

CÁC DẠNG TOÁN BÀI GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Dạng 1: Bài toán tìm max, min của hàm số $y=f(x)$ trên miền D

■ Phương pháp giải:

Bước 1: Tính y' . Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm $x_i \in D$ và tìm các điểm $x_j \in D$ mà tại đó y' không xác định.

Bước 2: Lập bảng biến thiên của hàm số trên D

Bước 3: Từ bảng biến thiên đưa ra kết luận:

Điểm ở vị trí cao nhất $\longrightarrow$ Kết luận max

Điểm ở vị trí thấp nhất $\longrightarrow$ Kết luận min

■ **Lưu ý:** Nếu D là đoạn $[a; b]$ và hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì ta có thể làm như sau:

Bước 1: Giải phương trình $f'(x) = 0$ rồi tìm các nghiệm $x_0 \in (a; b)$

Bước 2: Tìm các điểm $x_i \in (a; b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có)

Bước 3: Tính toán $f(a), f(x_0), f(x_i), f(b)$ (*)

Bước 4: Gọi M, m lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước (*) thì ta có thể kết luận:

$$M = \max_{x \in [a; b]} f(x); \quad m = \min_{x \in D} f(x)$$

■ Lưu ý quan trọng:

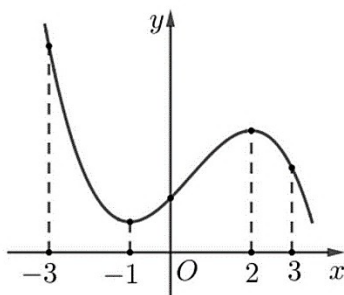
■ Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$

■ Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

A. $f(2)$.

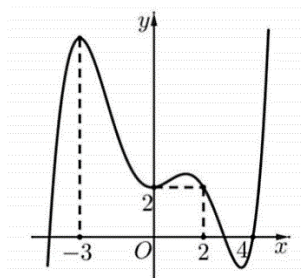
B. $f(-1)$.

C. $f(-3)$.

D. $f(3)$.

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3;3]$ bằng $f(-3)$

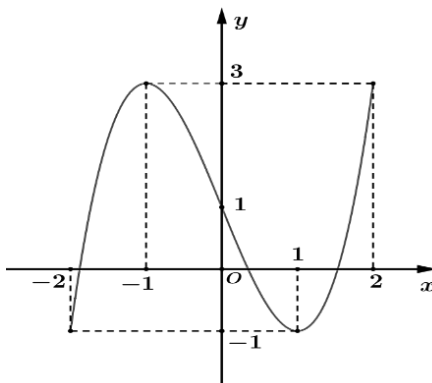
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;4]$ bằng:
A. $f(2)$. **B.** $f(-3)$. **C.** $f(4)$. **D.** $f(0)$



Lời giải

Quan sát hình vẽ ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;4]$ bằng $f(-3)$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;2]$ là

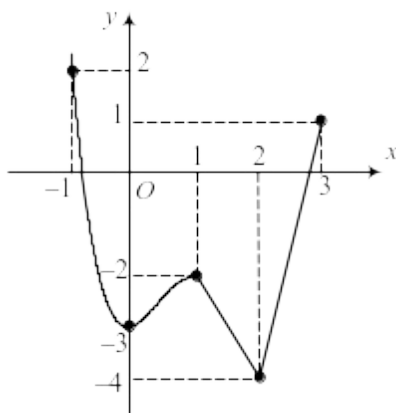
A. 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 3.

Lời giải

Trên đoạn $[-2;2]$ ta có $f(x) \geq -1$ và $f(x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

Vậy $\min_{[-2;2]} f(x) = -1$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$. Khi đó, tổng $M + m$ bằng



A. -6.

B. -2.

C. -5.

D. 2.

Lời giải

Theo đồ thị, ta có : $M = 2$ và $m = -4 \Rightarrow M + m = -2$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	-3	-1	0	1	2
y	-2	3	0	2	1

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; 2]$.

Tính $M + m$.

A. -1.

B. 1.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

$$M = 3, m = -2 \Rightarrow M + m = 1$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

Biết $f(-2) = f(0) = -3$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-2; 0]$ bằng

- A. $f(-1)$. B. -3 . C. $-f(-1)$. D. 3 .

Lời giải

Dựa vào bảng dấu của đạo hàm ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$			-3		-3		
$ f(x) $			3		3		

Dựa vào bảng biến thiên $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-2; 0]$ ta có $\max_{[-2; 0]} |f(x)| = -f(-1)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-3; 2]$. Tính $M.m$.

x	-3	0	1	2
$f(x)$	-4	2	0	1

- A. 6 . B. 7 . C. 5 . D. -8 .

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta xác định được $M = 2$ và $m = -4$.

Từ đó suy ra $M.m = 2.(-4) = -8$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau.

x	0	3	8
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	10	0

Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_0)$ tại x_0 . Khi đó tích $x_0 \cdot f(x_0)$ bằng

- A.** 30. **B.** 3. **C.** 10. **D.** 0.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy, hàm số đạt giá trị lớn nhất là 10 tại $x = 3$ nên $x_0 \cdot f(x_0) = 30$.

Câu 9: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 6x$ trên $[-1; 4]$ là

- A.** $-4\sqrt{2}$. **B.** -5. **C.** 5. **D.** 40.

Lời giải

$$f'(x) = 3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{2} \in [-1; 4]$$

Ta có

$$f(-1) = -1 + 6 = 5 \quad f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -4\sqrt{2} \quad f(4) = 64 - 24 = 40$$

Khi đó

$$\min_{[-1; 4]} f(x) = -4\sqrt{2} \quad \text{tại } x = \sqrt{2}.$$

Câu 10: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ trên đoạn $[0; 4]$. Tính tổng $S = M + m$.

- A.** $\frac{7}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** 4.

Lời giải

Dễ thấy hàm số liên tục trên $[0; 4]$.

Ta có: $y' = x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

Ta có: $y(0) = 1$; $y(1) = \frac{7}{3}$; $y(3) = 1$; $y(4) = \frac{7}{3}$

$$\begin{cases} M = \max_{[0;4]} y = y(1) = y(4) = \frac{7}{3} \\ m = \min_{[0;4]} y = y(0) = y(3) = 1 \end{cases} \Rightarrow S = M + m = \frac{7}{3} + 1 = \frac{10}{3}$$

Vậy

- Câu 11:** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 10$ trên đoạn $[-5; -1]$ bằng
A. 12. **B.** 18. **C.** -40. **D.** 14.

Lời giải

Trên đoạn $[-5; -1]$ ta có hàm số đã cho liên tục và có

$$y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \quad y(-5) = -40; y(-2) = 14; y(-1) = 12$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-5; -1]$ bằng 14.

- Câu 12:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[2; 4]$ là:
A. $\min_{[2;4]} y = 5$ **B.** $\min_{[2;4]} y = 0$ **C.** $\min_{[2;4]} y = 3$ **D.** $\min_{[2;4]} y = 7$

Lời giải

Ta có $y = x^3 - 3x + 5 \Rightarrow y = 3x^2 - 3$ $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \notin [2; 4] \\ x = -1 \notin [2; 4] \end{cases}$

Giải

$$y(2) = 7; y(4) = 57 \Rightarrow \min_{[2;4]} y = y(2) = 7$$

Ta có

- Câu 13:** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$ là

A. 7.

B. 8.

C. $\frac{19}{3}$.D. $\frac{23}{3}$.

Lời giải

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 3}{x-1} \right)' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [2; 4] \\ x = 3 \in [2; 4] \end{cases}$$

Ta có

$$f(2) = 7 > f(4) = \frac{19}{3} > f(3) = 6$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x-1}$$

Lại có

suy ra giá trị lớn nhất của hàm số

trên

đoạn $[2; 4]$ là 7.

Câu 14: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$. Tổng $S = 2M - m$ bằng

A. $S = 0$.B. $S = -\frac{3}{2}$.C. $S = -2$.D. $S = 4$.

Lời giải

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{2\sqrt{x+1}}$$

Ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Giải phương trình

$$f(0) = -1; f(3) = -\frac{1}{2} \quad \text{và hàm số } f(x) \text{ liên tục trên đoạn } [0; 3]$$

Ta có

$$M = -\frac{1}{2}; m = -1 \Rightarrow S = 2M - m = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$$

Vậy

Câu 15: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ là

A. $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{1}{2}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = -1$ B. $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{4}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{6}$

C. $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = 1$

D. $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{1}{2}$

Lời giải

$$f(x) = x + \cos^2 x \Rightarrow f'(x) = 1 - 2\cos x \cdot \sin x = 1 - \sin 2x$$

Ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Cho

Do

$$f(0) = 1; f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

và hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

$$\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = 1$$

Suy ra

Câu 16: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+2}{x}$ trên $[1; 2]$

A. $\min_{[1;2]} y = 3$

B. $\min_{[1;2]} y = 2$

C. $\min_{[1;2]} y = \frac{1}{2}$

D. $\min_{[1;2]} y = \frac{3}{2}$

Lời giải

$$y' = -\frac{2}{x^2} < 0, \forall x \neq 0$$

$$y = \frac{x+2}{x}$$

Ta có

nên hàm số

nghịch biến trên

$$[1; 2]$$

$$\min_{[1;2]} y = y(2) = 2$$

Do đó

Câu 17: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{16 - x^2}$ là

A. 16

B. 4

C. 0

D. 1

Lời giải

$$y = \sqrt{16 - x^2} \leq 4$$

Ta có

, dấu “=” khi

$$x = 0$$

Vậy

$$\max_{[-4;4]} y = 4$$

Câu 18: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x\sqrt{16 - x^2}$. Tính $M + m$

A. $8 - \sqrt{8}$

B. $\sqrt{8}$

C. 0

D. 8

Lời giải

$$y' = \sqrt{16-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}$$

Điều kiện xác định $-4 \leq x \leq 4$. Đạo hàm

$$y' = 0 \Leftrightarrow 16 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{8}$$

Ta có

Xét $y(-4) = y(4) = 0$; $y(-\sqrt{8}) = -8$; $y(\sqrt{8}) = 8$ do đó $M = 8, m = -8$. Vậy $M + m = 0$.

Câu 19: Trên đoạn $[-4; -1]$, hàm số $y = x + \frac{9}{x-1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng

- A. -5 . B. $-\frac{29}{5}$. C. $-\frac{11}{2}$. D. 4 .

Lời giải

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Tập xác định:

$$y' = 1 - \frac{9}{(x-1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{9}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \notin [-4; -1] \\ x = -2 \in [-4; -1] \end{cases}$$

Ta có

Ta thấy $y(-4) = -\frac{29}{5}$; $y(-2) = -5$; $y(-1) = -\frac{11}{2}$. Vậy $\max_{[-4; -1]} y = y(-2) = -5$.

Câu 20: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{4}{x} + x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$. Tính $M - m$.

- A. 9 . B. 5 . C. 1 . D. 4 .

Lời giải

$$y' = -\frac{4}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in [1; 3] \\ x = -2 \notin [1; 3] \end{cases}$$

Ta có:

$$y(1) = 6, y(2) = 5, y(3) = \frac{16}{3} \Rightarrow M = 6, m = 5 \Rightarrow M - m = 1.$$

Ta có:

Câu 21: Trên đoạn $\left[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right]$, hàm số $y = 2x^3 + \frac{1}{2x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x = \frac{1}{2}$.

B. $x = \frac{3}{2}$.

C. $x = \frac{1}{3}$.

D. $x = 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 8x^2 - \frac{1}{2x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 8x^2 - \frac{1}{2x^2} = 0 \Leftrightarrow 16x^4 = 1 \Leftrightarrow x^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right] \\ x = -\frac{1}{2} \notin \left[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right] \end{cases}$

Ta có: $y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{85}{54}$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$, $y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{85}{12} \Rightarrow \max_{\left[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right]} y = y\left(\frac{1}{2}\right)$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x+14} + \sqrt{5-x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -7$. **B.** Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{6}$.

C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$. **D.** Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Tập xác định $D = [-7; 5]$.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+14}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+14} = 2\sqrt{5-x} \Leftrightarrow x = 1$.

$f(1) = 16$; $f(-7) = 2\sqrt{3}$; $f(5) = 2\sqrt{6} \Rightarrow \max_{[-7; 5]} f(x) = 16$ tại $x = 1$ và $\min_{[-7; 5]} f(x) = 2\sqrt{3}$.

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}$ là mệnh đề đúng.

Câu 23: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\cos x - \frac{4}{3}\cos^3 x$ trên $[0; \pi]$.

A. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{2}{3}$.

B. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{10}{3}$.

C. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

D. $\max_{[0; \pi]} y = 0$.

Lời giải

Đặt $t = \cos x \Rightarrow t \in [-1; 1]$. Đặt $f(t) = 2t - \frac{4}{3}t^3$, suy ra $f'(t) = 2 - 4t^2$.

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1}{\sqrt{2}} \in [-1; 1] \\ t = \frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1; 1] \end{cases}$$

Do đó

$$f(-1) = \frac{-2}{3}, \quad f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-2\sqrt{2}}{3}, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad f(1) = \frac{2}{3}$$

Ta có

$$\max_{[0; \pi]} y = \max_{[-1; 1]} f(t) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Vậy

Câu 24: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$ là

A. $\sqrt{3}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

$$D = [3; 5]$$

Tập xác định:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3} = \sqrt{5-x} \\ x-3 > 0 \\ 5-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 5-x \\ x > 3 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

Ta có

$$f(3) = f(5) = \sqrt{2}, \quad f(4) = 2$$

Ta có:

;

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 2.

Câu 25: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 3}{x-2}$ trên $[-2; 1]$.

Giá trị của $M + m$ bằng

A. -6.

B. $\frac{-9}{4}$.

C. $\frac{-25}{4}$.

D. -5.

Lời giải

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Tập xác định:

$$y' = \frac{(2x+1)(x-2) - (x^2 + x + 3)}{x-2} = \frac{x^2 - 4x - 5}{x-2} = \frac{(x+1)(x-5)}{x-2}$$

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-2; 1] \\ x = 5 \notin [-2; 1] \end{cases}$$

Đạo hàm

$$f(-2) = \frac{-5}{4}; f(1) = -5; f(-1) = -1 \Rightarrow \begin{cases} M = -1 \\ m = -5 \end{cases} \quad M + m = -6$$

Khi đó

Suy ra

Câu 26: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 4x + \sin^2 \pi x$ trên đoạn $[-1; 2]$. Giá trị của $m + M$ bằng

A. 0.

B. 4.

C. -2.

D. -4.

Lời giải

$$f'(x) = 4 + 2\pi \sin \pi x \cdot \cos \pi x = 4 + \pi \sin 2\pi x$$

Ta có

Do

$$-1 \leq \sin 2\pi x \leq 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \forall x \in [-1; 2]$$

$$m + M = f(-1) + f(2) = -4 + \sin^2(-\pi) + 8 + \sin^2(2\pi) = 4$$

Vậy

Câu 27: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \cos^2 x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{\pi}{2} + 1$.

C. 1.

D. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $y = f(x) = x + \cos^2 x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$y' = f'(x) = 1 - 2\sin x \cdot \cos x = 1 - \sin 2x \quad y' = f'(x) = 1 - 2\sin x \cdot \cos x = 1 - \sin 2x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

do

$$\text{Khi đó} \quad f(0) = 1; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}; \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \quad \max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

. Vậy

Câu 28: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{-x^2 - 4}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$.

- A. -4 . B. $-\frac{25}{6}$. C. -5 . D. -2 .

Lời giải

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \notin \left[\frac{3}{2}; 4\right] \\ x = 2 \in \left[\frac{3}{2}; 4\right] \end{cases} \quad ; \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{25}{6} \quad ; \quad f(2) = -4 \quad ; \quad f(4) = -5$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{-x^2 - 4}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$ là -4 .

Câu 29: Gọi m , M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 2x + \cos \frac{\pi x}{2}$ trên đoạn $[-2; 2]$. Giá trị của $m + M$ bằng

- A. 2 . B. -2 . C. 0 . D. -4 .

Lời giải

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} > 0, \forall x \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } [-2; 2]$$

Ta có

$$m + M = f(-2) + f(2) = -4 - 1 + 4 - 1 = -2$$

Khi đó

Câu 30: Cho hàm số $y = \sin x \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; \pi]$ bằng

- A. 0 . B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

$$y = \sin x \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = \sin x \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right) = \frac{1}{4} (2 \sin x + \sin 2x)$$

Ta có:

$$y' = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = -\pi + k2\pi \end{cases}$$

Đạo hàm

Xét trên khoảng $(0; \pi)$ ta có nghiệm là $x = \frac{\pi}{3}$; $y(0) = 0$; $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$; $y(\pi) = 0$

$$\max_{[0; \pi]} y = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Vậy

Câu 31: Gọi M, m thứ tự là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[-2; 0]$.
Tính $P = M + m$?

- A. $P = 1$ B. $P = -3$ C. $P = -\frac{13}{3}$ D. $P = -5$

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Xét trên $[-2; 0]$ hàm số xác định và liên tục.

$$y' = \frac{2x(x-1) - x^2 - 3}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-2; 0] \\ x = 3 \end{cases}$$

Đạo hàm

$$y(-2) = -\frac{7}{3}, y(0) = -3, y(-1) = -2$$

Khi đó

$$m = \min_{[-2; 0]} y = -3, M = \max_{[-2; 0]} y = -2 \Rightarrow P = m + M = -5$$

Vậy

Câu 32: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$ là bao nhiêu?

- A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 0

Lời giải

Tập xác định: $D = [-1; 4]$. Ta có $y' = \frac{-2x + 3}{2\sqrt{-x^2 + 3x + 4}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

$$y(-1) = 0; y(4) = 0; y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2} \quad \max_{[-1; 4]} y = \frac{5}{2}$$

Khi đó

Vậy

Câu 33: Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(-25; \frac{11}{10}\right)$.
 Tìm giá trị của M .

- A.** $M = 1$. **B.** $M = \frac{1}{2}$. **C.** $M = 0$. **D.** $\frac{129}{250}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3x$; cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	-25	0	1	$\frac{11}{10}$		
y'		+	0	-	0	+
y			1			$\frac{129}{250}$

Vậy $M = 1$.

Câu 34: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{2 + \sin x}$ bằng
A. $4\sqrt{2} - 4$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $8 - 4\sqrt{3}$.

Lời giải

$$f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{2 + \sin x} = \frac{2 - 2\sin^2 x}{2 + \sin x}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \frac{(2 - 2\sin^2 x)' \cdot (2 + \sin x) - (2 + \sin x)' \cdot (2 - 2\sin^2 x)}{(2 + \sin x)^2} \\ &= \frac{-4\sin x \cdot \cos x \cdot (2 + \sin x) - \cos x (2 - 2\sin^2 x)}{(2 + \sin x)^2} = \frac{-2\cos x (\sin^2 x + 4\sin x + 1)}{(2 + \sin x)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2\cos x (\sin^2 x + 4\sin x + 1)}{(2 + \sin x)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \arcsin(-2 + \sqrt{3}) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin(-2 + \sqrt{3}) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Do hàm số $y = f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π nên chỉ xét trên đoạn $[-\pi; \pi]$ ta có:

$$x \in \left\{ \arcsin(-2 + \sqrt{3}); \pi - \arcsin(-2 + \sqrt{3}); \pm \frac{\pi}{2} \right\} \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

.Tính được:

$$f\left(\arcsin(-2 + \sqrt{3})\right) = f\left(\pi - \arcsin(-2 + \sqrt{3})\right) = 8 - 4\sqrt{3} = \max f(x).$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $(-4; 4)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	-4	2	0	4	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	-10	0	-4	10	

a) $\min_{(-4;4)} y = -4$ và $\max_{(-4;4)} y = 10$

b) $\max_{(-4;4)} y = 10$ và $\min_{(-4;4)} y = -10$

c) $\max_{(-4;4)} y = 0$ và $\min_{(-4;4)} y = -4$

d) Hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $(-4; 4)$.

Lời giải

Theo định nghĩa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, ta thấy hàm số không có GTLN, NN trên $(-4; 4)$

a) Sai: $\min_{(-4;4)} y = -4$ và $\max_{(-4;4)} y = 10$

b) Sai: $\max_{(-4;4)} y = 10$ và $\min_{(-4;4)} y = -10$

c) Sai: $\max_{(-4;4)} y = 0$ và $\min_{(-4;4)} y = -4$

d) Đúng: Hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $(-4; 4)$

Câu 2: Cho hàm số $y = x + \frac{4}{x}, x \in (0; +\infty)$

a) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ và không có giá trị lớn nhất trên $(0; +\infty)$

b) Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $(0; +\infty)$

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ và không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$

d) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $(0; +\infty)$

Lời giải

Ta có $y = x + \frac{4}{x} \Rightarrow y' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Bảng biến thiên của hàm số $y = x + \frac{4}{x}, x \in (0; +\infty)$

x	0	2	$+\infty$
y'		0	+
y	$+\infty$	4	$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ và không có giá trị lớn nhất trên $(0; +\infty)$

a) Đúng: Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ và không có giá trị lớn nhất trên $(0; +\infty)$

b) Sai: Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $(0; +\infty)$

c) Sai: Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ và không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$

d) Sai: Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $(0; +\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$; $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$ và có giá trị cực tiểu là $y = -2$

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0$

d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng -3 .

Lời giải

a) Sai: Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$; $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

b) Đúng: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$ và có giá trị cực tiểu là $y = -2$

c) Đúng: Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0$

d) Đúng: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng -3 .

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	4	3	4	$-\infty$

a) Cực đại của hàm số là 4

b) Cực tiểu của hàm số là 3

c) $\max y = 4$

d) $\min y = 3$

c)

d)

Lời giải

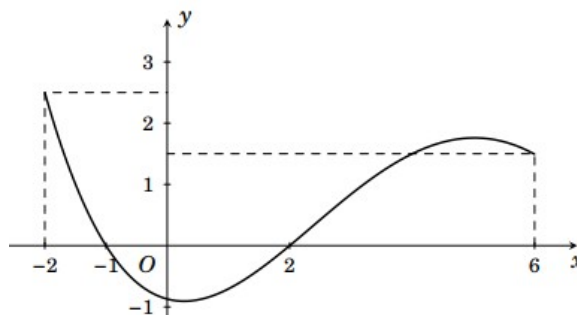
a) Đúng: Cực đại của hàm số là 4

b) Đúng: Cực tiểu của hàm số là 3

c) Đúng: $\max y = 4$

d) Sai: Từ bảng biến thiên ta thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} = -\infty$ nên hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên.



a) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-1)$

b) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(6)$

c) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-2)$

d) $\max_{[-2; 6]} f(x) = \max\{f(-1); f(6)\}$

Lời giải

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	-2	-1	2	6	
y'	+	0	-	0	+
y	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(2)$	$f(6)$	

Hàm số đồng biến trên $(-2; -1)$ và $(2; 6)$ do $f'(x) > 0$ nên $f(-1) > f(-2)$ và $f(6) > f(2)$

Hàm số nghịch biến trên $(-1; 2)$ do $f'(x) < 0$ suy ra $f(-1) > f(2)$

$$\max_{[-2; 6]} f(x) = \max\{f(-2); f(-1); f(2); f(6)\} = \max\{f(-1); f(6)\}$$

Từ đó có thể suy ra được

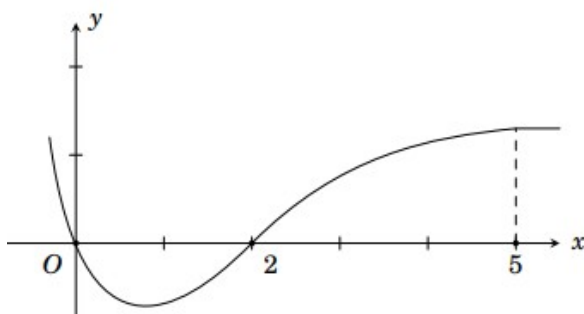
a) Sai: $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-1)$

b) Sai: $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(6)$

c) Sai: $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-2)$

d) Đúng: $\max_{[-2;6]} f(x) = \max\{f(-1); f(6)\}$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$



- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$
 c) $\min_{[0;5]} f(x) = f(0)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$ d) $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$

Lời giải

Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[0; 5]$

x	0	2	3	5
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(5)$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = \max\{f(0); f(5)\}$

Theo bảng biến thiên thì $f(3) > f(2)$ nên $f(3) - f(2) > 0$

Theo giả thiết ta có $f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Leftrightarrow f(5) = f(0) - [f(3) - f(2)] > f(0)$

Suy ra $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$. Vậy $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$

a) Sai: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

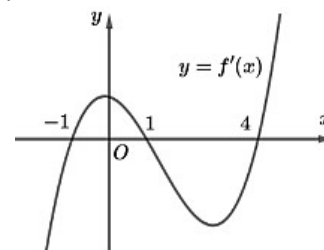
b) Đúng: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

c) Sai: $\min_{[0;5]} f(x) = f(0)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$

d) Đúng: $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.

- a) Hàm số có hai điểm cực trị
 b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$
 c) $f(1) > f(2) > f(4)$
 d) Trên đoạn $[1; 4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là $f(1)$



Lời giải

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow (-\infty; -1) \cup (1; 4) \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1) \cup (4; +\infty)$$

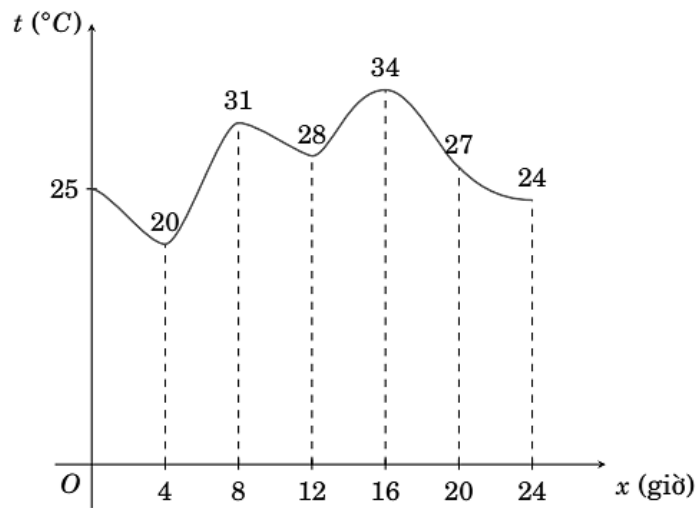
Khi đó và

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$								

- a) Sai: Hàm số có ba điểm cực trị
 b) Sai: Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ và $(4; +\infty)$
 c) Đúng: $f(1) > f(2) > f(4)$
 d) Đúng: Trên đoạn $[1; 4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là $f(1)$

Câu 8: Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày



- a) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 28°C
- b) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 20°C
- c) Thời điểm nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ
- d) Thời điểm nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ

Lời giải

- a) Sai: Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 34°C
- b) Đúng: Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 20°C
- c) Đúng: Thời điểm nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ
- d) Đúng: Thời điểm nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 30x$. Với các số nguyên a, b mà $a < b$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(b) - f(a)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Ta có

. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$2,5$	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	17	-63	$-\frac{275}{4}$	-64	$+\infty$

Với các số nguyên a, b mà $a < b$, để $f(b) - f(a)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì

$$\Rightarrow f(b) = f(2) = -64; \quad (a) = f(-1) = 17$$

. Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(b) - f(a)$ bằng -81 .

Câu 2: Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - 2 \cos^2 x + 3 \sin x + 6$ trên $[0; \pi]$ lần lượt là M, m . Tính tổng $M + m$.

Lời giải

$$y = \sin^3 x - 2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x + 6 \Rightarrow y = \sin^3 x + 2 \sin^2 x + 3 \sin x + 4$$

Ta có

Đặt $t = \sin x$. Do $x \in [0; \pi]$ nên $t \in [0; 1]$. Khi đó bài toán đã cho trở thành tính tổng của giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4$ trên đoạn $[0; 1]$.

$$y' = f'(t) = 3t^2 + 4t + 3 = 3\left(t^2 + 2\frac{2}{3}t + \frac{4}{9}\right) + \frac{15}{9} > 0, \quad \forall t \in [0; 1].$$

Ta có

Suy ra hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên đoạn $[0; 1]$.

$$M = \max_{[0; 1]} f(t) = f(1) = 10; \quad m = \min_{[0; 1]} f(t) = f(0) = 4$$

Khi đó:

. Vậy $M + m = 14$.

Câu 3: Cho hàm số $y = e^x (x^2 - 3)$, gọi $M = \frac{a}{e^b}$ ($a \in \square, b \in \square$) là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-5; -2]$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$?

Lời giải

$$y' = e^x (x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \in [-5; -2] \\ x = 1 \notin [-5; -2] \end{cases}$$

Ta có:

$$y(-5) = \frac{22}{e^5}; y(-3) = \frac{6}{e^3}; y(-2) = \frac{1}{e^2} \quad \max_{[-5; -2]} y = \frac{6}{e^3} \Rightarrow a = 6; b = 3 \Rightarrow a + b = 9$$

Ta có

. Khi đó

Câu 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{16}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$

Lời giải

Ta có: $y = x^2 + \frac{16}{x} \Rightarrow y' = 2x - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 16 = 0 \Rightarrow x = 2 \in [1; 4]$

Khi đó: $y(1) = 17; y(2) = 12; y(4) = 20.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{16}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$ bằng 12.

Câu 5: Cho hàm số $y = x + \frac{1}{x+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1; 2]$

Lời giải

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Tập xác định:

$$y = x + \frac{1}{x+2} \Rightarrow y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Ta có:

$$y(-1) = 0 \quad y(2) = \frac{9}{4}$$

Khi đó:

và

Do đó: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1; 2]$ là $y(-1) = 0$ và giá trị lớn nhất của hàm số trên

$$[-1; 2] \quad y(2) = \frac{9}{4}$$

là

Câu 6: Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ ($0 \leq t \leq 30$). Hỏi sau bao giây thì số vi khuẩn lớn nhất?

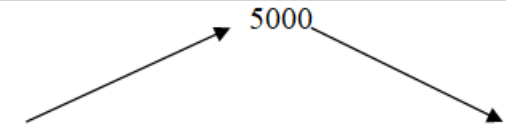
Lời giải

$$N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3 \quad (0 \leq t \leq 30)$$

Xét hàm số

$$N'(t) = 60t - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 20 \end{cases}$$

Ta có:

t	0	20	30
N'	+	0	-
N			

Với $t = 20$ giây thì số vi khuẩn lớn nhất.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra

a) $y = f(x) = x^3 - 33x$ trên đoạn $[2; 19]$

b) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ trên đoạn $[1; 3]$

c) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$

d) $y = f(x) = \frac{3x - 1}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 2]$

e) $y = 1 + \frac{1}{x}$ trên đoạn $[1; 2]$

f) $y = f(x) = \frac{4}{x} + x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$

g) $y = f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ trên miền xác định

h) $y = f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 2]$

i) $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$ trên $\square$

k) $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

l) $y = f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

m) $y = x + \frac{4}{x - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$

Lời giải

a) $y = f(x) = x^3 - 33x$ trên đoạn $[2; 19]$

$$f'(x) = 3x^2 - 33 \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 11 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{11}$$

Ta có và

Xét trên $[2; 19]$ ta có $x = \sqrt{11} \in [2; 19]$ ta có $f(2) = -58; f(\sqrt{11}) = -22\sqrt{11}; f(19) = 6232$

$$\min_{[2;19]} f(x) = f(\sqrt{11}) = -22\sqrt{11} \quad \max_{[2;19]} f(x) = f(19) = 6232$$

Vậy ;

b) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ trên đoạn $[1;3]$

Ta có $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ là hàm đa thức nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

Trên đoạn $[1;3]$ ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1;3] \\ x = 2 \in [1;3] \end{cases}$

Khi đó $f(1) = 1$; $f(2) = -1$; $f(3) = 3$. Vậy $\min_{[1;3]} f(x) = f(2) = -1$; $\max_{[1;3]} f(x) = f(3) = 3$;

c) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2;4]$

Hàm số đã cho xác định với mọi $x \in [2;4]$ và có đạo hàm $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$.

Trên đoạn $[2;4]$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Khi đó: $f(2) = 7$, $f(3) = 6$, $f(4) = \frac{19}{3}$. Vậy $\min_{[2;4]} f(x) = 6$; $\max_{[2;4]} f(x) = f(2) = 7$;

d) $y = f(x) = \frac{3x - 1}{x + 1}$ trên đoạn $[0;2]$

Xét hàm số $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 1}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; Hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$ và $f'(x) = \frac{4}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \neq -1$;

Khi đó: $f(0) = -1$; $f(2) = \frac{5}{3}$. Vậy $\min_{[0;2]} f(x) = f(0) = -1$; $\max_{[0;2]} f(x) = f(2) = \frac{5}{3}$;

e) $y = 1 + \frac{1}{x}$ trên đoạn $[1;2]$

Ta có $y' = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in [1;2]$ nên hàm số nghịch biến trên $[1;2]$.

$$M = \max_{[1;2]} y = y(1) = 2 \quad m = \min_{[1;2]} y = y(2) = \frac{3}{2}$$

Do đó:

f) $y = f(x) = \frac{4}{x} + x + 1$ trên đoạn $[1;3]$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[1;3]$ và có đạo hàm $f'(x) = -\frac{4}{x^2} + 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \notin (1;3) \\ x = 2 \in (1;3) \end{cases} \quad f(1) = 6; f(2) = 5; f(3) = \frac{16}{3}$$

Giải . Ta có

$$\min_{[1;3]} f(x) = 5 \quad \max_{[1;3]} f(x) = 6$$

Vậy

g) $y = f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ trên miền xác định

$$D = [-2; 2] \quad f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Tập xác định: và có đạo hàm

Bảng biến thiên:

x	-2	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$	$\parallel$	$+$ 0 $-$	$\parallel$
$f(x)$	-2	$2\sqrt{2}$	2

$$\min_{[-2;2]} f(x) = -2 \quad \max_{[-2;2]} f(x) = 2\sqrt{2}$$

Vậy

h) $y = f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x+1} = x + \frac{4}{x+1}$

Khi đó
$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 2] \\ x = -3 \notin [0; 2] \end{cases}$$

Ta có $f(0) = 4$; $f(1) = 3$; $f(2) = \frac{10}{3}$. Vậy $\min_{[0; 2]} f(x) = 3$ và $\max_{[0; 2]} f(x) = 4$

i) $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$ trên $\square$

Ta có
$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$$
. Suy ra $f'(x) = 0$ khi $x = \pm 1$. Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$							

Từ bảng biến thiên, ta có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho lần lượt là 2 và 0 .

k) $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$y' = 3 - \frac{8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$$

Ta có

Lập bảng biến thiên của hàm số trên $(0; +\infty)$ như sau:

x	0	$\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$	$+\infty$	
y'		-	0	+
y	$+\infty$			$+\infty$

$\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$

Từ bảng biến thiên ta thấy

$$y = f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x} \quad (0; +\infty)$$

l) trên khoảng

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} + 1 \Leftrightarrow f(x) \geq 3$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$.

m) $y = x + \frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$

$$y = x + \frac{4}{x-1} \Rightarrow y = 1 + \frac{4}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Ta có:

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
y'				$-$	0	$+$
y				$+\infty$		$+\infty$



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số là

Bài tập 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra

a) $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$

b) $y = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

c) $y = f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1; 2]$ d) $y = \cos 2x + 2 \sin x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Lời giải

a) $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$.

Tập xác định $D = (0; +\infty)$. Ta có $y' = 1 - \frac{1}{x}$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; e\right]$.

Xét $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln 2$, $y(1) = 1$, $y(e) = e - 1$. Do đó $m = \min_{\left[\frac{1}{2}; e\right]} y = 1$ và $M = \max_{\left[\frac{1}{2}; e\right]} y = e - 1$.

b) $y = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Hàm số liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ có $y' = 1 - 2 \cos x \sin x = 1 - \sin 2x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. Do $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

Mặt khác $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \end{cases}$. Vậy $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$; $\min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} y = 1$.

c) $y = f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{2x} + (x^2 - 2)2e^{2x} = 2e^{2x}(x^2 + x - 2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-1; 2] \\ x = -2 \notin [-1; 2] \end{cases}$. Ta có $f(-1) = -e^{-2}$; $f(1) = -e^2$; $f(2) = 2e^4$.

Vậy $M = \max_{[-1; 2]} f(x) = f(2) = 2e^4$; $m = \min_{[-1; 2]} f(x) = f(1) = -e^2$.

d) $y = \cos 2x + 2 \sin x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Xét hàm số $y = \cos 2x + 2 \sin x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $y' = -2 \sin 2x + 2 \cos x = -4 \sin x \cdot \cos x + 2 \cos x = 2 \cos x (-2 \sin x + 1)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Giải

Xét trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $y' = 0$ có các nghiệm $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{2}$.

Ta có $y(0) = 1; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$. Suy ra $\max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = \frac{3}{2}$, $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = 1$.

Bài tập 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên miền đã chỉ ra

a) $f(x) = \frac{5 \sin x + 1}{\sin x + 2}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$

b) $y = \cos^3 x + 2 \sin^2 x + \cos x$ trên miền xác định

Lời giải

a) $f(x) = \frac{5 \sin x + 1}{\sin x + 2}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$

Đặt $t = \sin x$ với $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ thì $t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ nên khi đó ta được hàm số $g(t) = \frac{5t + 1}{t + 2}$

Đạo hàm $g'(t) = \frac{9}{(t + 2)^2} > 0, \forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

Do $g(0) = \frac{1}{2}; g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{5}$ nên $\min_{\left[0; \frac{1}{2}\right]} g(t) = g(0) = \frac{1}{2}$ nên $\min_{\left[0; \frac{\pi}{6}\right]} f(x) = \frac{1}{2}$.

b) $y = \cos^3 x + 2 \sin^2 x + \cos x$ trên miền xác định

Ta có $y = \cos^3 x + 2 \sin^2 x + \cos x = \cos^3 x + 2(1 - \cos^2 x) + \cos x = \cos^3 x - 2 \cos^2 x + \cos x + 2$

Đặt $t = \cos x$ với $t \in [-1; 1]$ ta được $f(t) = t^3 - 2t^2 + t + 2$

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in [-1; 1] \\ t = \frac{1}{3} \in [-1; 1] \end{cases}$ mà $f(-1) = -2; f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{58}{27}; f(1) = 2$

Vậy $\max_{x \in [-1; 1]} y = \max_{[-1; 1]} f(t) = \frac{58}{27}$

Bài tập 4: Độ giảm huyết áp của một bệnh $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ trong đó x là số miligam thuốc được tiêm cho bệnh nhân ($0 < x < 30$). Để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là bao nhiêu mg ?

Lời giải

Ta có: $G'(x) = 1,5x - 0,075x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 20 \end{cases}$. Bảng biến thiên:

x	0	20	30	
$G'(x)$		+	0	—
$G(x)$	0	G_{max}	0	

Vậy để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là $20(mg)$

Dạng 2: Bài toán tìm max, min của hàm số có chứa tham số

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x + m}{x - 3}$ (với m là tham số). Giá trị của m để $\max_{[-1; 2]} f(x) + \min_{[-1; 2]} f(x) = 8$ là

A. $m = \frac{4}{5}$. B. $m = -\frac{46}{5}$. C. $m = -12$. D. $m = \frac{18}{5}$.

Lời giải

$$f'(x) = \frac{-6-m}{(x-3)^2}$$

Ta có:

$$m = -6 \Rightarrow y = 2$$

Nếu (loại).

Nếu $m \neq -6$ khi đó $y' < 0, \forall x \in [-1; 2]$ hoặc $y' > 0, \forall x \in [-1; 2]$ nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất tại $x = 1, x = 2$.

Theo bài ra ta có:

$$\max_{[-1; 2]} f(x) + \min_{[-1; 2]} f(x) = 8 \Leftrightarrow f(-1) + f(2) = 8 \Leftrightarrow \frac{-2+m}{-4} + \frac{4+m}{-1} = 8 \Leftrightarrow m = -\frac{46}{5}$$

- Câu 2:** Cho hàm số $y = x + \cos^2 x + m$ (m là tham số). Với giá trị nào của tham số m thì $\min_{[0; \frac{\pi}{4}]} y = 4$
- A.** $m = 3$. **B.** $m = \frac{3}{4}$. **C.** $m = \frac{5}{2}$. **D.** $m = 0$.

Lời giải

Ta có: $y' = 1 - 2\sin x \cdot \cos x = 1 - \sin 2x \leq 0, \forall x \in [0; \frac{\pi}{4}]$ nên hàm số $y = x + \cos^2 x + m$

$$\min_{[0; \frac{\pi}{4}]} y = y(0) = 1 + m = 4$$

Do đó $\Leftrightarrow m = 3$.

- Câu 3:** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$. Biết $\max_{(-\infty; 0)} f(x) = 5$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $(0; +\infty)$ là

- A.** $\min_{(0; +\infty)} f(x) = 1$. **B.** $\min_{(0; +\infty)} f(x) = 2$. **C.** $\min_{(0; +\infty)} f(x) = 3$. **D.** $\min_{(0; +\infty)} f(x) = -1$.

Lời giải

Xét trên khoảng $(-\infty; 0)$ có $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	$-\infty$	$m+2$	m

$$\max_{(-\infty; 0)} f(x) = 5 \Leftrightarrow m + 2 = 5 \Leftrightarrow m = 3 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 3$$

Khi đó ta có

Xét trên khoảng $(0; +\infty)$. Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	3	1	$+\infty$

$$\min_{(0; +\infty)} f(x) = 1$$

Vậy

- Câu 4:** Cho hàm số $y = (x + m)^3 - 3(x + m) + 1 + n$. Biết hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ và giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 1]$ bằng 4. Tính $m + n$
- A.** $m + n = 0$. **B.** $m + n = 2$. **C.** $m + n = -1$. **D.** $m + n = 1$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3(x + m)^2 - 3 = 3(x + m + 1)(x + m - 1)$

Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - m = x_2 \\ x = -1 - m = x_1 \end{cases}$

Để hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$ thì $x_1 \leq 0 < 2 \leq x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot y'(0) \leq 0 \\ 3 \cdot y'(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'(0) \leq 0 \\ y'(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 3 \leq 0 \\ 3(2 + m)^2 - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \leq 0 \\ (2 + m)^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 1 \\ -1 \leq 2 + m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 1 \\ -3 \leq m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1 \quad (1)$$

Với $m = -1$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = 2 \notin [-1; 1] \end{cases}$

Ta có $y(0) = n + 3, y(1) = n + 1, y(-1) = n - 1 \Rightarrow \max_{[-1; 1]} y = n + 3 = 4 \Rightarrow n = 1 \quad (2)$

Từ (1) vào (2) $\Rightarrow m + n = 0$

- Câu 5:** Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2} + m$ là $3\sqrt{2}$. Giá trị của m là
- A.** $m = 2\sqrt{2}$. **B.** $m = -\sqrt{2}$. **C.** $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $m = \sqrt{2}$.

Điều kiện xác định: $-2 \leq x \leq 2$.

$$y = x + \sqrt{4 - x^2} + m \Rightarrow y' = 1 + \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên

x	-2	$\sqrt{2}$	2
y'		0	
y	$-2 + m$	$2\sqrt{2} + m$	$2 + m$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là $3\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} + m = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$ (với m là tham số thực). Biết $\max_{(-\infty; 0)} f(x) = 5$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $(0; +\infty)$ là

A. $\min_{(0; +\infty)} f(x) = 1.$

B. $\min_{(0; +\infty)} f(x) = 2.$

C. $\min_{(0; +\infty)} f(x) = 3.$

D. $\min_{(0; +\infty)} f(x) = -1.$

Lời giải

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'		0	0	
y	$-\infty$	$m + 2$	$m - 2$	$+\infty$

Vậy $\max_{(-\infty; 0)} f(x) = f(-1) \Rightarrow f(-1) = 5 \Leftrightarrow m + 2 = 5 \Leftrightarrow m = 3.$

$\min_{(0; +\infty)} f(x) = f(1) = m - 2 = 3 - 2 = 1.$

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực). Gọi m_0 là giá trị của m thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m_0 < -1$. B. $m_0 > 4$. C. $1 \leq m_0 < 3$. D. $3 < m_0 \leq 4$.

Lời giải

$$y' = \frac{-m-1}{(x-1)^2} \quad x \neq 1.$$

Ta có: . Với

Nếu $-m-1 > 0 \Leftrightarrow m < -1$

$\Rightarrow y' > 0 \Rightarrow$ hàm số đã cho đồng biến trên $[2;4] \Rightarrow \min_{[2;4]} y = y(2) = m+2$.

Theo giả thiết: $m+2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (loại).

Nếu $-m-1 < 0 \Leftrightarrow m > -1$

$\Rightarrow y' < 0 \Rightarrow$ hàm số đã cho nghịch biến trên $[2;4] \Rightarrow \min_{[2;4]} y = y(4) = \frac{4+m}{3}$.

Theo giả thiết: $\frac{m+4}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5$ $m_0 = 5$.
Vậy

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = 10^x + x$ và hàm số $g(x) = x^3 - mx^2 + (m^2 + 1)x - 2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $g(x + f(x))$ trên đoạn $[0;1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của tham số m bằng

- A. $\frac{21}{2}$. B. 6. C. 21. D. 5.

Lời giải

Đặt $t = x + f(x)$ vì $x \in [0;1] \Rightarrow t \in [1;12]$.

Xét $g(t) = t^3 - mt^2 + (m^2 + 1)t - 2$ trên $[1;12]$

$\Rightarrow g'(t) = 3t^2 - 2mt + m^2 + 1$ $\Delta' = m^2 - 3(m^2 + 1) = -2m^2 - 3 < 0 \forall m$
có

$$\Rightarrow g'(t) > 0 \forall t \in [1; 12] \Rightarrow y = g(t) \text{ đồng biến trên } [1; 12].$$

$$M = \max_{t \in [1; 12]} g(t) = g(12) = 12m^2 - 144m + 1738 \Rightarrow M = \frac{144}{2 \cdot 12} = 6$$

Vậy đạt giá trị nhỏ nhất khi

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 1.

A. $m = 20$.

B. $m = 19$.

C. $m = 18$.

D. $m = 21$.

Lời giải

Hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ và $y' = -3x^2 - 6x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 2] \\ x = -2 \notin [-1; 2] \end{cases}$$

Ta có:

$$y(-1) = m - 2; y(0) = m; y(2) = m - 20$$

$$\min_{x \in [-1; 2]} y = 1 \Leftrightarrow m - 20 = 1 \Leftrightarrow m = 21$$

Suy ra:

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x - m^2}{x + 8}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0; 3]$ bằng $-\frac{9}{2}$?

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{x - m^2}{x + 8}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-8\}$ nên hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[0; 3]$

$$y' = \frac{8 + m^2}{(x + 8)^2} > 0, \forall m \in \mathbb{R}, x \neq -8$$

Ta có nên hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 3]$.

$$\min_{[0;3]} y = y(0) = -\frac{m^2}{8} \quad -\frac{m^2}{8} = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow m^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -6 \end{cases}$$

Suy ra . Từ giả thiết suy ra .

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 11: Cho hàm số $y = (x^3 - 3x - m + 1)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 4 là

A. -2.

B. 2.

C. -4.

D. 4.

Lời giải

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x + 1$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Ta khảo sát hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$			1	
		-3			$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $x \in [-1;1] \Rightarrow t \in [-3;1]$ thì

Bài toán trở thành: Tìm m để hàm số $y = f(t) = (t - m)^2$ có giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-3;1]$ bằng 4.

Ta có $f'(t) = 2(t - m) = 0 \Leftrightarrow t = m$.

Nếu $m \in [-3;1]$ thì $\min_{[-3;1]} f(t) = f(m) = 0$, tức là không tồn tại m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m > 1$ thì $\min_{[-3;1]} f(t) = f(1) = (1-m)^2$

$$\Leftrightarrow (1-m)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \text{ (ktm)} \\ m = 3 \text{ (tm)} \end{cases}$$

Nếu $m < -3$ thì $\min_{[-3;1]} f(t) = f(-3) = (-3-m)^2$

$$\Leftrightarrow (-3-m)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \text{ (tm)} \\ m = -1 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán: $m = 3; m = -5$.

Vậy tổng tất cả các giá trị của m là -2 .

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{x-m^2}{x-8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng m . Giá trị m_0 thuộc khoảng nào sau đây?

- A.** $(20;25)$ **B.** $(6;9)$ **C.** $(5;6)$ **D.** $(2;5)$

Lời giải

$$y' = \frac{8+m^2}{(x+8)^2} > 0, \forall x \neq -8$$

Ta có :

$$\min_{[0;3]} y = y(0) = \frac{-m^2}{8}$$

$$\min_{[0;3]} y = -3 \Rightarrow \frac{-m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow m^2 = 24 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{6}$$

Do đó . Theo giả thiết

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+4}$. Gọi m_0 là giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;6]$ bằng -4 . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $m_0 \in (5;7)$ **B.** $m_0 \in (1;3)$ **C.** $m_0 \in (7;9)$ **D.** $m_0 \in (3;5)$

Lời giải

$$f(x) = \frac{x-m^2}{x+4} \Rightarrow f'(x) = \frac{m^2+4}{(x+4)^2} > 0, \forall m$$

Ta có: . Hàm số đồng biến trên $[0;6]$

Suy ra: $\min_{[0;6]} f(x) = f(0) = -\frac{m^2}{4} = -4 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4$ suy ra $m = 4$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{x - m^2 - 2}{x - m}$, với m là tham số. Gọi S là tập các giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1 . Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -6 . B. -1 . C. 1 . D. -3 .

Lời giải

$$y' = \frac{m^2 - m + 2}{(x + m)^2} > 0, \forall x \neq m$$

Ta có:

$$\max_{[0;4]} y = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} y(4) = -1 \\ m \notin [0; 4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 6 = 0 \\ m > 4 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \\ m > 4 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$$

Suy ra

Khi đó $S = \{-3\}$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng -3 .

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{x - m}{x + 1}$ với m là số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; 2]$ bằng 6 .

A. $m = 4$. B. $m = -4$. C. $m = 1$. D. $m = -1$.

Lời giải

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ bằng 6 khi:

$$y(0) + y(2) = 6 \Leftrightarrow -m + \frac{2 - m}{3} = 6 \Leftrightarrow m = -4.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x - m^2 - 2}{x - m}$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $D = \emptyset$

b) Khi $m = 1$ thì hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

- c) Khi $m = 1$ thì trên đoạn $[1; 4]$ hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$
- d) Có duy nhất 1 giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1 .

Lời giải

a) Sai: Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

b) Đúng: Khi $m = 1$ thì hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

Ta có $y' = \frac{m^2 - m + 2}{(x - m)^2} > 0, \forall m$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; m)$ và $(m; +\infty)$

x	$-\infty$	m	$+\infty$
y'	+		+
y	1	$+\infty$	1

- c) Sai: Khi $m = 1$ thì trên đoạn $[1; 4]$ hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$
- d) Đúng: Có duy nhất 1 giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1 .

Từ bảng biến thiên, hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $[0; 4]$ bằng -1 khi $\begin{cases} m < 0 \\ f(4) = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} m < 0 \\ \frac{2 - m^2}{4 - m} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 + m - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$, với m là tham số

- a) Khi $m = 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$
- b) Khi $m = 0$ thì hàm số có hai điểm cực trị
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ bằng $m - 2$
- d) Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Khi đó S có một phần tử

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 3$. Bảng biến thiên như sau:

x	0	1	2		
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	m		$-2 + m$		$2 + m$

Trường hợp 1: $2 + m < 0 \Leftrightarrow m < -2$. Khi đó $\max_{[0;2]} |f(x)| = -(-2 + m) = 2 - m$

$$2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1 \quad (\text{loại})$$

$$\begin{cases} 2 + m > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0$$

Trường hợp 2:

$$|m - 2| = 2 - m > 2 > 2 + m \Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| = -(-2 + m) = 2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1$$

Khi đó (thỏa mãn)

$$\begin{cases} -2 + m < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2$$

Trường hợp 3:

$$|m - 2| = 2 - m < 2 < 2 + m \Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| = 2 + m = 3 \Leftrightarrow m = 1$$

Khi đó (thỏa mãn)

Trường hợp 4: $-2 + m > 0 \Leftrightarrow m > 2$. Khi đó $\max_{[0;2]} |f(x)| = 2 + m = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (loại)

a) Sai: Khi $m = 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$

b) Đúng: Khi $m = 0$ thì hàm số có hai điểm cực trị

c) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ bằng $m - 2$

d) Sai: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Khi đó S có hai phần tử

Câu 3: Cho hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$, với m là tham số

a) Hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[0; 3]$ khi $m \leq 0$

b) Khi $m \leq 0$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ là $3m + 9$

c) Khi $\frac{9}{4} \leq m \leq 36$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên $[0; 3]$ là $-m + 12\sqrt{m}$

d) Có đúng một giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên $[0; 3]$ bằng 20.

Lời giải

$$y' = m - \frac{36}{(x+1)^2}.$$

Ta có

Với $m \leq 0$, hàm số nghịch biến trên $[0; 3]$ nên $\min_{x \in [0; 3]} y = y(3) = 3m + 9$

Suy ra $3m + 9 = 20 \Leftrightarrow m = \frac{11}{3}$ (không thỏa mãn)

Với $m > 0$, ta có: $y' = \frac{m(x+1)^2 - 36}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x+1 = \pm \frac{6}{\sqrt{m}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \frac{6}{\sqrt{m}} \\ x = -1 - \frac{6}{\sqrt{m}} \text{ (loại)} \end{cases}$

Khi $0 \leq -1 + \frac{6}{\sqrt{m}} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{9}{4} \leq m \leq 36$,

ta có bảng biến thiên của hàm số:

x	0	$-1 + \frac{6}{\sqrt{m}}$	3
y'	-	0	+
y	36	$-m + 12\sqrt{m}$	$3m + 9$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra

$$\min_{x \in [0; 3]} y = y\left(-1 + \frac{6}{\sqrt{m}}\right) = -m + 12\sqrt{m} = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 100 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Khi $-1 + \frac{6}{\sqrt{m}} > 3 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$,

ta có bảng biến thiên của hàm số:

x	0	3
y'	-	-
y	36	$3m + 9$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $\min_{x \in [0;3]} y = y(3) = 3m + 9 = 20 \Leftrightarrow m = \frac{11}{9}$ (loại).

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng 20 khi $m = 4$.

a) Đúng: Hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[0;3]$ khi $m \leq 0$

b) Đúng: Khi $m \leq 0$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ là $3m + 9$

c) Đúng: Khi $\frac{9}{4} \leq m \leq 36$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ là $-m + 12\sqrt{m}$

d) Sai: Có đúng một giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x + m}$, với m là tham số thực dương

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

b) Trên đoạn $[2;4]$ thì đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị dương

c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2;4]$ là $\min_{[2;4]} y = y(2)$

d) Chỉ có duy nhất một giá trị của tham số m để $\min_{[2;4]} y = \frac{9}{5}$

Lời giải

a) Sai: Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

b) Đúng: Trên đoạn $[2;4]$ thì đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị dương

Với $m > 0$ ta có $y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 + 1}{(x + m)^2} > 0, \forall x \in [2;4]$

Do đó $\min_{[2;4]} y = y(2) = \frac{2m + 3}{m + 2} = \frac{9}{5} \Leftrightarrow m = 3$

c) Sai: Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2;4]$ là $\min_{[2;4]} y = y(4)$

d) Đúng: Chỉ có duy nhất một giá trị của tham số m để $\min_{[2;4]} y = \frac{9}{5}$ là $m = 3$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = ax^3 - 4(a+2)x + 1$ với a là tham số. Nếu $\max_{(-x;0]} f(x) = f(-2)$ thì $\max_{[0;3]} f(x)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = 3ax^2 - 4(a+2)$
 $\max_{(-x;0]} f(x) = f(-2) \Rightarrow f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 12a - 4(a+2) = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Khi đó:

$$f(x) = x^3 - 12x + 1 \quad f'(x) = 3x^2 - 12; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Suy ra

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-2)$		-13	$+\infty$

Vậy với $a = 1$ thì hàm số đạt $\max_{(-x;0]} f(x) = f(-2)$ và khi đó $\max_{[0;3]} f(x) = 1$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x^3 + (1+m^2)x + 1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$ không vượt quá 7 . Số phần tử nguyên của S là bao nhiêu?

Lời giải

$$f(x) = x^3 + (1+m^2)x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 1 + m^2 > 0, x \in \mathbb{R}$$

Ta có $f(x)$ đồng biến trên $[0;1]$. Do đó hàm số đồng biến trên $[0;1]$

$$\max_{[0;1]} f(x) = f(1) = m^2 + 3$$

$$m^2 + 3 \leq 7 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$$

. Yêu cầu bài toán tương đương

Vậy $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ hay S có 5 phần tử.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = |4x - m| - x^2$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 ?

Lời giải

Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 thì $|4x - m| - x^2 \leq 5 \Leftrightarrow |4x - m| \leq x^2 + 5, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - m \leq x^2 + 5, \forall x \in \mathbb{R} \\ 4x - m \geq -x^2 - 5, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -x^2 + 4x - 5, \forall x \in \mathbb{R} \\ m \leq x^2 + 4x + 5, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq 1 \end{cases}$$

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ bằng 5 $\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{-1; 1\}$

Vậy có 2 giá trị m cần tìm.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{2\sqrt{x+1} + m}{\sqrt{x+1} + 4}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 8]$ nhỏ hơn 3. Số phần tử của tập S là bao nhiêu?

Lời giải

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \frac{8-m}{(\sqrt{x+1} + 4)^2}$$

Ta có

Trường hợp 1: Nếu $m < 8 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow (-1; 8)$ hàm số đồng biến trên

$$\Rightarrow \max_{[-1; 8]} f(x) = f(8) = \frac{6+m}{7} < 3 \Leftrightarrow m < 15 \quad m < 8; m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$$

mà

Trường hợp 2: Nếu $m > 8 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow (-1; 8)$ hàm số nghịch biến trên

$$\Rightarrow \max_{[-1; 8]} f(x) = f(-1) = \frac{m}{4} < 3 \Leftrightarrow m < 12 \quad m > 8; m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{9; 10; 11\}$$

mà

Trường hợp 3: Nếu $m = 8 \Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow \max_{[-1; 8]} f(x) = 2 < 3 \Rightarrow m = 8$ (thỏa mãn) thỏa mãn.

Vậy có 11 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x-m}{x+1}$. Tìm m để $\max_{[1; 2]} f(x) + \min_{[1; 2]} f(x) = -8$

Lời giải

$$y' = \frac{1+m}{(x+1)^2}$$

Đạo hàm:

$$y = f(x) = \frac{x-m}{x+1}$$

Do hàm số chỉ đồng biến hoặc nghịch biến trên $[1; 2]$ khi $m \neq -1$.

$$\max_{[1;2]} f(x) + \min_{[1;2]} f(x) = -8$$

Do đó

$$\Leftrightarrow y(1) + y(2) = -8 \Leftrightarrow \frac{1-m}{2} + \frac{2-m}{3} = -8 \Leftrightarrow 3(1-m) + 2(2-m) = -48 \Leftrightarrow m = 11$$

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2020; 2020]$ để biểu thức $y = 4x^2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} + 4mx^3 - 3mx + m^2$ có giá trị lớn nhất không nhỏ hơn 5?

Lời giải

$$1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Điều kiện

$$y = -4(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + 3\sqrt{1-x^2} + m(4x^3 - 3x) + m^2$$

Ta có

$$x = \cos t; t \in [0; \pi] \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = |\sin t| = \sin t$$

Đặt

Biểu thức y có dạng

$$g(t) = 3\sin t - 4\sin^3 t + m(4\cos^3 t - 3\cos t) + m^2 = \sin 3t + m \cos 3t + m^2 \leq \sqrt{1+m^2} + m^2$$

Giá trị lớn nhất của y là $M = \sqrt{1+m^2} + m^2 \geq 5 \Leftrightarrow m^2 + 1 + \sqrt{1+m^2} - 6 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+m^2} \geq 2 \\ \sqrt{1+m^2} \leq -3 \Leftrightarrow m^2 \geq 3 \Leftrightarrow |m| \geq \sqrt{3} \end{cases}$$

Do m nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ nên $m \in \{\pm 2; \pm 3; \pm 4; \dots; \pm 2020\}$.

Vậy có 4038 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{3 - m\sqrt{3}\cos x}{\sin x + 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2025; 2025]$ để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn 4?

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $\forall x \in \mathbb{R}$ do $\sin x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có
$$y = \frac{3 - m\sqrt{3}\cos x}{\sin x + 2} \Leftrightarrow y \sin x + 2y = 3 - m\sqrt{3}\cos x \Leftrightarrow y \sin x + m\sqrt{3}\cos x = 3 - 2y$$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi
$$y^2 + (m\sqrt{3})^2 \geq (3 - 2y)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow (y - 2)^2 \leq m^2 + 1 \Leftrightarrow |y - 2| \leq \sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{m^2 + 1} \leq y - 2 \leq \sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{m^2 + 1} \leq y \leq 2 + \sqrt{m^2 + 1}$$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số đã cho bằng $2 + \sqrt{m^2 + 1}$.

Ta có
$$2 + \sqrt{m^2 + 1} > 4 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 1} > 2 \Leftrightarrow m^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\sqrt{3} \\ m > \sqrt{3} \end{cases}$$

Vì m là số nguyên thuộc đoạn $[-2022; 2022]$

nên $m \in \{-2025; -2021; \dots; -3; -2; 2; 3; 4; \dots; 2025\}$

Vậy có 4048 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{mx - m^2 - 2}{x - 1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\max_{[-2; 0]} y = \frac{-1}{3}$. Có bao nhiêu giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán?

Lời giải

Ta có
$$y' = \frac{m^2 - m + 2}{(x - 1)^2} > 0 \quad \forall x \in [-2; 0]$$
 với

$$\Rightarrow \text{hàm số } y = \frac{mx - m^2 - 2}{-x + 1} \text{ đồng biến trên } [-2; 0] \Rightarrow \max_{[-2; 0]} y = y(0) = m^2 + 2.$$

$$\text{Theo đề bài ta có } \Rightarrow m^2 + 2 = 3 \Rightarrow m = \pm 1 \quad \text{mà } m > 0 \quad \text{nên ta nhận giá trị } m = 1.$$

Vậy có 1 giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để

- a) Hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; 2]$ tại một điểm $x_0 \in (0, 2)$
- b) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x - m}{x + 2}$ trên $[0; 2]$ bằng 8
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1 - m^2$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng -1
- d) Hàm số $y = \frac{mx - m^2 - 1}{x + 2m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ bằng $\frac{1}{5}$.

Lời giải

- a) Hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; 2]$ tại một điểm $x_0 \in (0, 2)$
 Điều kiện xác định $x \neq -m$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0; 2]$ nên $-m \notin [0; 2] \Rightarrow \begin{cases} -m < 0 \\ -m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases} (*)$

$$\text{Ta có: } y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2} = \frac{(x + m)^2 - 1}{(x + m)^2}; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -m + 1 \\ x_2 = -m - 1 \end{cases}$$

Vì $x_1 - x_2 = 2$ nên chỉ có nhiều nhất một nghiệm thuộc $(0, 2)$.

Ta thấy: $-m + 1 > -m - 1, \forall m$ do đó để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; 2]$ tại một điểm $x_0 \in (0, 2)$ thì $0 < -m + 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1 (**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có $0 < m < 1$.

- b) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x - m}{x + 2}$ trên $[0; 2]$ bằng 8

$$\text{Ta có } y(0) = -\frac{m}{2}; y(2) = \frac{2 - m}{4}.$$

Hàm số $y = \frac{x-m}{x+2}$ xác định trên $[0;2]$ và đạt các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất tại hai đầu mút.

$$\text{Do đó } \max_{[0;2]} y + \min_{[0;2]} y = -\frac{m}{2} + \frac{2-m}{4} = \frac{-3m+2}{4}$$

$$\text{Từ giả thiết suy ra } \frac{-3m+2}{4} = 8 \Leftrightarrow -3m+2 = 32 \Leftrightarrow m = -10$$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1 - m^2$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng -1

$$y' = -3x^2 + 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{nhan}) \\ x = 2 & (\text{loại}) \end{cases}$$

Ta có

$$\text{Khi đó } f(-2) = 19 - m^2; \quad f(0) = -1 - m^2 \quad \text{và} \quad f(1) = 1 - m^2$$

$$\text{Do đó } \min_{[-2;1]} f(x) = f(0) = -1 - m^2 \quad \text{suy ra } -1 - m^2 = -1 \Leftrightarrow m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$$

d) Hàm số $y = \frac{mx - m^2 - 1}{x + 2m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ bằng $\frac{1}{5}$.

$$y' = \frac{3m^2 + 1}{(x + 2m)^2} > 0, \forall x \neq -2m$$

Ta có

$$\text{Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên } [1;3] \quad \text{khi} \quad \begin{cases} -2m \notin [1;3] \\ y(3) = \frac{-m^2 + 3m - 1}{2m + 3} = \frac{1}{5} (*) \end{cases}$$

$$\text{Giải } (*): \quad \frac{-m^2 + 3m - 1}{2m + 3} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow -5m^2 + 15m - 5 = 2m + 3 \Leftrightarrow -5m^2 + 13m - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ (tm)} \\ m = \frac{8}{5} \text{ (tm)} \end{cases}$$

Bài tập 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + m$ trên $[-1;1]$ bằng 0

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x+5m}{x-3}$ trên $[1;2]$ bằng 4

Lời giải

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + m$ trên $[-1;1]$ bằng 0

Hàm số liên tục và xác định trên $[-1;1]$ và có đạo hàm

$$f'(x) = -3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -2 \notin [-1;1] \end{cases}$$

Xét $f(-1) = -2 + m; f(1) = -4 + m$ suy ra $\max_{[-1;1]} f(x) = -2 + m$

Theo đề bài $-2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x+5m}{x-3}$ trên $[1;2]$ bằng 4 có đạo hàm $y' = \frac{-3-5m}{(x-3)^2}$

$$-3 - 5m > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{5}$$

Trường hợp 1:

Suy ra $y' > 0$ thì $\min_{[1;2]} y = y(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(1+5m) = 4 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{5}$ (nhận)

$$-3 - 5m < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{3}{5}$$

Trường hợp 2:

Suy ra $y' < 0$ thì $\min_{[1;4]} y = y(2) \Leftrightarrow -2 + 5m = 4 \Leftrightarrow m = \frac{6}{5}$ (loại)

Dạng 3: Bài toán tối ưu, thực tế liên quan đến max min

- Bài toán chuyển động**

- Gọi $s(t)$ là hàm quãng đường; $v(t)$ là hàm vận tốc; $a(t)$ là hàm gia tốc
- Khi đó $s'(t) = v(t); v'(t) = a(t)$

- Bài toán thực tế - tối ưu**

- Biểu diễn dữ kiện cần đạt max – min qua một hàm $f(t)$
- Khảo sát hàm $f(t)$ trên miền điều kiện của hàm và suy ra kết quả.

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một chất điểm chuyển động với quãng đường $s(t)$ cho bởi công thức $s(t) = 6t^2 - t^3$, t (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây, vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (giây) bằng bao nhiêu?

A. $t = 3$ s.B. $t = 4$ s.C. $t = 2$ s.D. $t = 6$ s.**Lời giải**

Ta có $v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2$; $v'(t) = 12 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Lập bảng biến thiên ta thấy $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = 2$ giây.

Câu 2: Trong 3 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 3 giây đầu tiên đó?

A. 13 m/s.

B. 10 m/s.

C. 9 m/s.

D. 12 m/s.

Lời giải

Ta có $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 1$. Xét hàm số $v(t) = -3t^2 + 12t + 1$ trên đoạn $[0; 5]$

$v'(t) = -6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Tính các giá trị $v(0) = 1; v(2) = 13; v(3) = 10$

So sánh các giá trị ta suy ra $\max_{[0;3]} v(t) = 13$.

Câu 3: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân là bao nhiêu để huyết áp được giảm nhanh nhất?

A. 24 mg.

B. 20 mg.

C. 15 mg.

D. 10 mg.

Lời giải

Bài toán trở thành tìm $x \in [0; 30]$ để hàm số $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ đạt giá trị lớn nhất

$$G(x) = 0,025x^2(30 - x) \Rightarrow G'(x) = 0,025(60x - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 25 \end{cases}$$

Ta có:

Bảng biến thiên

x	0	20	30	
$G'(x)$	0	+	0	-
$G(x)$	<div><div>0</div><div>100</div><div>0</div></div>			

Từ bảng biến thiên ta thấy $\max_{[0;30]} G(x) = G(20) = 100$

Vậy liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhanh nhất là 20 mg.

Câu 4: Trong thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức:

$$N(t) = 1000 + \frac{100}{100 + t^2} \quad (\text{con})$$

Trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

- A. 1008 con. B. 1012 con. C. 1005 con. D. 1020 con.

Lời giải

Xét hàm số $N(t) = 1000 + \frac{100}{100 + t^2}$ có $N'(t) = \frac{100 \cdot (100 + t^2) - 100t \cdot 2t}{(100 + t^2)^2} = \frac{100(100 - t^2)}{(100 + t^2)^2}$

Khi đó với $t > 0$ $N'(t) = 0 \Leftrightarrow 100 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 10$

Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ như sau:

t	0	10	$+\infty$
$N'(t)$	+	0	-
$N(t)$	1000	1005	1000

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số $N(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1005 tại $t = 10$.

Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện nuôi cấy vào môi trường dinh dưỡng là 1005 con.

Câu 5: Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A. 25 cm^2 . B. $\frac{125}{4} \text{ cm}^2$. C. $\frac{625}{4} \text{ cm}^2$. D. 125 cm^2 .

Lời giải

Gọi một cạnh góc vuông là x ($0 < x < 5$) thì cạnh góc vuông còn lại là $\sqrt{25 - x^2}$

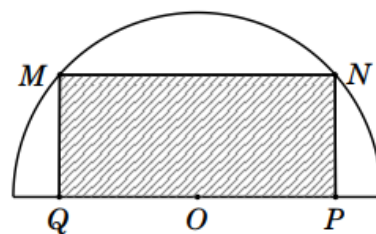
Như vậy, diện tích $S = \frac{x\sqrt{25 - x^2}}{2}$. Đặt $f(x) = 25x^2 - x^4$

Ta có $f'(x) = 50x - 4x^3$. Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Vì vậy $\max_{(0;5)} f(x) = f\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{625}{4}$

Vậy tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng $\frac{625}{4} \text{ cm}^2$.

- Câu 6:** Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là



- A. $\frac{9}{2}$.
 B. $6\sqrt{2}$.
 C. 9.
 D. $9\sqrt{2}$.

Lời giải

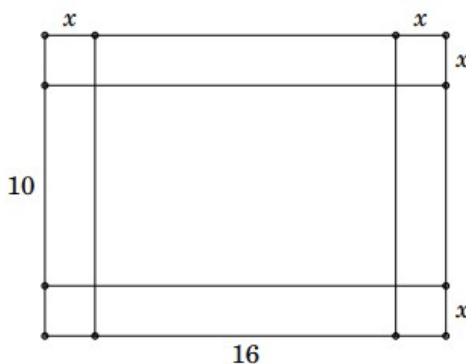
Đặt $OQ = x$, ($0 < x < 3$) $\Rightarrow MQ = \sqrt{MO^2 - OQ^2} = \sqrt{9 - x^2}$

Ta có $S_{MNPQ} = PQ \cdot MQ = 2x \cdot \sqrt{9 - x^2} \leq 2 \cdot \frac{x^2 + 9 - x^2}{2} = 9$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

- Câu 7:** Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $10 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$. Người ta cắt bỏ 4 góc của tấm tôn 4 miếng hình vuông bằng nhau rồi gò lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Để thể tích của hình hộp đó lớn nhất thì độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng
- A. 3m.
 B. 4m.
 C. 5m.
 D. 2m.

Lời giải



Giả sử độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng x , ($0 < 2x < 10, 0 < x < 5$).

Khi đó hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng x , chiều rộng bằng $10 - 2x$ và chiều dài bằng $16 - 2x$

Suy ra hình hộp chữ nhật có thể tích $V = x(10 - 2x)(16 - 2x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$

Xét hàm số $f(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$ trên $(0; 5)$ có tập xác định là $D = \square$

$f'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{20}{3} \end{cases}$. Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên $(0;5)$ như sau:

x	0	2	5
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $(0;5)$ tại $x = 2$ hay hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất khi độ dài cạnh hình vuông của miếng tôn bị cắt bỏ bằng 2m.

Câu 8: Ông Bình dự định sử dụng hết $5,5\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

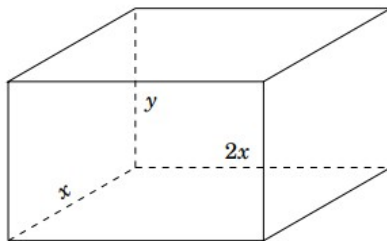
A. $1,01\text{m}^3$.

B. $1,17\text{m}^3$.

C. $1,51\text{m}^3$.

D. $1,40\text{m}^3$.

Lời giải



Gọi $x, 2x, y$ với $x, y > 0$ lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của bể cá.

Theo giả thiết ta có: $2.2xy + 2.xy + 2x^2 = 5,5 \Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5,5 \Leftrightarrow y = \frac{5,5 - 2x^2}{6x}$

Do $y > 0$ nên $5,5 - 2x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{11}}{2}$

Thể tích bể cá là: $V(x) = 2x^2y = 2x^2 \cdot \frac{5,5 - 2x^2}{6x} = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{6}x$

Xét hàm số $V(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{6}x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\sqrt{11}}{2}\right)$ có $V'(x) = -2x^2 + \frac{11}{6} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{11}{12}}$

Bảng biến thiên:

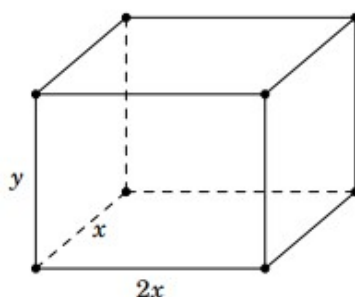
x	0	$\sqrt{\frac{11}{12}}$	$\frac{\sqrt{11}}{2}$
V'	+	0	-
V		y_0	

$V\left(\sqrt{\frac{11}{12}}\right) = 1,17 \text{ m}^3$

Thể tích lớn nhất của bể cá là

- Câu 9:** Người ta muốn xây một chiếc bể nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} \text{ m}^3$. Biết đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 700000 đồng/ m^2 . Tìm kích thước của bể để chi phí thuê nhân công ít nhất. Khi đó chi phí thuê nhân công là
- A.** 120 triệu đồng. **B.** 105 triệu đồng. **C.** 115 triệu đồng. **D.** 110 triệu đồng.

Lời giải



Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá (điều kiện $x, y > 0$).

$$V = 2x^2y = \frac{500}{3} \Rightarrow y = \frac{250}{3x^2}$$

Với giả thiết của bài toán, thể tích bể cá là:

Để chi phí thuê nhân công ít nhất thì tổng diện tích các mặt của bể cá phải nhỏ nhất.

$$S = 2xy + 2 \cdot 2xy + 2x^2 = 6xy + 2x^2 = \frac{500}{x} + 2x^2$$

Tổng diện tích các mặt của bể cá

Xét hàm số $S(x) = \frac{500}{x} + 2x^2$ trên khoảng $(0; +\infty)$ có $S'(x) = -\frac{500}{x^2} + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 5$

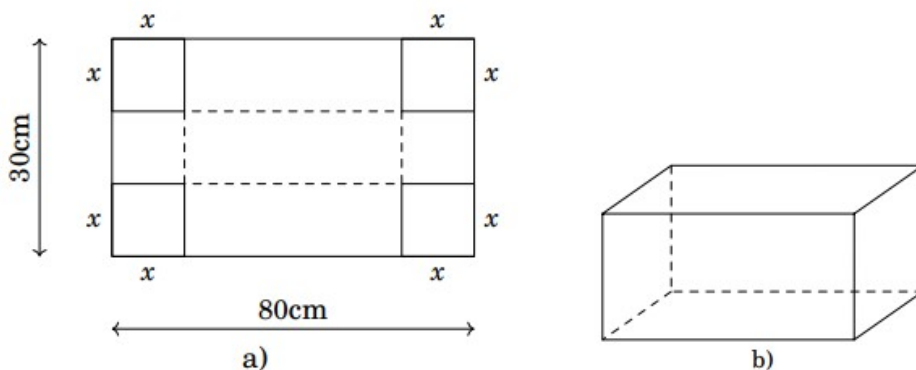
Bảng biến thiên:

x	0	5	$+\infty$
$S'(x)$		-	+
$S(x)$	$+\infty$	150	$+\infty$

Do đó $\min S = 150$ tại $x = 5$.

Khi đó chi phí thuê nhân công là: $T = 150.700000 = 105$ triệu đồng.

Câu 10: Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30cm và chiều dài 80cm (hình a) người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh $x(\text{cm})$ với $5 \leq x \leq 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp (hình b). Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $\frac{10}{3}\text{cm}$

B. $\frac{20}{3}\text{cm}$

C. $\frac{31}{3}\text{cm}$

D. $\frac{40}{3}\text{cm}$

Lời giải

Thể tích chiếc hộp là: $V(x) = x(30 - 2x)(80 - 2x) = 2400x - 220x^2 + 4x^3$ với $5 \leq x \leq 10$

$$V'(x) = 12x^2 - 440x + 2400 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{20}{3} \in [5; 10] \\ x = 30 \notin [5; 10] \end{cases}$$

Ta có

$$V(5) = 700; V\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{200000}{27}; V(10) = 6000$$

Do đó $\max_{[5; 10]} V(x) = \frac{200000}{27}$ khi $x = \frac{20}{3}$. Vậy để thể tích hộp là lớn nhất khi $x = \frac{20}{3}\text{cm}$.

Câu 11: Một sợi dây có chiều dài là 6m được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình thu được là nhỏ nhất?



A. $\frac{12}{4 + \sqrt{3}}\text{m}$

B. $\frac{18\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}\text{m}$

C. $\frac{36\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}\text{m}$

D. $\frac{18}{9 + 4\sqrt{3}}\text{m}$

Lời giải

Gọi độ dài cạnh hình tam giác đều là $x(m)$. Khi đó độ dài cạnh hình vuông là $\frac{6-3x}{4}$

Tổng diện tích khi đó là:
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \left(\frac{6-3x}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}[(9+4\sqrt{3})x^2 - 36x + 36]$$

Xét hàm số $f(x) = (9+4\sqrt{3})x^2 - 36x + 36, x \in (0; 6)$

Ta có $f(x)$ là hàm tam thức bậc hai có $-\frac{b}{2a} = \frac{18}{9+4\sqrt{3}} \in (0; 6)$ và $a > 0$

Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{b}{2a} = \frac{18}{9+4\sqrt{3}} \in (0; 6)$

Vậy diện tích nhỏ nhất khi $x = \frac{18}{9+4\sqrt{3}}m$

Câu 12: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu thì lợi nhuận thu được cao nhất?

A. 30 triệu đồng. **B.** 30,5 triệu đồng. **C.** 29,5 triệu đồng. **D.** 32 triệu đồng.

Lời giải

Gọi giá bán mới là x (triệu đồng) với $27 \leq x \leq 31$

Khi đó số xe bán ra là $600 + (31 - x).200$

Lợi nhuận thu được là: $f(x) = [600 + (31 - x).200](x - 27) = (-200x + 6800)(x - 27)$

$$= -200x^2 + 12200x - 183600 = -200\left(x - \frac{61}{2}\right)^2 + 2450 \leq 2450$$

Dấu "=" xảy ra khi $x - \frac{61}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 30,5$

Vậy giá bán mới là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận lớn nhất thu được là 2450 triệu đồng.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức:

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4 \quad \text{với } 0 \leq t \leq 0,5$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$

- a) Lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là 1 lít.
 b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là 41,5 lít
 c) $V'(t) = 300(2t - 3t^2) + 4$, với $0 \leq t \leq 0,5$
 d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất

Lời giải

- a) Sai: Số xăng trong bình ban đầu là $V(0) = 4$ lít

$$V = V\left(\frac{1}{2}\right) = 41,5$$

 b) Đúng: Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là 41,5 lít
 c) Sai: Xét hàm số $V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4$ với $0 \leq t \leq 0,5$
 Đạo hàm $V'(t) = 300t(2 - 3t)$

$$V'(t) = 0 \Leftrightarrow 300t(2 - 3t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in [0; 0,5] \\ t = \frac{2}{3} \in [0; 0,5] \end{cases}$$

- d) Đúng: Cho

$$V(0) = 4; V\left(\frac{1}{2}\right) = 41,5$$

Các giá trị

Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

Câu 2: Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất $x(m^3)$ sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4 triệu đồng chi phí cố định; 0,2 triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và $0,001x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa $100m^3$ sản phẩm. Gọi $C(x)$ là tổng chi phí để xí nghiệp sản xuất $x(m^3)$ sản phẩm trong một ngày và $\bar{C}$ là chi phí trung bình trên mỗi mét khối sản phẩm.

- a) $C = 0,2x + 0,001x^2$ với $0 \leq x \leq 100$
 b) Tổng chi phí sản xuất $100m^3$ sản phẩm là 34 triệu đồng

$$\bar{C} = 0,001x + \frac{4}{x} + 0,2$$

 c) với $0 \leq x \leq 100$
 d) $\bar{C}$ có giá trị thấp nhất bằng 0,326 triệu đồng (kết quả làm tròn ba chữ số thập phân)

Lời giải

- a) Sai: Tổng chi phí (triệu đồng) để xí nghiệp sản xuất $x(m^3)$ sản phẩm trong một ngày là :

$$C = C(x) = 4 + 0,2x + 0,001x^2$$
 với $0 \leq x \leq 100$
 b) Đúng: Thay $x = 100$ vào hàm $C(x)$ ta thu được kết quả là 34 triệu đồng

c) Đúng: Chi phí trung bình (triệu đồng) trên mỗi mét khối sản phẩm là

$$\bar{C} = \bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{4 + 0,2x + 0,001x^2}{x} = 0,001x + \frac{4}{x} + 0,2 \quad \text{với } 0 \leq x \leq 100$$

d) Đúng: Ta có $\bar{C}'(x) = 0,001 - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 0,001 - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4000 \Leftrightarrow x = 20\sqrt{10} \in (0;100]$

$$\bar{C}(20\sqrt{10}) = \frac{\sqrt{10}}{25} + \frac{1}{5} \approx 0,326$$

Bảng biến thiên

x	0	$20\sqrt{10}$	100
$\bar{C}'(x)$	-	0	+
$\bar{C}(x)$	$+\infty$	$\frac{\sqrt{10}}{25} + \frac{1}{5}$	0,34

Từ bảng biến thiên, ta thấy chi phí trung bình thấp nhất là $\bar{C}(20\sqrt{10}) \approx 0,326$ (triệu đồng/m³ sản phẩm), đạt được khi $x = 20\sqrt{10} \approx 63$ m³.

Câu 3: Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B . Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối

đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.

c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B được biểu diễn bằng công thức $-0,01x^3 + 15x - 100$.

d) A bán cho B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải

a) Đúng: Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là $C(10) = 100 + 30 \cdot 10 = 400$ triệu.

b) Sai: Số tiền mà A thu được (gọi là doanh thu) từ việc bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B là: $R(x) = x \cdot P(x) = x(45 - 0,001x^2) = 45x - 0,001x^3$ triệu đồng

Thay $x = 10$ ta được $R(10) = 449$ triệu đồng

c) Đúng: Lợi nhuận (triệu đồng) mà A thu được là:

$$P(x) = R(x) - C(x) = x(45 - 0,001x^2) - (100 + 30x) = -0,001x^3 + 15x - 100$$

d) Đúng: Xét hàm số $P(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$ với $(0 \leq x \leq 100)$ ta có:

$$P'(x) = -0,003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5000 \Leftrightarrow x = 50\sqrt{2} \in [0; 100]$$

Ta có $P(0) = -100$; $P(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100 \approx 607$; $P(100) = 400$

Bảng biến thiên

x	0	$50\sqrt{2}$	100
y'	+	0	-
y	100	$500\sqrt{2} - 100$	400

Từ bảng biến thiên ta có $\max_{[0; 100]} P = P(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100 \approx 607$

Vậy A thu được lợi nhuận lớn nhất khi bán $50\sqrt{2} \approx 70,7$ tấn sản phẩm cho B mỗi tháng và lợi nhuận lớn nhất thu được khoảng 607 triệu đồng.

Câu 4: Khi nuôi tôm trong một hồ tự nhiên, một nhà khoa học đã thống kê được rằng: Nếu trên mỗi mét vuông mặt hồ thả x con tôm giống thì cuối vụ mỗi con tôm có cân nặng trung bình là $108 - x^2$ (gam).

a) Điều kiện xác định là $x \geq 0$

b) Sau một vụ lượng tôm trung bình trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên nặng $x(108 - x^2)$

c) Để cuối vụ thu hoạch được nhiều tôm nhất trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên thì cần thả 16 con tôm giống

d) Lượng tôm nhiều nhất cuối vụ có thể thu hoạch được trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên là 432 (gam).

Lời giải

a) Đúng: Điều kiện xác định là $x \geq 0$

b) Đúng: Sau một vụ lượng tôm trung bình trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên nặng $x(108 - x^2)$

c) Sai: Xét hàm số $f(x) = 108x - x^3$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có

$$f'(x) = 108 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 108 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -6 < 0 \end{cases}$$

x	0	6	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(6)$	

Trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số $f(x) = 108x - x^3$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 6$.

Vậy nên thả 6 con tôm giống trên mỗi mét vuông mặt hồ thì cuối vụ thu hoạch được nhiều tôm nhất.

d) Đúng: Lượng tôm nhiều nhất cuối vụ có thể thu hoạch được trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên là $f(6) = 108 \cdot 6 - 6^3 = 432$ (gam).

Câu 5: Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là $50m^2$. Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/ m^2 và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/ m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên $0,5$ kg? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

a) Số cá giống mà ông thanh đã thả trong vụ vừa qua là 1500 con.

b) Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là $1,5$ (kg).

c) Tổng trọng lượng cá thu được ở vụ này là $F(x) = -0,0652x^2 + 16x + 1500$ (kg)

d) Vụ tới ông Thanh phải thả 488 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.

Lời giải

a) Sai: Số cá giống mà ông thanh đã thả trong vụ vừa qua là $50 \cdot 20 = 1000$ con.

b) Đúng: Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là: $\frac{1500}{1000} = 1,5$ (kg).

c) Sai: Gọi số cá giống cần thả ít đi trong vụ này là: x (con), ($x > 0$)

Theo đề bài cứ giảm 8 con thì mỗi con tăng thêm $0,5$ (kg/con)

Vậy giảm x con thì mỗi con tăng thêm $0,0625x$ (kg/con).

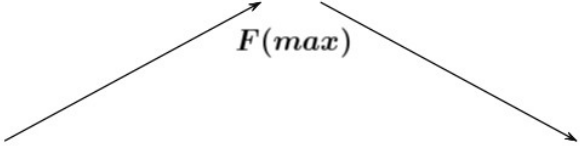
Tổng số lượng cá thu được ở vụ này được tính bằng công thức:

$$F(x) = (1000 - x)(1,5 + 0,0625x) = -0,0625x^2 + 61x + 1500$$

Bài toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $F'(x) = -0,125x + 61 = 0 \Leftrightarrow -0,125x + 61 = 0 \Leftrightarrow x = 488$

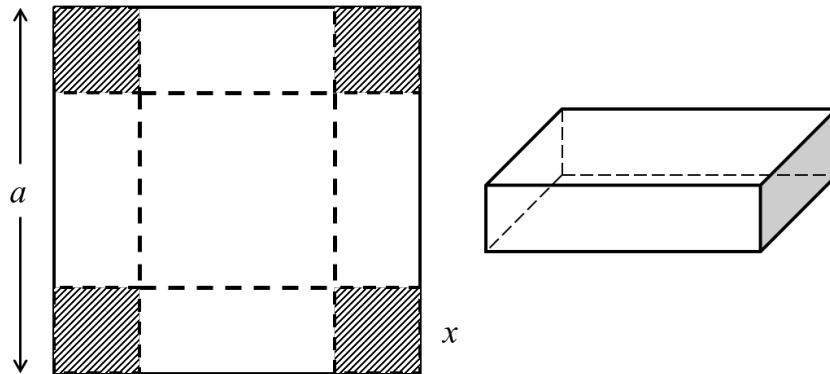
Bảng biến thiên như sau:

x	0	488	1000	
$f'(x)$		+	0	–
$f(x)$				

Vậy ông thanh phải thả số cá giống trong vụ tới là: $1000 - 488 = 512$ con.

d) Sai: Vụ tới ông Thanh phải thả 512 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.

Câu 6: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a . Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gấp tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.

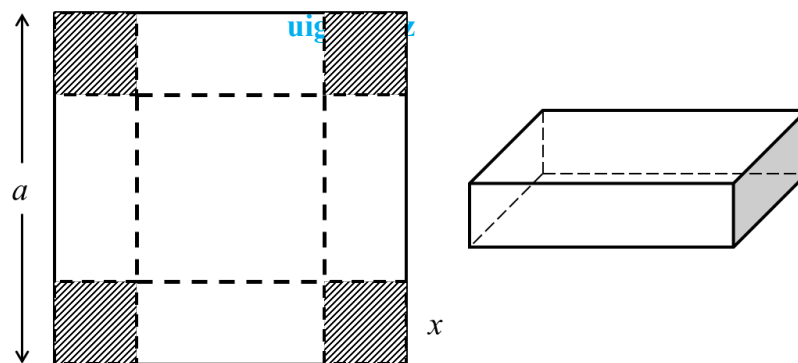


a) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{12}$.

b) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{6}$.

c) Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{27}$.

d) Thể tích hộp lớn nhất bằng $\frac{a^3}{27}$.



Lời giải

$$\left(0 < x < \frac{a}{2}\right).$$

Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt

$$V(x) = x(a - 2x)^2 \quad \left(0 < x < \frac{a}{2}\right).$$

Thể tích của khối hộp là:

$$V'(x) = (a - 2x)^2 + x \cdot 2(a - 2x) \cdot (-2) = (a - 2x)(a - 6x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{6} \quad \left(0 < x < \frac{a}{2}\right).$$

Bảng biến thiên:

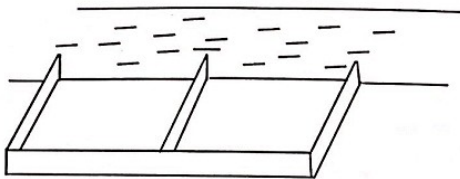
x	0	$a/6$	$a/2$	
$V'(x)$		+	0	-
$V(x)$	0	$\nearrow \frac{2a^3}{27}$	$\searrow$	0

$$\max_{\left(0, \frac{a}{2}\right)} V(x) = V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}$$

Vậy

- a) Sai: Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{12}$.
- b) Đúng: Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{6}$.
- c) Đúng: Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{27}$.
- d) Sai: Thể tích hộp lớn nhất bằng $\frac{a^3}{27}$.

Câu 7: Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50000 đồng một mét. Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E (trong ba mặt song song, $x > 0$). Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y > 0$).



$$x.60000 + y.3.50000 = 15000000$$

a) Số tiền phải làm là: đồng.

$$S = x.y = x. \frac{500 - 5x}{2} = 250x - \frac{5}{2}x^2$$

b) Diện tích đất:

$$\max_{(0;+\infty)} S = 6250 \text{ (m}^2\text{)}$$

c) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được

d) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được khi chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E là 50m

Lời giải

$$x.3.50000 + y.60000 = 15.000.000 \Leftrightarrow y = \frac{500 - 5x}{2}$$

a) Sai: Số tiền phải làm là:

$$S = x.y = x. \frac{500 - 5x}{2} = 250x - \frac{5}{2}x^2$$

b) Đúng: Diện tích đất:

c) Đúng: Ta có: $S' = 250 - 5x$; $S' = 0 \Leftrightarrow 250 - 5x \Leftrightarrow x = 50$.

Bảng biến thiên:

x	0	50	$+\infty$	
$S'(x)$		+	0	-
$S(x)$	0		6250	$-\infty$

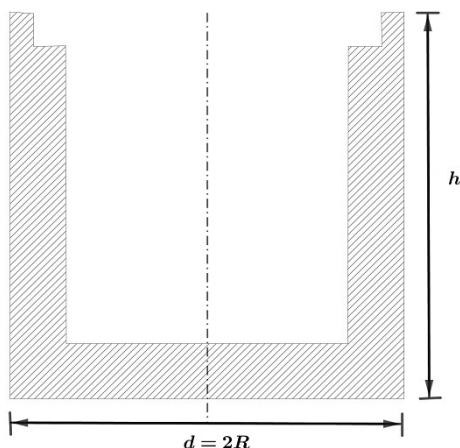
$$\max_{(0;+\infty)} S = 6250 \text{ (m}^2\text{)} \quad \text{khi } x = 50.$$

d) Đúng: Từ bảng biến thiên có

khi

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Bác Nam muốn xây dựng một hồ ga không nắp hình trụ với dung tích 3m^3 . Hãy tính chi phí ít nhất mà bác Nam phải bỏ ra xây dựng hồ ga, biết tiền công và vật liệu cho 1m^3 thành bê tông của hồ ga (thành bê tông đáy và thành bê tông xung quang) là 685000 đồng.



Lời giải

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{3}{\pi R^2}$$

Ta có:

$$S_{\text{xd}} = 2\pi R h + \pi R^2 = \frac{6}{R} + \pi R^2 = \frac{3}{R} + \frac{3}{R} + \pi R^2 \geq 3\sqrt[3]{9\pi} \text{ (m}^2\text{)}$$

Mặt khác:

(Áp dụng BĐT Cauchy).

Để chi phí bác Nam bỏ ra nhỏ nhất khi và chỉ khi diện tích xây dựng hồ ga hình trụ nhỏ nhất,

$$S_{\text{xd}} = 3\sqrt[3]{9\pi} \text{ (m}^2\text{)}$$

và khi đó

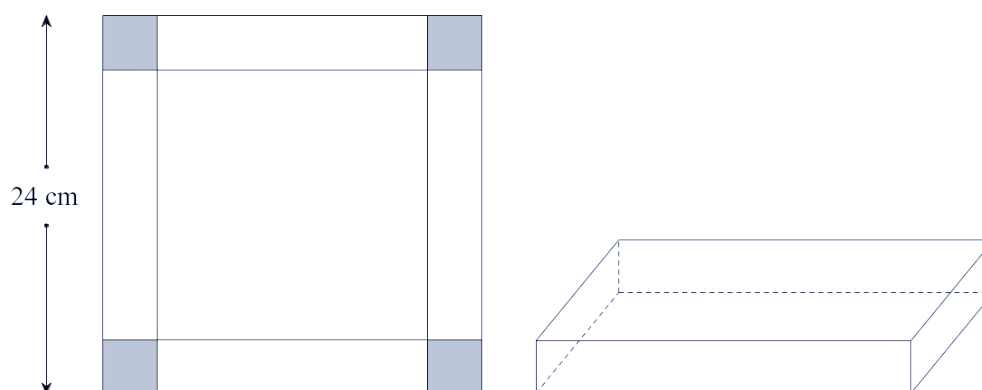
$$685000 \cdot 3\sqrt[3]{9\pi} \approx 6260000$$

Vậy số tiền bác Nam phải bỏ ra là:

đồng.

Câu 2: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 24 cm . Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x\text{ cm}$, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ bên để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

Lời giải



Lời giải

Gọi $x(\text{cm})$ ($0 < x < 12$) là cạnh hình vuông bị cắt.

Thể tích của hộp không nắp bằng $V(x) = x(24 - 2x)^2$.

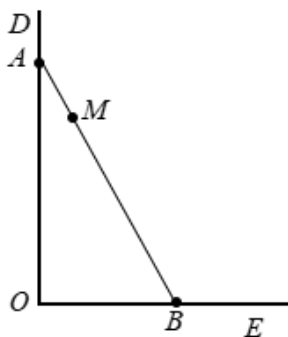
Ta có $V'(x) = (24 - 2x)(24 - 6x)$ có $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Bảng biến thiên

x	0	4	12	
$V'(x)$		+	0	−
$V(x)$	0	↗ 1024 ↘		$−\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $V(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 4$.

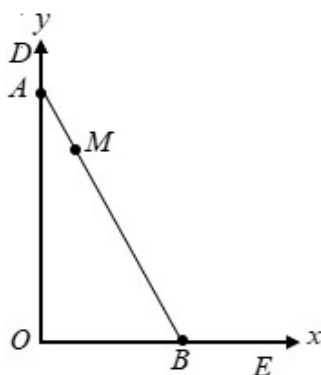
Câu 3: Người ta muốn xây một đoạn đường AB (như hình vẽ) và đoạn đường này phải đi qua điểm M . Biết rằng vị trí điểm M cách $OD\ 125\text{m}$ và cách $OE\ 1\text{km}$. Giả sử chi phí để làm 100m đường là 150 triệu đồng. Chọn vị trí của A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành được con đường là bao nhiêu?



Lời giải

Để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất thì phải chọn A, B sao cho đoạn thẳng AB là bé nhất. Thiết lập khoảng cách giữa hai điểm A, B và tìm giá trị nhỏ nhất.

Chọn hệ toạ độ xOy như hình dưới đây với OD nằm trên tia Oy . Khi đó điểm $M\left(\frac{1}{8}; 1\right)$.



Gọi $B(m; 0), A(0; n)$ ($m, n > 0$). Khi đó ta có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$.

Do đường thẳng đi qua $M\left(\frac{1}{8}; 1\right)$ nên $\frac{1}{8m} + \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{8m} = \frac{8m-1}{8m} \Rightarrow n = \frac{8m}{8m-1}$.

Có $AB^2 = m^2 + n^2 = m^2 + \left(\frac{8m}{8m-1}\right)^2 = f(m)$. Xét hàm số $f(m)$, ta có :

$$f'(m) = 2m + 2 \cdot \frac{8m}{8m-1} \cdot \frac{-8}{(8m-1)^2} = 2m \cdot \left(1 - \frac{64}{(8m-1)^3} \right); f'(m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ 1 - \frac{64}{(8m-1)^3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (8m-1)^3 = 64 \Leftrightarrow m = \frac{5}{8}$$

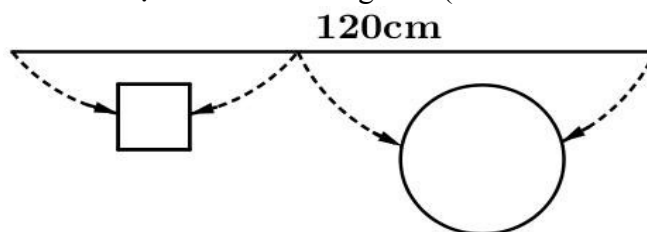
$$f(m) \geq f\left(\frac{5}{8}\right) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{8 \cdot \frac{5}{8}}{8 \cdot \frac{5}{8} - 1}\right)^2 = \frac{25}{64} + \frac{25}{16} = \frac{125}{64} \Rightarrow AB \geq \sqrt{\frac{125}{64}} = \frac{5\sqrt{5}}{8}$$

$$\frac{5\sqrt{5}}{8} \text{ (km)}$$

Vậy quãng đường ngắn nhất là

Giá để làm $\frac{1 \text{ km}}{\text{đường}}$ là $\frac{1500}{\text{triệu đồng}} = 1,5$ tỷ đồng nên khi đó chi phí thấp nhất để hoàn thành con đường là $\frac{5\sqrt{5}}{8} \cdot 1,5 \approx 2,0963$ (tỷ đồng).

Câu 4: Một sợi dây kim loại dài 120cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn (tham khảo hình bên dưới).



Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất là (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Gọi độ dài của đoạn dây thứ hai là x cm.

Khi đó, độ dài của đoạn dây thứ nhất là $(120 - x)$ cm ($0 < x < 120$).

Diện tích của hình vuông bằng $\left(\frac{120-x}{4}\right)^2$ và diện tích của hình tròn bằng $\pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}$.

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn:

$$S(x) = \left(\frac{120-x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{4\pi} = \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{16}\right)x^2 - 15x + 900 \quad (0 < x < 120)$$

Ta có $S(x)$ là một hàm số bậc hai, đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{120\pi}{4+\pi} \in (0; 120)$.

$$\min S(x) = S\left(\frac{120\pi}{4+\pi}\right) \approx 504 \text{ cm}^2$$

Vậy

Câu 5: Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm được cho bởi công thức $f(v) = \frac{386v}{v^2 + 2v + 5}$ (xe/giây), trong đó v (km/h) là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Tính vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm sao cho lưu lượng xe là lớn nhất

Lời giải

Vì v là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm $\Rightarrow v > 0$ và $\frac{5}{v} > 0$

$$v + \frac{5}{v} \geq 2\sqrt{5} \Rightarrow v + \frac{5}{v} + 2 \geq 2\sqrt{5} + 2$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\Rightarrow \frac{386}{v + \frac{5}{v} + 2} \leq \frac{386}{2\sqrt{5} + 2} \Rightarrow f(v) = \frac{386v}{v^2 + 2v + 5} \leq \frac{386}{2\sqrt{5} + 2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow v = \frac{5}{v} \Leftrightarrow v^2 = 5 \Leftrightarrow v = \sqrt{5}$ (vì $v > 0$)

Vậy vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm là $\sqrt{5}$ km/h thì lưu lượng xe là lớn nhất.

Câu 6: Ông Nam cần xây dựng một bể nước mưa có thể tích $V = 8(m^3)$ dạng hình hộp chữ nhật với

chiều dài gấp $\frac{4}{3}$ lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép; xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là $980.000đ/m^2$ và ở nắp để hở một khoảng hình vuông

có diện tích bằng $\frac{2}{9}$ diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất mà ông Nam phải chi trả (làm tròn đến hàng nghìn đồng).

Lời giải

Gọi chiều rộng của bể là $3x$ (m), chiều dài bể là $4x$ (m) và chiều cao của bể là $\frac{2}{3x^2}$ (m).

Khi đó tổng diện tích bề mặt xây là:

$$T = (3x + 4x) \cdot 2 \cdot \frac{2}{3x^2} + 2 \cdot 3x \cdot 4x - \frac{2}{9} \cdot 3x \cdot 4x = \frac{28}{3x^2} + \frac{64x^2}{3} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{28}{3x^2} \cdot \frac{64x^2}{3}} = \frac{32\sqrt{7}}{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

$$C = T \cdot 980000 \geq \frac{32\sqrt{7}}{3} \cdot 980000 \approx 27657000$$

Chi phí C (tính theo đồng) xây dựng là: (đồng).

Câu 7: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể

trong t (giờ) được cho bởi công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu (giờ) thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Lời giải

Ta có $c'(t) = \frac{-t^2 + 1}{(t^2 + 1)^2}, \forall t \in (0; +\infty)$. Cho $c'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

t	0	1	$+\infty$	
$c'(t)$		+	0	–
$c(t)$				

Vậy sau khi tiêm 1 giờ, nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân cao nhất.

Câu 8: Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi

hàm số $P(t) = \frac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ sử dụng độc tố. Sau bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

Lời giải

$$P'(t) = \frac{-t^2 - 2t + 3}{(t^2 + t + 4)^2} = \frac{(t-1)(-t-3)}{(t^2 + t + 4)^2}$$

Xét

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 1 \end{cases}$$

Ta thấy hàm số đạt cực đại tại $t = 1$ và $P'(t) < 0, \forall t \in (1; +\infty)$ nên sau 1 giờ thì vi khuẩn bắt đầu giảm.

Câu 9: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $v(t) = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 12t$; $v'(t) = -3t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ và có bảng biến thiên

t	0	4	6	
$v'(t)$		+	0	-
$v(t)$			24	

Vậy $\max v(t) = 24 (m/s)$ khi $t = 4$.

Câu 10: Một cửa hàng bán vải Thanh Hà với giá bán mỗi kg là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 25kg. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm 4000 đồng cho một kg thì số vải bán được tăng thêm là 50kg. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi kg là 30.000 đồng.

Lời giải

Gọi x đồng ($30.000 < x < 50.000$) là giá bán vải mới để cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Suy ra giá bán ra đã giảm là $(50.000 - x)$ đồng.

Số lượng vải bán ra đã tăng thêm là $\frac{50(50000 - x)}{4000} = 625 - 0,0125.x$.

Tổng số vải bán được là $25 + 625 - 0,0125.x = 650 - 0,0125.x$.

Tổng số vải bán được là $25 + 625 - 0,0125.x = 650 - 0,0125.x$.

Doanh thu của cửa hàng là $(650 - 0,0125.x).x$.

$$(650 - 0,0125.x)30000$$

Số tiền vốn ban đầu để mua vải là

Vậy lợi nhuận của cửa hàng là

$$(650 - 0,0125.x)x - (650 - 0,0125.x)30000 = -0,0125.x^2 + 1025.x - 19500000$$

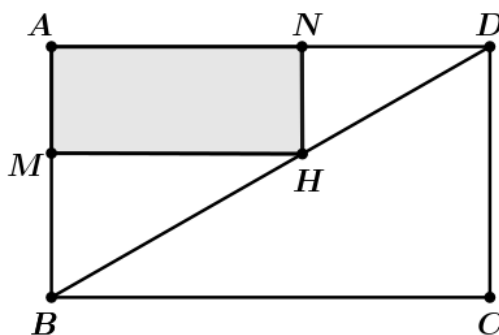
$$f(x) = -0,0125x^2 + 1025x - 19500000 = -0,0125(x - 41000)^2 + 1512500 \leq 1512500$$

Ta có:

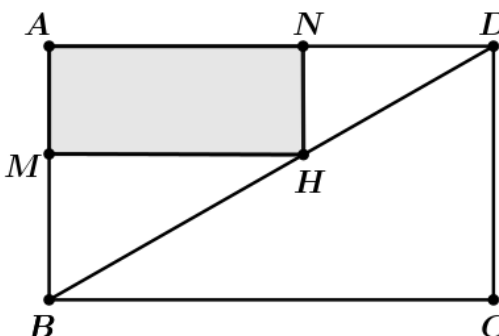
$$\max f(x) = 1512500 \quad \text{khi } x = 41.000 \quad \text{đồng.}$$

Vậy giá bán mỗi cân vải là 41.000 đồng thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 11: Trên mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích 25m^2 , người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H , với H thuộc cạnh BD . Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ (miền tô đậm) là bao nhiêu với chi phí trồng cỏ là 70.000 đồng/ m^2 ?



Lời giải



Ta có $AB \cdot AD = 25(\text{m}^2)$; $\frac{NH}{AB} = \frac{DN}{DA}$. Đặt $\frac{NH}{AB} = \frac{DN}{DA} = x \Rightarrow NH = x \cdot AB$; $AN = (1 - x)AD$

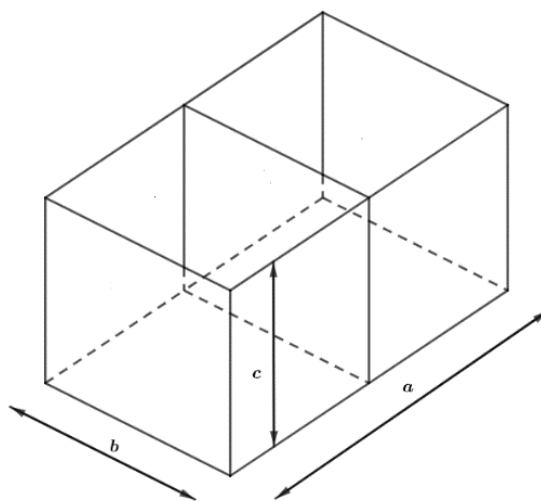
Diện tích đất trồng cỏ là: $S = AN \cdot NH = x \cdot (1 - x) \cdot AB \cdot AD = 25 \cdot x \cdot (1 - x)$

Diện tích lớn nhất khi $x \cdot (1-x)$ lớn nhất mà $x \cdot (1-x) \leq \frac{(x+1-x)^2}{4} = \frac{1}{4}$

Diện tích đất trồng cỏ lớn nhất $S = \frac{1}{4} \cdot 25 = \frac{25}{4}$

Số tiền lớn nhất để trồng cỏ: $T = \frac{25}{4} \cdot 70000 = 437500$ đồng.

Câu 12: Người ta cần làm một cái bể cá có hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296 m^3$. Người ta cắt các tấm kính ghép lại một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật (hình vẽ minh họa) với ba kích thước là a, b, c . Người ta phải thiết kế các kích thước là bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất (giả sử độ dày của kính không đáng kể). Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.



Lời giải

$$V = abc = 1,296$$

Thể tích bể cá là

Kể cả miếng kính ở giữa, diện tích tổng các miếng kính là $S = ab + 2ac + 3bc$.

$$\frac{S}{V} = \frac{S}{1,296} = \frac{ab + 2ac + 3bc}{abc} = \frac{1}{c} + \frac{2}{b} + \frac{3}{a}.$$

Suy ra

Áp dụng Cô si cho 3 số $\frac{1}{c}; \frac{2}{b}; \frac{3}{a}$ ta có $\frac{1}{c} + \frac{2}{b} + \frac{3}{a} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{c} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{3}{a}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{1,296}} = 5.$

$$\begin{cases} abc = 1,296 \\ \frac{1}{c} = \frac{2}{b} = \frac{3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1,8 \\ b = 1,2 \\ c = 0,6 \end{cases}$$

Dấu "=" xảy ra khi

$$a = 1,8\text{m}; b = 1,2\text{m}; c = 0,6\text{m}$$

Vậy để đỡ tốn kính nhất thì

$$T = a + b + c = 1,8 + 1,2 + 0,6 = 3,6$$

Khi đó

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t) = -t^4 + 24t^2 + 500$ (m/s). Trong khoảng thời gian từ $t = 0$ (s) đến $t = 5$ (s) chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?

Lời giải

$$v'(t) = -4t^3 + 48t = -4t(t^2 - 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Ta có

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 5]$ ta có:

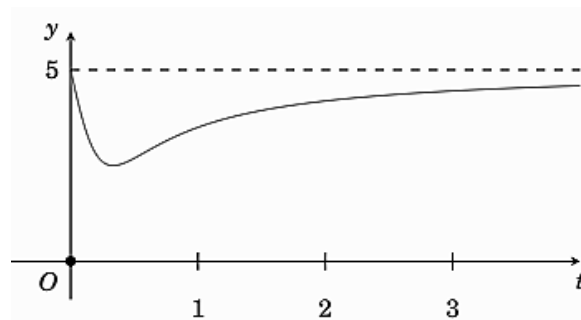
$$v(0) = 500; v(2\sqrt{3}) = 664; v(5) = 475$$

Vậy vận tốc lớn nhất khi $t = 2\sqrt{3} \approx 4$ giây.

Bài tập 2: Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ

$$y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$$

bởi hàm số có đồ thị là đường cong như hình bên. Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?



Lời giải

Xét hàm số $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$ trên $[0; +\infty)$ có $y'(t) = \frac{135t^2 - 15}{(9t^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

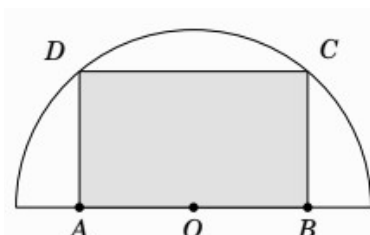
Mặt khác: $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[5 - \frac{15t}{9t^2 + 1} \right] = 5$ và $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[5 - \frac{15t}{9t^2 + 1} \right] = 5$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$y'(t)$		0	
$y(t)$	5	0	5

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min_{[0;+\infty)} y(t) = 0$ và $\max_{[0;+\infty)} y(t) = 5$

Bài tập 3: Tính diện tích lớn nhất S_{max} của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6$ cm nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



Lời giải

Gọi chiều dài $AD = 2x$ với $0 < x < 6 \Rightarrow AB = \sqrt{36 - x^2}$

Diện tích hình chữ nhật là $S = 2x \cdot \sqrt{36 - x^2}$ và xét hàm số $f(x) = 2x\sqrt{36 - x^2}$ trên $(0; 6)$

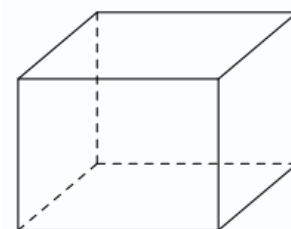
Ta có: $f'(x) = \sqrt{36 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	0	$3\sqrt{2}$	6
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	36	0

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật đạt được là 36 cm^2 .

Bài tập 4: Một người muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288 dm^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^2 . Nếu người đó biết xác định các kích thước của bể hợp lý thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu?



Lời giải

Gọi $x (x > 0)$ là chiều rộng của đáy bể. Khi đó chiều dài của đáy bể là $2x$ là chiều cao của bể

là $\frac{0,144}{x^2}$. Khi đó diện tích cần xây là $2x^2 + \frac{0,864}{x}$

Xét hàm số $f(x) = 2x^2 + \frac{0,864}{x}$ có $f'(x) = 4x - \frac{0,864}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0,6$

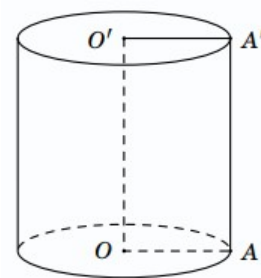
Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	0	0,6	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	2,16	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min f(x) = f(0,6) = 2,16$

Vậy chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây bể là: $500000 \cdot 2,16 = 1080000$ đồng.

Bài tập 5: Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000cm^3 . Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá 1,2 nghìn đồng/ cm^2 , trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá 0,75 nghìn đồng/ cm^2 . Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.



Lời giải

Gọi bán kính của đáy bình là $x(\text{cm})$, $x > 0$ suy ra chiều cao là $\frac{100}{\pi \cdot x^2}(\text{cm})$

Chi phí để sản xuất một chiếc bình là: $T(x) = 2 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot x^2 + 0,75 \cdot \frac{2000}{x} = 2,4\pi x^2 + \frac{1500}{x}$ nghìn

Để chi phí sản xuất mỗi chiếc bình là thấp nhất thì $T(x)$ là nhỏ nhất

Xét hàm số $T(x)$ có $T'(x) = 4,8\pi x - \frac{1500}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$ (thỏa mãn)

Bảng biến thiên:

x	0	$\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$	12
$T'(x)$		- 0 +	
$T(x)$	$+\infty$	$T\left(\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}\right)$	$T(12)$

Để chi phí sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất thì bán kính đáy của bình là $\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$ cm và chiều

cao của bình là $\frac{100}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}\right)^2}$ (cm)