

CHUYÊN ĐỀ: NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN**I. NGUYÊN HÀM****A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT****1. Định nghĩa**

Cho K là tập con của tập số thực $\mathbb{R}$.

• Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .

• Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$ với C là một hằng số. Vì vậy, $\int f(x) dx = F(x) + C$.

• Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K . Ta có: $\int F'(x) dx = F(x) + C$.

2. Tính chất

Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K .

$$\bullet \int kf(x) dx = k \int f(x) dx \text{ với } k \neq 0.$$

$$\bullet \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\bullet \int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

3. Nguyên hàm một số hàm số sơ cấp cơ bản

$$\bullet \text{ Với } \alpha \neq -1 \text{ ta có } \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$\bullet \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\bullet \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\bullet \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$$

$$\bullet \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\bullet \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$$

$$\bullet \text{ Với } a > 0; a \neq 1 \text{ ta có } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN**Dạng 1. Nguyên hàm hàm lũy thừa**

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của các hàm số:

a) $f(x) = x^3 + 2x$

b) $f(x) = -3x^2 + 2x - 2025$

Lời giải

a) $\int f(x) dx = \int (x^3 + 2x) dx = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + C$

$\int f(x) dx = \int (-3x^2 + 2x - 2025) dx = -x^3 + x^2 - 2025x + C.$

b)

Dạng 2. Nguyên hàm hàm số lượng giác

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của các hàm số:

a) $f(x) = 1 + \sin x$

b) $f(x) = 2 \cos x + 3x$

c) $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$

Lời giải

a) $\int f(x) dx = \int (1 + \sin x) dx = \int 1 dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C$

$$\int f(x) dx = \int (2 \cos x + 3x) dx = 2 \sin x + \frac{3}{2} x^2 + C$$

b)

$$\int f(x) dx = \int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = x - \tan x + C$$

c)

Dạng 3. Nguyên hàm hàm số mũ**Ví dụ 3:** Tìm nguyên hàm của các hàm số:

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = 3^x$

c) $f(x) = 7^x \cdot 2^{x+2}$

Lời giải

a) $\int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$

b) $\int f(x) dx = \int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$

c) $\int f(x) dx = \int (7^x \cdot 2^{x+2}) dx = \int (7^x \cdot 2^x \cdot 2^2) dx = 4 \int (7 \cdot 2)^x dx = 4 \int 14^x dx = 4 \cdot \frac{14^x}{\ln 14} + C$

Dạng 4. Nguyên hàm có điều kiện**Bài toán:** Tìm nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa mãn $F(a) = b$.» **Bước 1:** Dựa vào bảng nguyên hàm, tính chất nguyên hàm, các phương pháp biến đổi.» **Bước 2:** Dựa vào điều kiện của giả thiết $F(a) = b$ để tìm C .» **Bước 3:** Kết luận.**Ví dụ 4:** Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.**Lời giải**

Ta có: $F(x) = \int f(x) dx = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$

Theo đề: $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + C = 2 \Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = -\cos x + \sin x + 1$

Ví dụ 5: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.**Lời giải**

Ta có: $F(x) = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$

Theo đề: $F(0) = 1 + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$

Ví dụ 6: Cho hàm số $f'(x) = 3x^2$. Tìm nguyên hàm $f(x)$ của $f'(x)$ thỏa mãn $f(0) = 1$.**Lời giải**

Ta có: $f(x) = \int f'(x) dx = \int 3x^2 dx = x^3 + C$

Mà $f(0) = 1 \Rightarrow 0^3 + C = 1 \Leftrightarrow C = 1$. Vậy $f(x) = x^3 + 1$.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$. Biết rằng $f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = 1$. Tính giá trị $f(4)$.**Lời giải**

Với mọi $x \in (0; +\infty)$, ta có:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(2x + \frac{1}{x^2} \right) dx = x^2 - \frac{1}{x} + C$$

Vì $f(1) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 1 \Rightarrow f(4) = 16 - \frac{1}{4} + 1 = \frac{67}{4}$

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 12x + 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Tính giá trị $F(1)$.

Lời giải

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (12x^2 + 2) dx = 4x^3 + 2x + C_1$$

Vì $f(1) = 3 \Rightarrow C_1 = -3 \Rightarrow f(x) = 4x^3 + 2x - 3$

Lại có:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (4x^3 + 2x - 3) dx = x^4 + x^2 - 3x + C_2$$

$F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2 \Rightarrow F(x) = x^4 + x^2 - 3x + 2 \Rightarrow F(1) = 1$

Dạng 5. Bài toán thực tế (liên quan đến vận tốc, gia tốc, quãng đường,...)

» **Bước 1:** Xét mối liên hệ giữa các đại lượng

- Xét mối quan hệ giữa các đại lượng vận tốc $v(t)$, quãng đường $s(t)$ và thời gian t .

+ Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t) = v(t)$

+ Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường: $s(t) = \int v(t) dt$

- Xét mối quan hệ giữa các đại lượng vận tốc $v(t)$, gia tốc $a(t)$ và thời gian t .

+ Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t) = a(t)$

+ Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t) = \int a(t) dt$

» **Bước 2:** Dựa vào điều kiện của giả thiết để tìm đại lượng yêu cầu.

» **Bước 3:** Kết luận.

Ví dụ 9: Một ô tô đang chạy với vận tốc 19 m/s thì hãm phanh và chuyển động chậm dần với tốc độ $v(t) = 19 - 2t \text{ (m/s)}$. Kể từ khi hãm phanh, quãng đường ô tô đi được sau 5 giây là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $s(t) = \int v(t) dt = \int (19 - 2t) dt = 19t - t^2 + C$

Vì $s(0) = 0 \Leftrightarrow 19 \cdot 0 - 0^2 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$. Suy ra $s(t) = 19t - t^2$

Vậy sau 5 giây thì $t = 5$, quãng đường ô tô đi được là $s(5) = 19 \cdot 5 - 5^2 = 70 \text{ m}$.

Ví dụ 10: Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 160 - 9,8t \text{ (m/s)}$. Tìm độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất)

a) sau $t = 5$ giây.

b) khi nó đạt độ cao lớn nhất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Gọi $h(t)$ là độ cao của viên đạn bắn lên từ mặt đất sau t giây kể từ thời điểm đạn được bắn lên.

Khi đó $h(t) = \int v(t) dt = \int (160 - 9,8t) dt = 160t - 4,9t^2 + C$

Do $h(0) = 0$ nên $C = 0 \Rightarrow h(t) = -4,9t^2 + 160t \text{ (m)}$

a) Sau $t = 5$ giây.

Độ cao của viên đạn sau 5 giây là $h(5) = -4,9 \cdot 5^2 + 160,5 = 677,5 \text{ (m)}$.

b) Khi nó đạt độ cao lớn nhất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

$$h = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{64000}{49} \approx 1306,1 \text{ (m)} \quad \text{khi} \quad t = -\frac{b}{2a} = \frac{800}{49} \text{ giây.}$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần 1. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\square$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A.** $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$ **B.** $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
C. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với $k \in \square \setminus \{0\}$ **D.** $\int f(x) \cdot g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$

Câu 2. Biết $\int f(x) dx = F(x) + C$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $f'(x) = F(x)$ **B.** $f'(x) = F(x) + C$ **C.** $F'(x) = f(x) - C$ **D.** $F'(x) = f(x)$

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$?

- A.** $F_1(x) = x^3 + x^2 - 4$ **B.** $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ **C.** $F_3(x) = x^3 - x^2 + 1$ **D.** $F_4(x) = 3x^3 + x^2$

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = x^2 + x$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$?

- A.** $F_1(x) = x^3 + x^2 - 4$ **B.** $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ **C.** $F_3(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$ **D.** $F_4(x) = 2x + 1$

Câu 5. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

- A.** $2x^2 + 4x + C$ **B.** $x^2 + 4x + C$ **C.** $x^2 + C$ **D.** $2x^2 + C$

Câu 6. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 2$ là

- A.** $\int f(x) dx = 2x + C$ **B.** $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - 2x + C$
C. $\int f(x) dx = x^2 - 2x + C$ **D.** $\int f(x) dx = x^3 - 2x + C$

Câu 7. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2025^x$ là

- A.** $F(x) = x \cdot 2025^{x-1}$ **B.** $F(x) = 2025 \cdot 2024^x$
C. $F(x) = 2025^x \cdot \ln 2025$ **D.** $F(x) = \frac{2025^x}{\ln 2025}$

Câu 8. Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x + 4$ là

- A.** $2x^2 + 4x + C$ **B.** $x^2 + 4x + C$ **C.** $x^2 + C$ **D.** $2x^2 + C$

Câu 9. Biết $F(x) = x^3 + \frac{1}{x} + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Mệnh đề nào đúng?

- A.** $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \ln x$ **B.** $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$ **C.** $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2}$ **D.** $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \ln x + x + C$

Câu 10. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)$ là

- A.** $2x + 3 + C$ **B.** $\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^2 + 2x + C$ **C.** $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^2 + 2x + C$ **D.** $\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$

Câu 11. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{5+2x^4}{x^2}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{5}{x} + C$

B. $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5}{x} + C$

C. $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + 5\ln x^2 + C$

D. $\int f(x)dx = 2x^3 - \frac{5}{x} + C$

Câu 12. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\cos x - 4\sin x$ là

A. $3\sin x - 4\cos x$

B. $-3\sin x + 4\cos x$

C. $3\sin x + 4\cos x + C$

D. $-3\sin x + 4\cos x + C$

Câu 13. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin x + \frac{3}{\sin^2 x}$ là

A. $-2\cos x - 3\cot x + C$

B. $2\cos x - 3\tan x + C$

C. $-2\cos x + 3\cot x + C$

D. $2\cos x - 3\cot x + C$

Câu 14. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 2x$ có dạng $F(x) = ax^4 + bx^2$. Tính $T = 4a + b$.

A. $T = 0$

B. $T = 1$

C. $T = 2$

D. $T = 3$

Câu 15. Cho hàm số $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x^2$. Tính $F'(25)$.

A. 25.

B. 125.

C. 5.

D. 625.

Câu 16. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2}{x}$. Biết $F(-1) = 0$. Tính $F(2)$.

A. $F(2) = 2\ln 2 + 1$

B. $F(2) = \ln 2$

C. $F(2) = 2\ln 3 + 2$

D. $F(2) = 2\ln 2$

Câu 17. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2\sin x - \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ là

A. $F(x) = 2\cos x - \sin x - 1$

B. $F(x) = 2\cos x + \sin x - 1 - \sqrt{3}$

C. $F(x) = -2\cos x - \sin x + 1$

D. $F(x) = -2\cos x - \sin x - 1$

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\cos x$ và $f(0) = 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 3x - 5\sin x - 5$

B. $f(x) = 3x + 5\sin x + 5$

C. $f(x) = 3x + 5\sin x + 2$

D. $f(x) = 3x - 5\sin x + 5$

Câu 19. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ và đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm

$M(0;1)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = e^x + 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Biết $F(x)$ là nguyên

hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1) = e$. Tính $F(0)$.

A. $\frac{5}{6}$

B. $-\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $-\frac{5}{6}$

Phần 2. Trắc nghiệm đúng – sai

Câu 1. Cho hàm số $F(x) = x^3 - 2x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

a) Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $G(-1) = 3$ thì $G(x) = F(x) - 1, x \in \mathbb{R}$.

b) Nếu hàm số $H(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $H(1) = -3$ thì $H(x) = F(x) - 3, x \in \mathbb{R}$.

c) Nếu hàm số $K(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $K(0) = 0$ thì $K(x) = F(x) + 1, x \in \mathbb{R}$.

d) Nếu hàm số $M(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $M(2) = 4$ thì $M(x) = F(x) - 1, x \in \mathbb{R}$.

Câu 2. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

a) $\int f(x) dx = f'(x) + C.$

b) $\int f'(x) dx = f(x) + C.$

$\int f'(x) dx = f(x).$

d) $\int f''(x) dx = f'(x) + C.$

c)

Câu 3. Giả sử $v(t)$ là phương trình vận tốc của một vật chuyển động theo thời gian t (giây), $a(t)$ là phương trình gia tốc của vật đó chuyển động theo thời gian t (giây).

a) $\int a(t) dt = v(t) + C.$

b) $\int v(t) dt = a(t) + C.$

c) $\int v'(t) dt = a(t) + C.$

d) $\int v'(t) dt = v(t) + C.$

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = x^2$. Gọi $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$.

a) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + C.$

b) Biết $F(3) = 1$ thì $F(4) = \frac{4}{3}.$

c) $\int f(2x+1) dx = \int (2x+1)^2 dx = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C.$

d) $\int [x \cdot f(x-2)] dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 2x^2 + C.$

Câu 5. Cho $f(x) = 3x^2 + 4x$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

a) $F'(x) = f(x)$

b) $F(x) = x^3 + 2x^2 + C.$

c) $F(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ với $F(0) = 1.$

d) Cho $F(0) = 1$, khi đó $F\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{23}{27}.$

Phần 3. Trả lời ngắn

Câu 1. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ và $F(2) = 2$. Tính $F(3)$.

Câu 2. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^2 - 2)(2x + 1)$ và $F(-1) = \frac{1}{6}$. Tính $F\left(-\frac{1}{2}\right)$.
(viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Tính $F(1)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Khi đó hàm số $f(x)$ có dạng $f(x) = 3x + b\cos x + c$ với b, c là các số nguyên. Tính $b + c$.

Câu 5. Biết $\int (2\sin x + \cos x)^2 dx = a\sin 2x - \cos 2x + bx + C$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 6. Cường độ dòng điện (đơn vị: A) trong một dây dẫn tại thời điểm t giây là $I(t) = Q'(t) = 3t^2 - 6t + 5$ với $Q(t)$ là điện lượng (đơn vị: C) truyền trong dây dẫn tại thời điểm t . Biết khi $t = 1$ giây thì điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q(1) = 4$. Tính điện lượng truyền trong dây dẫn khi $t = 3$.

Câu 7. Người ta truyền nhiệt cho một bình nuôi cấy vi sinh vật từ 1°C . Tốc độ tăng nhiệt độ của bình tại thời điểm t phút ($0 \leq t \leq 5$) được cho bởi hàm số $f(t) = 3t^2$ ($^\circ\text{C}/\text{phút}$). Biết rằng nhiệt độ của bình đó tại thời điểm t là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$. Tìm nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt.

II. TÍCH PHÂN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử F là một nguyên hàm của f trên đoạn $[a; b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x) dx$.

Ta dùng kí hiệu $F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Vậy

2. Tính chất của tích phân

$$\text{a) } \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\text{b) } \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{c) } \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{d) } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (a < c < b)$$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Tính tích phân theo định nghĩa – tính chất

Ví dụ 1: Cho $\int_0^3 f(x) dx = 5$ và $\int_0^3 g(x) dx = 2$. Tính:

$$\text{a) } \int_0^3 [f(x) + g(x)] dx$$

$$\text{b) } \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx$$

$$\text{c) } \int_0^3 3f(x) dx$$

$$\text{d) } \int_0^3 [2f(x) - 3g(x)] dx$$

Lời giải

$$\text{a) } \int_0^3 [f(x) + g(x)] dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 g(x) dx = 5 + 2 = 7$$

$$\text{b) } \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^3 g(x) dx = 5 - 2 = 3$$

$$\text{c) } \int_0^3 3f(x) dx = 3 \int_0^3 f(x) dx = 3 \cdot 5 = 15$$

$$\text{d) } \int_0^3 [2f(x) - 3g(x)] dx = 2 \int_0^3 f(x) dx - 3 \int_0^3 g(x) dx = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 4$$

Ví dụ 2: Cho $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(t) dt = -4$, $\int_2^4 f(y) dy$. Tính

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_{-2}^4 f(t) dt = \int_{-2}^4 f(x) dx, \quad \int_2^4 f(y) dy = \int_2^4 f(x) dx$$

$$\text{Khi đó: } \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = \int_{-2}^4 f(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^4 f(x) dx = \int_{-2}^4 f(x) dx - \int_{-2}^2 f(x) dx = -4 - 1 = -5$$

Vậy $\int_2^4 f(y) dy = -5$

Ví dụ 3: Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[1; 3]$ thoả mãn $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$, $\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6$. Tính $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$.

Lời giải

$$\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx + 3 \int_1^3 g(x) dx = 10 \quad (1)$$

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6 \Leftrightarrow 2 \int_1^3 f(x) dx - \int_1^3 g(x) dx = 6 \quad (2)$$

Đặt $X = \int_1^3 f(x) dx$, $Y = \int_1^3 g(x) dx$,

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} X + 3Y = 10 \\ 2X - Y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 4 \\ Y = 2 \end{cases}$$

Do đó ta được: $\int_1^3 f(x) dx = 4$ và $\int_1^3 g(x) dx = 2$. Vậy $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = 4 + 2 = 6$.

Dạng 2. Tích phân hàm số chứa dấu trị tuyệt đối

$$I = \int_a^b |f(x)| dx$$

Tính tích phân:

Phương pháp:

Bước 1. Xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Bước 2. Dựa vào bảng xét dấu trên đoạn $[a; b]$ để khử $|f(x)|$. Sau đó sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học để tính.

$$I = \int_a^b |f(x)| dx$$

Ví dụ 3: Tính các tích phân sau:

a) $A = \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx$

b) $B = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx$

Lời giải

a) $A = \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx$

Xét $f(x) = x^2 - 1$ trên đoạn $[-2; 2]$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-2; 2] \\ x = 1 \in [-2; 2] \end{cases}$$

Cho

Bảng xét dấu:

x	-2	-1	1	2	
x^2-1	+	0	-	0	+

Do đó: $A = \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{-2}^{-1} + \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^2 = \left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right] + \left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right] + \left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right] = 4.$$

$$b) \quad B = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx$$

Xét $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ trên $[-2; 1]$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \in [-2; 1] \\ x = 0 \in [-2; 1] \\ x = 1 \in [-2; 1] \end{cases}$$

Cho

Bảng xét dấu:

x	-2	0	1		
f(x)	0	+	0	-	0

Do đó:

$$\begin{aligned} B &= \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx = \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx \\ &= \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right) \Big|_{-2}^0 - \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right) \Big|_0^1 = -\left(-\frac{8}{3} \right) - \left(-\frac{5}{12} \right) = \frac{37}{12}. \end{aligned}$$

Dạng 3. Tích phân hàm số cho bởi nhiều công thức

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases} \quad I = \int_1^3 f(x) dx$$

Ví dụ 4: Cho hàm số

Lời giải

$$I = \int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx + \int_2^3 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_2^3 = \frac{23}{3}$$

Ta có:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \int_0^2 f(x) dx$$

Ví dụ 5: Cho hàm số

Lời giải

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 (4 - x) dx = x^3 \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 1 + \left(8 - 2 - 4 + \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{2}$$

Khi đó

Dạng 4. Bài toán thực tế

Ví dụ 6: Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

Lời giải

$$\text{Hàm vận tốc} \quad v(t) = \int a(t) dt = \int (3t + t^2) dt = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$$

Lấy mốc thời gian ($t = 0$) lúc tăng tốc $\Rightarrow v(0) = 10 \Rightarrow C = 10$

$$v(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 10$$

Ta được:

Sau 10 giây kể từ lúc tăng tốc, quãng đường vật đi được là

$$s = \int_0^{10} \left(\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 10 \right) dt = \left(\frac{t^4}{12} + \frac{t^3}{2} + 10t \right) \Big|_0^{10} = \frac{4300}{3} \text{ m}$$

Ví dụ 7: Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = t^2 - 3t + 2$ (m/s). Trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 3$,

a) Tìm độ dịch chuyển của vật.

b) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này.

Lời giải

a) Tìm độ dịch chuyển của vật.

Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 3$ là

$$\int_1^3 v(t) dt = \int_1^3 (t^2 - 3t + 2) dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t \right) \Big|_1^3 = \left(\frac{3^3}{3} - \frac{3 \cdot 3^2}{2} + 2 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{3 \cdot 1^2}{2} + 2 \cdot 1 \right) = \frac{2}{3}$$

b) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này.

Tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 3$ là

$$\int_1^3 |v(t)| dt = \int_1^2 |t^2 - 3t + 2| dt + \int_2^3 |t^2 - 3t + 2| dt = \int_1^2 (-t^2 + 3t - 2) dt + \int_2^3 (t^2 - 3t + 2) dt = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần 1. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Nếu $\int_{-1}^4 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^4 g(x) dx = 3$. Khi đó $\int_{-1}^4 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

- A. 5. B. 6. C. 1. D. -1.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-6; 11]$ và thỏa mãn $\int_{-6}^{11} f(x) dx = 8$, $\int_2^6 f(x) dx = 3$. Giá trị của biểu thức $P = \int_{-6}^2 f(x) dx + \int_6^{11} f(x) dx$ bằng

- A. $P = 4$. B. $P = 11$. C. $P = 5$. D. $P = 2$.

Câu 3. Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 3$; $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Khi đó $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$ bằng

- A. 10. B. $\frac{21}{2}$. C. $\frac{19}{2}$. D. $\frac{17}{2}$.

Câu 4. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 (2 + f(x)) dx$ là

- A. 7. B. 9. C. $\frac{15}{4}$. D. $\frac{23}{4}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2) - F(0) = 5$. Khi đó $\int_0^2 3f(x) dx$ bằng

- A. 6. B. 15. C. 10. D. 5.

Câu 6. Nếu $\int_0^1 2f(x) dx = 6$ thì $\int_0^1 \left[\frac{1}{3} f(x) + 2x \right] dx$ bằng

- A. 4. B. 7. C. 3. D. 2.

Câu 7. Tính $\int_{-1}^2 |2x + 1| dx$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. 2. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{13}{2}$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int_0^\pi [f(x) + \sin x] dx = 10$. Tính $I = \int_0^\pi f(x) dx$

- A. $I = 4$. B. $I = 8$. C. $I = 12$. D. $I = 6$.

Câu 9. Cho biết $\int_0^\pi (4 - \sin x) dx = a\pi + b$, với a, b là các số nguyên. Tính $a + b$.

- A. 1. B. -4. C. 6. D. 3.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x) dx$.

A. $\frac{7}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

$$I = \int_0^2 |x-2| dx$$

Câu 11. Tính tích phân

A. $I = -2$.

B. $I = 4$.

C. $I = 2$.

D. $I = 0$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{khi } -3 \leq x \leq -1 \\ x^2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$ thì $\int_{-3}^3 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{31}{3}$.

B. $\frac{28}{3}$.

C. $\frac{22}{3}$.

D. $\frac{26}{3}$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2x-4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2) = 4$. Giá trị của $F(-2) - 4F(3)$ bằng

A. 16.

B. 8.

C. 18.

D. 2.

Câu 14. Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = 2\cos t$ (m/s²), biết rằng tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0. Tính quãng đường vật đi được từ thời điểm $t=0$ (s) đến thời điểm $t=\pi$ (s).

A. 5(m)

B. 3(m)

C. 2(m)

D. 4(m)

Câu 15. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 (m). Một ô tô A đang chạy với vận tốc 15 m/s bỗng gặp ô tô B đang đứng chờ đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều bởi vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 15 - 5t$ (m/s). Để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là s mét. Giá trị của s bằng

A. 23,5.

B. 21.

C. 22,9.

D. 21,6.

Phần 2. Trắc nghiệm đúng – sai

Câu 1. Cho $\int_0^2 f(x) dx = 3; \int_0^3 f(x) dx = 5$

a) $\int_2^0 f(x) dx = 3$

b) $\int_2^3 f(x) dx = 2$

c) $\int_0^2 (f(x) - 2x) dx = -1$

d) $\int_0^3 (f(x) - 2x) dx = 2$

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ x+1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$

a) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x+1) dx$

b) $\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x^2 - 2x + 3) dx$

c) $\int_1^3 \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{41}{12}$

d) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx$

Câu 3. Cho số thực a và hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x-x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$

a) $\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_{-1}^0 2x dx$

b) $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{a}{6}$

c) Khi $a = 2$, $\int_{-1}^1 f(x)dx = -\frac{2}{3}$

d) Điều kiện cần và đủ để $\int_{-1}^2 f(x)dx > 3$ là $a > -6$

Câu 4. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

a) Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 5$ và $\int_1^2 g(x)dx = -\frac{1}{2}$ thì $\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx = \frac{11}{2}$

b) Nếu $\int_1^3 [g(x) + 2x + 3]dx = 10$ thì $\int_1^3 g(x)dx = 4$

c) Nếu $f(x) = e^{3x}, F(0) = \frac{1}{3}$ thì $F\left(\frac{1}{3}\right) = e$

d) Nếu $f(x) = 2x + 1; g(x) = x - 2$ thì $\int_3^5 \frac{f(x)}{g(x)}dx = a + b \ln c$, $a, b, c \in \mathbb{Q}, c < 4$. Khi đó $a + b + c = 7$.

Phần 3. Trả lời ngắn

Câu 1. Biết $\int_1^2 \frac{3x-4}{x}dx = a + b \ln 2$. Tính $a + b$.

Câu 2. Biết $\int_1^3 \frac{3x^2 + 2x - 4}{x}dx = a + b \ln 3$. Tính $a + b$.

Câu 3. Nếu $F'(x) = \frac{1}{2x}$ và $F(1) = 1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2)

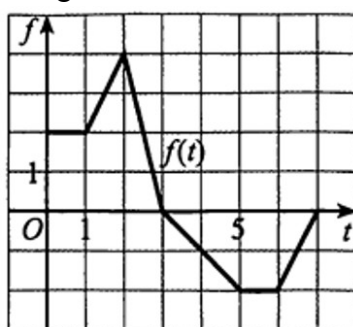
Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(2) = 5$ và $f'(x) = 4x - 2$. Tích phân $\int_2^4 f(x)dx = \frac{a}{b}$ (với $\frac{a}{b}$ tối giản và $a, b \in \mathbb{Z}$). Tính $a + b$.

Câu 5. Biết $I = \int_0^2 |2^x - 2|dx = \frac{a + b \ln 2}{\ln 2}$ với a, b là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b$.

Câu 6. Cho $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính $J = \int_{-1}^2 f(x)dx$.

Câu 7. Cho $I = \int_0^1 (4x - 2m^2)dx$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I + 6 > 0$?

Câu 8. Cho $g(x) = \int_0^x f(t)dt, (0 \leq x \leq 7)$ trong đó $f(t)$ là hàm số có đồ thị như Hình vẽ. Tính $g(3)$.

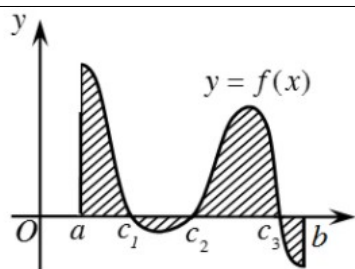


III. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

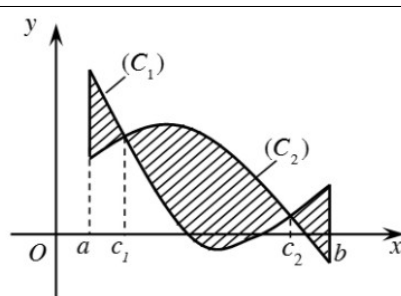
1) Tính diện tích hình phẳng:

a) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a; x=b$.



$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \\ x=a \\ x=b \end{cases} \quad S = \int_a^b |f(x)| dx$$

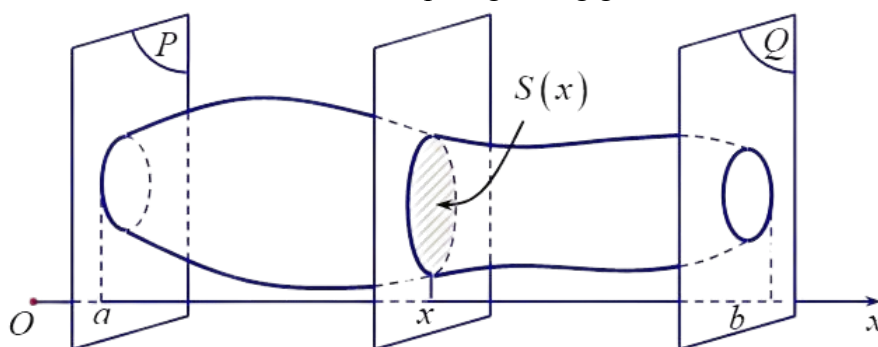
b) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x); y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và hai đường thẳng $x=a; x=b$.



$$\begin{cases} (C_1): y=f(x) \\ (C_2): y=g(x) \\ x=a \\ x=b \end{cases} \quad S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

2) Tính thể tích vật thể:

+ Định nghĩa: Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b , $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$)

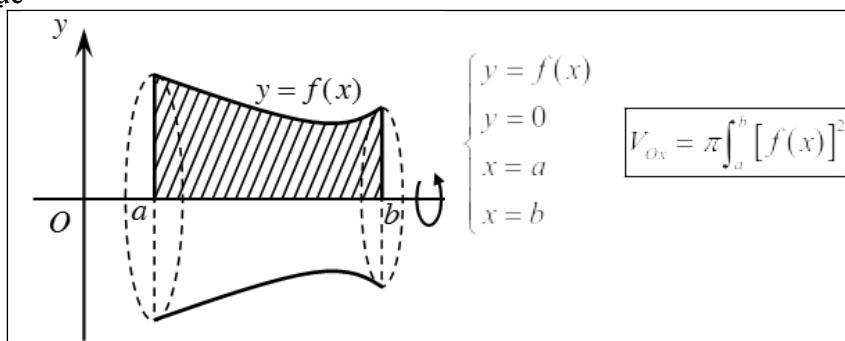


Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định:

+ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, Ox và hai đường thẳng $x=a, x=b$ quanh trục Ox :



$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \\ x=a \\ x=b \end{cases} \quad V_{Ox} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Xây dựng công thức tính diện tích theo hình vẽ

Phương pháp

▪ Xác định công thức diện tích hình phẳng:

» **Bước 1:** Xác định đồ thị của các hàm số được cho trên hình vẽ.

» **Bước 2:** Xác định các vị trí tương giao giữa các đồ thị.

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

» **Bước 3:** Áp dụng công thức tính diện tích

» **Bước 4:** Phá trị tuyệt đối: Lấy công thức hàm số của đồ thị nằm trên trừ công thức hàm số của đồ thị nằm dưới

▪ *Xác định công thức thể tích khối tròn xoay:*

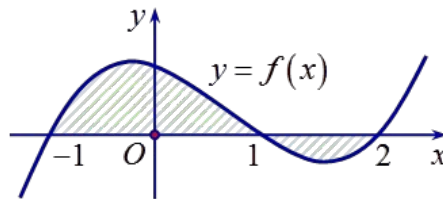
» **Bước 1:** Xác định đồ thị của các hàm số được cho trên hình vẽ.

» **Bước 2:** Xác định các vị trí tương giao giữa các đồ thị.

$$V = p \int_a^b f^2(x) dx$$

» **Bước 3:** Áp dụng công thức tính diện tích

Ví dụ 1: Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên dưới. Xây dựng công thức tính S .



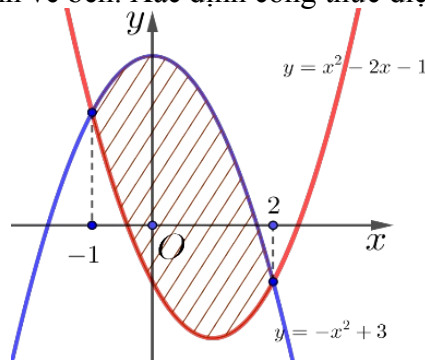
Lời giải

Thấy rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm $x = -1; x = 1; x = 2$.

$$S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 [-f(x)] dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$$

Do đó

Ví dụ 2: Cho đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Xác định công thức diện tích miền được gạch sọc ở hình bên.



Lời giải

$$(H): \begin{cases} y = -x^2 + 3 \\ y = x^2 - 2x - 1 \\ x = -1; x = 2 \end{cases}$$

Ta có:

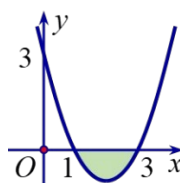
$$S = \int_{-1}^2 |(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)| dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$$

Ta có:

(do trên đoạn $[-1; 2]$ phần đồ thị $y = -x^2 + 3$

nằm trên đồ thị $y = x^2 - 2x - 1$).

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình bên. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đã cho và trục Ox . Quay hình phẳng D quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V được xác định theo công thức gì?



Lời giải

$$V = p \int_1^3 [f(x)]^2 dx$$

Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D quanh trục Ox :

Dạng 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$, Ox và $x = a, x = b$

Phương pháp

$$\begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = a; x = b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b |f(x)| dx$$

Diện tích hình phẳng giới hạn:

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

» **Bước 1:** Giải $f(x) = 0$ tìm nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$ ($a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$)

» **Bước 2:** Tính

$$S = \int_a^{x_1} |f(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x)| dx$$

$$= \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$$

Chú ý: Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 4: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành Ox , các đường thẳng $x = 1, x = 2$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng là

$$S = \int_1^2 |x^2| dx = \int_1^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Ví dụ 5: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.

Lời giải

Xét phương trình

$$(x-2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$S = \int_1^2 |(x-2)^2 - 1| dx = \int_1^2 |x^2 - 4x + 3| dx = \left| \int_1^2 (x^2 - 4x + 3) dx \right| = \frac{2}{3}$$

Ta có:

Ví dụ 6: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2 - 2x, y = 0, x = -4, x = 1$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
VT		+	-	+

Diện tích:

$$S = \int_{-4}^1 |x^2 - 2x| dx = \int_{-4}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^1 (x^2 - 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-4}^0 - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 = 38$$

Ví dụ 7: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	0	1	2
$x^3 - 1$	-	0	+

$$S = \int_0^2 |x^3 - 1| dx = \int_0^1 |x^3 - 1| dx + \int_1^2 |x^3 - 1| dx = \int_0^1 (1 - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - 1) dx = \left(x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - x \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{2}$$

Dạng 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = g(x)$ và $x = a$, $x = b$

Phương pháp

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a; x = b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Diện tích hình phẳng giới hạn:

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

» **Bước 1:** Giải $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$ ($a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$)

» **Bước 2:** Tính

$$S = \int_a^{x_1} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

Chú ý: Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 8: Hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = x(1-x)$ và $y = x^3 - x$ có diện tích bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$x(1-x) = x^3 - x \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ta có:

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = x(1-x)$ và $y = x^3 - x$.

$$S = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx = \int_{-2}^0 |x^3 + x^2 - 2x| dx + \int_0^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx$$

Khi đó

$$= \left| \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \quad (\text{đvdt}).$$

Dạng 4. Thể tích vật thể tính theo mặt cắt vuông góc trục hoành

Ví dụ 9: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và x^2 .

Lời giải

Ta có diện tích thiết diện: $S(x) = 3x \cdot x^2 = 3x^3$

$$V = \int_1^3 3x^3 dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_1^3 = 60$$

Khi đó

Ví dụ 10: Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = p$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq p$) là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

Lời giải

$$S(x) = \left(2\sqrt{\sin x}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \sin x$$

Ta có diện tích thiết diện:

$$V = \int_0^p S(x) dx = \int_0^p \sqrt{3} \sin x dx = -\sqrt{3} \cos x \Big|_0^p = 2\sqrt{3}$$

Dạng 5. Thể tích khối tròn xoay

Ví dụ 11: Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục Ox , $x = 1$ và $x = 4$ được tính bởi công thức

$$V = p \int_1^4 (\sqrt{x})^2 dx = p \int_1^4 x dx$$

Ví dụ 12: Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau xung quanh trục Ox : $y = 2x - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

Lời giải

$$V = p \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{16p}{15}$$

Thể tích khối tròn xoay

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**Phần 1. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn**

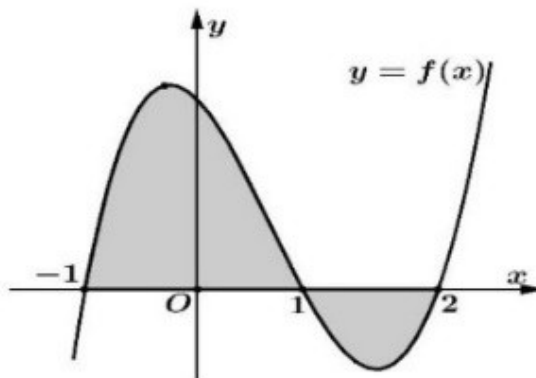
Câu 1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = 0, x = \pi$, đồ thị hàm số $y = \cos x$ và trục Ox là

- A. $S = \int_0^\pi \cos x dx$ B. $S = \int_0^\pi \cos^2 x dx$ C. $S = \int_0^\pi |\cos x| dx$ D. $S = \pi \int_0^\pi |\cos x| dx$

Câu 2. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ quay quanh Ox . Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. $V = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$ B. $V = \int_0^2 e^x dx$ C. $V = \pi \int_0^2 e^x dx$ D. $V = \int_0^2 e^{2x} dx$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

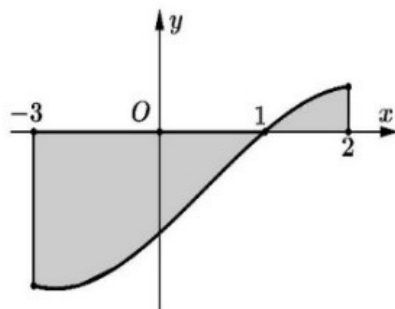


- A. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$ B. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$

C. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx$

D. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$

Câu 4. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -3, x = 2$ (như hình vẽ). Đặt $a = \int_{-3}^1 f(x)dx, b = \int_1^2 f(x)dx$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



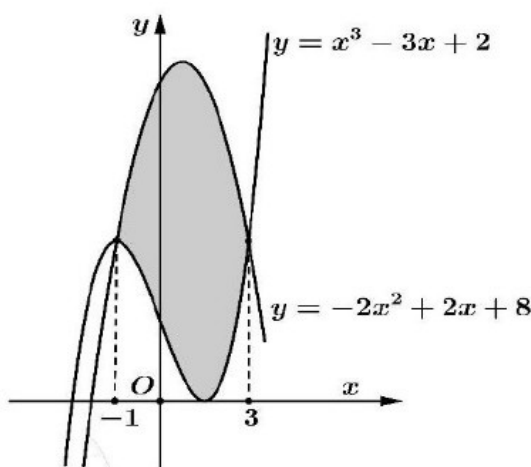
A. $S = -a - b$

B. $S = a + b$

C. $S = a - b$

D. $S = b - a$

Câu 5. Diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào sau đây?



A. $S = \int_{-1}^3 (x^3 + 2x^2 - 5x - 6)dx$

B. $S = \int_{-1}^3 (x^3 + 2x^2 - x - 10)dx$

C. $S = \int_{-1}^3 (x^3 - 2x^2 - x + 10)dx$

D. $S = \int_{-1}^3 (-x^3 - 2x^2 + 5x + 6)dx$

Câu 6. Tính diện tích S hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

A. $S = \frac{937}{12}$

B. $S = \frac{343}{12}$

C. $S = \frac{397}{4}$

D. $S = \frac{793}{4}$

Câu 7. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2$ và $y = 8 - x^2$ là

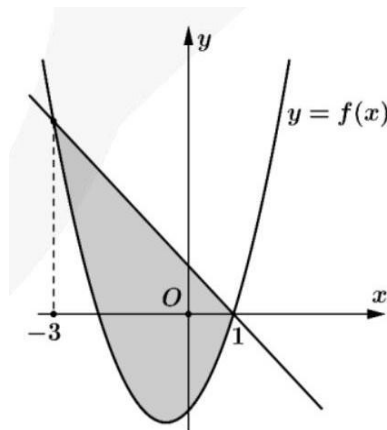
A. 12.

B. 32.

C. $\frac{3}{64}$.

D. $\frac{64}{3}$.

Câu 8. Diện tích phần sạch sọc trong hình vẽ bằng



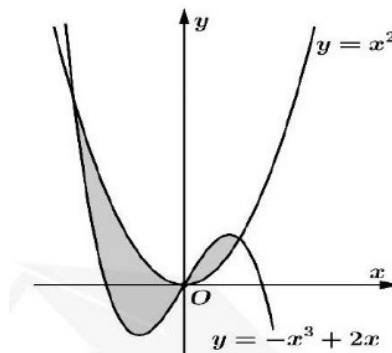
A $\int_{-3}^1 |-x^2 - 2x - 3| dx$

B $\int_{-3}^1 (x^2 - 2x - 3) dx$

C $\int_{-3}^1 (x^2 + 2x - 3) dx$

D $\int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx$

Câu 9. Diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình bên bằng



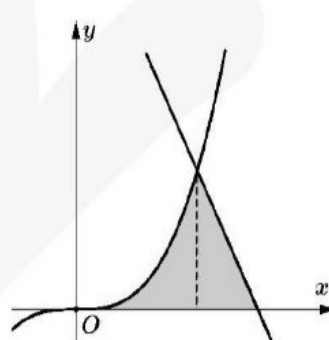
A $\frac{55}{12}$

B $\frac{37}{12}$

C $\frac{9}{4}$

D $\frac{15}{4}$

Câu 10. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^3$, đường thẳng $y = -2x + 3$ và trục hoành (phần gạch chéo trong hình vẽ). Diện tích hình phẳng (H) là



A $S = \frac{1}{4}$

B $S = \frac{1}{2}$

C $S = \frac{5}{4}$

D $S = 2$

Câu 11. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0, x = 1$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 1$) là một tam giác đều có cạnh bằng x .

A $V = \frac{12\pi}{5}$

B $V = \frac{12}{5}$

C $V = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$

D $V = \frac{\sqrt{3}}{12}$

Câu 12. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là một hình vuông có độ dài cạnh bằng $2\sqrt{9 - x^2}$.

A 90.

B 72π

C 78π

D 72.

Câu 13. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, các đường thẳng $x = 0, x = \ln 3$ và trục hoành. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi (H) khi quay quanh trục hoành là

A. 2π . B. 4π . C. 4 . D. π .

Câu 14. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 4x + 3$ và $y = 0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{16}{15}$. B. $\frac{16\pi}{15}$. C. $\frac{31\pi}{30}$. D. $\frac{31}{30}$.

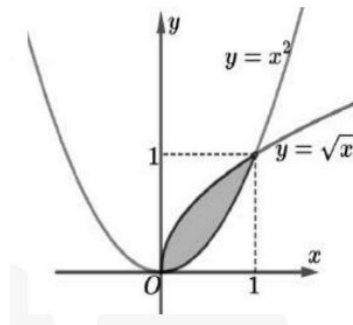
Câu 15. Thể tích vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x$ và trục hoành quay quanh Ox là

A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{512}{15}$. C. $\frac{4\pi}{3}$. D. $\frac{512\pi}{15}$.

Câu 16. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x-1}$, trục hoành và $x = 5$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

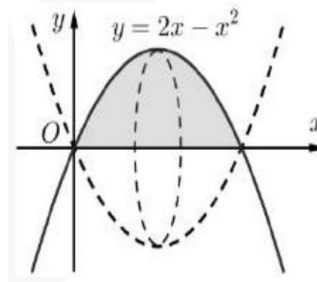
A. $\frac{15\pi}{2}$. B. $\frac{15}{2}$. C. 8π . D. 8 .

Câu 17. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2$ và đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x}$ (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox bằng



A. $V = \frac{9\pi}{10}$. B. $V = \frac{3\pi}{10}$. C. $V = \frac{\pi}{10}$. D. $V = \frac{7\pi}{10}$.

Câu 18. Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2, y = 0$ khi quay quanh trục Ox là

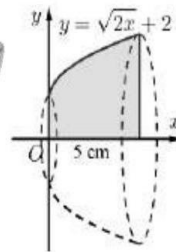


A. $\frac{4\pi}{3}$. B. $\frac{13\pi}{15}$. C. $\frac{14\pi}{15}$. D. $\frac{16\pi}{15}$.

Câu 19. Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 4$ quay quanh trục Ox . Thể tích khối tròn xoay sinh ra bằng

A. $\frac{64\pi}{5}$. B. $\frac{128\pi}{5}$. C. $\frac{256\pi}{5}$. D. $\frac{152\pi}{5}$.

Câu 20. Tính thể tích chứa được của một cái chén, biết phần trong của nó có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đường $y = \sqrt{2x} + 2$ và trục Ox (như hình vẽ), bát có độ sâu 5 cm, đơn vị trên trục là centimet (làm tròn đến hàng đơn vị).



A. 78 cm^3 .

B. 274 cm^3 .

C. 87 cm^3 .

D. 247 cm^3 .

Phần 2. Trắc nghiệm đúng – sai

Câu 1. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4x + 4$ (C_1), $y = 4x - 12$ (C_2) và trục Ox .

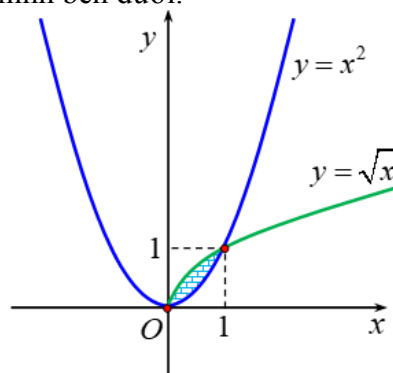
a) Diện tích của hình phẳng (H) là $S = \int_3^4 |x^2 - 8x + 16| dx$.

b) Thể tích của vật tròn xoay là $V_{Ox} = \pi \int_2^4 (x^2 - 4x + 4)^2 dx - \pi \int_3^4 (4x - 12)^2 dx$.

c) Các đường (C_1) và (C_2) đều đi qua điểm $M(4; 4)$.

d) Nếu $V_{Ox} = \frac{a}{b} \cdot \pi$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì $a + b = 32$.

Câu 2. Cho hình phẳng được tô trong hình bên dưới.



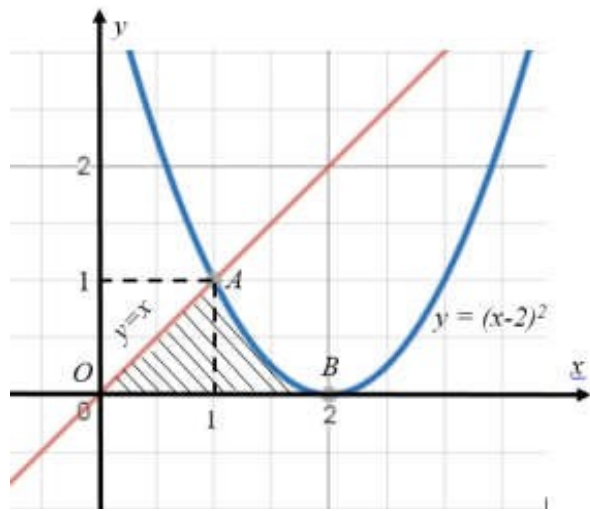
a) Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$.

b) Thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng trên quanh trục Ox là $\pi \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$.

c) Thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $(P): y = x^2$; $(C): y = \sqrt{x}$ quanh trục Ox bằng $\frac{3\pi}{10}$.

d) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\frac{1}{3}$.

Câu 3. Đồ thị các đường $y = x$; $y = (x - 2)^2$ cho bởi hình vẽ bên. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y = x$, trục hoành, $x = 0$; $x = 1$. S_2 diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y = (x - 1)^2$, trục hoành, $x = 1$; $x = 2$.



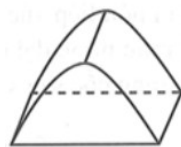
a) $S_1 = \int_0^1 |x| dx$

b) $S_1 = \int_0^1 |x| dx = \int_0^1 x dx$

c) $S_2 = -\int_1^2 (x-2)^2 dx$

d) Diện tích hình phẳng phần gạch chéo trên hình bằng $\frac{1}{6}$.

Câu 4. Để tham dự hội chợ xuân người ta dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét và trải thảm, đỉnh I của parabol cách mặt đất là 3 mét. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho: O là trung điểm của cạnh AB , A, B thuộc trục hoành và I thuộc trục tung.



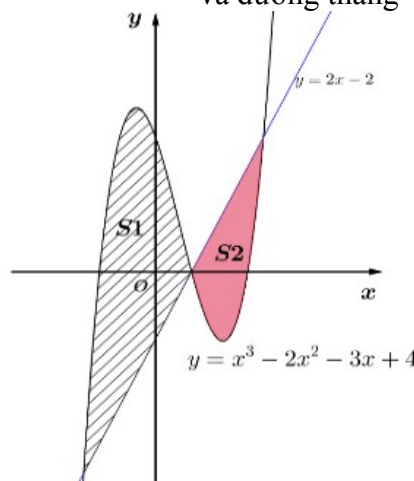
a) Tọa độ các điểm $A\left(\frac{-3}{2}; 0\right), B\left(\frac{3}{2}; 0\right), I(0; 3)$

b) Phương trình của parabol là $y = -\frac{4}{3}x^2 + 6$

c) Diện tích thảm làm nền là $18m^2$

d) Thể tích phần không gian phía trong trại là $V = 36m^3$

Câu 5. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ (C) và đường thẳng $d: y = 2x - 2$ (hình vẽ)



a) Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm $A(-2; -6), B(1; 0), C(3; 4)$

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng d bằng $\frac{253}{12}$

c) Biết đường thẳng d cắt đồ thị (C) thành hai miền S_1 và S_2 . Tỉ số $\frac{S_1}{S_2} = \frac{63}{16}$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành, đường thẳng $x = -1; x = 2$ bằng $\frac{21}{4}$.

Câu 6. Cho D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số phương trình $y = \sqrt{25 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 4, x = 5$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D xung quanh trục Ox là V_1 .

$$V_1 = \pi \int_4^5 (25 - x^2) dx$$

a) Thể tích V_1 được tính theo công thức

b) Thể tích $V_1 = \frac{14\pi}{3}$.

$$S = \int_4^5 \sqrt{25 - x^2} dx$$

c) Diện tích hình phẳng D được tính theo công thức

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{125}$$

d) Gọi V_2 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$.

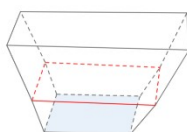
Phần 3. Trả lời ngắn

Câu 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$.

Câu 2. Cho D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{9 - x}$ ($x \leq 9$), trục hoành và trục tung. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D xung quanh trục Ox (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

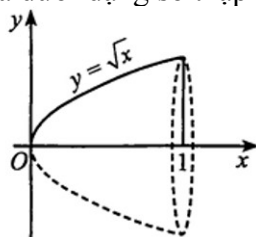
Câu 3. Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 3; x = 5$. (làm tròn đến hàng phần chục)

Câu 4. Một dụng cụ đựng nước có dạng như hình bên dưới.

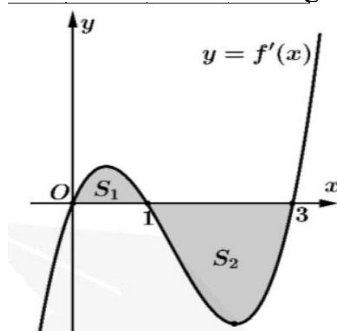


Nếu cắt dụng cụ bằng mặt phẳng song song với mặt đáy và cách mặt đáy một khoảng x (cm) ($0 \leq x \leq 5$) thì được thiết diện là hình chữ nhật có chiều dài là $2x$ (cm) và chiều rộng là $\sqrt{x+3}$ (cm). Dung tích của dụng cụ trên là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 5. Cho khối tròn xoay như Hình vẽ. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành bởi hình phẳng cho ở Hình vẽ khi quay quanh trục Ox (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười).

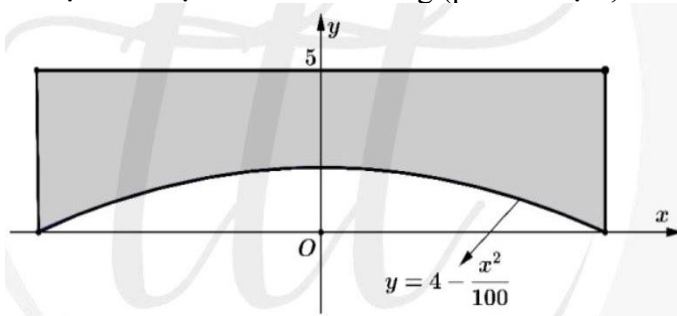


Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình dưới.



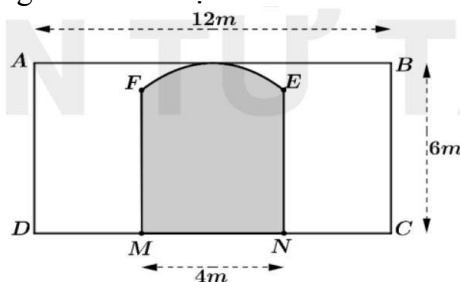
Biết rằng diện tích của các phần hình phẳng trong hình lần lượt là $S_1 = 4$ và $S_2 = 10$. Tính giá trị của $f(3)$, biết giá trị của $f(0) = 2$.

Câu 7. Hình bên dưới là mặt cắt dọc của một chiếc cầu bê tông (phần tô đậm, các đơn vị đều đo bằng mét)



Biết chiều rộng của cầu bằng 9 m. Thể tích bê tông ít nhất cần để đúc cầu là bao nhiêu m^3 ? (làm tròn đến hàng phần chục)

Câu 8. Một công ty quảng cáo muốn làm một bức tranh trang trí như phần MNEIF được tô đậm trong hình vẽ bên dưới ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có $BC = 6$ m, $CD = 12$ m.



Biết $MN = 4$ m; cung EIF có hình parabol với đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D . Kinh phí làm bức tranh là 1.200.000 đồng/ m^2 . Hỏi công ty đó cần ít nhất bao nhiêu triệu đồng để làm bức tranh?

IV. VẬN DỤNG TÍCH PHÂN GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ

• Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

• Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm: $v(t) = s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a; b]$ thì tính được quãng đường di chuyển

$$s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt$$

trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức:

• Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $s(t)$ và $v(t)$ như sau:

+ Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t) = v(t)$.

+ Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường $s(t) = \int v(t) dt$.

$\Rightarrow$ từ đây ta cũng có quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $t \in [a; b]$ là

$$\int_a^b v(t) dt = s(b) - s(a).$$

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau:

+ Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t) = a(t)$.

+ Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t) = \int a(t) dt$.

MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ

Câu 1. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì gặp chướng ngại vật, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.



Lời giải

Ta có $-2t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 5 \Rightarrow$ Thời gian tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây. Vậy trong 8 giây cuối cùng thì có 3 giây ô tô chuyển động với vận tốc 10 m/s và 5 giây chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10 \text{ (m/s)}$.

$$S = 3 \cdot 10 + \int_0^5 (-2t + 10) dt = 30 + 25 = 55 \text{ m}$$

Khi đó quãng đường ô tô di chuyển là

Câu 2. Một ô tô đang chạy với tốc độ 20 (m/s) thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?



Lời giải

Khi ô tô dừng hẳn thì: $v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ (s)}$.

$$s = \int_0^4 (-5t + 20) dt = 40 \text{ (m)}$$

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được:

Câu 3. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t \text{ (m/s)}$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a \text{ (m/s}^2\text{)}$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Tính vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A .

Lời giải

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \int a dt = at + C$ mà $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm

$$\int_0^{18} \left(\frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t \right) dt = \int_0^{15} at dt \Leftrightarrow 225 = a \cdot \frac{225}{2} \Leftrightarrow a = 2$$

đi được bằng nhau. Do đó

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t) = 2.15 = 30 \text{ (m/s)}$.

Câu 4. Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0 , sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\frac{5}{2}t + a \text{ (m/s)}, (t \geq 6)$ cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì ô tô đi được quãng đường là 80m. Tìm v_0 .



Lời giải

- Tại thời điểm $t = 6$ vật đang chuyển động với vận tốc v_0 nên có $v(6) = v_0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}.6 + a = v_0 \Leftrightarrow a = v_0 + 15$,
suy ra $v(t) = -\frac{5}{2}t + v_0 + 15$.

- Gọi k là thời điểm vật dừng hẳn, vậy ta có $v(k) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5} \cdot (v_0 + 15) \Leftrightarrow k = \frac{2v_0}{5} + 6$.

- Tổng quãng đường vật đi được là $80 = 6.v_0 + \int_6^k \left(-\frac{5}{2}t + v_0 + 15\right) dt$
 $\Leftrightarrow 80 = 6.v_0 + \left(-\frac{5}{4}t^2 + v_0.t + 15t\right) \Big|_6^k \Leftrightarrow 80 = 6.v_0 - \frac{5}{4}(k^2 - 6^2) + v_0.(k - 6) + 15(k - 6)$
 $\Leftrightarrow 80 = 6.v_0 - \frac{5}{4} \left(\frac{4(v_0)^2}{25} + \frac{24v_0}{5} \right) + v_0 \cdot \frac{2v_0}{5} + 15 \cdot \frac{2v_0}{5} \Leftrightarrow (v_0)^2 + 36.v_0 - 400 = 0 \Leftrightarrow v_0 = 10$

Câu 5. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16 m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $v_A(0) = 16 \text{ m/s}$.

Khi xe A dừng hẳn: $v_A(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ s}$.

Quãng đường từ lúc xe A hãm phanh đến lúc dừng hẳn là $s = \int_0^4 (16 - 4t) dt = 32 \text{ m}$.

Do các xe phải cách nhau tối thiểu 1m để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là 33m.

Câu 6. Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

Lời giải

Ta có $v(0) = 10 \text{ m/s}$ và
$$v(t) = \int_0^t a(t) dt = \int_0^t (t^2 + 3t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} \right) \Big|_0^t = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2$$

Quãng đường vật đi được là
$$S = \int_0^6 v(t) dt = \int_0^6 \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \right) dt = \left(\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^3 \right) \Big|_0^6 = 216 \text{ m}$$

Câu 7. Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t \text{ (m/s)}$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc 200 (m/s) thì rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là bao nhiêu?

Lời giải

Thời điểm máy bay đạt vận tốc 200 (m/s) là
$$v(t) = 200 \Leftrightarrow t^2 + 10t = 200 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = -20 \end{cases} \Leftrightarrow t = 10$$

$$s = \int_0^{10} (t^2 + 10t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + 5t^2 \right) \Big|_0^{10} = \frac{2500}{3} \text{ (m)}$$

Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

Câu 8. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t \text{ (m/s)}$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng $a \text{ (m/s}^2\text{)}$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $v_B(t) = \int a \cdot dt = at + C$, $v_B(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v_B(t) = at$

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là
$$S_A = \int_0^{25} \left(\frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t \right) dt = \left(\frac{1}{300}t^3 + \frac{13}{60}t^2 \right) \Big|_0^{25} = \frac{375}{2}$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là
$$S_B = \int_0^{15} at \cdot dt = \frac{at^2}{2} \Big|_0^{15} = \frac{225a}{2}$$

Ta có $\frac{375}{2} = \frac{225a}{2} \Leftrightarrow a = \frac{5}{3}$. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là
$$v_B(15) = \frac{5}{3} \cdot 15 = 25 \text{ (m/s)}$$

Câu 9. Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t \text{ (m/s)}$. Đi được 5 (s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?



Lời giải

Quãng đường ô tô đi được trong 5 (s) đầu là
$$s_1 = \int_0^5 7t dt = 7 \frac{t^2}{2} \Big|_0^5 = 87,5 \text{ (mét)}$$

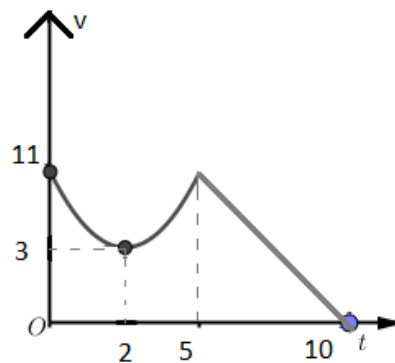
Phương trình vận tốc của ô tô khi người lái xe phát hiện chướng ngại vật là $v_{(2)}(t) = 35 - 35t$ (m/s). Khi xe dừng lại hẳn thì $v_{(2)}(t) = 0 \Leftrightarrow 35 - 35t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

$$s_2 = \int_0^1 (35 - 35t) dt = \left(35t - 35 \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 17.5$$

Quãng đường ô tô đi được từ khi phanh gấp đến khi dừng lại hẳn là (mét).

Vậy quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn là $s = s_1 + s_2 = 87.5 + 17.5 = 105$ (mét).

Câu 10. Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t) \text{ (m/s)}$ có dạng đường Parabol khi $0 \leq t \leq 5 \text{ (s)}$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \leq t \leq 10 \text{ (s)}$. Cho đỉnh Parabol là $I(2, 3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \leq t \leq 10 \text{ (s)}$ là bao nhiêu mét?



Lời giải

Gọi Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ khi $0 \leq t \leq 5 \text{ (s)}$

Do $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua $I(3; 2); A(0; 11)$ nên $\begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ c = 11 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ c = 11 \end{cases}$.

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $0 \leq t \leq 5 \text{ (s)}$ là $S = \int_0^5 (2x^2 - 8x + 11) dx = \frac{115}{3} \text{ (m)}$

Ta có $f(5) = 21$

Gọi $d: y = ax + b$ khi $5 \leq t \leq 10 \text{ (s)}$ do d đi qua điểm $B(5; 21)$ và $C(10; 0)$ nên: $\begin{cases} 5a + b = 11 \\ 10a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{21}{5} \\ b = 42 \end{cases}$.

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $5 \leq t \leq 10(s)$ là $S = \int_5^{10} \left(-\frac{26}{5}x + 52 \right) dx = \frac{105}{2}(m)$

Quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \leq t \leq 10(s)$ là $S = \frac{115}{3} + \frac{105}{2} = \frac{545}{6}.$

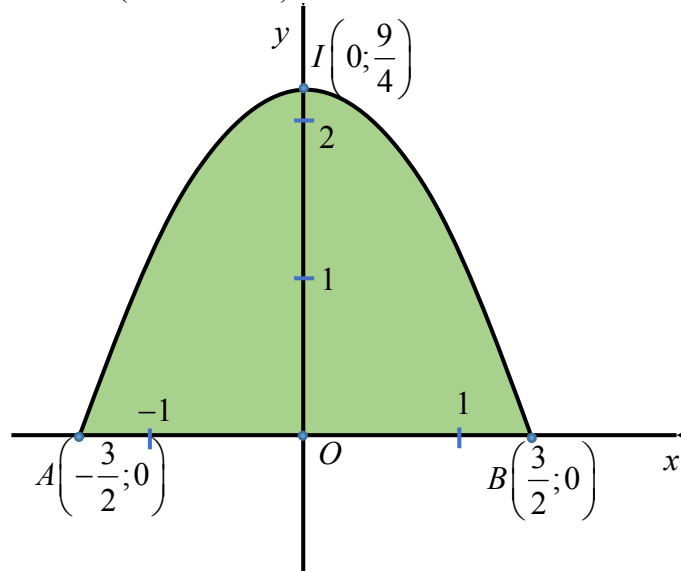
ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN TRONG THỰC TIỄN

DẠNG 1. ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Câu 1. Trường Nguyễn Văn Trỗi muốn làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25$ mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền nhà trường phải trả là bao nhiêu đồng?

Lời giải

Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).



$$\begin{cases} \frac{9}{4} = c, (I \in (P)) \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = 0 (A \in (P)) \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = 0 (B \in (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{9}{4} \\ a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình:

Vậy $(P): y = -x^2 + \frac{9}{4}$.

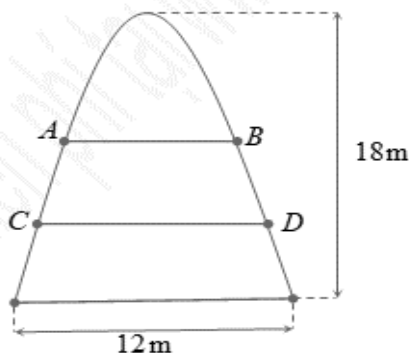
$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) dx = 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) dx = 2 \left(\frac{-x^3}{3} + \frac{9}{4}x \right) \Big|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \text{ m}^2$$

Dựa vào đồ thị, diện tích cửa parabol là:

Số tiền phải trả là: $\frac{9}{2} \cdot 1500000 = 6750000$ đồng.

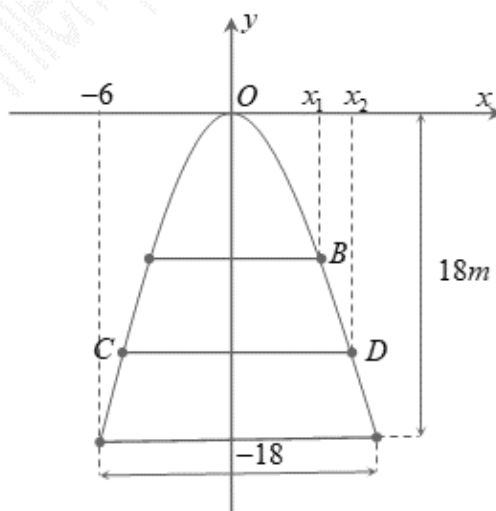
Câu 2. Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m , chiều rộng chân đế 12 m . Người ta căng hai sợi dây trang trí AB , CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện

tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình Parabol có dạng $y = a.x^2$ (P).

(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6; -18)$ suy ra: $-18 = a.(-6)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2$.

Từ hình vẽ ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $AB: y = -\frac{1}{2}x_1^2$ là

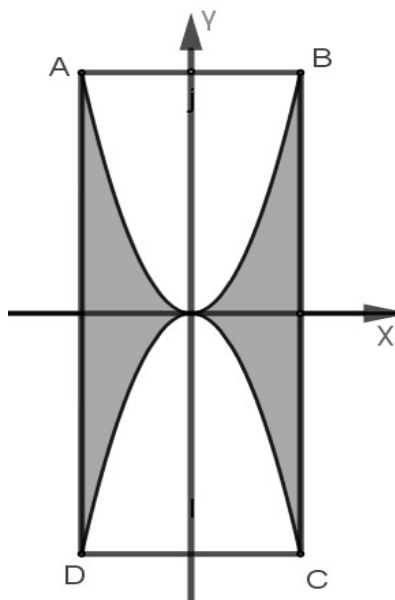
$$S_1 = 2 \int_0^{x_1} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2 \right) \right] dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_1^2 x \right) \Big|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $CD: y = -\frac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2 = 2 \int_0^{x_2} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2 \right) \right] dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_2^2 x \right) \Big|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3$$

Từ giả thiết suy ra $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Vậy $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 3. Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.



Phần tô đậm được dính đá với giá thành $500.000đ/m^2$. Phần còn lại được tô màu với giá thành $250.000đ/m^2$. Cho $AB = 4dm$; $BC = 8dm$. Hỏi để trang trí 1000 họa tiết như vậy cần số tiền bỏ ra là bao nhiêu?

Lời giải

Vì $AB = 4dm$; $BC = 8dm$. $\Rightarrow A(-2; 4), B(2; 4), C(2; -4), D(-2; -4)$.

Parabol là: $y = x^2$ hoặc $y = -x^2$

$$S_1 = 4 \int_0^2 x^2 dx = \frac{32}{3} \text{ (dm}^2\text{)}$$

Diện tích phần tô đậm là

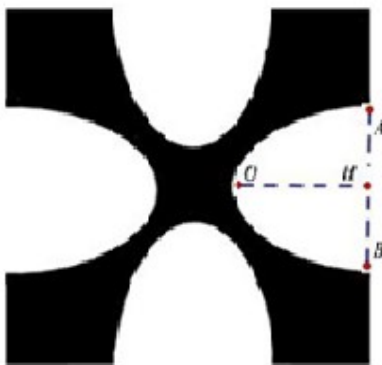
Diện tích hình chữ nhật là $S = 4.8 = 32 \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích phần trắng là $S_2 = S - S_1 = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \text{ (dm}^2\text{)}$

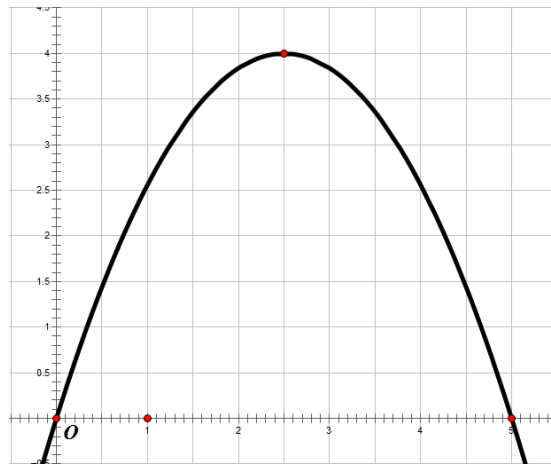
$$T = \left(\frac{32}{3} \cdot 5000 + \frac{64}{3} \cdot 2500 \right) \cdot 1000 \approx 106666667 đ$$

Tổng chi phí trang trí là:

Câu 4. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5 \text{ cm}$, $OH = 4 \text{ cm}$. Biết giá trang trí hoa văn 1cm^2 là 50.000 đồng, tính số tiền cần bỏ ra để trang trí hoa văn đó.



Lời giải



Đưa parabol vào hệ trục Oxy ta tìm được phương trình là: $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 5$ là:

$$S = \int_0^5 \left(-\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x \right) dx = \frac{40}{3}$$

Tổng diện tích phần bị khoét đi: $S_1 = 4S = \frac{160}{3} \text{ cm}^2$.

Diện tích của hình vuông là: $S_{hv} = 100 \text{ cm}^2$.

diện tích bề mặt hoa văn là: $S_2 = S_{hv} - S_1 = 100 - \frac{160}{3} = \frac{140}{3} \text{ cm}^2$.

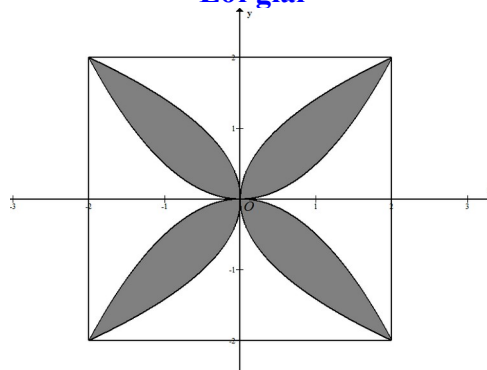
Vậy số tiền cần bỏ ra để trang trí hoa văn đó là: $\frac{140}{3} \cdot 50000 \approx 2333333$ đồng

Câu 5. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm . Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô đen như hình vẽ dưới).



Tính diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch.

Lời giải



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10cm = 1dm$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có

phương trình $y = \frac{x^2}{2}$, $y = -\frac{x^2}{2}$, $x = -\frac{y^2}{2}$, $x = \frac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị

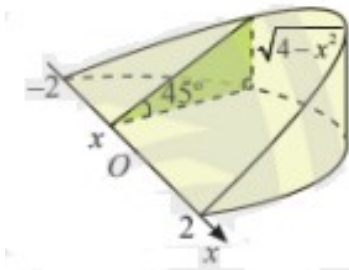
hàm số $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng

$$\int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{(2x)^3} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3} (dm^2) = \frac{400}{3} (cm^2) = \frac{4}{3} (dm^2) = \frac{400}{3} (cm^2)$$

DẠNG 2. ỨNG DỤNG THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Câu 1. Khi cắt một vật thể hình chóp niêm bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-2 \leq x \leq 2$), mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45° và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{14-3x^2}$ (như hình vẽ). Tính thể tích vật thể hình chóp niêm trên.



Lời giải

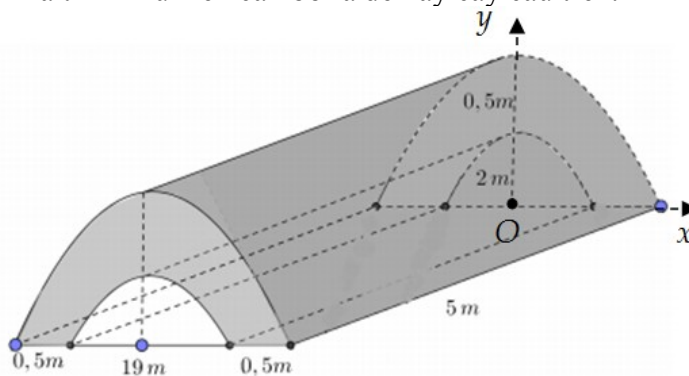
$$S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{14-3x^2} \cdot \sqrt{14-3x^2} = \frac{1}{2} (14-3x^2)$$

Diện tích tam giác vuông cần là:

$$V = \int_{-2}^2 \frac{1}{2} (14-3x^2) dx = 20$$

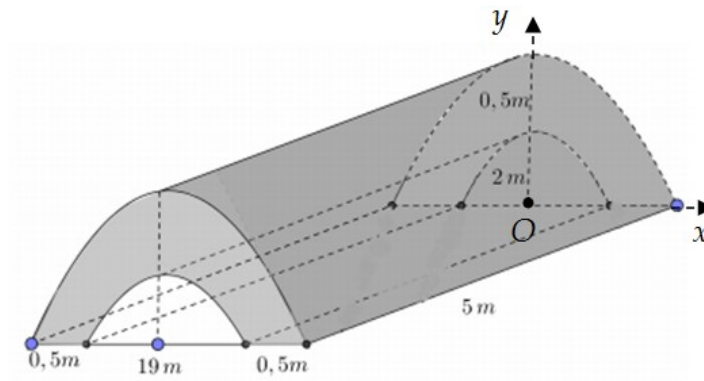
$\Rightarrow$ Thể tích vật thể là:

Câu 2. Trong chương trình nông thôn mới của tỉnh Phú Yên, tại xã Hòa Mỹ Tây có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ (đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol). Biết $1m^3$ khối bê tông để đổ cây cầu có giá 5 triệu đồng. Tính số tiền mà tỉnh Phú Yên cần bỏ ra để xây cây cầu trên.



Lời giải

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Gọi $(P_1): y = a_1x^2 + b_1$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2}; 0\right), B(0; 2)$

Nên ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 0 = a_1 \cdot \left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{8}{361} \\ b_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$$

Gọi $(P_2): y = a_2x^2 + b_2$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10; 0), D\left(0; \frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 0 = a_2 \cdot (10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{40} \\ b_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$$

$$V = 5.2 \left[\int_0^{10} \left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2} \right) dx - \int_0^{\frac{19}{2}} \left(-\frac{8}{361}x^2 + 2 \right) dx \right] = 40 \text{ m}^3$$

Ta có thể tích của bê tông là:

Số tiền mà tỉnh Phú Yên cần bỏ ra để xây cây cầu là: $5.40 = 200$ triệu đồng

Câu 3. Để kỷ niệm ngày 26-3. Chi đoàn 12A dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía bên trong trại để lớp 12A cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.

Lời giải

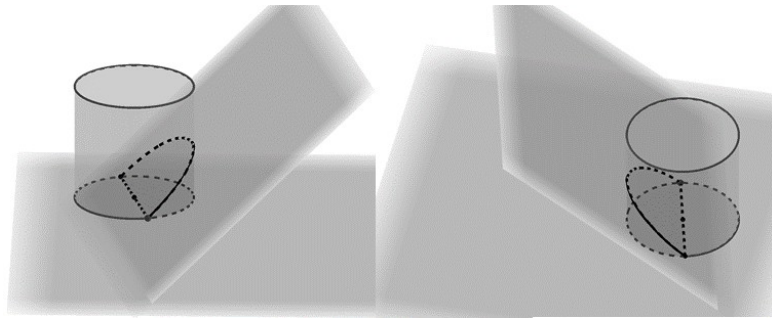
Giả sử nền trại là hình chữ nhật ABCD có AB = 3 mét, BC = 6 mét, đỉnh của parabol là I. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho: O là trung điểm của cạnh AB, A, B và I, phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + b, a \neq 0$.

Do I, A, B thuộc nên ta có $y = -\frac{4}{3}x^2 + 3$

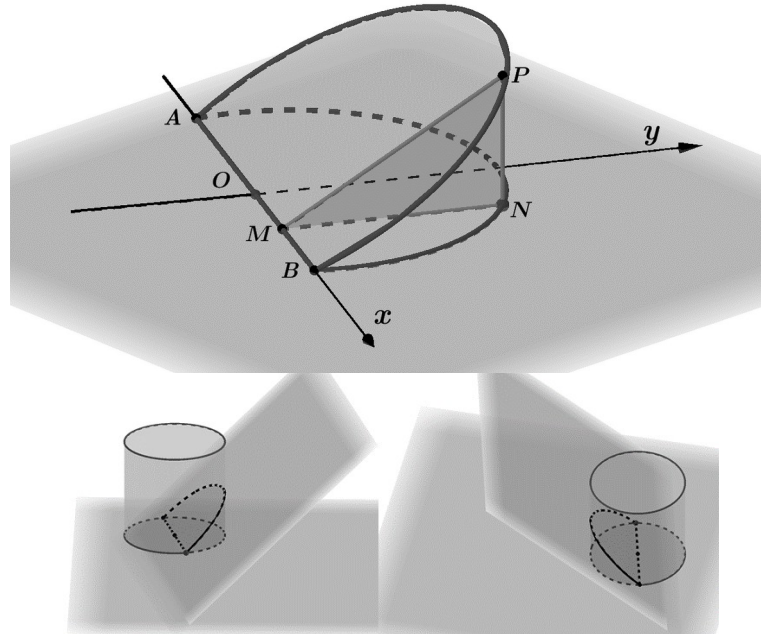
$$V = 6.2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{4}{3}x^2 + 3 \right) dx = 36$$

Vậy thể tích phần không gian phía trong trại là

Câu 4. Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng R . Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30° ta thu được hai khối gỗ có thể tích là V_1 và V_2 , với $V_1 < V_2$. Tính thể tích V_1 .



Lời giải



Khi cắt khối gỗ hình trụ ta được một hình nêm có thể tích V_1 như hình vẽ.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Nửa đường tròn đường kính AB có phương trình là $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R; R]$.

Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm M có hoành độ x , cắt hình nêm theo thiết diện là $\triangle MNP$ vuông tại N và có $\angle PMN = 30^\circ$.

$$NM = y = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow NP = MN \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{3}}$$

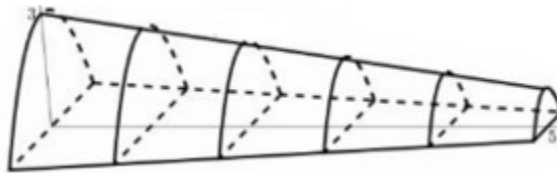
Ta có

$$\triangle MNP \text{ có diện tích } S(x) = \frac{1}{2} NM \cdot NP = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 - x^2}{\sqrt{3}}$$

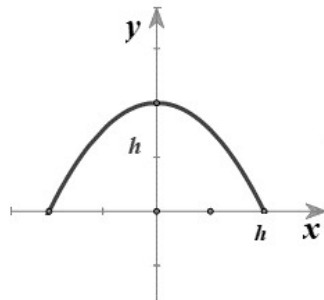
$$V_1 = \int_{-R}^R S(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{R^2 - x^2}{\sqrt{3}} dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-R}^R = \frac{2\sqrt{3}R^3}{9}$$

Thể tích hình nêm là

Câu 5. Cho một mô hình 3-D mô phỏng một đường hàm như hình vẽ bên. Biết rằng đường hàm mô hình có chiều dài 5(cm); khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \frac{2}{5}x$ (cm), với x (cm) là khoảng cách tính từ lõi vào lớn hơn của đường hàm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hàm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Lời giải



Xét một thiết diện parabol có chiều cao là h và độ dài đáy $2h$ và chọn hệ trục Oxy như hình vẽ trên.

Parabol (P) có phương trình $(P): y = ax^2 + h, (a < 0)$

Có $B(h; 0) \in (P) \Leftrightarrow 0 = ah^2 + h \Leftrightarrow a = -\frac{1}{h} \text{ (do } h > 0)$

Diện tích S của thiết diện: $S = \int_{-h}^h \left(-\frac{1}{h}x^2 + h \right) dx = \frac{4h^2}{3}, h = 3 - \frac{2}{5}x$

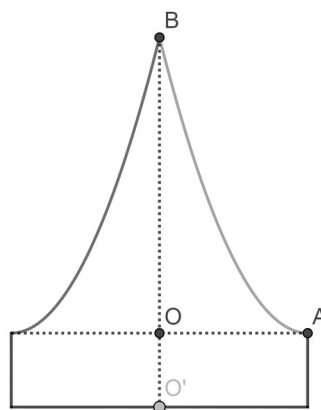
$\Rightarrow S(x) = \frac{4}{3} \left(3 - \frac{2}{5}x \right)^2$

$$V = \int_0^5 S(x) dx = \int_0^5 \frac{4}{3} \left(3 - \frac{2}{5}x \right)^2 dx \approx 28,888$$

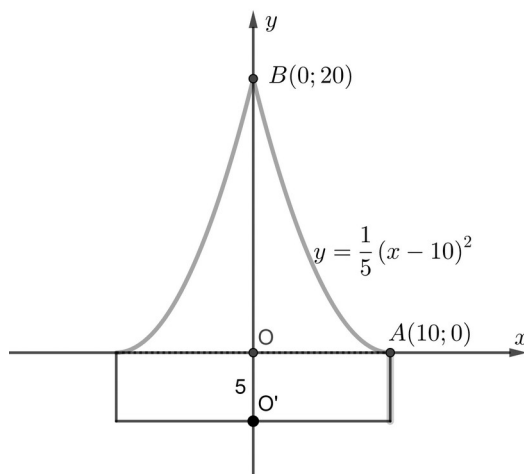
Suy ra thể tích không gian bên trong của đường hầm mô hình:

$$\Rightarrow V \approx 29 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Câu 6. Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn Minh Hiền đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5 \text{ cm}$, $OA = 10 \text{ cm}$, $OB = 20 \text{ cm}$, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A . Tính thể tích của chiếc mũ.



Lời giải



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V .

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là V_1 .

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2 .

Ta có $V = V_1 + V_2$

$$V_1 = 5 \cdot 10^2 \pi = 500\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x - 10)^2$.

Vì (P) qua điểm $B(0; 20)$ nên $a = \frac{1}{5}$. Do đó, $(P): y = \frac{1}{5}(x - 10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$ (do $x < 10$).

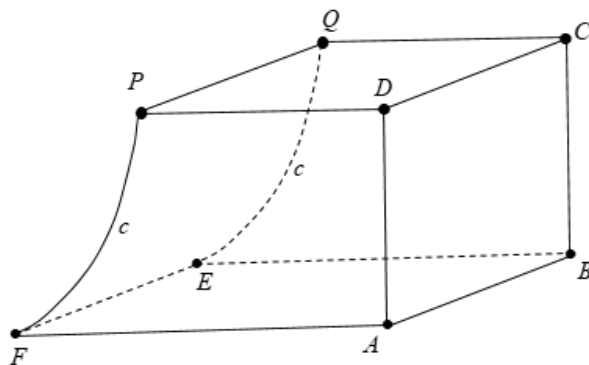
$$V_2 = \pi \int_0^{20} (10 - \sqrt{5y})^2 dy = \pi \left(3000 - \frac{8000}{3} \right) = \frac{1000}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Suy ra

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1000}{3} \pi + 500\pi = \frac{2500}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Do đó

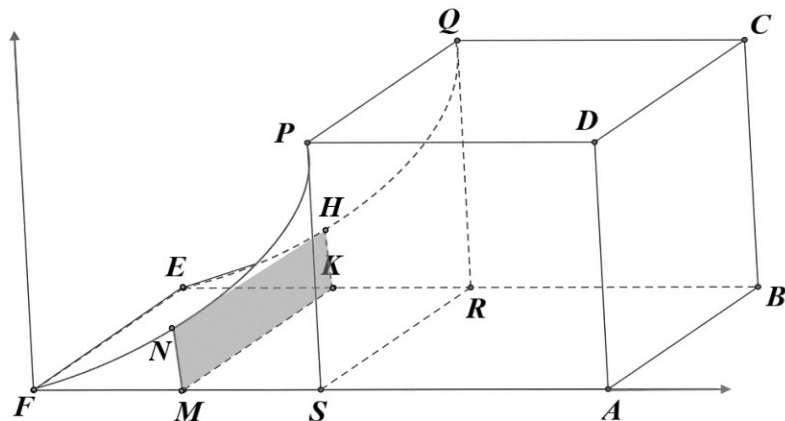
Câu 7. Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên.



Các tứ giác $ABCD, CDPQ$ là các hình vuông cạnh $2,5$ cm. Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE = 3,5$ cm.

Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF . Tính thể tích của chi tiết máy.

Lời giải



Gọi hình chiếu của P, Q trên AF và BE là R và S .

Vật thể được chia thành hình lập phương $ABCD.PQRS$ có cạnh $2,5\text{ cm}$, thể tích $V_1 = \frac{125}{8}\text{ cm}^3$ và phần còn lại có thể tích V_2 . Khi đó thể tích vật thể $V = V_1 + V_2 = \frac{125}{8} + V_2$.

Đặt hệ trục $Oxyz$ sao cho O trùng với F , Ox trùng với FA , Oy trùng với tia Fy song song với AD . Khi đó

Parabol (P) có phương trình dạng $y = ax^2$, đi qua điểm $P\left(1; \frac{5}{2}\right)$ do đó $a = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}x^2$.

Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với Ox và đi qua điểm $M(x; 0; 0), 0 \leq x \leq 1$ ta được thiết diện là hình chữ nhật $MNKH$ có cạnh là $MN = \frac{5}{2}x^2$ và $MK = \frac{5}{2}$ do đó diện tích $S(x) = \frac{25}{4}x^2$

Áp dụng công thức thể tích vật thể ta có $V_2 = \int_0^1 \frac{25}{4}x^2 dx = \frac{25}{12}$. Từ đó $V = \frac{125}{8} + \frac{25}{12} = \frac{425}{24}\text{ cm}^3$

Câu 8. Bỏ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28 cm , trục nhỏ 25 cm . Biết cứ 1000 cm^3 dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

Lời giải

Đường elip có trục lớn 28 cm , trục nhỏ 25 cm có phương trình:

$$\frac{x^2}{14^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right) \Leftrightarrow y = \pm \frac{25}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}$$

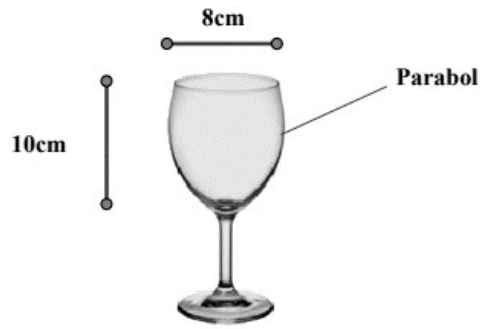
Do đó thể tích quả dưa là

$$V = \pi \int_{-14}^{14} \left(\frac{25}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}\right)^2 dx = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \int_{-14}^{14} \left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right) dx = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 14^2}\right) \Big|_{-14}^{14} = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \frac{56}{3} = \frac{8750\pi}{3}\text{ cm}^3$$

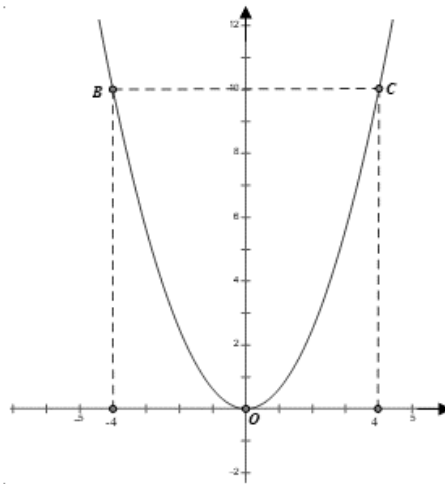
$$\frac{8750\pi \cdot 20000}{3 \cdot 1000} \approx 183259 \text{ đồng.}$$

Do đó tiền bán nước thu được là $\frac{8750\pi \cdot 20000}{3 \cdot 1000} \approx 183259$ đồng.

Câu 9. Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc (bỏ dọc cốc thành 2 phần bằng nhau) là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được (làm tròn 2 chữ số thập phân)



Lời giải

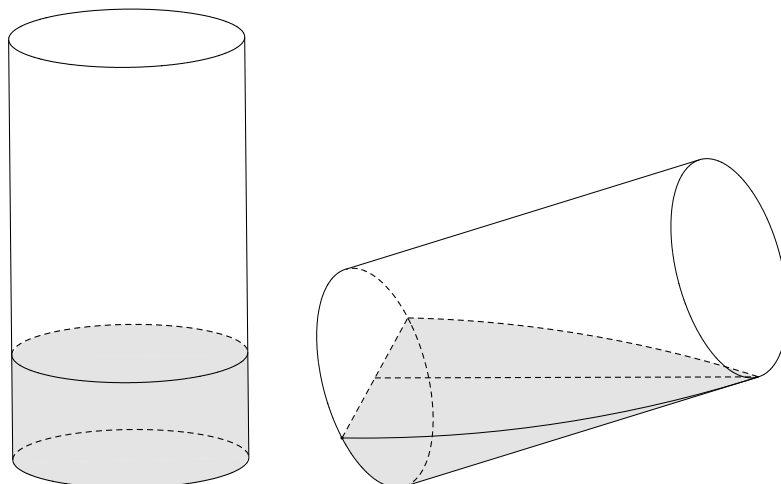


Parabol có phương trình $y = \frac{5}{8}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{5}y$

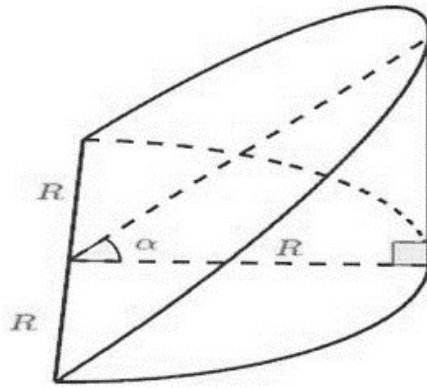
$$V = \pi \int_0^{10} \left(\frac{8}{5}y \right) dy \approx 251,33$$

Thể tích tối đa cốc:

Câu 10. Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6 cm , chiều cao lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



Lời giải



Xét thiết diện cắt cốc thủy tinh vuông góc với đường kính tại vị trí bất kỳ có:

$$S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan \alpha \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \tan \alpha$$

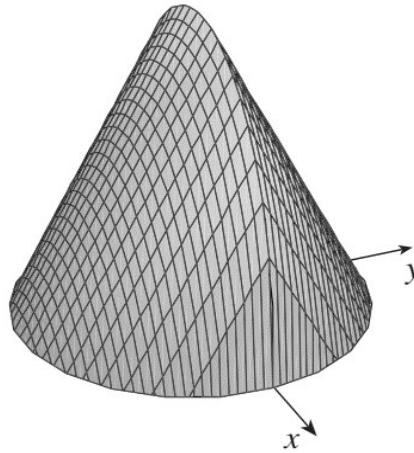
$$V = \frac{1}{2} \tan \alpha \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$$

Thể tích hình cái nôm là:

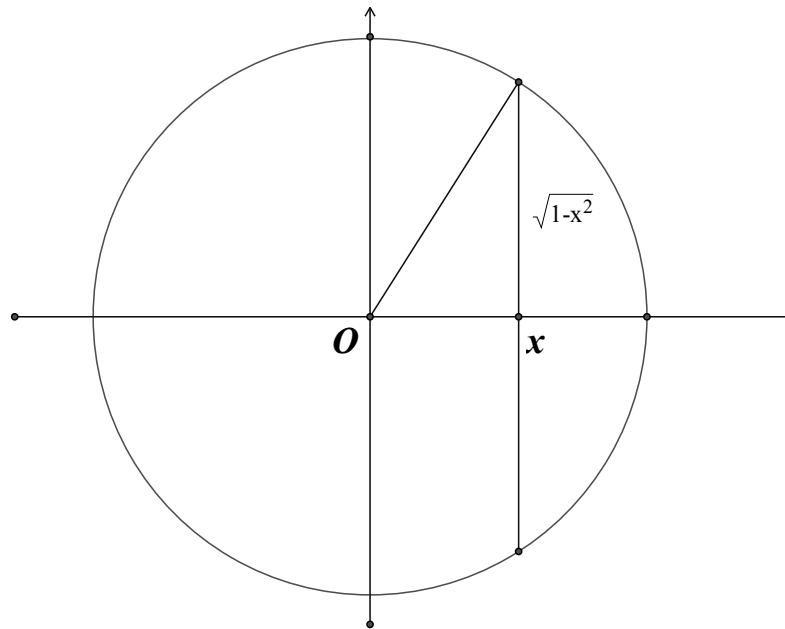
Thể tích khối nước tạo thành khi nguyên cốc có hình dạng cái nôm nên $V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$

$$\Rightarrow V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \cdot \frac{h}{R} = 240 \text{ cm}^3$$

Câu 11. Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) thì được thiết diện là một tam giác đều. Tính thể tích V của vật thể đó.



Lời giải



Do vật thể có đáy là đường tròn và khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox được thiết diện là tam giác đều do đó vật thể đối xứng qua mặt phẳng vuông góc với trục Oy tại điểm O .

Cạnh của tam giác đều thiết diện là: $a = 2\sqrt{1-x^2}$.

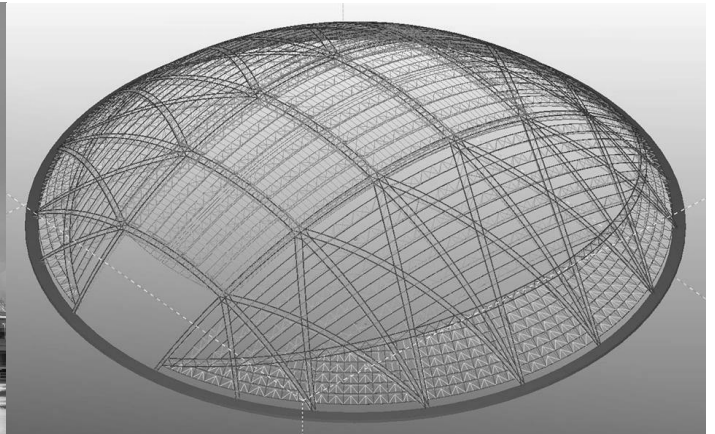
$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = (1-x^2) \sqrt{3}$$

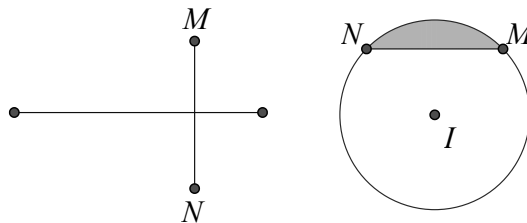
Diện tích tam giác thiết diện là:

$$V = 2 \int_0^1 S dx = 2 \int_0^1 \sqrt{3} (1-x^2) dx = 2\sqrt{3} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

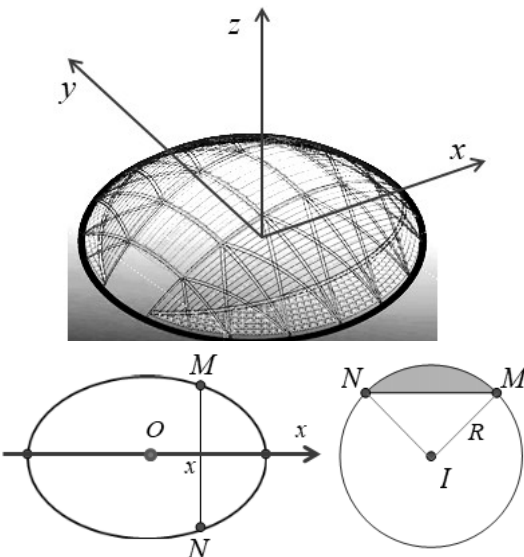
Thể tích khối cần tìm là:

Câu 12. Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90^\circ$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích xấp xỉ bao nhiêu?





Lời giải



Chọn hệ trục như hình vẽ

Ta cần tìm diện tích của $S(x)$ thiết diện.

Gọi $d(O, MN) = x$

$$(E): \frac{x^2}{75^2} + \frac{y^2}{45^2} = 1.$$

$$MN = 2y = 2\sqrt{45^2 \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)} = 90\sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}}$$

Lúc đó

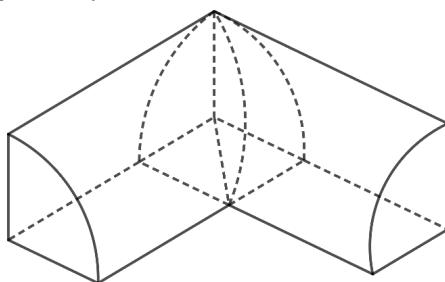
$$\Rightarrow R = \frac{MN}{\sqrt{2}} = \frac{90}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}} \Rightarrow R^2 = \frac{90^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)$$

$$S(x) = \frac{1}{4} \pi R^2 - \frac{1}{2} R^2 = \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2}\right) R^2 = (\pi - 2) \frac{2025}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right).$$

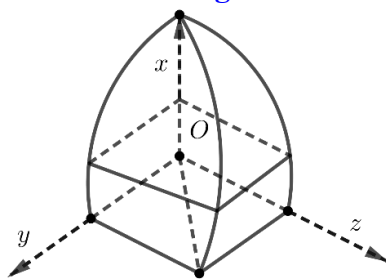
$$V = \int_{-75}^{75} (\pi - 2) \frac{2025}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right) \approx 115586 m^3.$$

Thể tích khoảng không cần tìm là

Câu 13. Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a , hai trục hình trụ vuông góc với nhau như hình vẽ sau. Tính thể tích của khối (H) .



Lời giải



• Đặt hệ toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ, xét mặt cắt song song với mp (Oyz) cắt trục Ox tại x , thiết diện mặt cắt luôn là hình vuông có cạnh $\sqrt{a^2 - x^2}$ ($0 \leq x \leq a$).

• Do đó thiết diện mặt cắt có diện tích: $S(x) = a^2 - x^2$.

• Vậy
$$V_{(H)} = \int_0^a S(x) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2a^3}{3}$$

Câu 14. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

Lời giải

$$\int_0^3 (6at^2 + 2bt) dt = 90 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^3 = 90 \Leftrightarrow 54a + 9b = 90 \quad (1)$$

$$\int_0^6 (6at^2 + 2bt) dt = 504 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^6 = 504 \Leftrightarrow 432a + 36b = 504 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 6 \end{cases}$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ Sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là:

$$V = \int_0^9 (4t^2 + 12t) dt = \left(\frac{4}{3}t^3 + 6t^2 \right) \Big|_0^9 = 1458 (m^3)$$

Câu 15. Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là 280 cm. Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao

mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500} \sqrt[3]{t}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi?

Lời giải

Gọi x là thời điểm bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của bể (x tính bằng giây).

$$\int_0^x \frac{1}{500} \sqrt[3]{t} dt = \frac{3}{4} \cdot 280 \Rightarrow \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} \Big|_0^x = 105000 \Rightarrow x \sqrt[3]{x} = 140000$$

Ta có:

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^4} = 140000 \Rightarrow x \approx 7237,6242 \text{ giây}$$

Vậy sau 7237,6242 giây thì bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi.

PHƯƠNG PHÁP, KỸ NĂNG DẠY HỌC CHỦ ĐỀ NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

I. Phương pháp dạy học

Tích phân là một phần quan trọng trong giải tích, được sử dụng để tính diện tích đường cong, thể tích của hình khối, và nhiều đại lượng khác. Có hai loại tích phân chính: tích phân xác định và tích phân không xác định. Tích phân không xác định cho chúng ta một hàm nguyên thủy, trong khi tích phân xác định tính giá trị của một đại lượng trong một khoảng nhất định.

Tích phân có rất nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau:

- **Vật lý:** Tích phân được sử dụng để tính công, năng lượng và lực. Ví dụ, công thực hiện khi di chuyển một vật từ điểm A đến điểm B có thể được tính bằng tích phân của lực theo quãng đường.
- **Kinh tế:** Trong kinh tế học, tích phân được sử dụng để tính tổng doanh thu, chi phí và lợi nhuận trong một khoảng thời gian.
- **Kỹ thuật:** Trong kỹ thuật, tích phân được dùng để tính toán các đại lượng như điện tích, khối lượng và trọng lượng của các vật thể.
- **Sinh học:** Tích phân có thể được sử dụng để mô hình hóa sự phát triển của quần thể, sự lan truyền của dịch bệnh hoặc sự thay đổi nồng độ của các chất trong một phản ứng hóa học.

Tích phân là một công cụ mạnh mẽ trong toán học, không chỉ giúp chúng ta giải quyết các bài toán lý thuyết mà còn có rất nhiều ứng dụng thiết thực trong cuộc sống hàng ngày. Việc nắm vững kiến thức về tích phân sẽ mở ra nhiều cơ hội trong học tập và công việc tương lai.

Để giúp học sinh hiểu và áp dụng tích phân vào thực tế, có thể sử dụng các phương pháp và hoạt động sau:

1. **Giới thiệu các ứng dụng thực tế:** Nêu rõ các lĩnh vực mà tích phân được sử dụng, như vật lý (tính diện tích dưới đường cong), kinh tế (tính tổng doanh thu), sinh học (tính lượng thuốc trong cơ thể theo thời gian), và kỹ thuật (tính khối lượng và trọng lượng).
2. **Kết hợp với ví dụ cụ thể:** Sử dụng các bài toán thực tế như tính diện tích khu vực hình dạng phức tạp, tính thể tích của vật thể 3D, hoặc tính trung bình của một hàm số.
3. **Sử dụng phần mềm và công cụ hỗ trợ:** Áp dụng các phần mềm như GeoGebra, MATLAB, hoặc Desmos để mô phỏng và hình dung các vấn đề liên quan đến tích phân.
4. **Thực hiện các dự án nhóm:** Khuyến khích học sinh làm các dự án nhóm liên quan đến ứng dụng tích phân, ví dụ như tính toán thể tích của hồ chứa nước, hoặc diện tích của một công viên.
5. **Liên hệ với các môn học khác:** Kết hợp tích phân với các môn học khác như vật lý, sinh học, hoặc kinh tế để minh họa cách tích phân được áp dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau.
6. **Thảo luận và phản biện:** Tổ chức các buổi thảo luận, nơi học sinh có thể trình bày và phân tích các ứng dụng của tích phân mà họ tìm hiểu được.
7. **Thực hành thường xuyên:** Cung cấp nhiều bài tập thực hành có liên quan đến ứng dụng thực tế của tích phân để học sinh có cơ hội làm quen và áp dụng kiến thức.

Việc kết hợp lý thuyết với thực hành và ứng dụng sẽ giúp học sinh thấy được giá trị của tích phân trong cuộc sống và từ đó học tập một cách hiệu quả hơn.

II. Kỹ năng làm bài tập

Để làm bài tập Nguyên hàm - Tích phân, học sinh cần nắm vững một số kỹ năng và phương pháp cơ bản. Dưới đây là các kỹ năng cần thiết cho từng dạng tích phân:

1. Tích phân xác định và không xác định

- **Kỹ năng nhận diện:** Biết phân biệt giữa tích phân xác định (có giới hạn) và tích phân không xác định (không có giới hạn).
- **Kỹ năng tính toán:** Sử dụng các tính chất cơ bản của tích phân như cộng, trừ, chèn cận và các công thức tích phân cơ bản.

2. Tích phân hàm phân thức

- **Kỹ năng phân tích:** Phân tích hàm phân thức thành các phần đơn giản hơn (phân tích thành các phân số nguyên, chia đa thức cho đa thức...).

3. Tích phân số

- **Kỹ năng sử dụng máy tính:** Sử dụng máy tính hoặc phần mềm hỗ trợ để tính các tích phân phức tạp.

Người học cần thực hành nhiều để cải thiện kỹ năng và nắm vững các phương pháp trên.

Tham khảo thêm tài liệu và bài tập để có thể áp dụng tốt các kỹ năng này trong việc giải quyết các bài toán Nguyên hàm - Tích phân.

ĐỀ MINH HỌA TỐT NGHIỆP THPT 2025

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x$ là:

A. $\frac{e^{x+1}}{x+1} + C$

B. $e^x + C$

C. $\frac{e^x}{x} + C$

D. $xe^{x-1} + C$

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 2. Một người điều khiển ô tô đang ở đường dẫn muốn nhập làn vào đường cao tốc. Khi ô tô cách điểm nhập làn 200 m, tốc độ của ô tô là 36 km/h. Hai giây sau đó, ô tô bắt đầu tăng tốc với tốc độ $v(t) = at + b$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Biết rằng ô tô nhập làn cao tốc sau 12 giây và duy trì sự tăng tốc trong 24 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

a) Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là 180 m.

b) Giá trị của b là 10.

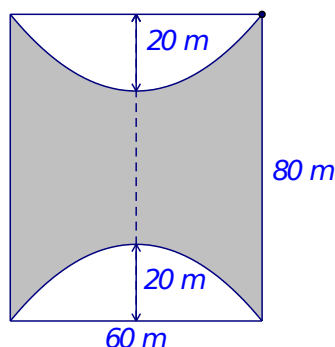
c) Quãng đường $S(t)$ (đơn vị: mét) mà ô tô đi được trong thời gian t giây ($0 \leq t \leq 24$) kể từ khi tăng tốc

được tính theo công thức $S(t) = \int_0^{24} v(t) dt$.

d) Sau 24 giây kể từ khi tăng tốc, tốc độ của ô tô không vượt quá tốc độ tối đa cho phép là 100 km/h.

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 4. Kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình chữ nhật với chiều rộng và chiều dài lần lượt là 60m và 80m. Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là một phần của parabol với đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ đỉnh đó đến trung điểm cạnh tương ứng của hình chữ nhật bằng 20m (xem hình minh họa).



Diện tích của phần sân chơi là bao nhiêu mét vuông?

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x$ là:

A. $\frac{e^{x+1}}{x+1} + C$

B. $e^x + C$

C. $\frac{e^x}{x} + C$

D. $xe^{x-1} + C$

Lời giải

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên đoạn $[a; b]$. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox có thể tích là:

A. $V = \pi \int_a^b |f(x)| dx$

B. $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$

C. $V = \pi^2 \int_a^b [f(x)]^2 dx$

D. $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quanh trục Ox được tính theo công thức:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý (a), (b), (c), (d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 2. Một người điều khiển ô tô đang ở đường dẫn muốn nhập làn vào đường cao tốc. Khi ô tô cách điểm nhập làn 200 m, tốc độ của ô tô là 36 km/h. Hai giây sau đó, ô tô bắt đầu tăng tốc với tốc độ $v(t) = at + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Biết rằng ô tô nhập làn cao tốc sau 12 giây và duy trì sự tăng tốc trong 24 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

a) Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là 180 m.

b) Giá trị của b là 10.

c) Quãng đường $S(t)$ (đơn vị: mét) mà ô tô đi được trong thời gian t giây ($0 \leq t \leq 24$) kể từ khi tăng tốc

được tính theo công thức $S(t) = \int_0^t v(t) dt$.

d) Sau 24 giây kể từ khi tăng tốc, tốc độ của ô tô không vượt quá tốc độ tối đa cho phép là 100 km/h.

Lời giải

a) Tốc độ ban đầu của ô tô là 36 km/h = 10 m/s.

Quãng đường ô tô đi được trong 2 giây đầu tiên là: $S_1 = 10 \cdot 2 = 20(m)$

Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là: $S_2 = 200 - 20 = 180$ m. **Đúng.**

b) Ta có $v(t) = at + b$ (cần phải nói rõ đơn vị m/s)

Thời điểm bắt đầu tăng tốc ta có $t = 0$, $v = 10 \Rightarrow v(0) = b = 10$. **Đúng.**

c) Do $v(t) > 0$ với $0 \leq t \leq 24$, đó đó quãng đường $S(t)$ mà ô tô đi được trong thời gian t giây ($0 \leq t \leq 24$)

kể từ khi tăng tốc được tính theo công thức: $S(t) = \int_0^t v(t) dt$. Còn công thức $S(t) = \int_0^{24} v(t) dt$ là quãng đường ô tô đi được trong 24 giây. **Sai.**

d) Ta có $v(t) = at + 10$.

Biết xe nhập làn sau 12 giây kể từ lúc tăng tốc, nên

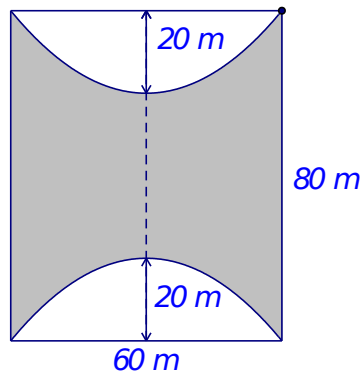
$$180 = \int_0^{12} (at + 10) dt = a \left(\frac{t^2}{2} + 10t \right) \Big|_0^{12} = 192a \Rightarrow a = \frac{15}{16} \Rightarrow v(t) = \frac{15}{16}t + 10(m/s)$$

$$v(24) = 24 \cdot \frac{15}{16} + 10 = 32,5(m/s) = 117(km/h) > 100(km/h)$$

Tốc độ của ô tô sau 24 giây là: **Sai.**

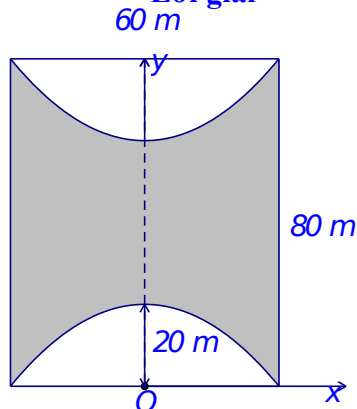
PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 4. Kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình chữ nhật với chiều rộng và chiều dài lần lượt là 60m và 80m. Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là một phần của parabol với đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ đỉnh đó đến trung điểm cạnh tương ứng của hình chữ nhật bằng 20m (xem hình minh họa).



Diện tích của phần sân chơi là bao nhiêu mét vuông?

Lời giải



Diện tích của phần sân chơi bằng diện tích của hình chữ nhật trừ đi diện tích của hai phần trồng hoa.

Diện tích của hình chữ nhật là: $60 \cdot 80 = 4800 \text{ m}^2$.

Diện tích của mỗi phần trồng hoa bằng diện tích của một parabol.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Phương trình parabol bên dưới có dạng: $y = ax^2 + b$ (vì đỉnh parabol thuộc trục tung).

$$\begin{cases} y(0) = 20 \\ y(30) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 20 \\ a \cdot 30^2 + 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{45} \\ b = 20 \end{cases}$$

Ta có

$$y = -\frac{1}{45}x^2 + 20$$

Phương trình Parabol dưới là

$$\int_{-30}^{30} \left(-\frac{1}{45}x^2 + 20 \right) dx = 800 \text{ m}^2$$

Diện tích của mỗi phần trồng hoa bằng:

Diện tích của phần sân chơi là: $4800 - 2 \cdot 800 = 3200 \text{ m}^2$.

Đáp án: 3200.