

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (3,0 điểm)

Giải phương trình sau $\frac{x^2}{1 + \sqrt{x^2 - 3x + 1}} = x + 1$.

Câu 2. (3,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{3-a}{\sqrt{a^2+9-2bc}} + \frac{3-b}{\sqrt{b^2+9-2ac}} + \frac{3-c}{\sqrt{c^2+9-2ab}} > 2$$

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho k là số thực, tìm tất cả các hàm đơn điệu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = k^2 y + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Câu 4. (3,0 điểm)

a) Chứng minh rằng số $A = \sqrt{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) không phải là số chính phương.

b) Cho đa thức $f(x) = a_{2023}x^{2023} + a_{2022}x^{2022} + \dots + a_1x + a_0$ với hệ số nguyên và $a_{2023} \neq 0$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng phương trình $f^2(x) = 4$ có số nghiệm nguyên không lớn hơn 2026.

Câu 5. (5,0 điểm).

a) Cho $\triangle ABC$ là tam giác nhọn, D là điểm bất kỳ trên cạnh BC thỏa $AB > AD$; $AC > AD$. Trên các cạnh AC, AB lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $EC = ED, FB = FD$. Gọi I, J, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, BDF, CDE . Gọi H là trực tâm của tam giác JKD . Chứng minh tứ giác $IJKH$ nội tiếp.

b) Cho tam giác nhọn $\triangle ABC$ ($AB < BC$) có đường cao AK . Gọi điểm D trên cạnh AC thỏa $\frac{AD}{DC} = \frac{BK}{BC}$, điểm E di động trên đoạn DC . Gọi F là giao điểm của BE và KD , I là giao điểm của FC và KE . Chứng minh rằng điểm I thuộc đường thẳng cố định.

Câu 6. (3,0 điểm)

Cho đa giác đều n cạnh ($n \in \mathbb{N}; n \geq 8$). Gọi x, y lần lượt là số tam giác và số tứ giác lập ra từ các đường chéo của đa giác đều đã cho. Tìm n biết $x = 2y$.

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu, không được sử dụng máy tính cầm tay.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NAMKỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT ĐỢT 2
NĂM HỌC 2022 – 2023

HDC CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN CHẤM
MÔN: TOÁN 10

(Bản hướng dẫn này gồm 06 trang)

	Nội dung	Điểm
Câu 1. (3,0 điểm) Giải phương trình sau $\frac{x^2}{1+\sqrt{x^2-3x+1}} = x+1$		3,0
Cách 1	Điều kiện: $x^2 - 3x + 1 \geq 0$	
	$\frac{x^2}{1+\sqrt{x^2-3x+1}} = x+1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = (x+1)\sqrt{x^2-3x+1}$	1,0
	Bình phương hai vế ta được $x^3 - 3x^2 - 3x = 0$	1,0
	Thử lại: Loại nghiệm $x = 0$.	0,5
	Nhận 2 nghiệm $x = \frac{3-\sqrt{21}}{2}; x = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$.	0,5
Cách 2	Điều kiện: $x^2 - 3x + 1 \geq 0$	
	$\frac{x^2}{1+\sqrt{x^2-3x+1}} = x+1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = (x+1)\sqrt{x^2-3x+1}$	0,5
	$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 3 = (x+1)(\sqrt{x^2-3x+1} - 2)$	
	$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2-3x+1} - 2)(\sqrt{x^2-3x+1} + 2) = (x+1)(\sqrt{x^2-3x+1} - 2)$	1,0
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-3x+1} = 2 \\ \sqrt{x^2-3x+1} = x-1 \end{cases}$	0,5
	Phương trình $\sqrt{x^2-3x+1} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{3+\sqrt{21}}{2} \end{cases}$	0,5
	Xét phương trình còn lại vô nghiệm. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{3-\sqrt{21}}{2}; \frac{3+\sqrt{21}}{2} \right\}$	0,5

Câu 2. (3,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{3-a}{\sqrt{a^2+9-2bc}} + \frac{3-b}{\sqrt{b^2+9-2ac}} + \frac{3-c}{\sqrt{c^2+9-2ab}} > 2$$

3,0

Ta có: $a^2 + 9 - 2bc = (3 - b - c)^2 + 9 - 2bc = b^2 + c^2 - 6b - 6c + 18 = (3 - b)^2 + (3 - c)^2$

0,5

nên $\frac{3-a}{\sqrt{a^2+9-2bc}} = \sqrt{\frac{(3-a)^2}{(3-b)^2 + (3-c)^2}}$

tương tự $\frac{3-b}{\sqrt{b^2+9-2ac}} = \sqrt{\frac{(3-b)^2}{(3-c)^2 + (3-a)^2}}$; $\frac{3-c}{\sqrt{c^2+9-2ab}} = \sqrt{\frac{(3-c)^2}{(3-a)^2 + (3-b)^2}}$.
BĐT trở thành

$$\sqrt{\frac{(3-a)^2}{(3-b)^2 + (3-c)^2}} + \sqrt{\frac{(3-b)^2}{(3-c)^2 + (3-a)^2}} + \sqrt{\frac{(3-c)^2}{(3-a)^2 + (3-b)^2}} > 2$$

0,5

Đặt $\begin{cases} x = (3-a)^2 > 0 \\ y = (3-b)^2 > 0 \\ z = (3-c)^2 > 0 \end{cases}$, ta được BĐT $\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} > 2$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x(z+y)}} + \frac{y}{\sqrt{y(z+x)}} + \frac{z}{\sqrt{z(x+y)}} > 2$$

1,0

Ta có $\frac{x}{\sqrt{x(z+y)}} \geq \frac{2x}{z+x+y}$, $\frac{y}{\sqrt{y(z+x)}} \geq \frac{2y}{z+x+y}$, $\frac{z}{\sqrt{z(x+y)}} \geq \frac{2z}{z+x+y}$

0,5

suy ra: $\frac{x}{\sqrt{x(z+y)}} + \frac{y}{\sqrt{y(z+x)}} + \frac{z}{\sqrt{z(x+y)}} \geq 2$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 0$, điều này là không thể.

Vậy $\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} > 2$ hay

$$\frac{3-a}{\sqrt{a^2+9-2bc}} + \frac{3-b}{\sqrt{b^2+9-2ac}} + \frac{3-c}{\sqrt{c^2+9-2ab}} > 2$$

0,5

	Nội dung	Điểm
Câu 3. (3,0 điểm)	Cho k là số thực, tìm tất cả các hàm đơn điệu $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x + f(y)) = k^2 y + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$.	3,0
	Giả sử tồn tại hàm $f(x)$ thỏa yêu cầu đề bài, $f(x)$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$ nên là hàm số đơn ánh.	0,25
	Xét $k = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ $f(x + f(y)) = k^2 y + f(x) \Rightarrow f(x + f(y)) = f(x)$ $\Leftrightarrow x + f(y) = x \Leftrightarrow f(y) = 0$	0,25
	Hàm số $f(y) = 0$ không thỏa yêu cầu hàm số đơn điệu.	0,25
	Xét $k \neq 0$	
	Thay $x = y = 0$ ta có $f(f(0)) = f(0)$ suy ra $f(0) = 0$	0,25
	do đó $f(f(y)) = k^2 y, \forall y \in \mathbb{R}$ và $k^2 f(y) = f(f(f(y))) = f(k^2 y)$.	0,5
	Từ phương trình ban đầu thay $f(y)$ bởi $k^2 y$ ta được $f(x + k^2 y) = f(x + f(f(y))) = k^2 f(y) + f(x) = f(k^2 y) + f(x)$	0,5
	Suy ra f là hàm cộng tính, hơn nữa f đơn điệu nên $f(x) = cx$ (c là hằng số).	0,25
	Kết hợp biểu thức $f(f(y)) = f(cy) = c^2 y$ và $f(f(y)) = k^2 y$ ta được $c^2 = k^2 \Leftrightarrow c = \pm k.$	0,25
	Thử lại $f(x) = kx, f(x) = -kx$ ($k \neq 0$) thỏa mãn yêu cầu của đề.	0,5

Câu 4. (3,0 điểm)

a) Chứng minh rằng số $A = \sqrt{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) không phải là số chính phương.

1,0

Ta có $A = \sqrt{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4} = \sqrt{n^4 + 9n^2 + 4 + 6n^3 + 4n^2 + 12n}$
 $= \sqrt{(n^2 + 3n + 2)^2} = n^2 + 3n + 2$

0,25

Với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$n^2 + 2n + 1 < n^2 + 3n + 2 < n^2 + 4n + 4$$

$$\Leftrightarrow (n+1)^2 < n^2 + 3n + 2 < (n+2)^2$$

0,5

Vì $(n+1)^2; (n+2)^2$ là hai số chính phương liên tiếp, nên giữa chúng không tồn tại số chính phương nào.

Vậy $A = \sqrt{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}$ không phải số chính phương.

0,25

b) Cho đa thức $f(x) = a_{2023}x^{2023} + a_{2022}x^{2022} + \dots + a_1x + a_0$ với hệ số nguyên và $a_{2023} \neq 0$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng phương trình $f^2(x) = 4$ có số nghiệm nguyên không lớn hơn 2026.

2,0

$f(x) = a_{2023}x^{2023} + a_{2022}x^{2022} + \dots + a_1x + a_0$, với $a_{2023} \neq 0$.

$$f^2(x) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ f(x) = -2 \end{cases}$$

0,25

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_m$ là m nghiệm nguyên phân biệt của phương trình $f(x) = 2$,

và $y_1, y_2, \dots, y_n$ là n nghiệm nguyên phân biệt của phương trình $f(x) = -2$.

Khi đó $x_i \neq y_j$ với mọi $i \in \{1; 2; 3; \dots; m\}, j \in \{1; 2; 3; \dots; n\}$.

0,25

Giả sử $m + n > 2026$. Vì $m \leq 2023; n \leq 2023$ nên $m \geq 4; n \geq 4$.

0,5

Do đó tồn tại các nghiệm nguyên $x_i; y_j$ thỏa mãn $|x_i - y_j| \geq 5$.

Các nghiệm $x_i; y_j$ nói trên thỏa mãn:

$$f(x_i) = a_{2023}x_i^{2023} + a_{2022}x_i^{2022} + \dots + a_1x_i + a_0 = 2$$

$$f(y_j) = a_{2023}y_j^{2023} + a_{2022}y_j^{2022} + \dots + a_1y_j + a_0 = -2$$

Suy ra $a_{2023}(x_i^{2023} - y_j^{2023}) + a_{2022}(x_i^{2022} - y_j^{2022}) + \dots + a_1(x_i - y_j) = 4$ (1)

0,25

Vì $(x_i - y_j) \mid (x_i^k - y_j^k)$ với mọi $k \in \{1; 2; \dots; 2023\}$ nên từ (1) suy ra $(x_i - y_j) \mid 4$, điều

0,5

này mâu thuẫn với $|x_i - y_j| \geq 5$.

Do đó $m + n \leq 2026$. Vậy phương trình $f^2(x) = 4$ có số nghiệm nguyên không lớn

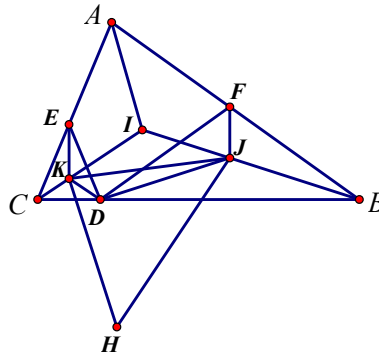
0,25

hơn 2026.

Câu 5. (5,0 điểm)

a) Cho $\triangle ABC$ là tam giác nhọn, D là điểm bất kỳ trên cạnh BC thỏa $AB > AD$; $AC > AD$. Trên các cạnh AC, AB lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $EC = ED, FB = FD$. Gọi I, J, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, BDF, CDE . Gọi H là trực tâm của tam giác JKD . Chứng minh tứ giác $IJKH$ nội tiếp.

2,0



0,25

Do các tam giác FBD, ECD lần lượt cân tại F, E nên $\angle D = \angle B, \angle D = \angle C$.

0,5

Ta có: $\angle DK = 180^\circ - \angle DB - \angle DC = 180^\circ - \angle B - \angle C = \angle A = \angle IK$.

0,5

Vì H là trực tâm của $\triangle JKD$ nên $\angle HK + \angle DK = 180^\circ$.

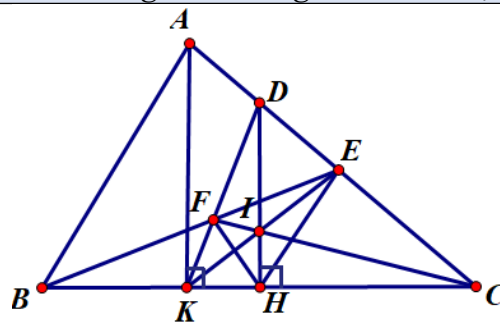
0,5

Suy ra: $\angle HK + \angle IK = 180^\circ$. Vậy tứ giác $IJKH$ nội tiếp.

0,25

b) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < BC$) có đường cao AK . Gọi điểm D trên cạnh AC thỏa mãn $\frac{AD}{DC} = \frac{BK}{BC}$, điểm E di động trên đoạn DC . Gọi F là giao điểm của BE và KD , I là giao điểm của FC và KE . Chứng minh rằng điểm I thuộc đường thẳng cố định.

3,0



Gọi H là giao điểm của DI và cạnh BC .

Ta có 3 đường thẳng đồng quy trong tam giác DKC là DH, KE, FC , theo định lý Ceva

$$\frac{HK}{HC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FK} = -1 \quad (1)$$

ta được

1,0

Ba điểm thẳng hàng B, E, F , theo định lý Menelaus ta được $\frac{BC}{BK} \cdot \frac{FK}{FD} \cdot \frac{ED}{EC} = 1 \quad (2)$.

1,0

0,5

	$\frac{\overline{HK}}{\overline{HC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BK}} = -1$	
	<p>Nhân (1) với (2) về theo về ta được</p> $\frac{HK}{HC} = \frac{BK}{BC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow DH \parallel AK \text{ nên } DH \text{ cố định.}$ <p>Vậy I thuộc đoạn thẳng cố định.</p>	0,5
	Nội dung	Điểm
Câu 6. (3,0 điểm)		
	<p>Cho đa giác đều n cạnh ($n \in \mathbb{N}; n \geq 8$). Gọi x, y lần lượt là số tam giác và số tứ giác lập ra từ các đường chéo của đa giác đều đã cho. Tìm n biết $x = 2y$.</p>	3,0
	<p>Gọi số đỉnh của đa giác đều n cạnh lần lượt là $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Số tam giác có 3 cạnh là 3 đường chéo của đa giác là</p> $x = C_n^3 - n - n(n-4) = \frac{n(n^2 - 9n + 20)}{6}$	1,0
	<p>Xét tứ giác có 4 cạnh là 4 đường chéo của đa giác và có 1 đỉnh là A_1: Khi đó A_2, A_n không phải là đỉnh của tứ giác. Ta cần chọn thêm các đỉnh A_i, A_j, A_k thỏa mãn: $5 \leq i+2 < j+1 < k \leq n-1$ (vì 2 đỉnh của tứ giác không phải là 2 đỉnh kề nhau của đa giác). Mỗi cách chọn bộ 3 đỉnh như trên là 1 cách chọn bộ 3 số phân biệt trong $n-5$ số tự nhiên từ 5 đến $n-1$. Do đó có C_{n-5}^3 tứ giác có đỉnh A_1 thỏa yêu cầu bài toán.</p>	0,5 0,25
	<p>Vì đa giác có n đỉnh và mỗi tứ giác được đếm lặp lại 4 lần (theo cách đếm trên) nên số tứ giác có thể lập được từ các đường chéo của đa giác đã cho là</p> $y = \frac{nC_{n-5}^3}{4} = \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{24}$	0,5
	<p>Theo giả thiết: $x = 2y \Leftrightarrow \frac{n(n^2 - 9n + 20)}{6} = 2 \cdot \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{24}$</p> $\Leftrightarrow n^3 - 20n^2 + 125n - 250 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = 10 \end{cases}$	0,5
	<p>Đối chiếu giả thiết chọn $n = 10$.</p>	0,25

*** Lưu ý:**

Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong hướng dẫn chấm nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.