

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Số trung bình của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $[7; 9)$. B. $[9; 11)$. C. $[11; 13)$. D. $[13; 15)$.

Câu 2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $2a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{4a^3}{3}$. B. $\frac{a^3}{3}$. C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{2a^3}{3}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , $SA = SC$, $SB = SD$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

- A. $SO \perp (ABCD)$. B. $SC \perp (ABCD)$. C. $SB \perp (ABCD)$. D. $SA \perp (ABCD)$.

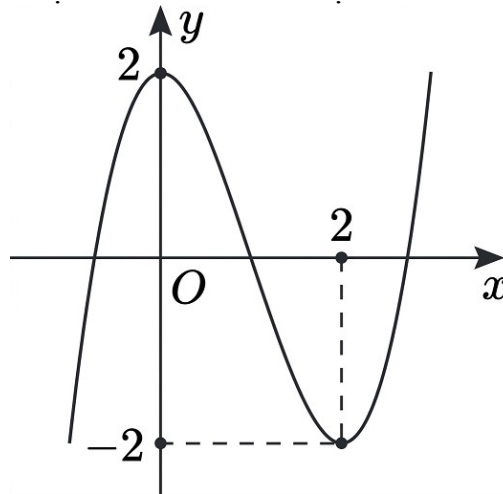
Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, vector nào sau đây là vector pháp tuyến của mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 3 = 0$?

- A. $\vec{n}_1 = (2; -1; 1)$. B. $\vec{n}_3 = (2; -1; 3)$. C. $\vec{n}_2 = (2; 1; 1)$. D. $\vec{n}_4 = (-1; 1; 3)$.

Câu 5. Cho $\int_0^1 f(x), dx = 1$ và $\int_0^2 f(x), dx = -4$. Tích phân $\int_1^2 f(x), dx$ bằng

- A. 3 . B. 5 . C. -3 . D. -5 .

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Điểm cực tiểu của hàm số đó là



- A. $x = -2$. B. $x = 2$. C. $x = 0$. D. $y = -2$.

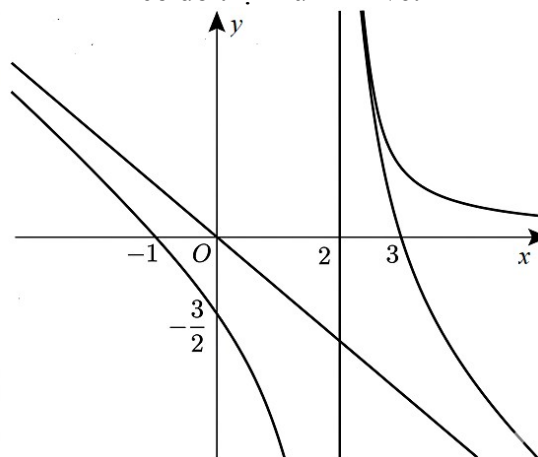
Câu 7. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ là

- A. $-\sin x + C$. B. $\sin x + C$. C. $-\cos x + C$. D. $\cos x + C$.

- Câu 8.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là
 A. $(-2; 1; -3)$. B. $(-4; 2; -6)$. C. $(4; -2; 6)$. D. $(2; -1; 3)$.
- Câu 9.** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 2]$ là
 A. $\max_{[-2; 2]} f(x) = 13$. B. $\max_{[-2; 2]} f(x) = 14$. C. $\max_{[-2; 2]} f(x) = -4$. D. $\max_{[-2; 2]} f(x) = 23$.
- Câu 10.** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{4x+1}{x-1}$ là
 A. $y = 2$. B. $x = 1$. C. $y = 4$. D. $x = 4$.
- Câu 11.** Cho hai biến cố độc lập A, B . Biết $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{2}{3}$. $P(AB)$ bằng
 A. $\frac{13}{15}$. B. $\frac{2}{15}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{11}{15}$.
- Câu 12.** Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 5$. Giá trị của u_4 bằng
 A. 12 . B. 22 . C. 250 . D. 17 .

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ có đồ thị như hình vẽ:



- a) Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ luôn dương với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
 b) Tổng hai hệ số c và d bằng 1 .
 c) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = -x$.
 d) Để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $OA \perp OB$ thì m là nghiệm của phương trình $m^2 - 2m - 3 = 0$.
- Câu 2.** Trước thêm cuộc bầu cử đại biểu Hội đồng nhân dân ở tỉnh X , một cuộc trưng cầu dân ý online đã được tổ chức. Kết quả cho thấy có 40% cử tri tham gia trả lời sẽ bầu cho ứng cử viên A . Sau cuộc bầu cử, tất cả cử tri từng tham gia cuộc trưng cầu dân ý online đều phản hồi lại kết quả mình đã bầu chọn. Các phản hồi cho thấy trong số các cử tri từng trả lời sẽ bầu cho ứng cử viên A có 90% đã thực sự bầu, trong số các cử tri từng trả lời sẽ không bầu cho ứng cử viên A có 20% đã bầu cho ứng cử viên A . Nếu chỉ xét những người tham gia cuộc trưng cầu dân ý online thì
 a) Xác suất cử tri bầu ứng cử viên A biết rằng trước bầu cử họ trả lời sẽ bầu ứng cử viên A là $0,9$.

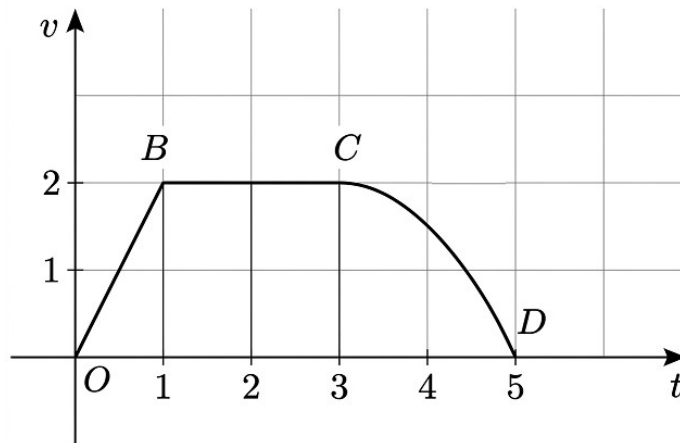
- b) Xác suất cử tri không bầu ứng cử viên A biết rằng trước bầu cử họ trả lời sẽ không bầu ứng cử viên A là $0,2$.
- c) Tỷ lệ cử tri bầu cho ứng cử viên A là 48% .
- d) Biết rằng một cử tri đã bầu cho ứng cử viên A , xác suất để họ đã nói sẽ không bầu ứng cử viên A trước bầu cử là $0,2$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 29$, hai điểm $A(0; 0; 4)$, $B(6; -2; 6)$

và đường thẳng $d: \frac{x-4}{1} = \frac{y+8}{-1} = \frac{z-4}{2}$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho $\angle AMB = 90^\circ$.

- a) Điểm A nằm trên mặt cầu (S) và điểm B nằm ngoài mặt cầu (S) .
- b) Đường thẳng d là tiếp tuyến của mặt cầu (S) .
- c) Điểm M nằm trên mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 8 = 0$.
- d) Gọi $(a; b; c)$ là tọa độ của điểm M khi khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d ngắn nhất. Giá trị của biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$ bằng 10 .

Câu 4. Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng với vận tốc $v(t)$, $0 \leq t \leq 5$ (t có đơn vị là giây và $v(t)$ có đơn vị mét/giây). Hàm số $v(t)$ có đồ thị gồm hai đoạn thẳng OB , BC và đường cong CD là một phần parabol $v(t) = at^2 + bt + c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đỉnh C (như hình vẽ).



- a) Trong một giây đầu tiên, vận tốc của chất điểm là $v(t) = 2t$, $0 \leq t \leq 1$.
- b) Quãng đường chất điểm đi được trong hai giây đầu tiên là 3 m.
- c) Giá trị của a là $-\frac{5}{2}$.
- d) Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian bốn giây đầu tiên là $7,7$ m (làm tròn đến hàng phần mười).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

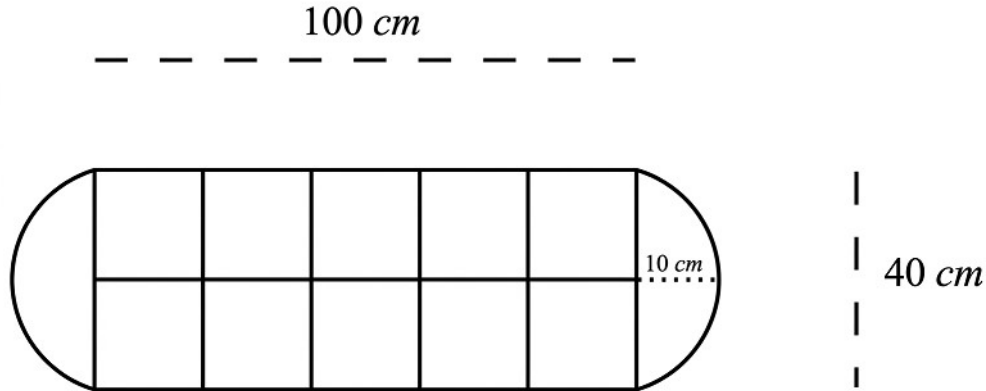
Câu 1. Trong kế hoạch khai thác tuyến ca nô cao tốc phục vụ du lịch sinh thái trên vùng lòng hồ Thủy điện Sơn La (từ bến Mường La đi Quỳnh Nhai) có chiều dài 100 km. Ban quản lý cần xác định vận tốc khai thác v (km/h) cho ca nô ($30 \leq v \leq 70$) để đạt lợi nhuận kinh tế cao nhất. Các thông số được xác định như sau:

Công suất tiêu thụ điện của động cơ ca nô là $P(v) = 10v^3$ (W). Giá điện kinh doanh tại bến sặc là 2000 đồng/kWh. Chi phí vận hành cố định: Bao gồm nhân lực lái tàu, khấu hao và bến bãi, được tính là 2500000 đồng cho mỗi giờ ca nô chạy. Số lượng khách mua vé cho mỗi chuyến phụ thuộc vào vận tốc khai thác theo

hàm số: $N(v) = \frac{v}{5} + 20$ (hành khách). Giá vé bình quân cho tuyến này là 500000 đồng/khách. Hãy xác định

vận tốc khai thác v để lợi nhuận ròng của mỗi chuyến ca nô trên tuyến này là lớn nhất. (Biết công thức tính điện lượng tiêu thụ là $A = P(v)t$)

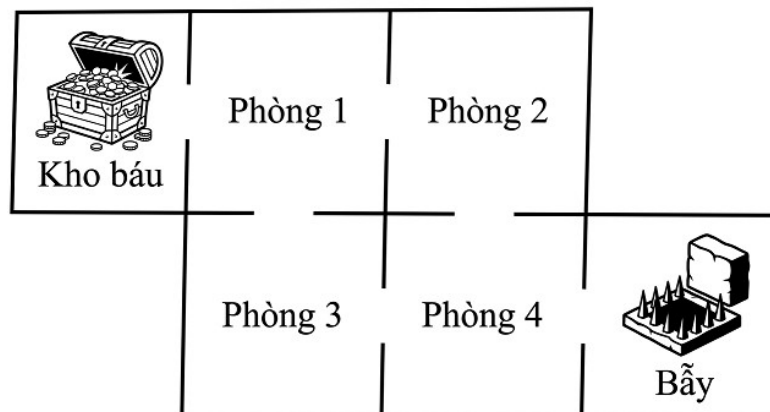
Câu 2. Một xưởng mộc tại Mai Sơn sản xuất những chiếc bàn cờ Ô ăn quan bằng gỗ nguyên khối. Mặt trên của bàn cờ là một mặt phẳng được thiết kế và có kích thước như hình vẽ gồm ba phần: phần chính giữa là một hình chữ nhật có chiều dài 100 cm và chiều rộng 40 cm; hai "ô quan" ở hai đầu trái và phải là hai hình phẳng bằng nhau được ghép nối liền mạch với hai cạnh chiều rộng của hình chữ nhật. Biết rằng đường bao ngoài của mỗi "ô quan" là một cung tròn. Xưởng mộc tiến hành phủ một lớp keo bảo vệ bóng lên toàn bộ bề mặt trên của chiếc bàn cờ này. Biết chi phí vật tư và nhân công để phủ keo là 100 000 đồng/m². Tính tổng chi phí x (nghìn đồng) để hoàn thiện việc phủ keo cho mặt bàn cờ (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 3. Một cá nhân gây thiệt hại cho tài sản nhà nước với tổng số tiền là 450 triệu đồng. Để được giảm nhẹ trách nhiệm hình sự, người này được yêu cầu phải hoàn thành việc bồi thường ít nhất 60% tổng số tiền gốc trong vòng 6 tháng đầu tiên. Phương thức bồi thường được thỏa thuận như sau: Tháng thứ nhất người đó nộp m (triệu đồng); kể từ tháng thứ hai, mỗi tháng số tiền nộp bằng 90% số tiền đã nộp ở tháng liền trước đó. Hỏi số tiền m nhỏ nhất mà người này phải nộp trong tháng đầu tiên là bao nhiêu để được giảm nhẹ trách nhiệm hình sự? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB = 2a$, $AD = DC = CB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$. Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng $\frac{xa}{y}$ (với $x, y \in \mathbb{Q}^+$, $\frac{x}{y}$ tối giản). Tính $x + y + xy$.

Câu 5. Trong một trò chơi thám hiểm, anh Sơn phải vượt qua một mê cung gồm các phòng thông nhau như sơ đồ dưới đây. Tại mỗi phòng, anh Sơn sẽ chọn ngẫu nhiên một trong các cửa thông với phòng hiện tại (với xác suất như nhau) để đi tiếp. Quá trình di chuyển diễn ra liên tục và trò chơi sẽ kết thúc ngay khi anh bước vào phòng chứa Kho báu hoặc phòng có Bẫy. Biết anh Sơn bắt đầu từ Phòng 1, tính xác suất để anh tìm được kho báu. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Câu 6. Nhân dịp nghỉ lễ $30/4$, siêu thị X in ra 100 phiếu thưởng được đánh số thứ tự từ 1 đến 100 , mỗi phiếu ghi 1 số, các phiếu khác nhau ghi số khác nhau. Mỗi khách hàng trong 100 khách hàng đầu tiên đến siêu thị trong ngày $30/4$ sẽ được nhận 1 phiếu thưởng. Những người được nhận phiếu thưởng có thể tìm thêm 2 người khác để ghép thành 1 nhóm có 3 người. Nếu tổng các số ghi trên 3 thẻ của 3 người trong nhóm bằng 100 thì mỗi người trong nhóm được nhận 50.000 đ. Siêu thị quy định:

1. Một người có thể ghép vào nhiều nhóm nên có thể nhận thưởng nhiều lần.

2. Mỗi nhóm 3 người chỉ được nhận thưởng 1 lần.

Hỏi ban quản lý siêu thị phải chuẩn bị số tiền thưởng lớn nhất là bao nhiêu triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

----- **Hết** -----

Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Phần I

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	B	C	A	A	D	B	C	D	A	C	B	D

Phần II

Câu	a	b	c	d
1	Sai	Đúng	Đúng	Đúng
2	Đúng	Sai	Đúng	Sai
3	Đúng	Sai	Đúng	Sai
4	Đúng	Đúng	Sai	Sai

Phần III

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	50	53	58	19	0,67	118

LỜI GIẢI THAM KHẢO

PHẦN I

Câu 1

Bảng tần số ghép nhóm có các giá trị đại diện:

- $[5;7)$ có trung điểm 6
- $[7;9)$ có trung điểm 8
- $[9;11)$ có trung điểm 10
- $[11;13)$ có trung điểm 12
- $[13;15)$ có trung điểm 14

Số trung bình gần đúng của mẫu là

$$\bar{x} = \frac{6 \cdot 2 + 8 \cdot 7 + 10 \cdot 7 + 12 \cdot 3 + 14 \cdot 1}{20}$$

$$= \frac{12 + 56 + 70 + 36 + 14}{20} = \frac{188}{20} = 9,4$$

Vì $9,4 \in [9;11)$ nên chọn **B**.

Câu 2

Hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$.

Diện tích đáy là

$$S_{ABCD} = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2$$

Gọi O là tâm hình vuông đáy. Khi đó

$$OA = \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = a$$

Vì cạnh bên $SA = 2a$ nên chiều cao:

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

Thể tích khối chóp:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$$

Chọn C.

Câu 3

Đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O .

- $SA = SC$ nên S nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn AC .
- $SB = SD$ nên S nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn BD .

Giao của hai mặt phẳng trung trực này là đường thẳng đi qua O và vuông góc với mặt phẳng đáy.

Vì vậy $SO \perp (ABCD)$.

Chọn A.

Câu 4

Mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 3 = 0$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -1; 1)$.

Chọn A.

Câu 5

Ta có

$$\int_1^2 f(x), dx = \int_0^2 f(x), dx - \int_0^1 f(x), dx$$

Suy ra

$$\int_1^2 f(x), dx = -4 - 1 = -5$$

Chọn D.

Câu 6

Từ đồ thị, điểm cực tiểu có hoành độ $x = 2$ và tung độ $y = -2$.

Đề hỏi theo các phương án cho sẵn thì đáp án đúng là $x = 2$.

Chọn B.

Câu 7

$$\int \sin x, dx = -\cos x + C$$

Chọn C.

Câu 8

Mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$.

Dạng chuẩn là

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \text{ nên tâm là } (a; b; c).$$

Suy ra tâm là $(2; -1; 3)$.

Chọn D.

Câu 9

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 5 \text{ trên } [-2; 2].$$

Ta có

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 1$$

Tính giá trị tại các điểm cần xét:

$$\bullet f(-2) = 16 - 8 + 5 = 13$$

$$\bullet f(2) = 16 - 8 + 5 = 13$$

$$\bullet f(0) = 5$$

$$\bullet f(1) = 1 - 2 + 5 = 4$$

$$\bullet f(-1) = 4$$

Vậy giá trị lớn nhất là 13.

Chọn A.

Câu 10

$$y = \frac{4x+1}{x-1} \text{ là phân thức bậc nhất trên bậc nhất.}$$

Tiệm cận ngang là tỉ số hệ số của x ở tử và mẫu:

$$y = \frac{4}{1} = 4$$

Chọn C.

Câu 11

Vì A, B độc lập nên

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

Chọn B.

Câu 12

Cấp số cộng có

$$u_n = u_1 + (n-1)d$$

Suy ra

$$u_4 = 2 + 3 \cdot 5 = 17$$

Chọn D.

PHẦN II

Câu 1

Từ đồ thị, ta nhận ra:

- tiệm cận đứng: $x = 2$
- tiệm cận xiên: $y = -x$
- đồ thị cắt trục Ox tại $x = -1$ và $x = 3$
- cắt trục Oy tại $y = -\frac{3}{2}$

$$\text{Do đó hàm số là } f(x) = -x + \frac{3}{x-2} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x-2}$$

$$\text{Suy ra } a = -1, b = 2, c = 3, d = -2$$

$$f'(x) = -1 - \frac{3}{(x-2)^2}$$

a) Xét đạo hàm

Vì $\frac{3}{(x-2)^2} > 0$ với mọi $x \neq 2$, nên
 $f'(x) < 0$ với mọi $x \neq 2$.

Mệnh đề “đạo hàm luôn dương” là **sai**.

b) Tính $c + d$

$$c + d = 3 + (-2) = 1$$

Mệnh đề **đúng**.

c) Tiệm cận xiên

Từ biểu thức $f(x) = -x + \frac{3}{x-2}$, khi $x \rightarrow \pm\infty$ thì $\frac{3}{x-2} \rightarrow 0$.

Nên tiệm cận xiên là $y = -x$.

Mệnh đề **đúng**.

d) Điều kiện $OA \perp OB$

Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị tại hai điểm $A(x_1; m), B(x_2; m)$.

$$\text{Ta giải: } -x + \frac{3}{x-2} = m$$

$$\Leftrightarrow -x(x-2) + 3 = m(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (m-2)x - (2m+3) = 0$$

Do đó

$$x_1 x_2 = -(2m+3)$$

Điều kiện $OA \perp OB$ là $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 + m^2 = 0$$

$$\text{Suy ra } -(2m+3) + m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$$

Mệnh đề **đúng**.

Kết luận câu 1: **a Sai, b Đúng, c Đúng, d Đúng**.

Câu 2

Gọi:

- S : cử tri trả lời trước bầu cử là sẽ bầu A
- B : cử tri thực tế bầu A

Theo đề:

$$P(S) = 0,4, P(S^c) = 0,6$$

$$P(B|S) = 0,9$$

$$P(B|S^c) = 0,2$$

a) Đây đúng bằng dữ kiện đề bài:

$$P(B|S) = 0,9$$

Mệnh đề **đúng**.

b) Xác suất không bầu A biết rằng trước đó nói không bầu A là

$$P(B^c|S^c) = 1 - P(B|S^c) = 1 - 0,2 = 0,8$$

Không phải $0,2$.

Mệnh đề **sai**.

c) Tỷ lệ thực tế bầu A :

$$P(B) = P(B|S)P(S) + P(B|S^c)P(S^c)$$

$$= 0,9 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,36 + 0,12 = 0,48$$

Tức là 48%.

Mệnh đề **đúng**.

d) Cần tính

$$P(S^c | B) = \frac{P(B | S^c) P(S^c)}{P(B)} = \frac{0,2 \cdot 0,6}{0,48} = \frac{0,12}{0,48} = 0,25$$

Không phải $0,2$.

Mệnh đề **sai**.

Kết luận câu 2: **a Đúng, b Sai, c Đúng, d Sai**.

Câu 3

Mặt cầu:

$$(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 29$$

Tâm $I(0; 2; -1)$, bán kính $R = \sqrt{29}$.

a) Xét điểm A và B

• Với $A(0; 0; 4)$:

$$IA^2 = (0-0)^2 + (0-2)^2 + (4+1)^2 = 0 + 4 + 25 = 29$$

$$\Rightarrow IA = \sqrt{29} = R$$

Vậy A nằm trên mặt cầu.

• Với $B(6; -2; 6)$:

$$IB^2 = 6^2 + (-4)^2 + 7^2 = 36 + 16 + 49 = 101 > 29$$

$$\Rightarrow IB > R$$

Vậy B nằm ngoài mặt cầu.

Mệnh đề **đúng**.

b) Xét đường thẳng d

$$d: \frac{x-4}{1} = \frac{y+8}{-1} = \frac{z-4}{2}$$

Lấy điểm $P(4; -8; 4)$ trên d , vector chỉ phương $\vec{u} = (1; -1; 2)$.

Ta có

$$\vec{PI} = (-4; 10; -5)$$

Khoảng cách từ tâm I đến d :

$$d(I, d) = \frac{|\vec{PI} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Tính được $\vec{PI} \times \vec{u} = (15; 3; -6)$,

$$\text{Nên } |\vec{PI} \times \vec{u}| = \sqrt{15^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{270}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$d(I, d) = \frac{\sqrt{270}}{\sqrt{6}} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Vậy

Vì $3\sqrt{5} \neq \sqrt{29}$ nên d **không** là tiếp tuyến.

Mệnh đề **sai**.

c) Chứng minh M thuộc mặt phẳng (P)

Điều kiện $\angle AMB = 90^\circ$ tương đương

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

Với $M(x; y; z)$, ta có: $(A - M) \cdot (B - M) = 0$

Sau khi khai triển: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z + 24 = 0$

Mặt khác, vì M thuộc mặt cầu: $x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 29$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z - 24 = 0$$

Lấy hai phương trình trừ nhau: $-6x + 6y - 12z + 48 = 0$

$$\Leftrightarrow x - y + 2z - 8 = 0$$

Vậy M thuộc mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 8 = 0$

Mệnh đề **đúng**.

d) Tìm $T = a^2 + b^2 + c^2$

Ta thấy mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -1; 2)$

Đường thẳng d cũng có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -1; 2)$

Vậy $d \perp (P)$

Do đó, với mọi điểm $M \in (P)$, khoảng cách từ M đến d nhỏ nhất khi M là điểm trên đường tròn giao tuyến gần hình chiếu vuông góc $Q = d \cap (P)$ nhất.

Tìm Q :

$$\text{Đặt } x = 4 + t, y = -8 - t, z = 4 + 2t$$

Thế vào (P) :

$$(4 + t) - (-8 - t) + 2(4 + 2t) - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12 + 6t = 0 \Rightarrow t = -2$$

Suy ra $Q(2; -6; 0)$

Tâm mặt cầu là $I(0; 2; -1)$

Tâm đường tròn giao tuyến là hình chiếu của I lên (P) , tính được $H(2; 0; 3)$

Bán kính đường tròn giao tuyến:

$$r = \sqrt{R^2 - d(I, (P))^2}$$

$$d(I, (P)) = \frac{|0 - 2 + 2(-1) - 8|}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

Ta có

$$\text{Nên } r = \sqrt{29 - 24} = \sqrt{5}$$

$$\text{Mà } HQ = \sqrt{(2 - 2)^2 + (-6 - 0)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Điểm M gần Q nhất trên đường tròn là điểm trên tia HQ , nên

$$\overrightarrow{HM} = \frac{r}{HQ} \overrightarrow{HQ} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}(0; -6; -3) = (0; -2; -1)$$

Suy ra $M = H + \overrightarrow{HM} = (2; -2; 2)$

$$\text{Do đó } T = 2^2 + (-2)^2 + 2^2 = 12$$

Không phải 10.

Mệnh đề **sai**.

Kết luận câu 3: **a Đúng, b Sai, c Đúng, d Sai.**

Câu 4

Từ đồ thị:

- $O(0;0)$
- $B(1;2)$
- $C(3;2)$
- $D(5;0)$

a)

Trên đoạn OB , đồ thị là đoạn thẳng qua $(0;0)$ và $(1;2)$ nên
 $v(t) = 2t, 0 \leq t \leq 1$.

Mệnh đề **đúng**.

b)

Quãng đường trong 2 giây đầu là diện tích dưới đồ thị từ 0 đến 2.

- Từ 0 đến 1: tam giác diện tích $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$
- Từ 1 đến 2: hình chữ nhật diện tích $1 \cdot 2 = 2$

Tổng là $1 + 2 = 3$ m.

Mệnh đề **đúng**.

c)

Trên đoạn CD , đồ thị là một phần parabol có đỉnh $C(3;2)$ nên có dạng
 $v(t) = a(t-3)^2 + 2$.

Đi qua $D(5;0)$: $0 = a(5-3)^2 + 2 = 4a + 2$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Không phải $-\frac{5}{2}$.

Mệnh đề **sai**.

d)

Quãng đường trong 4 giây đầu:

- Từ 0 đến 1: 1
- Từ 1 đến 3: $2 \cdot 2 = 4$

Tổng từ 0 đến 3 là 5.

Trên $[3;4]$, ta có

$$v(t) = -\frac{1}{2}(t-3)^2 + 2$$

$$\text{Khi đó } \int_3^4 v(t) dt = \int_3^4 \left[-\frac{1}{2}(t-3)^2 + 2 \right] dt$$

Đặt $u = t-3$, cận từ 0 đến 1:

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}u^2 + 2 \right) du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{11}{6}$$

Vậy quãng đường trong 4 giây đầu:

$$5 + \frac{11}{6} = \frac{41}{6} \approx 6,83 \text{ m.}$$

Làm tròn đến hàng phần mười được $6,8$ m, không phải $7,7$ m.

Mệnh đề **sai**.

Kết luận câu 4: **a Đúng, b Đúng, c Sai, d Sai**.

PHẦN III

Câu 1

Chiều dài tuyến là 100 km, vận tốc khai thác là v km/h, nên thời gian một chuyến là

$$t = \frac{100}{v} \text{ (giờ)}.$$

Doanh thu

$$N(v) = \frac{v}{5} + 20$$

Số khách:

Giá vé bình quân 500000 đồng/khách nên doanh thu:

$$R(v) = 500000 \left(\frac{v}{5} + 20 \right) = 100000v + 10000000$$

Chi phí điện

Công suất:

$$P(v) = 10v^3 \text{ W} = 0,01v^3 \text{ kW}.$$

Điện lượng tiêu thụ:

$$A = P(v)t = 0,01v^3 \cdot \frac{100}{v} = v^2 \text{ kWh}.$$

Tiền điện:

$$C_1(v) = 2000v^2$$

Chi phí vận hành cố định

$$C_2(v) = 2500000 \cdot \frac{100}{v} = \frac{250000000}{v}$$

Lợi nhuận ròng

$$L(v) = R(v) - C_1(v) - C_2(v)$$

$$= 100000v + 10000000 - 2000v^2 - \frac{250000000}{v}$$

Xét đạo hàm:

$$L'(v) = 100000 - 4000v + \frac{250000000}{v^2}$$

Giải $L'(v) = 0$:

$$100000 - 4000v + \frac{250000000}{v^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 100000v^2 - 4000v^3 + 250000000 = 0 \Leftrightarrow v^3 - 25v^2 - 62500 = 0$$

Thử $v = 50$:

$$50^3 - 25 \cdot 50^2 - 62500 = 125000 - 62500 - 62500 = 0$$

Suy ra

$$(v - 50)(v^2 + 25v + 1250) = 0$$

Vì $v^2 + 25v + 1250 > 0$ nên nghiệm duy nhất là $v = 50$.

Lại có $L'(v) > 0$ khi $v < 50$ và $L'(v) < 0$ khi $v > 50$, nên lợi nhuận lớn nhất tại $v = 50$ km/h.

Câu 2

Theo hình và mô tả, mặt bàn cờ gồm:

- một hình chữ nhật $100 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$
- hai nửa hình tròn đường kính 40 cm , tức bán kính 20 cm

Diện tích

Diện tích hình chữ nhật: $S_1 = 100 \cdot 40 = 4000 \text{ cm}^2$

Hai nửa hình tròn ghép thành một hình tròn bán kính 20 cm :

$$S_2 = \pi \cdot 20^2 = 400\pi \text{ cm}^2$$

Tổng diện tích: $S = 4000 + 400\pi \text{ cm}^2$

$$S = \frac{4000 + 400\pi}{10000} = 0,4 + 0,04\pi \text{ m}^2$$

Đổi ra mét vuông:

Chi phí

Chi phí phủ keo là 100000 đồng/m^2 nên: $C = 100000(0,4 + 0,04\pi) \text{ đồng}$
 $\approx 100000(0,52566) = 52566 \text{ đồng}$.

Đổi ra nghìn đồng: $x \approx 52,566$

Làm tròn đến hàng đơn vị: $x = 53$

Câu 3

Người đó phải bồi thường ít nhất $60\% \cdot 450 = 270$ (triệu đồng) trong 6 tháng đầu.

Các khoản nộp tạo thành cấp số nhân: $m, 0,9m, 0,9^2m, \dots, 0,9^5m$

Tổng 6 tháng:

$$S_6 = m \frac{1 - 0,9^6}{1 - 0,9}$$

$$= m \cdot \frac{1 - 0,531441}{0,1} = 4,68559m$$

Điều kiện: $4,68559m \geq 270$

$$\Rightarrow m \geq \frac{270}{4,68559} \approx 57,62$$

Vậy số tiền nhỏ nhất cần nộp trong tháng đầu là khoảng $57,62$ triệu đồng.

Làm tròn đến hàng đơn vị: 58

Câu 4

Ta đặt hệ trục tọa độ trong mặt phẳng đáy như sau:

- $A(-a; 0; 0)$
- $B(a; 0; 0)$

Khi đó $AB = 2a$

Vì hình thang cân có $CD = a, AD = BC = a$, ta chọn:

- $D\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$
- $C\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

Do $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 3a$, nên $S(-a; 0; 3a)$

Trung điểm M của AB là $M(0; 0; 0)$

Ta cần tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM .

Vector chỉ phương

$$\vec{u} = \overrightarrow{SB} = B - S = (2a; 0; -3a) = a(2; 0; -3)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{DM} = M - D = \left(\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0 \right) = \frac{a}{2}(1; -\sqrt{3}; 0)$$

$$\overrightarrow{SD} = D - S = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; -3a \right) = a \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -3 \right)$$

Lấy

$$d = \frac{|\overrightarrow{SD} \cdot [\vec{u}, \vec{v}]|}{|[\vec{u}, \vec{v}]|}$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Ta có thể dùng các vector rút gọn: $\vec{u}_1 = (2; 0; -3)$, $\vec{v}_1 = (1; -\sqrt{3}; 0)$

Tính: $[\vec{u}_1, \vec{v}_1] = (-3\sqrt{3}; -3; -2\sqrt{3})$

Suy ra

$$|[\vec{u}_1, \vec{v}_1]| = \sqrt{27 + 9 + 12} = 4\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -3 \right) \cdot (-3\sqrt{3}; -3; -2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$$

Lại có

$$d = \frac{a \cdot 3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{3a}{4}$$

Vậy

$$\frac{xa}{y} = \frac{3a}{4}$$

Suy ra y nên $x = 3, y = 4$

Do đó $x + y + xy = 3 + 4 + 12 = 19$

Câu 5

Gọi:

- p_1 là xác suất tìm được kho báu nếu đang ở Phòng 1
- p_2 là xác suất tìm được kho báu nếu đang ở Phòng 2
- p_3 là xác suất tìm được kho báu nếu đang ở Phòng 3
- p_4 là xác suất tìm được kho báu nếu đang ở Phòng 4

Từ sơ đồ:

- Phòng 1 thông với: Kho báu, Phòng 2, Phòng 3
- Phòng 2 thông với: Phòng 1, Phòng 4
- Phòng 3 thông với: Phòng 1, Phòng 4
- Phòng 4 thông với: Phòng 2, Phòng 3, Bẫy

Do đó:

$$p_1 = \frac{1 + p_2 + p_3}{3}$$

$$p_2 = \frac{p_1 + p_4}{2}$$

$$p_3 = \frac{p_1 + p_4}{2}$$

$$p_4 = \frac{p_2 + p_3 + 0}{3}$$

Vì đối xứng nên $p_2 = p_3 = q$.

Khi đó: $p_4 = \frac{2q}{3}$ và $q = \frac{p_1 + p_4}{2}$.

Thay $p_4 = \frac{2q}{3}$ vào: $q = \frac{p_1 + \frac{2q}{3}}{2}$

$$\Rightarrow 2q = p_1 + \frac{2q}{3} \Rightarrow \frac{4q}{3} = p_1 \Rightarrow q = \frac{3p_1}{4}$$

Suy ra $p_4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3p_1}{4} = \frac{p_1}{2}$.

Mặt khác:

$$p_1 = \frac{1 + q + q}{3} = \frac{1 + 2q}{3}$$

$$\Rightarrow p_1 = \frac{1 + 2 \cdot \frac{3p_1}{4}}{3} \Rightarrow 3p_1 = 1 + \frac{3p_1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3p_1}{2} = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{2}{3}$$

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{2}{3} \approx 0,6667$.

Làm tròn đến hàng phần trăm: $0,67$.

Câu 6

Mỗi nhóm hợp lệ là một bộ ba số phân biệt $a < b < c$ thuộc $1, 2, \dots, 100$ sao cho $a + b + c = 100$.

Mỗi nhóm như vậy được trả: $3 \cdot 50000 = 150000$ đồng.

Vậy ta cần đếm số bộ ba phân biệt dương thỏa

$$a + b + c = 100$$

Đếm số bộ ba

Với mỗi a , ta có:

$$b > a, c > b, a + b + c = 100 \Rightarrow c = 100 - a - b > b$$

Do đó

$$100 - a - b > b \Rightarrow 2b < 100 - a \Rightarrow b \leq \left\lfloor \frac{99 - a}{2} \right\rfloor$$

Với mỗi a , số giá trị của b là: $\left\lfloor \frac{99 - a}{2} \right\rfloor - a$.

Vì $a < b < c$ nên $a \leq 32$.

Số bộ ba là

$$N = \sum_{a=1}^{32} \left(\left\lfloor \frac{99 - a}{2} \right\rfloor - a \right)$$

Tách chẵn lẻ:

• Nếu $a = 2k - 1$ với $k = 1, \dots, 16$ thì số giá trị của b là $(50 - k) - (2k - 1) = 51 - 3k$.

• Nếu $a = 2k$ với $k = 1, \dots, 16$ thì số giá trị của b là
 $(49 - k) - 2k = 49 - 3k$

Vậy

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=1}^{16} (51 - 3k) + \sum_{k=1}^{16} (49 - 3k) \\ &= 16 \cdot 51 - 3 \cdot \frac{16 \cdot 17}{2} + 16 \cdot 49 - 3 \cdot \frac{16 \cdot 17}{2} \\ &= 816 - 408 + 784 - 408 = 784 \end{aligned}$$

Tính tiền thưởng lớn nhất

Tổng tiền: $784 \cdot 150000 = 117600000$ đồng $= 117,6$ triệu đồng.

Làm tròn đến hàng đơn vị: 118 triệu đồng.