{9; 10\}$

Vậy bài kiểm tra thứ tư An cần làm được thấp nhất là 9 điểm.

Câu 11. [VD] Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn 12 tháng là 6,9% / năm. Bà Hoa dự kiến gửi một khoản tiền vào ngân hàng này và cần số tiền lãi hàng năm ít nhất là 50 triệu để chi tiêu. Hỏi số tiền bà Hoa cần gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)

A. 725.

B. 750.

C. 800.

D. 650.

Lời giải

Chọn A

Gọi x (triệu đồng) là số tiền bà Hoa cần gửi tiết kiệm. Ta có số tiền lãi gửi tiết kiệm x (triệu đồng) trong một năm là $0,069x$ (triệu đồng)

Để có số tiền lãi ít nhất là 50 triệu đồng/năm thì ta phải có

$$0,069x \geq 50$$

$$x \geq 724,64$$

Vậy bà Hoa cần gửi ngân hàng ít nhất 725 triệu đồng

Câu 12. [VDC] Sau một thời gian phát hành, nhà sản xuất đã ra quyết định giảm giá một dòng máy tính bảng để khuyến mãi. Đợt một giảm 5% đợt hai giảm 4% trên giá sau khi giảm đợt một. Sau hai đợt giảm giá, một chiếc máy tính bảng hiện được bán với giá gần đến 4560000 đồng. Hỏi giá chiếc máy tính bảng ban đầu khoảng bao nhiêu ?

A. khoảng 5 triệu đồng.

B. khoảng 6 triệu đồng.

C. khoảng 7 triệu đồng.

D. khoảng 8 triệu đồng.

Lời giải

Chọn A

Gọi x (đồng) là giá ban đầu của máy tính bảng

Theo đề bài ta có

$$x(100\% - 5\%)(100\% - 4\%) < 4560000$$

$$x < 5000000$$

Vậy máy tính bảng ban đầu có giá khoảng 5 triệu đồng.

2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (Soạn khoảng 4 câu):

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Quãng đường đi từ A đến B dài 50 km. Một ô tô đi từ A đến B, khởi hành lúc 7 giờ.

Hỏi ô tô phải đi với vận tốc bao nhiêu km/h để đến B trước 9 giờ cùng ngày? Gọi x là vận tốc của ô tô ($x > 0$, km/h).

a) Thời gian đi từ A đến B là 2 giờ.

$$\frac{50}{x}$$

b) Thời gian đi từ A đến B là $\frac{50}{x}$ (giờ)

c) Để đến B trước 9 giờ thì thời gian đi cần nhỏ hơn hoặc bằng 2.

$$\frac{50}{x} < 2$$

d) Bất phương trình thỏa mãn bài toán là $\frac{50}{x} < 2$.

Lời giải

a) S

b) Đ

c) S

d) Đ

Gọi x là vận tốc của ô tô ($x > 0$, km/h).

$$\frac{50}{x}$$

Thời gian đi từ A đến B là $\frac{50}{x}$ (giờ). Khẳng định a sai, b đúng.

Để đến B trước 9 giờ thì thời gian đi cần nhỏ hơn $9 - 7 = 2$ (giờ). Khẳng định c sai.

$$\frac{50}{x} < 2$$

Theo bài ta có: $\frac{50}{x} < 2$. Khẳng định d đúng.

Câu 2. Bạn Dương có số tiền không quá 70000 đồng gồm 15 tờ tiền mệnh giá 2000 đồng và 5000 đồng. Hỏi bạn Dương có nhiều nhất bao nhiêu tờ tiền loại 5000 đồng? Gọi số tờ tiền loại 5000 đồng là x (x nguyên dương).

a) Số tờ loại 2000 đồng là $x - 15$ (tờ)

b) Số tờ loại 2000 đồng là $15 - x$ (tờ)

c) Số tiền loại 5000 đồng và 2000 đồng lần lượt là $5000x$; $2000(15 - x)$ (đồng)

d) Bất phương trình thỏa mãn bài toán là: $5000x + 2000(15 - x) \leq 70000$.

Lời giải

a) S

b) Đ

c) Đ

d) Đ

Gọi số tờ tiền loại 5000 đồng là x (x nguyên dương)

Số tờ loại 2000 đồng là $15 - x$ (tờ). Khẳng định a sai, b đúng.

Số tiền loại 5000 đồng là: $5000 \cdot x$ (đồng)

Số tiền loại 2000 đồng là: $2000 \cdot (15 - x)$ (đồng). Khẳng định c đúng.

Theo bài ta có: $5000x + 2000(15 - x) \leq 70000$. Khẳng định d đúng.

Câu 3. Bạn An có 100000 đồng đi mua vở. Bạn mua 2 loại: loại I giá 7000 đồng một quyển, loại II giá 5000 đồng một quyển. Hỏi An mua được nhiều nhất bao nhiêu quyển vở loại I biết An đã mua 5 quyển loại II.

a) Số tiền mua vở loại II là 25000 đồng.

b) Số tiền mua vở loại I là $7000 \cdot x$ (đồng) với x là số vở loại I cần mua.

c) Mua được nhiều nhất 11 quyển vở loại I.

d) Mua được nhiều nhất 10 quyển vở loại I.

Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) S

d) Đ

Gọi số vở loại I là x (quyển, x nguyên dương)

Số tiền mua vở loại II là: $5 \cdot 5000 = 25000$ (đồng). Khẳng định a đúng

Số tiền mua vở loại I là: $7000 \cdot x$ (đồng). Khẳng định b đúng

Vì bạn An có 100000 đồng nên ta có bất phương trình:

$$7000 \cdot x + 25000 \leq 100000$$

$$\Rightarrow 7000 \cdot x \leq 100000 - 25000$$

$$7000 \cdot x \leq 75000$$

$$x \leq \frac{75000}{7000} \approx 10,71$$

Mà x nguyên dương nên $x = 10$. Khẳng định c sai, d đúng.

Câu 4. Một nhân viên văn phòng muốn kiếm thêm thu nhập bằng cách làm thêm giờ. Biết anh ấy được trả 120000 đồng mỗi giờ nhưng phải trả tiền thuế là 10%.

a) Nhân viên cần đóng 15 nghìn đồng tiền thuế cho mỗi giờ làm thêm.

b) Sau khi trừ thuế, nhân viên nhận được 108 nghìn đồng cho mỗi giờ làm thêm.

c) Để có được ít nhất một triệu đồng, anh ấy cần làm thêm ít nhất 9 giờ.

d) Để có được ít nhất một triệu đồng, anh ấy cần làm thêm ít nhất 10 giờ.

Lời giải

a) S

b) Đ

c) S

d) Đ

Số tiền nhân viên cần trả cho mỗi giờ làm thêm là: $120 \cdot 10\% = 12$ (nghìn đồng). Khẳng định a sai.

Sau khi trừ thuế, nhân viên nhận được $120 - 12 = 108$ nghìn đồng cho mỗi giờ làm thêm. Khẳng định b đúng.

Gọi x là số giờ nhân viên cần phải làm.

Nhân viên muốn nhận được ít nhất 1 triệu đồng thì $108x \geq 1000$

$$\Rightarrow x \geq \frac{1000}{108} \approx 9,26$$

Mà x nguyên dương nên $x = 10$. Khẳng định c sai, d đúng.

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN (soạn khoảng 6 câu)

Câu 1. [NB] Bình được mẹ cho 50000 đồng để đi mua vở viết. Biết giá mỗi quyển vở Bình định mua có giá 8500 đồng. Viết bất phương trình thu được trong đó x là số vở mà Bình có thể mua.

Lời giải

Đáp án: $8500x < 50000$.

Câu 2. [NB] Lan có 50000 đồng để đi chợ. Lan định mua một mớ rau muống giá 6000 đồng/mớ và x (kg) dưa chuột. Biết dưa chuột có giá 16000 đồng/kg. Viết bất phương trình ẩn x thu được?

Lời giải

Đáp án: $16000x + 6000 < 50000$.

Câu 3. [TH] Một xe tải trọng lượng 5 tấn đi chở hàng. Biết số hàng cần chở là 37 tấn. Hỏi xe tải cần chở ít nhất bao nhiêu chuyến để chở hết số hàng?

Lời giải

Đáp án: 8 chuyến.

Gọi số chuyến ít nhất cần chở là x (chuyến) ($x \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có: $5x \geq 37$

$$x \geq 7,4$$

Mà x nhỏ nhất, $x \in \mathbb{N}^*$ nên $x = 8$.

Vậy xe tải cần chở ít nhất 8 chuyến.

Câu 4. [TH] Bác An có 500000 đồng. Bác muốn mua một túi nước giặt 190000 đồng, một chai nước xả vải 110000 đồng và một số chai nước rửa tay, mỗi chai có giá 45000 đồng. Hỏi Bác An mua được nhiều nhất bao nhiêu chai nước rửa tay?

Lời giải

Đáp án: 4 chai.

Gọi số chai nhiều nhất bác An mua được là x (chai) ($x \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có: $45000x + 190000 + 110000 \leq 500000$

$$45000x \leq 200000$$

$$x \leq 4,4$$

Mà x lớn nhất, $x \in \mathbb{N}^*$ nên $x = 4$.

Vậy bác An mua được nhiều nhất 4 chai.

Câu 5. [VD] Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kỳ hạn 12 tháng là 6,8%/năm. Ông Kiên dự kiến gửi một số tiền và muốn số lãi hàng năm của mình ít nhất là 70 triệu để chi tiêu. Hỏi số tiền ông Kiên cần gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến hàng triệu đồng)?

Lời giải

Đáp án: 1030 triệu đồng.

Gọi x (triệu đồng) là số tiền ông Kiên cần gửi tiết kiệm.

Số tiền lãi ông Kiên thu được trong một năm là $0,068 \cdot x$ (triệu đồng)

Để có lãi suất ít nhất là 70 triệu đồng một năm thì ta có:

$$0,068x \geq 70$$

$$x \geq 1029,41$$

Vậy ông Kiên cần gửi ngân hàng ít nhất là 1030 triệu đồng.

Câu 6. [VDC] Một hãng taxi có bảng giá như sau:



VINASUN TAXI
Kế vai sắt cảnh

GIÁ CƯỚC
(Đã bao gồm 10% thuế GTGT)
FARE

VUI LÒNG KIỂM TRA HÀNH LÝ TRƯỚC KHI XUỐNG XE!
PLEASE CHECK YOUR LUGGAGE BEFORE LEAVING!

VUI LÒNG THANH TOÁN PHÍ CẦU ĐƯỜNG, PHÀ VÀ BẾN BÃI (NẾU CÓ)		
Giá mở cửa <small>Commencement rate up to 500 m</small>	Trong phạm vi 30 km <small>From the following km to 30th km</small>	Từ km thứ 31 trở đi <small>For each km from the 31st km +</small>
11.000 VNĐ / 500m	17.600 VNĐ / 1Km	14.500 VNĐ / 1Km

CUSTOMERS ARE REQUIRED TO PAY TOLL OR FERRY CHARGE (IF ANY)

Nếu gọi taxi của hãng này, với 700000 đồng, bạn có thể đi được tối đa bao nhiêu km?

Lời giải

Đáp án: 42 km.

Gọi x là số km tối đa đi được.

Nhận thấy $17600 \cdot 30 = 528000 < 700000$ nên với 700000 đồng, ta có thể đi được nhiều hơn 30 km.

Do đó ta có: $11000 + 29 \cdot 17600 + (x - 30) \cdot 14500 \leq 700000$

$$(x - 30) \cdot 14500 \leq 178600$$

$$x - 30 \leq \frac{1786}{145}$$

Để x lớn nhất thì $x - 30 = 12$

$$x = 42$$

Vậy số km tối đa đi được là 42 km.

PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp giải:

x Bước 1. Gọi ẩn cần tìm, tìm điều kiện cho.

Bước 2. Dựa vào đề bài thiết lập mối quan hệ của ẩn với các đại lượng đã biết, chưa biết.

Bước 3. Thiết lập bất phương trình dựa vào mối quan hệ đó theo yêu cầu đề bài.

Bước 4. Giải bất phương trình..

Bước 5. Kết luận yêu cầu của bài toán..

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1 [NB]:

Một kho hàng chứa 100 tấn xi măng, mỗi ngày đều xuất đi 20 tấn xi măng. Gọi x là số ngày xuất xi măng của kho đó, điều kiện $x \in \mathbb{N}^*$. Chủ kho muốn giữ lại nhiều hơn 10 tấn xi măng trong kho. Tìm x sao cho khối lượng xi măng còn lại là ít nhất?

Lời giải

Khối lượng xi măng xuất đi trong x ngày là: $20x$ (tấn).

Khối lượng xi măng còn lại sau x ngày là: $100 - 20x$ (tấn).

Để khối lượng xi măng còn lại trong kho ít nhất là 10 tấn thì:

$$100 - 20x \geq 10$$

$$-20x \geq -90$$

$$x \leq 4,5$$

Vậy kho phải xuất 4 ngày để số xi măng còn lại trong kho ít nhất là 10 tấn.

Ví dụ 2 [TH]:

Tổng chi phí của một doanh nghiệp sản xuất áo sơ mi là 410 triệu đồng/tháng. Giá bán của mỗi chiếc áo sơ mi là 350 nghìn đồng. Hỏi trung bình mỗi tháng doanh nghiệp phải bán được ít nhất bao nhiêu chiếc áo sơ mi để thu được lợi nhuận ít nhất là $1,38$ tỉ đồng sau 1 năm?

Lời giải

Giả sử trung bình mỗi tháng doanh nghiệp bán được x chiếc áo sơ mi ($x \in \mathbb{N}^*$).

Lợi nhuận của doanh nghiệp sau 12 tháng là: $12 \cdot (350000x - 410000000)$ (đồng).

Do đó, để doanh nghiệp thu được lợi nhuận ít nhất là $1,38$ tỉ đồng thì:

$$12 \cdot (350000x - 410000000) \geq 1380000000$$

Giải bất phương trình trên, ta có:

$$12 \cdot (350000x - 410000000) \geq 1380000000$$

$$350000x - 410000000 \geq 115000000$$

$$350000x \geq 115000000 + 410000000$$

$$350000x \geq 525000000$$

$$x \geq \frac{525000000}{350000}$$

$$x \geq 1500$$

Vậy trung bình mỗi tháng doanh nghiệp phải bán ít nhất 1500 chiếc áo sơ mi để doanh nghiệp thu được lợi nhuận ít nhất là $1,38$ tỉ đồng sau 1 năm.

Ví dụ 3 [TH]:

Bạn Mai được mẹ cho 100000 đồng đi mua bút và vở. Biết rằng giá một cuốn vở là 10000 đồng, một cái bút là 5000 đồng. Biết rằng mẹ bạn Mai yêu cầu bạn Mai mua ít nhất 6 cuốn vở. Hỏi bạn Mai mua được nhiều nhất bao nhiêu cái bút?

Lời giải

Gọi số bút mà bạn Mai mua được nhiều nhất là x (cái) ($0 < x < 20; x \in \mathbb{N}^*$).

Số tiền bạn Mai dùng để mua x cái bút là: $5000 \cdot x$ (đồng).

Số tiền bạn Mai dùng để mua vở là $100000 - 5000 \cdot x$ (đồng).

Vì mỗi cuốn vở có giá 10000 đồng nên số cuốn vở bạn Mai mua được là:

$$\frac{100000 - 5000 \cdot x}{10000} = 10 - \frac{x}{2}$$

Mẹ bạn Mai yêu cầu mua ít nhất 6 cuốn vở nên ta có bất phương trình:

$$10 - \frac{x}{2} \geq 6$$

$$\frac{20}{2} - \frac{x}{2} \geq \frac{12}{2}$$

$$20 - x \geq 12$$

$$-x \geq -8$$

$$x \leq 8$$

Vậy bạn Mai có thể mua nhiều nhất 8 cái bút.

Ví dụ 4 [VD]:

Trong kì thi, bạn Xuân Hương thi bốn môn Toán, Văn, Anh, Sử. Xuân Hương đã thi ba môn và được kết quả như sau

Môn	Toán	Anh	Sử
Điểm	9	7	6

Kì thi quy định muốn đạt giải thì phải có điểm trung bình các môn từ 8 trở lên và không môn nào bị dưới 6 điểm. Biết môn Văn, Toán được tính hệ số 2. Hãy cho biết, để đạt giải thì bạn Xuân Hương phải có điểm môn Văn ít nhất là bao nhiêu? Biết điểm tối đa của mỗi môn là 10 điểm.

Lời giải

Gọi x là điểm thi môn Văn của bạn Xuân Hương ($6 \leq x \leq 10$).

Điểm trung bình các môn thi của bạn Xuân Hương là:

$$(2x + 2 \cdot 9 + 7 + 6) : 6 = \frac{2x + 31}{6}$$

Theo đề bài, để bạn Xuân Hương đạt giải thì điểm trung bình các môn phải từ 8 trở lên, nên ta có

$$\frac{2x + 31}{6} \geq 8$$

bất phương trình:

$$2x + 31 \geq 48$$

$$2x \geq 17$$

$$x \geq 8,5$$

Vậy để đạt học sinh giỏi bạn Xuân Hương cần được ít nhất 8,5 điểm môn Văn.

Ví dụ 5 [VD]:

Bác Ngọc gửi tiết kiệm 12 tháng ở một ngân hàng với lãi suất 7,2%/năm. Bác Ngọc dự định tổng số tiền nhận được sau khi gửi 12 tháng ít nhất là 21440000 đồng. Hỏi bác Ngọc phải gửi số tiền tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu để đạt được dự định đó?

Lời giải

Giả sử bác Ngọc gửi x (đồng) tiền tiết kiệm kì hạn 12 tháng ($x > 0$)

Khi đó, tổng số tiền bác Ngọc nhận được sau 12 tháng gửi là:

$$x + 7,2\% \cdot x = \left(1 + \frac{7,2}{100}\right) \cdot x = \frac{1072}{1000} x = \frac{134}{125} x \text{ (đồng).}$$

Theo giả thiết, ta có bất phương trình: $\frac{134}{125} x \geq 21440000$

Giải bất phương trình trên, ta có: $\frac{134}{125} x \geq 21440000$

$$x \geq 21440000 : \frac{134}{125}$$

$$x \geq 20000000$$

Vậy bác Ngọc cần gửi số tiền tiết kiệm ít nhất 20 triệu đồng để đạt được dự định.

Ví dụ 6 [VD]:

Bạn Dũng có một tờ tiền Việt Nam chưa rõ mệnh giá. Biết rằng nếu mệnh giá của tờ tiền đó nhân với 3 thì nhỏ hơn 160000 nhưng nếu nhân với 2 thì lớn hơn 90000. Hỏi bạn Dũng có tờ tiền mệnh giá bao nhiêu?

Lời giải

Gọi mệnh giá của tờ tiền bạn Dũng có là x (đồng), điều kiện: $x \in \mathbb{N}^*$.

Vì nếu mệnh giá tờ tiền của bạn Dũng có nhân 3 nhỏ hơn 160000 (đồng) nên ta có bất phương trình:

$$3x < 160000 \Leftrightarrow x < \frac{160000}{3} \quad (1)$$

Mặt khác, mệnh giá tờ tiền của bạn Dũng có nhân 2 lớn hơn 90000 (đồng) nên ta có bất phương trình:

$$2x > 90000$$

$$x > \frac{90000}{2} \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta được:

$$\frac{90000}{2} < x < \frac{160000}{3}$$

$$45000 < x < \frac{160000}{3}$$

Vậy mệnh giá tờ tiền mà bạn Dũng có là 50000 (đồng).

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. [NB] Một người có số tiền không quá 70000 đồng gồm 15 tờ giấy bạc với hai loại mệnh giá: loại 2000 đồng và loại 5000 đồng. Hỏi người đó có thể có bao nhiêu tờ giấy bạc loại 5000 đồng?

Hướng dẫn

Gọi số tờ giấy bạc loại 5000 đồng là x . Điều kiện: $x \in \mathbb{N}^*$; $x \leq 15$.

Theo bài ra ta có bất phương trình:

$$(15 - x) \cdot 2000 + x \cdot 5000 \leq 70000$$

$$\Leftrightarrow (15 - x) \cdot 2 + x \cdot 5 \leq 70$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{40}{3}$$

Mà $x \in \mathbb{N}^*$; $x \leq 15 \Rightarrow x$ là các số nguyên từ 1 đến 13.

Vậy số tờ giấy bạc loại 5000 đồng là các số nguyên từ 1 đến 13.

Bài 2. [TH]

Một người đi bộ một quãng đường AC dài 18km trong khoảng thời gian không nhiều hơn 4 giờ. Lúc đầu người đó đi đoạn đường AB với vận tốc 5 km/h (B là điểm nằm giữa A và C), về sau đi đoạn đường BC với vận tốc 4 km/h. Tìm điều kiện về độ dài của đoạn đường AB?

Hướng dẫn

Gọi quãng đường mà người đó đã đi với vận tốc 5 km/h là x (km). Điều kiện: $0 < x < 18$.

Theo bài ra ta có bất phương trình:

$$\frac{x}{5} + \frac{18 - x}{4} \leq 4 \Leftrightarrow x \geq 10$$

Mà: $0 < x < 18 \Rightarrow 10 \leq x < 18$.

Vậy quãng đường mà người đó đã đi với vận tốc 5 km/h là x (km) thỏa mãn $10 \leq x < 18$

Bài 3. [VD] Trong một cuộc thi đố vui, ban tổ chức quy định mỗi người dự thi phải trả lời 10 câu hỏi ở vòng sơ tuyển. Mỗi câu hỏi này có sẵn 4 đáp án, nhưng trong đó chỉ có 1 đáp án đúng. Người dự thi chọn đáp án đúng sẽ được 5 điểm, chọn đáp án sai sẽ bị trừ 1 điểm. Ở vòng sơ tuyển Ban tổ chức tặng cho mỗi người thi 10 điểm và quy định người nào có tổng số điểm từ 40 trở lên mới được dự thi vòng tiếp theo. Hỏi người dự thi phải trả lời chính xác bao nhiêu câu hỏi ở vòng sơ tuyển thì mới được dự thi ở vòng sau?

Hướng dẫn

Gọi x là số câu trả lời đúng ($0 \leq x \leq 10$, $x \in \mathbb{N}$)

Khi đó, số câu trả lời sai là: $10 - x$

Để người đó được dự thi tiếp vòng sau thì ta có bất phương trình :

$$5x - (10 - x) + 10 \geq 40$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{40}{6}$$

Vì x nguyên nên $x \geq 7$

Vậy người dự thi phải trả lời chính xác ít nhất 7 câu hỏi thì mới được dự thi ở vòng sau.

Bài 4 [VD] Trong hội khỏe Phù Đổng thành phố Hà Nội, cuộc thi bắn súng vòng chung kết diễn ra giữa 3 vận động viên A, B và C. Mỗi vận động viên bắn 3 lần. Vận động viên A bắn 3 lượt với điểm trung bình cho 3 lượt bắn là 8 điểm. Vận động viên B điểm trung bình của 3 lượt bắn là 9,1 điểm. Vận động viên C hiện tại bắn 2 lượt đầu lần lượt được 8,5 và 9,5 điểm. Hỏi lần bắn cuối cùng của lượt thứ ba, vận động viên C cần ít nhất bao nhiêu điểm để đạt huy chương vàng, biết rằng ban tổ chức chỉ có một huy chương vàng duy nhất và điểm bắn được ghi ở dạng số thập phân làm tròn tới phần mười.

Hướng dẫn

Gọi số điểm vận động viên C đạt được ở lần bắn thứ ba là x (điểm) ($x > 0$)

Theo bài ra ta có bất phương trình :

$$\frac{x + 8,5 + 9,5}{3} > 9,1 \Rightarrow x > 9,3$$

Vậy trong lần bắn thứ ba, vận động viên C phải đạt ít nhất là 9,4 điểm.

Bài 5 [VD] Hai đội 8A và 8B tổ chức chạy thi, mỗi đội có 3 người. Người nào về đích thứ nhất thì được 1 điểm, về nhì được 2 điểm,...Đội nào có tổng số điểm ít hơn thì sẽ thắng. Giả sử không có hai người nào về đích cùng một lúc, hỏi đội thắng có thể ghi được tổng cộng bao nhiêu điểm khác nhau?

Hướng dẫn

Vì có 6 người chạy thi nên tổng số điểm của cả hai đội là :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

Số điểm ít nhất của đội thắng là: $1 + 2 + 3 = 6$.

Gọi x là số điểm của đội thắng thì số điểm của đội thua là $21 - x$.

Ta có: $x \geq 6$ và $x < 21 - x$ hay $2x < 21$; $x \leq 10$

Suy ra: $6 \leq x \leq 10$, do đó $x \in \{6; 7; 8; 9; 10\}$.

Vậy đội thắng có thể được tổng cộng 5 loại điểm khác nhau.