uigeli.xyz ĐỀ 1	ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 8 *Thời gian: 150 phút*

Câu 1

a) Tìm x, y, z thỏa mãn phương trình sau $9x^2+y^2+2z^2-18x+4z-6y+20=0$.

b) Giải phương trình $x^4-30x^2+31x-30=0$

Câu 2

a) Giải phương trình $\frac{148-x}{25}+\frac{169-x}{23}+\frac{186-x}{21}+\frac{199-x}{19}=10$

b) Chứng minh rằng $A=n^3+6n^2+8n$ chia hết cho 48 với n chẵn.

Câu 3

a) Tìm các giá trị của x để biểu thức:

$P=(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

b) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 3.

Câu 4

Cho hình vuông ABCD, M là một điểm tuỳ ý trên đường chéo BD. Kẻ $ME\perp AB$, $MF\perp AD$.

a) Chứng minh $DE=CF$

b) Chứng minh ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy.

c) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác AEMF lớn nhất.

Câu 5

a) Chứng minh rằng $P=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2}<1$

b) Cho a, b, c là ba số khác 0 thoả mãn $a+b+c=2016$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2016}$

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c tồn tại hai số đối nhau.

ĐÁP ÁN

Câu 1 (2 điểm).

a) Tìm x, y, z thỏa mãn phương trình sau: $9x^2+y^2+2z^2-18x+4z-6y+20=0$.

Ta có:

$9x^2+y^2+2z^2-18x+4z-6y+20=0$

$(3x)^2-2.3x.3+3^2+y^2-2.y.3+3^2+2\left(z^2+2z+1\right)=0$

$(3x-3)^2+(y-3)^2+2(z+1)^2=0$

Vì $(3x-3)^2\ge 0;(y-3)^2\ge 0;2(z+1)^2\ge 0$ với mọi x, y, z nên:

$$\begin{cases}x=1\\y=3\\z=-1\end{cases}$$

b) Giải phương trình: $x^4-30x^2+31x-30=0$

Hướng dẫn

$x^4-30x^2+31x-30=0$

$$x^4-\left(30x^2-30x+30\right)+x=0$$

$$\left(x^4+x\right)-30\left(x^2-x+1\right)=0$$

$$x\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)-30\left(x^2-x+1\right)=0$$

$$\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x-30\right)=0$$

Ta có:

$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ với mọi x nên suy ra:

$$x^2+x-30=0$$

$$\left(x-5\right)\left(x+6\right)=0$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x=-6\end{array}\right.$$

Câu 2.

a) Giải phương trình: $\frac{148-x}{25}+\frac{169-x}{23}+\frac{186-x}{21}+\frac{199-x}{19}=10$

Hướng dẫn

$$\frac{148-x}{25}+\frac{169-x}{23}+\frac{186-x}{21}+\frac{199-x}{19}=10$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{148-x}{25}-1\right)+\left(\frac{169-x}{23}-2\right)+\left(\frac{186-x}{21}-3\right)+\left(\frac{199-x}{19}-4\right)=0$$

$$(123-x)\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{23}+\frac{1}{21}+\frac{1}{19}\right)=0$$

Vì $\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{23}+\frac{1}{21}+\frac{1}{19}\right)>0$ nên 123 – x = 0, suy ra x = 123.

b) Chứng minh rằng: $A=n^3+6n^2+8n$ chia hết cho 48 với n chẵn.

Hướng dẫn

n^3+6n^2+8n chia hết cho 48 với n chẵn

Ta có:

$$A=n^3+6n^2+8n$$

$$A=n\left(n^2+6n+8\right)$$

$$A=n\left(n+2\right)\left(n+4\right)$$

Vì n là số chẵn nên đặt $n=2k\left(k\in\mathbb{N}\right)$, khi đó:

$$A=2k\left(2k+2\right)\left(2k+4\right)$$

$$A=8k\left(k+1\right)\left(k+2\right)$$

$$A=2^3k\left(k+1\right)\left(k+2\right)$$

Vì $k\left(k+1\right)\left(k+2\right)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên:

- Tồn tại một số là bội của 2 nên $k\left(k+1\right)\left(k+2\right)\vdots 2$ nên $A\vdots 16$

- Tồn tại một số là bội của 3 nên $k\left(k+1\right)\left(k+2\right)\vdots 3$

Vậy A chia hết cho 3, 16 mà $(3,16)=1$ nên $A\vdots 3.16=48$.

Câu 3 (2 điểm).

a) Tìm các giá trị của x để biểu thức:

$P=(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

b) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 3.

Hướng dẫn

$$P=(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$$

$$P=\left(x^2+5x-6\right)\left(x^2+5x+6\right)$$

$$P=\left(x^2+5x\right)^2-36$$

Vì $\left(x^2+5x\right)^2\geq 0$ nên $P=\left(x^2+5x\right)^2-36\geq -36$

Do đó Min P = -36 khi $\left(x^2+5x\right)^2=0$.

Từ đó ta tìm được x = 0 hoặc x = -5 thì min P = -36.

b) Gọi hai số phải tìm là a và b, ta có a + b chia hết cho 3.

Ta có:

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

$$a^3+b^3=(a+b)\left[\left(a^2+2ab+b^2\right)-3ab\right]$$

$$a^3+b^3=(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]$$

Vì $a+b$ chia hết cho 3 nên $(a+b)^2-3ab$ chia hết cho 3;

Do vậy $(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]$ chia hết cho 9.

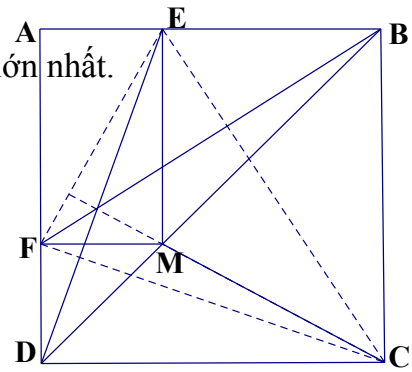
Câu 4 (3 điểm).

Cho hình vuông ABCD, M là một điểm tuỳ ý trên đường chéo BD. Kẻ ME $\perp$ AB, MF $\perp$ AD.

a) Chứng minh: $DE=CF$

b) Chứng minh ba đường thẳng: DE, BF, CM đồng quy.

c) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác AEMF lớn nhất.



Hướng dẫn

a) Chứng minh: $AE=FM=DF$

$\Rightarrow \Delta AED=\Delta DFC \Rightarrow$ đpcm.

b) DE, BF, CM là ba đường cao của $\Delta EFC \Rightarrow$ đpcm.

c) Có Chu vi hình chữ nhật AEMF = 2a không đổi

$\Rightarrow ME+MF=a$ không đổi

$\Rightarrow S_{AEMF}=ME.MF$ lớn nhất $\Leftrightarrow ME=MF$ (AEMF là hình vuông)

$\Rightarrow M$ là trung điểm của BD.

Câu 5. Chứng minh rằng: $P=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^4}+...+\frac{1}{100^2}<1$

Hướng dẫn

$$P=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^4}+...+\frac{1}{100^2}$$

$$=\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{4.4}+...+\frac{1}{100.100}$$

$$< \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{99.100}$$
$$= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100} = 1-\frac{1}{100} = \frac{99}{100} < 1$$

uigeli.xyz **ĐỀ 2**	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **MÔN TOÁN LỚP 8** *Thời gian: 150 phút*

Câu 1

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử $A=(a+1)(a+3)(a+5)(a+7)+15$

b) Cho $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=4\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)$

Chứng minh rằng $a=b=c$.

Câu 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=a^4-2a^3+3a^2-4a+5$.

Câu 3. Tìm số dư trong phép chia của biểu thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2016$ cho đa thức $x^2+10x+21$.

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho $BD=AE$. Xác định vị trí của điểm D, E sao cho:

a) DE có độ dài nhỏ nhất.

b) Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất.

Câu 5

a) Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

b) Chứng minh rằng nếu a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác vuông, với a là độ dài cạnh huyền thì thì các số $x=9a+4b+8c$; $y=4a+b+4c$; $z=8a+4b+7c$ cũng là số đo ba cạnh của một tam giác vuông khác.

Câu 6

a) Tìm các số x, y nguyên dương biết $6x+5y+18=2xy$

b) Tìm các số nguyên x, y biết $5x-3y=2xy-11$

ĐÁP ÁN

Câu 1

a) $A=(a+1)(a+3)(a+5)(a+7)+15$

$A=(a+1)(a+7)(a+3)(a+5)+15$

$A=\left(a^2+8a+7\right)\left(a^2+8a+15\right)+15$

Đặt $a^2+8a+7=t$, ta có:

$A=t(t+8)+15$

$A=t^2+8t+15$

$A=(t+3)(t+5)$

Do đó

$A=\left(a^2+8a+7+3\right)\left(a^2+8a+7+5\right)$

$A=\left(a^2+8a+10\right)\left(a^2+8a+12\right)$

$A=\left(a^2+8a+10\right)(a+2)(a+6)$.

b) Ta có:

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=4(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

$a^2+b^2-2ab+b^2+c^2-2bc+c^2+a^2+2ac=4a^2+4b^2+4c^2-4ab-4ac-4bc$

$(a^2+b^2-2ac)+(b^2+c^2-2bc)+(a^2+c^2-2ac)=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$

Vì $(a-b)^2\geq 0$; $(b-c)^2\geq 0$; $(a-c)^2\geq 0$; với mọi a, b, c

nên (*) xảy ra khi và chỉ khi $(a-b)^2=0$; $(b-c)^2=0$ và $(a-c)^2=0$

Vậy $a=b=c$.

Câu 2

Ta có:

$A=a^4-2a^3+3a^2-4a+5$

$A=a^4+2a^2-2a^3-4a+a^2+2+3$

$A=a^2(a^2+2)-2a(a^2+2)+(a^2+2)+3$

$A=(a^2+2)(a^2-2a+1)+3$

$A=(a^2+2)(a-1)^2+3$

Vì $(a^2+2)(a-1)^2\geq 0$ với mọi a nên $A\geq 3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A=3\Leftrightarrow a-1=0\Leftrightarrow a=1$.

Câu 3 (2 điểm).

Tìm số dư trong phép chia của biểu thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2016$ cho đa thức $x^2+10x+21$.

Hướng dẫn

$P(x)=(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2016=(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+2016$

Đặt $t=x^2+10x+21\ (t\neq -3;\ t\neq -7)$, biểu thức P(x) được viết lại:

$P(x)=(t-5)(t+3)+2016=t^2-2t+2001$

Do đó $t^2-2t+2001$ cho ta số dư là 2001.

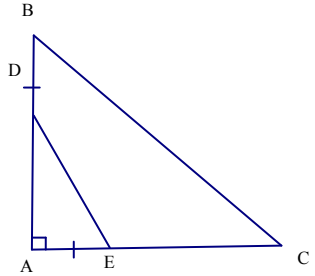
Câu 4 (3 điểm).

Cho tam giác ABC vuông cân tại A, các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho BD = AE. Xác định vị trí của điểm D, E sao cho:

a) DE có độ dài nhỏ nhất.

b) Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn



a) Đặt AB = AC = a, DB = AE = x ($0<x<a$)

Ta có:

$AD^2 + AE^2 = DE^2$

$(a-x)^2 + x^2 = DE^2$

$\Rightarrow DE^2 = a^2 - 2ax + x^2 + x^2$

$\Rightarrow DE^2 = a^2 - 2ax + 2x^2$

$\Rightarrow DE^2 = 2\left(x^2 - 2.x.\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4}\right) + \frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow DE^2 = 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow DE^2 \geq \frac{a^2}{2}$

Vậy DE nhỏ nhất bằng $\frac{a^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$

Khi đó D, E lần lượt là trung điểm của AB, AC.

b) Diện tích của tam giác ABC là: $\frac{1}{2}a^2$

Diện tích tam giác ADE là: $\frac{1}{2}(a-x).x$

Khi đó diện tích của tứ giác BDEC là:

$\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}(a-x)x$

$= \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}x^2$

$= \frac{1}{2}\left(x^2 - 2.x.\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{8} \geq \frac{3a^2}{8}$

Vậy diện tích của tứ giác BDEC nhỏ nhất bằng $\frac{3a^2}{8} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$

Khi đó D, E lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Câu 5

a) Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

Hướng dẫn

a) Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y, z trong đó cạnh huyền là z.

Theo đề bài ta có:

$xy = 2(x+y+z)$ (1) và $x^2 + y^2 = z^2$

Từ $x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow z^2 = (x+y)^2 - 2xy$ thay vào (1) ta có:

$z^2 = (x+y)^2 - 4(x+y+z)$

$z^2 + 4z = (x+y)^2 - 4(x+y)$

$z^2 + 4z + 4 = (x+y)^2 - 4(x+y) + 4$

$(z+2)^2 = (x+y-2)^2$

$\Rightarrow z + 2 = x + y - 2$

$\Rightarrow z = x + y - 4$ thay vào (1) ta được:

$xy = 2(x + y + x + y - 4)$

$xy = 4x + 4y - 8$

$xy - 4x - 4y = -8$

$x(y-4) - 4(y-4) - 16 = -8$

$(x-4)(y-4) = 8$

$(x-4)(y-4) = 1.8 = 2.4$

Từ đó tìm được các giá trị của x, y, z là:
(x = 5, y = 12, z = 13); (x = 12, y = 5, z=13)
(x = 6, y = 8, z = 10); (x = 8, y = 6, z = 10)

b) Theo đề bài ta có $a^2 = b^2 + c^2$

Ta có: $x = 9a + 4b + 8c \Rightarrow x^2 = 81a^2 + 16b^2 + 64c^2 + 72ab + 144ac + 64bc$ mà $a^2 = b^2 + c^2$

$\Rightarrow x^2 = 81(b^2 + c^2) + 16b^2 + 64c^2 + 72ab + 144ac + 64bc$

$\Leftrightarrow x^2 = 97b^2 + 145c^2 + 72ab + 144ac + 64bc$ (1)

$y = 4a + b + 4c \Rightarrow y^2 = 16a^2 + b^2 + 16c^2 + 8ab + 32ac + 8bc$ mà $a^2 = b^2 + c^2$

$\Rightarrow y^2 = 16(b^2 + c^2) + b^2 + 16c^2 + 8ab + 32ac + 8bc$

$\Leftrightarrow y^2 = 17b^2 + 32c^2 + 8ab + 32ac + 8bc$ (2)

$z = 8a + 4b + 7c \Rightarrow z^2 = 64a^2 + 16b^2 + 49c^2 + 64ab + 112ac + 56bc$ mà $a^2 = b^2 + c^2$

$\Rightarrow z^2 = 64(b^2 + c^2) + 16b^2 + 49c^2 + 64ab + 112ac + 56bc$

$\Leftrightarrow z^2 = 80b^2 + 113c^2 + 64ab + 112ac + 56bc$ (3)

Từ (2) và (3) ta có $y^2 + z^2 = 97b^2 + 145c^2 + 72ab + 144ac + 64bc$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $x^2 = y^2 + z^2$

Vậy x, y, z cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông

uigeli.xyz **ĐỀ 3**	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **MÔN TOÁN LỚP 8** *Thời gian: 150 phút*

Câu 1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

a) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

b) $x^4 + 2014x^2 + 2013x + 2014$

Câu 2

a) Tìm x, biết: $\dfrac{(2013-x)^2 + (2013-x)(x-2014) + (x-2014)^2}{(2013-x)^2 - (2013-x)(x-2014) + (x-2014)^2} = \dfrac{19}{49}$

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có $B = a^5 - a$ chia hết cho 30.

Câu 3

Cho tam giác ABC vuông tại A, D là điểm di động trên cạnh BC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D lên AB, AC.

a) Xác định vị trí của điểm D để tứ giác AEDF là hình vuông.

b) Xác định vị trí của điểm D sao cho 3AD + 4EF đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4

Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị ta vẫn được một số chính phương.

Câu 5

Cho a, b dương và $a^{2012}+b^{2012}=a^{2013}+b^{2013}=a^{2014}+b^{2014}$. Tính $a^{2015}+b^{2015}$

ĐÁP ÁN

Câu 1 (2 điểm). Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

b) $x^4+2014x^2+2013x+2014$

Hướng dẫn

a) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

$=\left[(x+y+z)^3-x^3\right]-y^3-z^3$

$=(y+z)\left[(x+y+z)^2-2(x+y+z)x+x^2\right]-(y+z)(y^2-yz+z^2)$

$=(y+z)(3x^2+3xy+3yz+3xz)$

$=3(y+z)\left[x(x+y)+z(x+y)\right]$

$=3(y+z)(x+y)(x+z)$

b) $x^4+2014x^2+2013x+2014$

$=x^4-x+2014x^2+2014x+2014$

$=x(x^3-1)+2014(x^2+x+1)$

$=x(x-1)(x^2+x+1)+2014(x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)(x^2-x+2014)$

Câu 2 (2 điểm).

a) Tìm x, biết: $\dfrac{(2013-x)^2+(2013-x)(x-2014)+(x-2014)^2}{(2013-x)^2-(2013-x)(x-2014)+(x-2014)^2}=\dfrac{19}{49}$.

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có: $B=a^5-a$ chia hết cho 30.

Hướng dẫn

a) ĐKXĐ: $x\neq 2013; x\neq 2014$

Đặt $x-2014=a(a\neq 0)$

Ta có:

$\dfrac{(a+1)^2-(a+1)a+a^2}{(a+1)^2+(a+1)a+a^2}=\dfrac{19}{49}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2+a+1}{3a^2+3a+1}=\dfrac{19}{49}$

$\Leftrightarrow 49a^2+49a+49=57a^2+57a+19$

$\Leftrightarrow 8a^2+8a-30=0$

$\Leftrightarrow (2a-3)(2a+5)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{3}{2} \\ a=\dfrac{-5}{2} \end{array}\right.$

$\Rightarrow x=\dfrac{4031}{2}$ hoặc $x=\dfrac{4023}{2}$.

b) Ta có:

$B=a^5-a$

$B=a\left(a^4-1\right)$

$B=a\left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right)$

$B=a\left(a^2-1\right)\left(a^2-4+5\right)$

$B=a\left(a^2-1\right)\left(a^2-4\right)+5a\left(a^2-1\right)$

$B=(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)+5a\left(a^2-1\right)$

Vì $(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$ là tích của 5 số tự nhiên liên tiếp nên tồn tại một số là bội của 5, do đó $(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)\vdots 5$ (1)

$5a\left(a^2-1\right)\vdots 5$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $B\vdots 5$

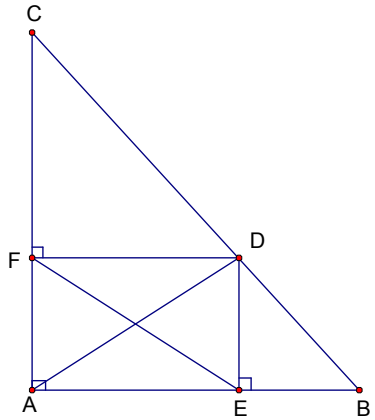
Câu 3 (2 điểm).

Cho tam giác ABC vuông tại A, D là điểm di động trên cạnh BC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D lên AB, AC.

a) Xác định vị trí của điểm D để tứ giác AEDF là hình vuông.

b) Xác định vị trí của điểm D sao cho 3AD + 4EF đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn



a) Tứ giác AEDF là hình chữ nhật (vì $\hat{E}=\hat{A}=\hat{F}=90^\circ$)

Để tứ giác AEDF là hình vuông thì AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

b) Do tứ giác AEDF là hình chữ nhật nên AD = EF

Suy ra 3AD + 4EF = 7AD

3AD + 4EF nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AD nhỏ nhất, AD nhỏ nhất khi D là hình chiếu của A trên BC.

Câu 4 (2 điểm).

Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn , thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị , ta vẫn được một số chính phương.

Hướng dẫn

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$ với $a,b,c,d \in \mathbb{N}, 0 \le a,b,c,d \le 9, a \ne 0$

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{(a+1)(b+3)(c+5)(d+3)} = m^2 \end{cases}$$

Suy ra:

$$\begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{abcd} + 1353 = m^2 \end{cases}$$ với $k,m \in \mathbb{N}, 31 < k < m < 100$

Do đó $m^2 - k^2 = 1353$

$(m-k)(m+k) = 123.11 = 41.33$

Vì $k,m \in \mathbb{N}$ nên $m+k > m-k$.

Do đó:

$$\begin{cases} m+k = 123 \\ m-k = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 67 \\ k = 56 \end{cases}$$ hoặc $$\begin{cases} m+k = 41 \\ m-k = 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 37 \\ k = 4 \end{cases}$$

Kết luận đúng $\overline{abcd} = 3136$

Câu 5 (2 điểm)

Cho a, b dương và $a^{2012} + b^{2012} = a^{2013} + b^{2013} = a^{2014} + b^{2014}$.

Tính $a^{2015} + b^{2015}$.

Hướng dẫn

Ta có:

$a^{2012} + b^{2012} = a^{2013} + b^{2013} = a^{2014} + b^{2014}$

$(a+b)(a^{2012} + b^{2012}) - (a^{2011} + b^{2011}).ab = a^{2014} + b^{2014}$

$\Rightarrow a + b - ab = 1$ (vì $a^{2012} + b^{2012} = a^{2013} + b^{2013} = a^{2014} + b^{2014}$)

$\Rightarrow (a-1)(b-1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a = 1 \\ b = 1 \end{bmatrix}$$

Với a = 1 thì $b^{2012} = b^{2013} \Rightarrow b = 1$ hoặc $b = 0$ (loại)

Với b = 1 thì $a^{2012} = a^{2013} \Rightarrow a = 1$ hoặc $a = 0$ (loại)

Vậy a = 1, b = 1

Do đó $a^{2015} + b^{2015} = 2$.

uigeli.xyz **ĐỀ 4**	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **MÔN TOÁN LỚP 8** *Thời gian: 150 phút*

Câu 1

a) Tìm $x; y \in Z$ thoả mãn $5x^2 - 4xy + y^2 = 169$.

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì biểu thức: $A=\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ có giá trị là một số nguyên.

Câu 2

a) Cho hai số $a>b>0$. So sánh hai số $x=\frac{1+a}{1+a+a^2}$ và $y=\frac{1+b}{1+b+b^2}$.

b) Tìm x, biết $\frac{x+1}{1000}+\frac{x+2}{999}+\frac{x+3}{998}+\frac{x+4}{997}+\frac{x+5}{996}+\frac{x+6}{995}+6=0$.

Câu 3

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC của hình vuông ABCD. Các đường thẳng DN và CM cắt nhau tại I. Chứng minh tam giác AID là tam giác cân.

Câu 4

Tìm cặp số nguyên $(x;y;z)$ thỏa mãn phương trình:

$x^2+y^2+z^2+4064497=2(15x+4y+2014z)$

Câu 5. Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên sao cho $n+1$ và $2n+1$ đều là các số chính phương thì n là bội số của 24.

ĐÁP ÁN

Câu 1 (2 điểm).

a) Tìm $x;y\in Z$ thoả mãn: $5x^2-4xy+y^2=169$.

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì biểu thức: $A=\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ có giá trị là một số nguyên.

Hướng dẫn

a) Ta có:

$5x^2-4xy+y^2=169$

$\Leftrightarrow 4x^2-4xy+y^2+x^2=169$

$\Leftrightarrow (2x-y)^2+x^2=169$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(2x-y)^2+x^2=144+25(I)\\(2x-y)^2+x^2=169+0(II)\end{cases}$

Từ (I) ta có:

$\begin{cases}(2x-y)^2=12^2\\x^2=5^2\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x=\pm 5\\y=\mp 2\end{cases};\begin{cases}x=\pm 5\\y=\mp 22\end{cases}$

$\begin{cases}(2x-y)^2=5^2\\x^2=12^2\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x=\pm 12\\y=\mp 19\end{cases};\begin{cases}x=\pm 12\\y=\mp 29\end{cases}$

Từ (II) ta có:

$$\begin{cases}(2x-y)^2=13^2\\ x^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\pm 13\end{cases}$$

$$\begin{cases}(2x-y)^2=0\\ x^2=13^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm 13\\ y=\pm 26\end{cases}$$

Vậy $(x,y)\in\begin{Bmatrix}(5;-2);(5;-22);(-5;2);(-5;22);(12;-19);(12;-29)\\ (-12;19);(-12;29);(0;13);(0;-13);(13;26);(-13;-26)\end{Bmatrix}$

b) Ta có: $A=\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$

$$A=\frac{2n+3n^2+n^3}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Vì $n(n+1)(n+2)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên $n(n+1)(n+2)\vdots 3$ và $n(n+1)(n+2)\vdots 2$ mà $(2,3)=1$. Do đó $n(n+1)(n+2)\vdots 6$.

Hay A là một số nguyên.

Câu 2 (2 điểm).

a) Cho hai số $a>b>0$. So sánh hai số $x=\frac{1+a}{1+a+a^2}$ và $y=\frac{1+b}{1+b+b^2}$.

b) Tìm x, biết: $\frac{x+1}{1000}+\frac{x+2}{999}+\frac{x+3}{998}+\frac{x+4}{997}+\frac{x+5}{996}+\frac{x+6}{995}+6=0$

Hướng dẫn

Vì $x,y>0$, ta có:

$$x=\frac{1}{\frac{1+a+a^2}{1+a}}=\frac{1}{1+\frac{a^2}{1+a}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1+a}{a^2}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}}}<\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b}}}=y$$

Vì $a>b>0$ nên $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}$ và $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

Vậy $x<y$.

b) Ta có:

$$\frac{x+1}{1000}+1+\frac{x+2}{999}+1+\frac{x+3}{998}+1+\frac{x+4}{997}+1+\frac{x+5}{996}+1+\frac{x+6}{995}+1=0$$

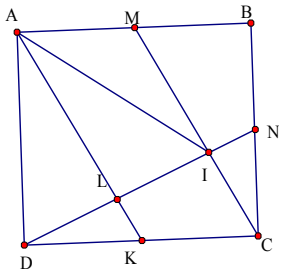
$$\frac{x+1001}{1000}+\frac{x+1001}{999}+\frac{x+1001}{998}+\frac{x+1001}{997}+\frac{x+1001}{996}+\frac{x+1001}{995}=0$$

$$(x+1001)\left(\frac{1}{1000}+\frac{1}{999}+\frac{1}{998}+\frac{1}{997}+\frac{1}{996}+\frac{1}{995}\right)=0$$

Vì $\frac{1}{1000}+\frac{1}{999}+\frac{1}{998}+\frac{1}{997}+\frac{1}{996}+\frac{1}{995}\neq 0$ nên $x=-1001$.

Câu 3.

Câu 3



$\Delta DCN = \Delta CBM \Rightarrow \widehat{NDC} = \widehat{CBN}$

Mà $\widehat{MCB} + \widehat{MCD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{NDC} + \widehat{MCD} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{DIC} = 90^0 \Rightarrow DN \perp MC$

goi K là trung điểm của DC nên AM=KC, $AM \parallel KC$

Nên AMCK là hình bình hành

$\Rightarrow AK \parallel MC$

Mà DN ⊥ MC $\Rightarrow$ AK ⊥ DN

Hay $AK \perp DI$ (1)

Goi L là giao điiểm của DN và AK. K là trung điểm của DC và $AK \parallel MC$ suy ra AK đi qua trung điểm của DI nên L là trung điểm của DI (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác AID cân tại A

Câu 4.

Đặt $x-1=y \Rightarrow x=y+1$. Ta có:

$$A=\frac{3(y+1)^2-8(y+1)+6}{(y+1)^2-2(y+1)+1}=\frac{3y^2-2y+1}{y^2}$$

$$A=3-\frac{2}{y}+\frac{1}{y^2}$$

Đặt $\frac{1}{y}=z \Rightarrow A=3-2z+z^2$

$A=z^2-2z+1+2$

$A=(z-1)^2+2\geq 2$

Vậy min $A=2 \Leftrightarrow z=1 \Leftrightarrow y=1 \Leftrightarrow x=2$.

uigeli.xyz **ĐỀ 5**	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **MÔN TOÁN LỚP 8** *Thời gian: 150 phút*

Câu 1

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử $x^2-2xy+y^2+4x-4y-5$

b) Chứng minh $\forall n \in N^*$ thì n^3+n+2 là hợp số.

c) Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Câu 2

a) Giải phương trình $\frac{x-1}{2016}+\frac{x-2}{2015}+\frac{x-3}{2014}+...+\frac{x-2016}{1}=2016$

b) Cho $a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=1$. Tính $S=a^2+b^{2014}+c^{2015}$

Câu 3

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=2x^2+3y^2+4xy-8x-2y+18$

b) Cho a; b; c là ba cạnh của tam giác.

Chứng minh $\frac{ab}{a+b-c}+\frac{bc}{-a+b+c}+\frac{ac}{a-b+c}\geq a+b+c$

Câu 4. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Gọi E; F; G; H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC; CD; DA. M là giao điểm của CE và DF.

a) Chứng minh: Tứ giác EFGH là hình vuông.

b) Chứng minh $DF\perp CE$ và ΔMAD cân.

c) Tính diện tích ΔMDC theo a.

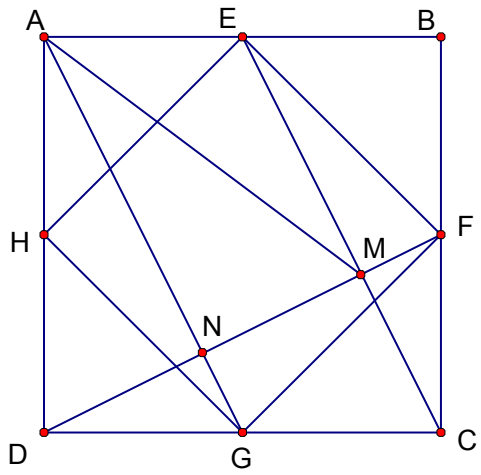
Bài tập tương tự câu 1b)

1. Tìm số tự nhiên n để n^4+4 là số nguyên tố.

2. Cho biểu thức $(x^2-8)^2+36$. Tìm số tự nhiên n để biểu thức trên là số nguyên tố

ĐÁP ÁN

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1 3 điểm	a. 1 điểm	= (x - y)^2 +4(x - y) - 5 = (x - y)^2 + 4(x - y)^2 + 4 -9 = (x - y + 2)^2 - 3^2 = (x - y + 5)(x - y -1)	0.5 0,5
	b. 1 điểm	Ta có: n^3 + n + 2 = n^3 + 1+ n+1= (n + 1)(n^2 - n + 1) + (n + 1) =(n+1)(n^2 - n + 2) Do $\forall n\in N^*$ nên n + 1 > 1 và n^2 - n + 2 >1 Vậy n^3 + n + 2 là hợp số	0.25 0,25 0.5
	c. 1 điểm	Gọi hai số lần lượt là a^2 và (a+1)^2 Theo bài ra ta có: a^2 + (a + 1)^2 + a^2(a + 1)^2 = a^4 +2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 = (a^4 + 2a^3 + a^2) + 2(a^2 + a) + 1 = (a^2 + a)^2 + 2(a + 1) + 1 = (a^2 + a + 1)^2 là một số chính phương lẻ vì a^2 + a = a(a + 1) là số chẵn $\Rightarrow$ a^2 + a + 1 là số lẻ	0.25 0.25 0.25 0.25
Câu 2 2 điểm	a. 1.5 điểm	Phương trình đã cho tương đương với: $\frac{x-1}{2012}-1+\frac{x-2}{2011}-1+\frac{x-3}{2010}-1+...+\frac{x-2012}{1}-1+2012=2012\Leftrightarrow$ $\frac{x-2013}{2012}+\frac{x-2013}{2011}+\frac{x-2013}{2010}+...+\frac{x-2013}{1}=0\Leftrightarrow$ $(x-2013)(\frac{1}{2012}+\frac{1}{2011}+\frac{1}{2010}+...+\frac{1}{1})=0\Leftrightarrow$ x = 2013	0.5 0. 5 0. 5
	b. 0.5 điểm	a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1 $\Rightarrow$ a; b; c $\in[-1;1]$ $\Rightarrow$ a^3 + b^3 + c^3 - (a^2 + b^2 + c^2) = a^2(a - 1) + b^2(b - 1) + c^2(c - 1) $\leq$ 0 $\Rightarrow$ a^3 + b^3 + c^3 $\leq$ 1 $\Rightarrow$ a;b;c nhận hai giá trị là 0 hoặc 1 $\Rightarrow$ b^{2012} = b^2; c^{2013} = c^2; $\Rightarrow$ S = a^2 + b^{2012} + c^{2013} = 1	0.25 0.25
Câu 3 1.5	a. 1 điể	Ta có: A = 2(x^2 + 2xy + y^2) + y^2 -8x -2y + 18 A = 2[(x+y)^2 - 4(x + y) +4] + (y^2 + 6y +9) + 1	0.25 0.25

điểm	m	$A = 2(x + y - 2)^2 + (y+3)^2 + 1 \geq 1$ Vậy minA = 1 khi x = 5; y = -3	0.25 0.25
	b. 0.5 điểm	vì a; b; c là ba cạnh của tam giác nên: a + b - c > 0; - a + b + c > 0; a - b + c > 0. Đặt x = - a + b + c >0; y = a - b + c >0; z = a + b - c >0 ta có: x + y + z = a + b + c; $a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$ $\frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ac}{a-b+c} = \frac{(y+z)(x+z)}{4z} + \frac{(x+z)(x+y)}{4x} + \frac{(x+y)(y+z)}{4y}$ $\frac{1}{4}(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + 3x + 3y + 3z) = \frac{1}{4}\left[3(x+y+z) + \frac{1}{2}(2\frac{xy}{z} + 2\frac{yz}{x} + 2\frac{xz}{y})\right]$ $= \frac{1}{4}\left[3(x+y+z) + \frac{y}{2}(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}) + \frac{x}{2}(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}) + \frac{z}{2}(\frac{x}{y} + \frac{y}{x})\right]$ $\geq \frac{1}{4}\left[3(x+y+z) + x + y + z\right] = x + y + z$ Mà x + y + z = a + b + c nên suy ra điều phải chứng minh	0.25 0.25
Câu 4 3.5 điểm	Hình vẽ 0. 5 đ		0.5
	a. 1.25 điểm	Chứng minh: EFGH là hình thoi Chứng minh có 1 góc vuông. Kết luận Tứ giác EFGH là Hình vuông	0. 5 0. 5 0.25
	b. 1 điểm	$\Delta BEC = \Delta CFD(c.g.c) \Rightarrow \hat{ECB} = \hat{FDC}$ mà ΔCDF vuông tại C $\Rightarrow \hat{CDF} + \hat{DFC} = 90^0 \Rightarrow \hat{DFC} + \hat{ECB} = 90^0 \Rightarrow \Delta CMF$ vuông tại M Hay CE $\perp$ DF. Gọi N là giao điểm của AG và DF. Chứng minh tương tự: AG $\perp$ DF $\Rightarrow$ GN//CM mà G là trung điểm DC nên $\Rightarrow$ N là trung điểm DM. Trong Δ MAD có AN vừa là đường cao vừa là trung tuyến $\Rightarrow$ Δ MAD cân tại A.	0.25 0.25 0.25 0.25
	c. 0.75 điểm	$\Delta CMD \sim \Delta FCD(g.g) \Rightarrow \frac{CD}{FD} = \frac{CM}{FC}$ Do đó : $\frac{S_{\Delta CMD}}{S_{\Delta FCD}} = \left(\frac{CD}{FD}\right)^2 \Rightarrow S_{\Delta CMD} = \left(\frac{CD}{FD}\right)^2 . S_{\Delta FCD}$ Mà : $S_{\Delta FCD} = \frac{1}{2}CF.CD = \frac{1}{4}CD^2$.	0.25 0.25 0.25

		Vậy : $S_{\triangle CMD}=\frac{CD^2}{FD^2}.\frac{1}{4}CD^2$. Trong $\triangle DCF$ theo Pitago ta có : $DF^2=CD^2+CF^2=CD^2+\left(\frac{1}{2}BC^2\right)=CD^2+\frac{1}{4}CD^2=\frac{5}{4}.CD^2$. $S_{\triangle MCD}=\frac{CD^2}{\frac{5}{4}CD^2}.\frac{1}{4}CD^2=\frac{1}{5}CD^2=\frac{1}{5}a^2$ Do đó :	

Bài tập tương tự câu 1b)

1. Tìm số tự nhiên n để n^4+4 là số nguyên tố.

2. Cho biểu thức $\left(x^2-8\right)^2+36$. Tìm số tự nhiên n để biểu thức trên là số nguyên tố

1. Ta có

$$n^4+4=\left[\left(n^2\right)^2+4n^2+4\right]-4n^2=\left(n^2+2\right)^2-\left(2n\right)^2=\left(n^2+2n+2\right)\left(n^2-2n+2\right)$$

Vì $n^2+2n+2=\left(n+1\right)^2+1>1$ với mọi số tự nhiên n, do đó để n^4+4 là số nguyên tố thì $n^2-2n+2=1\Leftrightarrow n=1$

2. Ta có

$$\left(x^2-8\right)^2+36=\left(x^2\right)^2-16x^2+64+36=\left(x^2\right)^2+20x^2+100-36x^2=\left[\left(x^2+10\right)\right]^2-\left(6x\right)^2$$

Lập luận tương tự như trên

uigeli.xyz **ĐỀ 6**	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **MÔN TOÁN LỚP 8** *Thời gian: 150 phút*

Câu 1. Giải phương trình: $\frac{1}{x^2+9x+20}+\frac{1}{x^2+11x+30}+\frac{1}{x^2+13x+42}=\frac{1}{18}$

Câu 2. Cho $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ và $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$. Chứng minh rằng : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Câu 3. Cho a, b, c khác nhau đôi một và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Rút gọn biểu thức:

$$M=\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}$$

Câu 4. Cho a, b, c là 3 số khác 0 thoả mãn $a+b+c=2014$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2014}$.
Chứng minh rằng trong 3 số a, b, c tồn tại hai số đối nhau.

Câu 5. Tìm GTNN của $A=\frac{3x^2-8x+6}{x^2-2x+1}$

Bài tập tương tự

Bài 1. Cho a, b, c khác nhau đôi một và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Rút gọn các biểu thức:

a, $N=\dfrac{bc}{a^2+2bc}+\dfrac{ca}{b^2+2ac}+\dfrac{ab}{c^2+2ab}$

b, $P=\dfrac{a^2}{a^2+2bc}+\dfrac{b^2}{b^2+2ac}+\dfrac{c^2}{c^2+2ab}$

Bài 2. Tìm $x;y\in Z$ thoả mãn:

a) $x^2+y^2-x-y=8$

b) $x^2+4y^2=115-2x$

Bài 3.

a) *Tìm GTNN của* $A=\dfrac{x}{(x+10)^2}$ b) *Tìm GTNN của* $A=\dfrac{x}{(x+100)^2}$

c) *Tìm GTNN của* $A=\dfrac{x^2-4x+1}{x^2}$ d) *Tìm GTNN của* $A=\dfrac{x}{(x+2004)^2}$

Bài 4.

a) Tìm GTNN của $A=\dfrac{1996x+1497}{x^2+1}$

b) Tìm GTNN của $B=\dfrac{2010x+2680}{x^2+1}$

HƯỚNG DẪN

Câu 1. Giải phương trình: $\dfrac{1}{x^2+9x+20}+\dfrac{1}{x^2+11x+30}+\dfrac{1}{x^2+13x+42}=\dfrac{1}{18}$

$x^2+9x+20=(x+4)(x+5)$

$x^2+11x+30=(x+5)(x+6)$

$x^2+13x+42=(x+6)(x+7)$

ĐKXĐ: $x\neq-4;x\neq-5;x\neq-6;x\neq-7$

Giải phương trình:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+7)}=\frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$18(x+7)-18(x+4)=(x+7)(x+4)$$

$$(x+13)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-13\\x=2\end{array}\right.$$

Câu 2. Cho $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ và $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$. Chứng minh rằng : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Hướng dẫn

Từ $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0 \Leftrightarrow \frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}=0$

$\Leftrightarrow ayz+bxz+cxy=0$

Ta có:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow (\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c})^2=1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2(\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc})=1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\frac{cxy+bxz+ayz}{abc}=1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Câu 3. Cho a, b, c khác nhau đôi một và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Rút gọn biểu thức:

$$M=\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}$$

Hướng dẫn

Theo đề bài ta có:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

$\Leftrightarrow \frac{bc+ac+ab}{abc}=0$

$\Rightarrow ab+ac+bc=0$

$\Rightarrow bc=-ab-ac$

Ta có:

$a^2+2bc=a^2+bc+bc$

$=a^2+bc-ac-ab$

$=a(a-c)-b(a-c)$

$=(a-c)(a-b)$

Tương tự ta có:

$b^2+2ac=(b-a)(b-c)$

$c^2+2ab=(c-a)(c-b)$

Vậy $M=\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}$

$$M=\frac{1}{(a-c)(a-b)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$M=\frac{1}{(a-c)(a-b)}-\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(a-c)(b-c)}$$

$$M=\frac{b-c-a+c+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$M=\frac{0}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0$$

Câu 4. Cho a, b, c là 3 số khác 0 thoả mãn $a+b+c=2014$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2014}$. Chứng minh rằng trong 3 số a, b, c tồn tại hai số đối nhau.

Hướng dẫn

Theo đề bài ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2014}$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{2014}$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c} \text{ (vì } a+b+c=2014)$$

$$\Leftrightarrow (ab+ac+bc)(a+b+c)=abc$$

$$\Leftrightarrow a^2b+ab^2+abc+a^2c+abc+ac^2+abc+b^2c+bc^2=abc$$

$$\Leftrightarrow a^2b+ab^2+abc+a^2c+abc+ac^2+b^2c+bc^2=0$$

$$\Leftrightarrow a^2(b+c)+ab(b+c)+ac(b+c)+bc(b+c)=0$$

$$\Leftrightarrow (b+c)(a^2+ab+ac+bc)=0$$

$$\Leftrightarrow (b+c)[a(a+c)+b(a+c)]=0$$

$$(b+c)(a+c)(a+b)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.$$

Vậy trong 3 số a, b, c tồn tại hai số đối nhau.

Câu 5. Tìm GTNN của $A=\frac{3x^2-8x+6}{x^2-2x+1}$

Hướng dẫn

Đặt $x-1=y\Rightarrow x=y+1$. Ta có:

$$A=\frac{3(y+1)^2-8(y+1)+6}{(y+1)^2-2(y+1)+1}=\frac{3y^2-2y+1}{y^2}$$

$$A=3-\frac{2}{y}+\frac{1}{y^2}$$

Đặt $\frac{1}{y}=z\Rightarrow A=3-2z+z^2$

$$A=z^2-2z+1+2$$

$$A=(z-1)^2+2\geq 2$$

Vậy min $A=2\Leftrightarrow z=1\Leftrightarrow y=1\Leftrightarrow x=2$.

Bài 1. Tìm $n\in Z$ để $n+26$ và $n-11$ đều là lập phương của một số tự nhiên.

Giải

Đặt $\begin{cases}n+26=a^3\\n-11=b^3\end{cases}\Leftrightarrow a^3-b^3=37$

Ta có:

$$a^3-b^3=37$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=37$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-b=1\\a^2+ab+b^2=37\end{cases}(1)\\\begin{cases}a-b=-1\\a^2+ab+b^2=-37\end{cases}(2)\end{array}\right.$

Từ (1) ta có: $\begin{cases}a-b=1\\a^2+ab+b^2=37\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\(b+1)^2-b(b+1)+b^2=37\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\b^2+b-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\\left[\begin{array}{l}b=3\\b=-4\end{array}\right.\end{cases}$$

Do đó $\left[\begin{array}{l}a=4\\a=-3\end{array}\right.$

Với $a=4\Rightarrow n=38$

Với $a=-3\Rightarrow n=-53$

Từ (2) ta có $\begin{cases}a^2+ab+b^2=-37\\a-b=-1\end{cases}$ (Loại)

Bài 2. Cho biểu thức $A=x^2+xy+y^2-3x-3y+2016$. Tìm giá trị của x, y để A đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Cách 1

Ta có:

$$A=x^2+xy+y^2-3x-3y+2016$$

$$A = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + xy + x - y + 2014$$

$$A = (x-1)^2 + (y-1)^2 + x(y-1) - (y-1) + 2013$$

$$A = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-1)(y-1) + 2013$$

$$A = (x-1)^2 + 2(x-1).\frac{(y-1)}{2} + \frac{(y-1)^2}{4} + \frac{3(y-1)^2}{4} + 2013$$

$$A = \left(x - 1 + \frac{y-1}{2}\right)^2 + \frac{3(y-1)^2}{4} + 2013$$

$$A_{\min} = 2013 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3(y-1)^2}{4} = 0 \\ \left(x - 1 + \frac{y-1}{2}\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Do đó

Cách 2

Ta có:

$$4A = 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12x - 12y + 8064$$

$$4A = (2x)^2 + 2.2x.y - 2.2x.3 - 2.y.3 + y^2 + 3^2 + 3y^2 - 6y + 3 + 8052$$

$$4A = (2x + y - 3)^2 + 3(y-1)^2 + 8052$$

$$4A \geq 8052 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x + y - 3)^2 = 0 \\ 3(y-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Do đó

Vậy $A_{\min} = 2013 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Bài 3. Tìm nghiệm tự nhiên (x; y) của $\left(x^2 + 4y^2 + 28\right)^2 = 17\left(x^4 + y^4 + 14y^2 + 49\right)$

Giải

Ta có:

$$\left(x^2 + 4y^2 + 28\right)^2 = 17\left(x^4 + y^4 + 14y^2 + 49\right)$$

$$\left[x^2 + 4\left(y^2 + 27\right)\right]^2 = 17\left[x^4 + \left(y^2 + 7\right)^2\right]$$

$$x^4 + 8x^2\left(y^2 + 27\right) + 16\left(y^2 + 27\right)^2 = 17x^4 + 17\left(y^2 + 27\right)^2$$

$$16x^4 - 8x^2\left(y^2 + 27\right) + \left(y^2 + 27\right)^2 = 0$$

$$\left[4x^2 - \left(y^2 + 27\right)\right]^2 = 0$$

$$4x^2 - \left(y^2 + 27\right) = 0$$

$$4x^2 - y^2 = 27$$

$$(2x + y)(2x - y) = 27$$

$$\begin{cases} 2x + y = 27 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 13 \end{cases}$$

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 10y$ với $x, y \in R$.

b) $B = x^2 + 6y^2 + 14z^2 - 8yz + 6xz - 4xy$.

c) $C = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2x - 2y - 8z + 2000$.

Bài 1. a) Tìm n để $B = \dfrac{n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 6n - 2}{n^2 + 2}$ có giá trị là một số nguyên.

b) Tìm n để $D = n^5 - n + 2$ là số chính phương $(n \geq 2)$.

Hướng dẫn

a) $B = \dfrac{n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 6n - 2}{n^2 + 2} = n^2 + 3n - \dfrac{2}{n^2 + 2}$

B có giá trị nguyên khi $\Leftrightarrow 2 \vdots n^2 + 2$

$n^2 + 2$ là ước tự nhiên của 2.

$n^2 + 2 = 1$ không có giá trị nào thỏa mãn.

$n^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow n = 0$ thì B nhận giá trị nguyên.

b) $D = n^5 - n + 2$

$$D = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) + 2$$

$$D = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1) + 2$$

$$D = 5n(n-1)(n+1) + n(n-1)(n+1)(n^2 - 4) + 2$$

$$D = 5n(n-1)(n+1) + n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) + 2$$

Vì $5n(n-1)(n+1) \vdots 5$ và $n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) \vdots 5$

Vậy D chia 5 dư 2

Do đó số D có tận cùng là 2 hoặc 7 nên D không phải số chính phương.

Bài 2. Giải phương trình:

a) $x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$.

b) $8\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2$.

Hướng dẫn

a) $x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$ (1)

+ Nếu $x \geq 1$: (1) $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 1$)

+ Nếu $x < 1$: (1) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1;\ x = 3$ (cả hai đều không thảo mãn)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) $8\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2$ (2)

ĐKXĐ: $x \neq 0$

(2) $\Leftrightarrow 8\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)\left[\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2\right] = (x+4)^2$

$\Leftrightarrow 8\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 8\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = (x+4)^2 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 16$

$\Leftrightarrow x = 0\ hay\ x = -8$ và $x \neq 0$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -8$

Bài 3. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$ và $a+b+c+ab+ac+bc=6$. Tính giá trị của biểu thức: $A=\dfrac{a^{22}+b^{12}+c^{1994}}{a^{22}+b^{12}+c^{2013}}$.

Hướng dẫn:

Ta có: $2\left(a^2+b^2+c^2\right)=6$

Suy ra:

$2\left(a^2+b^2+c^2\right)=a+b+c+ab+ac+bc$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2=a+b+c+ab+ac+bc$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-a-b-c-ab-ac-bc=0$

$\Leftrightarrow 4a^2+4b^2+4c^2-2a-2b-2c-2ab-2ac-2bc=0$

$\Leftrightarrow 3a^2+3b^2+3c^2-2a-2b-2c-2ab-2bc-2ac+c^2+a^2+b^2+c^2=0$

$\Leftrightarrow 3a^2+3b^2+3c^2-2a-2b-2c-2ab-2bc-2ac+c^2+3=0$ (vì $a^2+b^2+c^2=3$)

$\Leftrightarrow a^2-2a+1+b^2-2b+1+c^2-2c+1+a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+a^2-2ac+c^2=0$

$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(a-b)^2+(a-c)^2+(a-c)^2=0$

$\Leftrightarrow a=b=c=1$

Vậy $A=\dfrac{1^{22}+1^{12}+1^{1994}}{1^{22}+1^{12}+1^{2013}}=1$.

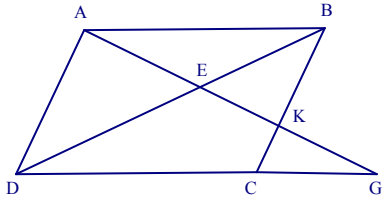
Bài 4. Cho hình bình hành ABCD. Qua A kẻ đường thẳng tùy ý cắt BD, BC, CD lần lượt ở E, K, G. Chứng minh:

a) $AE^2=EK.EG$.

b) $\dfrac{1}{AE}=\dfrac{1}{AK}+\dfrac{1}{AG}$.

c) Khi đường thẳng d thay đổi thì tích BK.DG có giá trị không đổi.

Hướng dẫn:



a) Ta có AD // BK nên $\dfrac{AE}{EK}=\dfrac{DE}{EB}$ (1)

AB // CD nên $\dfrac{EG}{AE}=\dfrac{DE}{EB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AE}{EK}=\dfrac{EG}{AE}\Rightarrow AE^2=EK.EG$.

b) Ta có $\dfrac{AE}{EK}=\dfrac{BE}{DE}\Rightarrow\dfrac{AE}{AK}=\dfrac{BE}{BD}$ (3)

Tương tự ta có: $\dfrac{AE}{EG}=\dfrac{DE}{EB}\Rightarrow\dfrac{AE}{AK}=\dfrac{DE}{BD}$ (4)

Cộng vế với vế của (3) và (4) ta có:

$\dfrac{AE}{AK}+\dfrac{AE}{AG}=\dfrac{BE}{BD}+\dfrac{DE}{BD}=1\Rightarrow\dfrac{1}{AE}=\dfrac{1}{AK}+\dfrac{1}{AG}$.

c) Ta có:

$\frac{BK}{KC}=\frac{AB}{CG}$ và $\frac{KC}{AD}=\frac{GC}{DG}$ nhân từng vế của đẳng thức trên ta được

$\frac{BK}{AD}=\frac{AB}{DG}\Rightarrow BK.DG=AD.AD$ không đổi

uigeli.xyz **ĐỀ 7**	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **MÔN TOÁN LỚP 8** *Thời gian: 150 phút*

Câu 1 (2 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)...(2^{256}+1)+1$.

b) Cho $x^2=y^2+z^2$. Chứng minh rằng $(5x-3y+4z)(5x-3y-4z)=(3x-5y)^2$

Câu 2 (2 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử $a^{10}+a^5+1$.

b) Cho $x+y=1$ và $xy\neq 0$. Chứng minh rằng $\frac{x}{y^3-1}-\frac{y}{x^3-1}+\frac{2(x-y)}{x^2y^2+3}=0$.

Câu 3 (2 điểm)

Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Qua O kẻ đường thẳng song song với hai đáy cắt BC ở I, cắt AD ở J. Chứng minh:

a) $\frac{1}{OI}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$.

b) $\frac{2}{IJ}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$.

Câu 4 (1 điểm)

Cho hình thang ABCD (AD // BC) có hai đường chéo cắt nhau tại O. Tính diện tích tam giác AOB, biết diện tích tam giác BOC là 169 cm^2 và diện tích tam giác AOD là 196 cm^2.

Câu 5 (1 điểm)

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau $x^2y+xy+y=1$

ĐÁP ÁN

Câu 1 (2 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)...(2^{256}+1)+1$.

b) Cho $x^2=y^2+z^2$. Chứng minh rằng $(5x-3y+4z)(5x-3y-4z)=(3x-5y)^2$

Hướng dẫn

a) Ta có:

$A=1.(2+1)(2^2+1)(2^4+1)...(2^{256}+1)+1$

$A=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)...(2^{256}+1)+1$

$A=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)...(2^{256}+1)+1$

$A=(2^4-1)(2^4+1)...(2^{256}+1)+1$

$A=(2^{256}-1)(2^{256}+1)+1=2^{512}-1+1=2^{512}$.

b) Ta có:

$(5x-3y+4z)(5x-3y-4z)$

$=(5x-3y)^2-16z^2$

$=25x^2-30xy+9y^2-16z^2$

$=25x^2-30xy+9y^2-16(x^2-y^2)$ (vì $x^2=y^2+z^2$)

$=25x^2-30xy+9y^2-16x^2+16y^2$

$=9x^2-30xy+25y^2$

$=(3x-5y)^2$.

Câu 2 (2 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử $a^{10}+a^5+1$.

b) Cho $x+y=1$ và $xy\neq 0$. Chứng minh rằng $\frac{x}{y^3-1}-\frac{y}{x^3-1}+\frac{2(x-y)}{x^2y^2+3}=0$.

Hướng dẫn

a) $a^{10}+a^5+1$

$=(a^{10}+a^9+a^8)-(a^9+a^8+a^7)+(a^7+a^6+a^5)-a^6-1$

$=a^8(a^2+a+1)-a^7(a^2+a+1)+a^5(a^2+a+1)-(a^3-1)(a^3+1)$

$=a^8(a^2+a+1)-a^7(a^2+a+1)+a^5(a^2+a+1)-(a-1)(a^2+a+1)(a^3+1)$

$=(a^2+a+1)(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1)$.

b) Ta có:

$\frac{x}{y^3-1}-\frac{y}{x^3-1}$

$=\frac{x^4-x-y^4+y}{(y^3-1)(x^3-1)}=\frac{(x^4-y^4)-(x-y)}{(y^3-1)(x^3-1)}=\frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)-(x-y)}{(y-1)(y^2+y+1)(x-1)(x^2+x+1)}$

Vì $x+y=1\Rightarrow y-1=-x$ và $x-1=-y$, do đó ta có:

$=\frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)-(x-y)}{xy(y^2+y+1)(x^2+x+1)}$

$=\frac{(x-y)(x^2+y^2)-(x-y)}{xy(x^2y^2+y^2x+y^2+yx^2+xy+y+x^2+x+1)}$ (vì $x+y=1$)

$=\frac{(x-y)(x^2+y^2-1)}{xy[x^2y^2+xy(x+y)+x^2+y^2+xy+2]}=\frac{(x-y)(x^2-x+y^2-y)}{xy[x^2y^2+(x+y)^2+2]}$

$=\frac{(x-y)[x(x-1)+y(y-1)]}{xy[x^2y^2+3]}=\frac{(x-y)[x(-y)+y(-x)]}{xy[x^2y^2+3]}$

$=\frac{(x-y)(-2xy)}{xy[x^2y^2+3]}=\frac{-2(x-y)}{x^2y^2+3}$

Do đó $\frac{x}{y^3-1}-\frac{y}{x^3-1}+\frac{2(x-y)}{x^2y^2+3}=0$.

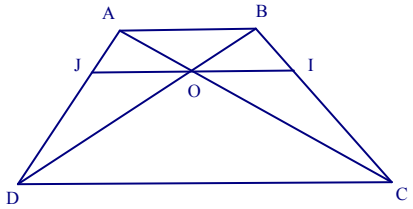
Câu 3 (2 điểm)

Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Qua O kẻ đường thẳng song song với hai đáy cắt BC ở I, cắt AD ở J. Chứng minh:

a) $\frac{1}{OI}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$.

b) $\frac{2}{IJ}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$.

Hướng dẫn



a) Ta có:

OI // AB, xét tam giác OIC ta có: $\frac{OI}{AB}=\frac{CI}{CB}$ (1).

OI // CD, xét tam giác BDC ta có: $\frac{OI}{CD}=\frac{BI}{BC}$ (2).

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta có:

$\frac{OI}{AB}+\frac{OI}{CD}=\frac{CI}{BC}+\frac{BI}{BC}=\frac{BC}{BC}=1\Rightarrow\frac{1}{OI}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$ (3).

b) Chứng minh tương tự ta có $\frac{1}{OJ}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$ (4).

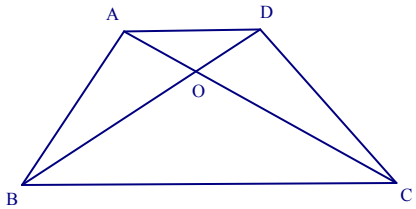
Cộng vế với vế của (3) và (4) ta có: $\frac{1}{OI}+\frac{1}{OJ}=2\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}\right)$

Lại có $\frac{OJ}{AB}=\frac{DO}{DB}=\frac{OI}{AB}\Rightarrow OJ=OI$, do đó ta có: $\frac{2}{IJ}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$.

Câu 4 (1 điểm)

Cho hình thang ABCD (AD // BC) có hai đường chéo cắt nhau tại O. Tính diện tích tam giác AOB, biết diện tích tam giác BOC là 169 cm^2 và diện tích tam giác AOD là 196 cm^2.

Hướng dẫn



Ta chứng minh được $S_{AOD}.S_{BOC}=S_{AOB}.S_{OCD}$ mà $S_{AOB}=S_{DOC}$

Do đó $S^2_{AOB}=169.196=182^2\Rightarrow S_{AOB}=182cm^2$

Câu 5 (1 điểm)

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau $x^2y+xy+y=1$

Hướng dẫn

$x^2y+xy+y=1$

$\Leftrightarrow y\left(x^2+x+1\right)=1$ vì $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ với mọi x nên phương trình có nghiệm nguyên dương khi:

$$\begin{cases} y=1 \\ x^2+x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$$

uigeli.xyz **ĐỀ 8**	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **MÔN TOÁN LỚP 8** *Thời gian: 150 phút*

Câu 1 (2 điểm)

Cho $M=\left(\frac{a^2+3a+2}{a^2+a-2}-\frac{a^2+a}{a-1}\right).\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}\right)$

a) Tìm ĐKXĐ rồi rút gọn M.

b) Tìm a sao cho $\frac{1}{M}-\frac{a+1}{8}\geq\frac{-1}{4}$.

Câu 2 (2 điểm)

a) Giải phương trình $2x\left(8x-1\right)^2\left(4x-1\right)=9$.

b) Với mọi $n\in\mathbb{N}$ thì n^5 và n luôn có chữ số tận cùng giống nhau.

Câu 3 (3 điểm)

Cho hình thang ABCD (AB // CD), O là giao điểm hai đường chéo. Qua O kẻ đường thẳng song song với AB cắt DA tại E, cắt BC tại F.

a) Chứng minh $S_{AOD}=S_{BOC}$.

b) Chứng minh: $\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{2}{EF}$

c) Gọi K là điểm bất kì thuộc OE. Nêu cách dựng đường thẳng đi qua K và chia đôi diện tích tam giác DEF.

Câu 4 (2 điểm)

Cho $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{1}{a+b} \end{cases}$

Chứng minh rằng $\frac{x^{2014}}{a^{1007}}+\frac{y^{2014}}{b^{1007}}=\frac{2}{\left(a+b\right)^{1007}}$.

Câu 5 (1 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=\frac{\left(x+4\right)\left(x+9\right)}{x}$ với $\left(x>0\right)$.

ĐÁP ÁN

Câu 1 (2 điểm)

Cho $M=\left(\frac{a^2+3a+2}{a^2+a-2}-\frac{a^2+a}{a-1}\right).\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}\right)$

a) Tìm ĐKXĐ rồi rút gọn M.

b) Tìm a sao cho $\frac{1}{M}-\frac{a+1}{8}\geq\frac{-1}{4}$.

Hướng dẫn

a) ĐKXĐ $\begin{cases}a^2+a-2\neq 0\\ a-1\neq 0\\ a+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 1\\ a\neq -1\end{cases}$

Ta có $M=\left(\frac{a^2+3a+2}{a^2+a-2}-\frac{a^2+a}{a-1}\right).\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}\right)$

$$M=\left[\frac{(a+1)(a+2)}{(a-1)(a+2)}-\frac{a^2+a}{a-1}\right].\left[\frac{a-1+a+1}{(a+1)(a-1)}\right]$$

$$M=\frac{a+1-a^2-a}{a-1}.\frac{2a}{(a+1)(a-1)}$$

$$M=\frac{-(a+1)(a-1)}{a-1}.\frac{2a}{(a+1)(a-1)}$$

$$M=\frac{-2a}{a-1}=\frac{2a}{1-a}$$

b) Ta có $\frac{1}{M}-\frac{a+1}{8}\geq\frac{-1}{4}\quad a\neq 0$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\frac{2a}{1-a}}-\frac{a+1}{8}\geq\frac{-1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-a}{2a}-\frac{a+1}{8}\geq\frac{-1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4-4a-a^2-a}{8a}\geq\frac{-1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{-a^2-5a+4}{8a}\geq\frac{-1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -4a^2-20a+16\geq -8a$$

$$\Leftrightarrow -4a^2-12a+16\geq 0$$

$$\Leftrightarrow -4\left(a^2+3a-4\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2+3a-4\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(a+4)\leq 0$$

$\Leftrightarrow -4\leq a\leq 1$ vì $a\neq 1, a\neq 0$ nên $-4\leq a<0, 0<a<1$

Câu 2 (2 điểm)

a) Giải phương trình $2x(8x-1)^2(4x-1)=9$.

b) Với mọi $n\in\square$ thì n^5 và n luôn có chữ số tận cùng giống nhau.

Hướng dân

a) $2x(8x-1)^2(4x-1)=0$

$$\Leftrightarrow (8x-1)^2\left(8x^2-2x\right)=9$$

$$\Leftrightarrow \left(16x^2-16x+1\right)\left(64x^2-16x\right)=72$$

Đặt $64x^2-16x=t$, ta có:

$t(t+1)=72$, do đó $\left[\begin{array}{l} t=8 \\ t=-9 \end{array}\right.$

Từ đó tìm được các giá trị của x.

b) Xét hiệu:

n^5-n

$=n\left(n^4-1\right)$

$=n\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)$

$=(n-1)n(n+1)\left(n^2-4+5\right)$

Vậy $(n-1)n(n+1)\left(n^2-4+5\right) \vdots 2$ (1)

$=(n-1)n(n+1)\left(n^2-4\right)-5(n-1)n(n+1)$

$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)-5(n-1)n(n+1)$

Vì $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 5, $5(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 5.

Vậy $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)-5(n-1)n(n+1) \vdots 5$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra n^5-n chia hết cho 2, 5 mà $(2,5)=1 \Rightarrow n^5-n \vdots 10$

Vậy n^5 và n luôn có chữ số tận cùng giống nhau.

Câu 3 (3 điểm)

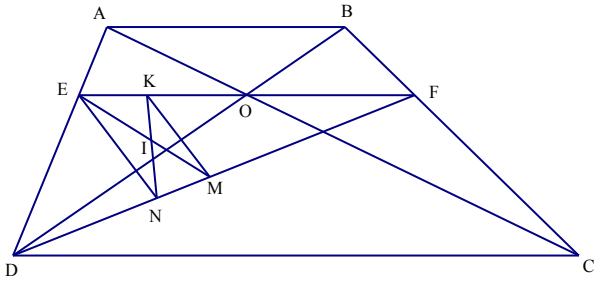
Cho hình thang ABCD (AB // CD), O là giao điểm hai đường chéo. Qua O kẻ đường thẳng song song với AB cắt DA tại E, cắt BC tại F.

a) Chứng minh $S_{AOD}=S_{BOC}$.

b) Chứng minh: $\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{2}{EF}$

c) Gọi K là điểm bất kì thuộc OE. Nêu cách dựng đường thẳng đi qua K và chia đôi diện tích tam giác DEF.

Hướng dẫn



a) Ta có $S_{ADB}=S_{ABC}$ vì có cùng chiều cao hạ từ D và C xuống AB (do AB // CD) và cạnh đáy AB.

$S_{ABD}-S_{AOB}=S_{ABC}-S_{AOB}$ hay $S_{AOD}=S_{BOC}$.

b) V× $EO // DC \Rightarrow \frac{EO}{DC}=\frac{AO}{AC}$. MÆt kh¸c $AB // CD \Rightarrow \frac{AB}{DC}=\frac{AO}{OC}$.

$\Rightarrow \frac{AB}{AB+BC}=\frac{AO}{AO+OC} \Rightarrow \frac{AB}{AB+BC}=\frac{AO}{AC} \Rightarrow \frac{EO}{DC}=\frac{AB}{AB+DC}$

$\Rightarrow \frac{EF}{2DC}=\frac{AB}{AB+DC} \Rightarrow \frac{AB+DC}{AB.DC}=\frac{2}{EF} \Rightarrow \frac{1}{DC}+\frac{1}{AB}=\frac{2}{EF}$.

c) Dựng trung tuyến $EM\left(M \in DF\right)$.

Dựng $EN // MK\left(N \in DF\right)$, nối K với N.
KN là đường thẳng phải dựng.
Chứng minh
Ta có $S_{EDM} = S_{EMF}$ (1).
Gọi giao điểm của EM và KN là I thì $S_{IKE} = S_{IMN}$ (chứng minh phần a).
Từ (1) và (2) suy ra $S_{EDNI} + S_{IMN} = S_{KIMF} + S_{IKE} \Rightarrow S_{EDNI} + S_{IKE} = S_{KIMF} + S_{IMN}$
Vậy $S_{EDNK} = S_{KNF}$.
Câu 4 (2 điểm)
Cho $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \dfrac{x^4}{a} + \dfrac{y^4}{b} = \dfrac{1}{a+b} \end{cases}$
Chứng minh rằng $\dfrac{x^{2014}}{a^{1007}} + \dfrac{y^{2014}}{b^{1007}} = \dfrac{2}{\left(a+b\right)^{1007}}$.
Hướng dẫn
Ta có:

$$\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{a+b} \text{ (vì } x^2+y^2=1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \left(a+b\right)\left(bx^4 + ay^4\right) = ab\left(x^4 + 2x^2y^2 + y^4\right)$$

$$\Leftrightarrow abx^4 + a^2y^4 + b^2x^4 + aby^4 = abx^4 + 2abx^2y^2 + aby^4$$

$$\Leftrightarrow a^2y^4 - 2abx^2y^2 + b^2x^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(ay^2 - bx^2\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow ay^2 = bx^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2+y^2}{a+b} = \frac{1}{a+b}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{1}{a+b}, \frac{y^2}{b} = \frac{1}{a+b}$$

Vậy $\dfrac{x^{2014}}{a^{1007}} + \dfrac{y^{2014}}{b^{1007}} = \left(\dfrac{x^2}{a}\right)^{1007} + \left(\dfrac{y^2}{b}\right)^{1007} = \left(\dfrac{1}{a+b}\right)^{1007} + \left(\dfrac{1}{a+b}\right)^{1007} = \dfrac{2}{\left(a+b\right)^{1007}}$.
Câu 5 (1 điểm)
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \dfrac{\left(x+4\right)\left(x+9\right)}{x}$ với $\left(x>0\right)$.
Hướng dẫn
Ta có:

$$C = \frac{\left(x+16\right)\left(x+9\right)}{x} = \frac{x^2+25x+144}{x} = x + \frac{144}{x} + 25$$

Vì x và $\dfrac{144}{x}$ là các số dương có tích không đổi nên có tổng nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow x = \frac{144}{x} \Leftrightarrow x = 12$$

Vậy min $C = 49 \Leftrightarrow x = 12$.

uigeli.xyz **ĐỀ 9**	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **MÔN TOÁN LỚP 8** *Thời gian: 150 phút*

Bài 1 (2 điểm)

Cho biểu thức $P=\left(\frac{x^3+3x}{x^3+3x^2+9x+27}+\frac{3}{x^2+9}\right):\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6x}{x^3-3x^2+9x-27}\right)$

a) Rút gọn P.

b) Với $x>0$ thì P không nhận những giá trị nào?

c) Tìm các giá trị của x để P nhận giá trị nguyên?

Bài 2 (2 điểm)

a) Chứng minh rằng $3^{2n}-9$ chia hết cho 72 với mọi số nguyên n.

b) Tìm các số nguyên dương x, y biết $x^2-y^2+2x-4y-10=0$.

Bài 3 (3 điểm)

Cho hình bình hành ABCD có đường chéo AC lớn hơn đường chéo BD. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của C xuống đường thẳng AB và AD.

a) Tứ giác BEDF là hình gì? Hãy chứng minh điều đó?

b) Chứng minh rằng: CH.CD = CB.CK.

c) Chứng minh rằng: $AB.AH+AD.AK=AC^2$.

Câu 4 (2 điểm)

Cho h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao ứng với các cạnh a, b, c của một tam giác.

Hãy xác định dạng của tam giác đó nếu $a+h_a=b+h_b=c+h_c$.

Câu 5 (1 điểm)

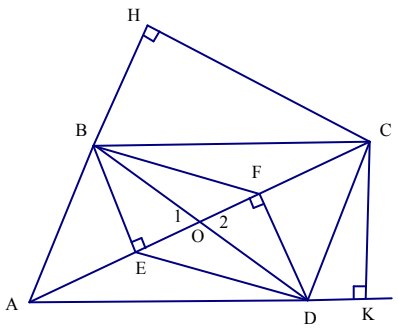
a) Tìm x, y, z biết $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}=\frac{x^2+y^2+z^2}{5}$.

b) Cho hai số x, y thỏa mãn $3x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=3x^2+y$

ĐÁP ÁN

Câu 3

Giải



a) Ta có:

$\begin{cases}BE\perp AC\\DF\perp AC\end{cases}\Rightarrow BE//DF$ (1)

Xét ΔBEO và ΔDFO có:

BO = OD (vì O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành ABCD)

$O_1 = O_2$ (đối đỉnh)

$BEO = DFO = 90^0$

Do đó $\Delta BEO = \Delta DFO$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra BE = DF (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác BEDF là hình bình hành.

b) Xét ΔCBH và ΔCDK có:

$CKD = CHB = 90^0$

Vì tứ giác ABCD là hình bình hành nên $ABC = ADC \Rightarrow HBC = KDC$ (cùng bù với hai góc bằng nhau)

Do đó $\Delta CBH \sim \Delta CDK$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CH}{CK} = \dfrac{CB}{CD} \Rightarrow CH.CD = CK.CB$.

c) Ta có:

$\Delta AFD \sim \Delta AKC \Rightarrow \dfrac{AF}{AK} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AD.AK = AF.AC$

$\Delta CFD \sim \Delta AHC \Rightarrow \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{CF}{AH}$ mà $CD = AB \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{CF}{AH} \Rightarrow AB.AH = AC.CF$

Do đó $AB.AH + AD.AK = AC.CF + AF.AC = AC\left(CF + AF\right) = AC.AC = AC^2$.

uigeli.xyz **ĐỀ 10**	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **MÔN TOÁN LỚP 8** *Thời gian: 150 phút*

Câu 1

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $P = 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3$.

b) Giải phương trình: $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$.

Câu 2

a) Chứng minh rằng $n^3 + 11n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

b) Cho $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + y^2$.

Câu 3

Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{2+x}{2-x} - \dfrac{4x^2}{x^2-4} - \dfrac{2-x}{2+x}\right) : \left(\dfrac{x^2-3x}{2x^2-x^3}\right)$

a) Tìm ĐKXĐ rồi rút gọn A.

b) Tìm giá trị của x để $A > 0$.

Câu 4

a) Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức $\dfrac{x^2-3}{x-2}$ là số nguyên?

b) Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Câu 5

Cho hình chữ nhật ABCD. Trên đường chéo BD lấy điểm P khác trung điểm của BD, gọi M là điểm đối xứng của điểm C qua P.

a) Tứ giác AMDB là hình gì? Vì sao?

b) Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, AD. Chứng minh EF song song với AC và ba điểm E, F, P thẳng hàng.

Câu 6

Cho h_a, h_b là độ dài các đường cao ứng với các cạnh a, b của một tam giác. Hãy xác định dạng của tam giác đó nếu $a+h_a=b+h_b$.

Hướng dẫn chấm

Câu 1

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $P=2a^3+7a^2b+7ab^2+2b^3$.

b) Giải phương trình: $x^3+3x^2+2x=0$.

Giải

a) Ta có:

$$P=2a^3+7a^2b+7ab^2+2b^3$$
$$P=2\left(a^3+b^3\right)+7ab(a+b)$$
$$P=2(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)+7ab(a+b)$$
$$P=(a+b)\left(2a^2+5ab+2b^2\right)$$
$$P=(a+b)\left[2a^2+4ab+ab+2b^2\right]$$
$$P=(a+b)(a+2b)(2a+b)$$

b) $x^3+3x^2+2x=0$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2+3x+2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x(x+1)(x+2)=0$$

Vậy $S=\{-2;-1;0\}$

Câu 2

a) Chứng minh rằng n^3+11n chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

b) Cho $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=x^2+y^2$.

Giải

a) Ta có:

$$n^3+11n$$
$$=n\left(n^2+11\right)$$
$$=n\left(n^2-1+12\right)$$
$$=n\left(n^2-1\right)-12n$$
$$=(n-1)n(n+1)-12n$$

Vì $(n-1)n(n+1)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên $(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 6 và $12n$ chia hết cho 6.

Do đó n^3+11n chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

b) Cách 1

Từ $x+y=1\Rightarrow y=1-x$, do đó ta có:

$$A=x^2+(1-x)^2=x^2+1-2x+x^2=2\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)$$
$$A=2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{2}{2}$$

Vậy $\min A=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

Cách 2

Ta có:

$x+y=1\Rightarrow x^2+2xy+y^2=1$. (1)

Mặt khác $(x-y)^2\ge 0\Rightarrow x^2-2xy+y^2\ge 0$ (2)

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta có:

$2\left(x^2+y^2\right)\ge 1\Rightarrow x^2+y^2\ge \frac{1}{2}$

Vậy min $A=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

Cho biểu thức $A=\left(\frac{2+x}{2-x}-\frac{4x^2}{x^2-4}-\frac{2-x}{2+x}\right):\left(\frac{x^2-3x}{2x^2-x^3}\right)$

a) Tìm ĐKXĐ rồi rút gọn A.

b) Tìm giá trị của x để $A>0$.

Giải

a)

ĐKXĐ: $\begin{cases}2-x\ne 0\\ x^2-4\ne 0\\ 2+x\ne 0\\ 2x^2-x^3\ne 0\\ x^2-3x\ne 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ne 0\\ x\ne\pm 2\\ x\ne 3\end{cases}$

$A=\left(\frac{2+x}{2-x}-\frac{4x^2}{x^2-4}-\frac{2-x}{2+x}\right):\left(\frac{x^2-3x}{2x^2-x^3}\right)$

$A=\frac{4x^2}{x-3}$

b)

uigeli.xyz **ĐỀ 11**	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **MÔN TOÁN LỚP 8** *Thời gian: 150 phút*

Bài 1.

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử (với hệ số là các số nguyên):

$x^2+2xy+7x+7y+y^2+10$.

b) Biết $xy=11$ và $x^2y+xy^2+x+y=2014$. Hãy tính x^2+y^2.

Bài 2. Tìm x, biết

a) $4^x-12.2^x+32=0$.

b) $(x-4,5)^4+(x-5,5)^4-1=0$

Bài 3. Cho biểu thức: $A=\frac{x^3}{x^2}-\frac{x}{x-2}-\frac{2}{x+2}$

a) Rút gọn A.

b) Với giá trị nào của x thì $A>0$, $A<0$?

c) Tìm x để $|A|=5$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AC > AB)$, đường cao AH $(H \in BC)$. Trên tia HC lấy điểm D sao cho HD = HA. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

a) Chứng minh $\Delta BEC \sim \Delta ADC$. Tính độ dài đoạn thẳng BE theo $m = AB$.

b) Gọi M là trung điểm của đoạn BE. Chứng minh rằng $\Delta BHM \sim \Delta BEC$. Tính $\widehat{AHM}$.

c) Tia AM cắt BC tại G. Chứng minh $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$.

Bài 5. Cho a, b, c từng đôi một khác nhau thoả mãn: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Rút gọn biểu thức: $C = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$.

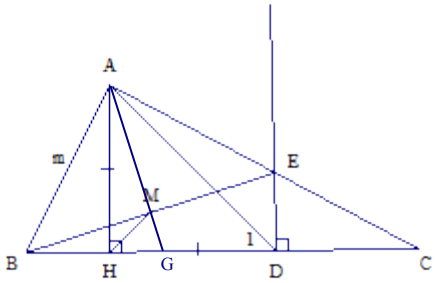
HƯỚNG DẪN

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AC > AB)$, đường cao AH $(H \in BC)$. Trên tia HC lấy điểm D sao cho HD = HA. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

a) Chứng minh $\Delta BEC \sim \Delta ADC$. Tính độ dài đoạn thẳng BE theo $m = AB$.

b) Gọi M là trung điểm của đoạn BE. Chứng minh rằng $\Delta BHM \sim \Delta BEC$. Tính $\widehat{AHM}$.

c) Tia AM cắt BC tại G. Chứng minh $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$.



a) Xét ΔBEC và ΔADC có:

$\widehat{C}$: chung

$\Delta CDE \sim \Delta CAB$ (vì $\widehat{D} = \widehat{A} = 90^0$, $\widehat{C}$ chung)

$\Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{CD}{CA} \Leftrightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{CB}{CA}$

Do đó $\Delta BEC \sim \Delta ADC$ (c.g.c)

Theo đề bài ta có $AH = HD \Rightarrow \Delta AHD$ vuông cân tại H nên $\widehat{D_1} = 45^0$

$\Rightarrow \widehat{ADC} = 135^0 \Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{ADC} = 135^0$, do đó $\widehat{AEB} = 45^0$ mà $\widehat{BAE} = 90^0$.

Suy ra ΔABE vuông cân tại A nên $AB = AE$.

$BE^2 = AB^2 + AE^2 = m^2 + m^2 = 2m^2 \Rightarrow BE = m\sqrt{2}$.

b) Ta có:

$\Delta BEC \backsim \Delta ADC$ $\frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC} = \frac{EC}{DC}$ mà $BE = 2BM$ nên $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2}.\frac{AD}{AC}$ mà $AD = AH\sqrt{2}$ (

ΔADH vuông cân tại H), nên $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2}.\frac{AH\sqrt{2}}{AC} = \frac{AH}{AC\sqrt{2}}$ (1)

$\Delta ABH \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AH}{AC}=\frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{AH}{AC\sqrt{2}}=\frac{BH}{AB\sqrt{2}}=\frac{BH}{BE}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BM}{BC}=\frac{BH}{BE}$

Do đó $\Delta BHM \sim \Delta BEC$ (c.g.c), suy ra: $\widehat{BHM}=\widehat{BEC}=135^0 \Rightarrow \widehat{AHM}=45^0$.

c) Vì AM là tia phân giác của $\widehat{BAE}$ nên $\frac{BG}{GC}=\frac{AB}{AC}$ mà

$\frac{AB}{AC}=\frac{ED}{DC}(\Delta ABC \sim \Delta DEC)=\frac{AH}{HC}(ED // AH)=\frac{HD}{HC}$

Do đó $\frac{GB}{GC}=\frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{GB}{GB+GC}=\frac{HD}{HD+HC} \Rightarrow \frac{GB}{BC}=\frac{HD}{AH+HC}$.

uigeli.xyz **ĐỀ 12**	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **MÔN TOÁN LỚP 8** *Thời gian: 150 phút*

Bài 1. Cho biểu thức

$P=\left(\frac{2x-3}{4x^2-12x+5}+\frac{2x-8}{13x-2x^2-20}-\frac{3}{2x-1}\right):\frac{21+2x-8x^2}{4x^2+4x-3}+1$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P khi $|x|=\frac{1}{2}$.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

d) Tìm x để $P>0$.

Bài 2

a) Chứng minh rằng $x^{2014}+x^{2012}+1$ chia hết cho x^2+x+1.

b) Tìm đa thức A biết rằng $\frac{4x^2-16}{x^2+2}=\frac{A}{x}$.

c) Tìm các số nguyên dương x, y biết: $x^2+x+6=y^2$.

Bài 3. Cho các số nguyên a, b, c. Chứng minh rằng:

Nếu $a+b+c$ chia hết cho 30 thì $a^5+b^5+c^5$ chia hết cho 30.

Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A, H là trung điểm của BC. Gọi I là hình chiếu của của H lên AC và O là trung điểm của HI. Chứng minh:

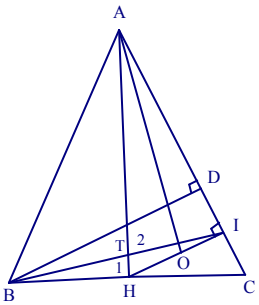
a) $\Delta BIC \sim \Delta AOH$.

b) $AO \perp BI$.

Bài 5. Cho $abc=2$. Rút gọn biểu thức: $A=\frac{a}{ab+a+2}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{2c}{ac+2c+2}$

HƯỚNG DẪN

Bài 4



Cho tam giác ABC cân tại A, H là trung điểm của BC. Gọi I là hình chiếu của của H lên AC và O là trung điểm của HI. Chứng minh:

a) $\Delta BIC \sim \Delta AOH$.

b) $AO \perp BI$.

Kẻ $BD \perp AC$, ta có $\widehat{CBD} = \widehat{CAH}$ (cùng phụ với $\widehat{C}$)

Do đó $\Delta DBC \sim \Delta IAH$ (g.g), suy ra $\frac{BC}{AH} = \frac{CD}{IH}$

Ta có $BD // HI$ mà H là trung điểm của BC nên I là trung điểm của DC.

Do đó BI và AO là hai đường trung tuyến của hai tam giác đồng dạng DBC và EAH nên: $\frac{BI}{AO} = \frac{IC}{HO} = \frac{BC}{AH}$.

Do đó $\Delta BIC \sim \Delta AOH$ (c.c.c), suy ra $\widehat{CBI} = \widehat{HAO}$

b) Từ $\Delta BIC \sim \Delta AOH$ suy ra $\widehat{CBI} = \widehat{HAO}$ mà $\widehat{TBH} + \widehat{T_1} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OAH} + \widehat{T_2} = 90^0$

Suy ra $AO \perp BI$.

uigeli.xyz **ĐỀ 13**	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **MÔN TOÁN LỚP 8** *Thời gian: 150 phút*

Bài 1. Cho biểu thức $A = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 10x^2 + 9}$

a) Rút gọn A.

b) Tìm x để $A = 0$.

c) Tìm giá trị của A khi $|2x - 1| = 7$.

Bài 2

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử $bc(b+c) + ac(a+c) + ab(a+b) + 2abc$.

b) Rút gọn rồi tính giá tị của biểu thức $A = \frac{2a^3 - 12a^2 + 17a - 2}{a - 2}$

Biết rằng a là nghiệm của phương tình: $|a^2 - 3a + 1| = 1$

Bài 3. Cho ΔABC cân tại A, có $BC = 2a$, M là trung điểm của BC. Lấy D, E thuộc AB, AC sao cho $\widehat{DME} = \widehat{B}$.

a) Chứng minh $BD.CE$ không đổi.

b) Chứng minh DM là tia phân giác của $\widehat{BDE}$.

c) Tính chu vi của tam giác AED nếu ΔABC đều.

Bài 4. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng nếu $(a+b+c)^2 = 3(ab+ac+bc)$ thì tam giác đó là tam giác đều.

Bài 5. Cho ba số x, y, z thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$

Tính giá trị của biểu thức $P=(x-1)^{17}+(y-1)^9+(z-1)^{2014}$.

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Ta có $x^4-10x^2+9=\left[(x^2)^2-x^2\right]-(9x^2-9)=(x^2-1)(x^2-9)$

ĐKXĐ: $x \neq \pm 1$; $x \neq \pm 3$.

a) $A=\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-10x^2+9}=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{(x^2-1)(x^2-9)}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-3)}$

b) $A=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) \Leftrightarrow x=\pm 2$.

c) $|2x-1|=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=7 \\ 2x-1=-7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-3 \end{array}\right. \Rightarrow x=-4$ (vì $x \neq -3$)

Với $x=4 \Rightarrow A=\dfrac{12}{7}$.

Bài 3

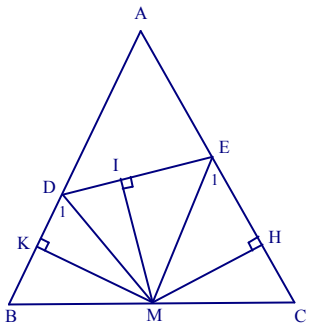
Cho ΔABC cân tại A, có $BC = 2a$, M là trung điểm của BC. Lấy D, E thuộc AB, AC sao cho $\widehat{DME} = \widehat{B}$.

a) Chứng minh $BD.CE$ không đổi.

b) Chứng minh DM là tia phân giác của $\widehat{BDE}$.

c) Tính chu vi của tam giác AED nếu ΔABC đều.

Hướng dẫn



a) Xét ΔBDM và ΔCME có:

$\widehat{B} = \widehat{C}$ (gt)

$\widehat{DMC} = \widehat{DME} + \widehat{EMC} = \widehat{B} + \widehat{D_1}$ mà $\widehat{DME} = \widehat{B}$ nên $\widehat{EMC} = \widehat{D_1}$

Do đó $\Delta BDM \sim \Delta CME$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{BD}{CM} = \frac{BM}{CE} \Rightarrow BD.CE = BM.CM = a^2$

b)

uigeli.xyz **ĐỀ 14**	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **MÔN TOÁN LỚP 8** *Thời gian: 150 phút*

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$.

b) Rút gọn biểu thức sau $A = \left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right)\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình sau:

$(2x^2+x-2013)^2 + 4(x^2-5x-2012)^2 = 4(2x^2+x-2013)(x^2-5x-2012)$

b) Chứng minh với mọi m, n, p, q ta đều có $m^2+n^2+p^2+q^2+1 \geq m(n+p+q+1)$

Câu 3. (2,0 điểm)

Tìm đa thức f(x) biết rằng: f(x) chia cho $x+2$ dư 10, f(x) chia cho $x-2$ dư 24, f(x) chia cho x^2-4 được thương là $-5x$ và còn dư.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho AE = AF. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N.

a) Chứng minh rằng tứ giác AEMD là hình chữ nhật.

b) Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH. Chứng minh rằng $AC = 2EF$.

d) Chứng minh rằng $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Câu 6. Cho a,b,c là ba số dương thoả mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng :

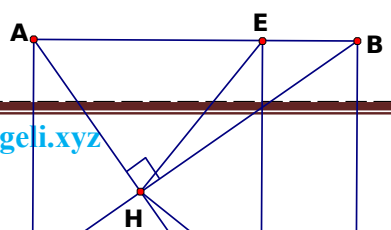
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

----------Hết----------

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM
BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
Câu 1		**(2.0 điểm)**
1 (1.0 điểm)	Ta có $x^4+2013x^2+2012x+2013$ $=(x^4-x)+2013x^2+2013x+2013$	0,25
	$=x(x-1)(x^2+x+1)+2013(x^2+x+1)$	0.25
	$=(x^2+x+1)(x^2-x+2013)$	0.25
	Kết luận $x^4+2013x^2+2012x+2013=(x^2+x+1)(x^2-x+2013)$	0.25
2 (1.0 điểm)	ĐK: $\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 2\end{cases}$	0.25
	Ta có $A=\left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8}-\frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right)\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$	
	$=\left(\frac{x^2-2x}{2(x^2+4)}-\frac{2x^2}{4(2-x)+x^2(2-x)}\right)\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right)$	0.25
	$=\left(\frac{x^2-2x}{2(x^2+4)}-\frac{2x^2}{(x^2+4)(2-x)}\right)\left(\frac{(x+1)(x-2)}{x^2}\right)=\left(\frac{x(x-2)^2+4x^2}{2(x-2)(x^2+4)}\right)\left(\frac{(x+1)(x-2)}{x^2}\right)$	0.25
	$=\frac{x^3-4x^2+4x+4x^2}{2(x^2+4)}.\frac{x+1}{x^2}=\frac{x(x^2+4)(x+1)}{2x^2(x^2+4)}=\frac{x+1}{2x}$	0.25
	Vậy $A=\frac{x+1}{2x}$ với $\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 2\end{cases}$.	
Câu 2		**(2.0 điểm)**
1 (1.0 điểm)	Đặt: $\begin{cases}a=2x^2+x-2013\\ b=x^2-5x-2012\end{cases}$	0.25
	Phương trình đã cho trở thành: $a^2+4b^2=4ab\Leftrightarrow(a-2b)^2=0\Leftrightarrow a-2b=0\Leftrightarrow a=2b$	0.25
	Khi đó, ta có: $2x^2+x-2013=2(x^2-5x-2012)\Leftrightarrow 2x^2+x-2013=2x^2-10x-4024$	0.25
	$\Leftrightarrow 11x=-2011\Leftrightarrow x=\frac{-2011}{11}$.	0.25
	Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{-2011}{11}$.	

2 (1.0 điểm)	Ta có $y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y$ (1)	0.25
	$(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x + 2$ (2)	0.25
	Từ (1) và (2) ta có $x < y < x+2$ mà x, y nguyên suy ra $y = x + 1$	0.25
	Thay $y = x + 1$ vào pt ban đầu và giải phương trình tìm được $x = -1$; **từ đó tìm được hai cặp số (x, y) thỏa mãn bài toán là: (-1 ; 0)**	0.25
Câu 3		**(2,0 điểm)**
1 (1.0 điểm)	Giả sử f(x) chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư là $ax + b$. Khi đó: $f(x) = (x^2 - 4).(-5x) + ax + b$	0.25
	Theo đề bài, ta có: $\begin{cases} f(2) = 24 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 24 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = 17 \end{cases}$	0.25
	Do đó: $f(x) = (x^2 - 4).(-5x) + \frac{7}{2}x + 17$	0.25
	Vậy đa thức f(x) cần tìm có dạng: $f(x) = -5x^3 + \frac{47}{2}x + 17.$	0.25
2 (1.0 điểm)	Ta có: $a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 - b(a-c)(a+c-b)^2 = 0$ (1)	0.25
	Đặt: $\begin{cases} a + b - c = x \\ b + c - a = y \\ a + c - b = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x+z}{2} \\ b = \frac{x+y}{2} \\ c = \frac{y+z}{2} \end{cases}$	
	Khi đó, ta có: $VT_{(1)} = \frac{x+z}{2}\left(\frac{x+y}{2} - \frac{y+z}{2}\right).y^2 + \frac{y+z}{2}\left(\frac{x+z}{2} - \frac{x+y}{2}\right).x^2 - \frac{1}{4}(x+y)(x-y).z^2$	0.25
	$= \frac{x+z}{2}.\frac{x-z}{2}.y^2 + \frac{y+z}{2}.\frac{z-y}{2}.x^2 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2$	0.25
	$= \frac{1}{4}(x^2 - z^2).y^2 + \frac{1}{4}(z^2 - y^2).x^2 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2).z^2$	0.25
	$= \frac{1}{4}(x^2 - y^2).z^2 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2).z^2 = 0 = VP_{(1)}$ (đpcm)	0.25
Câu 4		**(3,0 điểm)**
		

1 (1.0 điểm)		
	Ta có $\widehat{DAM} = \widehat{ABF}$ (cùng phụ $\widehat{BAH}$) AB = AD (gt) $\widehat{BAF} = \widehat{ADM} = 90^0$ (ABCD là hình vuông) $\Rightarrow \Delta ADM = \Delta BAF$ (g.c.g)	0.5
	=> DM=AF, mà AF = AE (gt) Nên. AE = DM Lại có AE // DM (vì AB // DC)	0.25
	Suy ra tứ giác AEMD là hình bình hành Mặt khác. $\widehat{DAE} = 90^0$ (gt)	
	Vậy tứ giác AEMD là hình chữ nhật	0.25
2 (1.0 điểm)	Ta có $\Delta ABH \sim \Delta FAH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BH}{AH}$ hay $\frac{BC}{AE} = \frac{BH}{AH}$ (AB=BC, AE=AF)	0.25
	Lại có $\widehat{HAB} = \widehat{HBC}$ (cùng phụ $\widehat{ABH}$) $\Rightarrow \Delta CBH \sim \Delta EAH$ (c.g.c)	0.25
	$\Rightarrow \frac{S_{\Delta CBH}}{S_{\Delta EAH}} = \left(\frac{BC}{AE}\right)^2$, mà $\frac{S_{\Delta CBH}}{S_{\Delta EAH}} = 4$ (gt) $\Rightarrow \left(\frac{BC}{AE}\right)^2 = 4$ nên $BC^2 = (2AE)^2$ $\Rightarrow$ BC = 2AE $\Rightarrow$ E là trung điểm của AB, F là trung điểm của AD	0.25
	Do đó: BD = 2EF hay AC = 2EF (đpcm)	0.25
3 (1.0 điểm)	Do AD // CN (gt). Áp dụng hệ quả định lý ta lét, ta có: $\Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$	0.25
	Lại có: MC // AB (gt). Áp dụng hệ quả định lý ta lét, ta có: $\Rightarrow \frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{MC}{MN}$ hay $\frac{AD}{AN} = \frac{MC}{MN}$	0.25
	$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = \left(\frac{CN}{MN}\right)^2 + \left(\frac{CM}{MN}\right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$ (Pytago)	0.25
	$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2}$ (đpcm)	0.25
Câu 5		

1,0 điểm

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với $\forall$ a, b, c $\in$ R và x, y, z > 0 ta có

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Thật vậy, với a, b $\in$ R và x, y > 0 ta có

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y+b^2x)(x+y)\geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx-ay)^2\geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức (**) ta có

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

0.50

Câu 5: 1.0 điểm

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\geq\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} \quad (\text{Vì } abc=1)$$

0.25

Hay $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Mà $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\geq\frac{3}{2}$

0.25

Vậy $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$ (đpcm)

Điểm toàn bài **(10,0đ)**

		iểm)

uigeli.xyz ĐỀ 15	ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 8 *Thời gian: 150 phút*

Bài 1

a) Xác định các hằng số a, b sao cho:

$ax^3+bx^3+5x-50$ chia hết cho $x^2+3x-10$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: $2xy+4x-y=5$

Bài 2

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ với $x,y>0$.

Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Bài 3. Cho hình chữ nhật có $AB=2CD$, gọi E, I lần lượt là trung điểm của AB, CD. Nối D với E. Vẽ $Dx\perp DE$, tia Dx cắt tia đối của tia CB tại M. Trên tia đối của tia CE lấy điểm K sao cho $DM=EK$. Gọi G là giao điểm của DK và EM.

a) Tính $\widehat{DBK}$.

b) Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ K xuống BM.

Chứng minh bốn điểm A, I, G, H cùng nằm trên một đường thẳng.

Bài 4. Cho ba số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases}x.y.z=1\\\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<x+y+z\end{cases}$

Chứng minh rằng có đúng một trong ba số x, y, z lớn hơn 1.

Bài 5. Chứng minh rằng các số tự nhiên có dạng $2p+1$ trong đó p là số nguyên tố, chỉ có một số là lập phương của một số tự nhiên khác.

Bài 6. Cho a a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và chu vi 2p

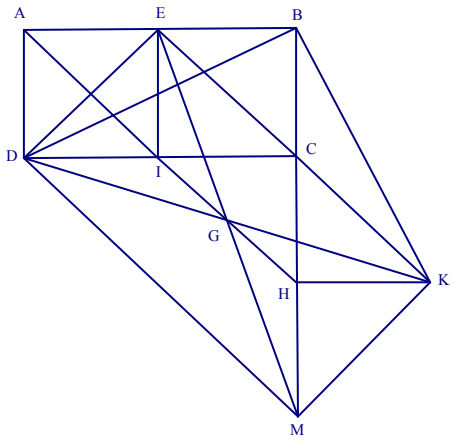
Chứng minh rằng:

a) $(p-a)(p-b)(p-c)\leq\frac{abc}{8}$

b) $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

HƯỚNG DẪN

Bài 3.



a) Ta có: $\Delta EBC \sim \Delta DCM$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{BE}{DC} = \frac{EC}{DM} = \frac{1}{2} = \frac{EC}{EK} \Rightarrow EC = CK$ mà $EC = DE \Rightarrow CK = DE$

ΔBEC vuông cân tại B nên $BE = BC$, $\widehat{BED} = \widehat{BCK} = 135^0$

Do đó $\Delta BED = \Delta BCK$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{EBD} = \widehat{CBK} \Rightarrow \widehat{DBK} = 90^0$

b) Ta có tứ giác DEKM là hình chữ nhật nên ΔCKM vuông cân tại M suy ra H là trung điểm của CM.

$AI // DM$ (cùng vuông góc với DE), $HI // DM$ (tính chất đường trung bình) nên ba điểm A ; I, H thẳng hàng.

Các tam giác CIH, CHK vuông cân tại C và H nên $KH = CI = DI$ mà $DI // KH$ nên tứ giác DIKH là hình bình hành.

Lại có tứ giác DEKM là hình chữ nhật, do đó EM, DK, IH đồng quy tại G là trung điểm của DK.

Vậy $G \in IH$ do đó bốn điểm A, I, G, H cùng nằm trên một đường thẳng.

Bài 5

Chứng minh rằng các số tự nhiên có dạng $2p+1$ trong đó p là số nguyên tố, chỉ có một số là lập phương của một số tự nhiên khác.

Hướng dẫn

Đặt $2p+1 = a^3 (a>1) \Rightarrow 2p = (a-1)(a^2+a+1)$

Vì p là số nguyên tố nên:

$a-1=2 \Rightarrow p=13$ (thỏa mãn)

Hoặc $a^2+a+1=2$ (vô lí) vì $a>1$

Vậy trong các số tự nhiên có dạng $2p+1$ trong đó p là số nguyên tố, chỉ có một số là lập phương của một số tự nhiên khác.

uigeli.xyz **ĐỀ 16**	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **MÔN TOÁN LỚP 8** *Thời gian: 150 phút*

Câu 1 (4 điểm) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1) $x^2 + 2014x + 2013$

2) $x(x+2)(x^2+2x+2)+1$

Câu 2 (4 điểm)

1) Tìm a, b biết $\frac{1+2a}{15}=\frac{3b}{23+7a}=\frac{7-3a}{20}$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^2+2y^2+2xy+2x-4y+2013$

Câu 3 (4 điểm)

1) Cho $a_1,a_2,...a_{2013}$ là các số tự nhiên có tổng bằng 2013^{2014}.

Chứng minh rằng: $B=a_1^3+a_2^3+...+a_{2013}^3$ chia hết cho 3.

2) Cho a và b là các số tự nhiên thoả mãn $2a^2+a=3b^2+b$.

Chứng minh rằng: $a-b$ và $3a+3b+1$ là các số chính phương.

Câu 4 (6 điểm)

Cho tam giác ABC. Gọi I là một điểm di chuyển trên cạnh BC. Qua I, kẻ đường thẳng song song với cạnh AC cắt cạnh AB tại M. Qua I, kẻ đường thẳng song song với cạnh AB cắt cạnh AC tại N.

1) Gọi O là trung điểm của AI. Chứng minh rằng ba điểm M, O, N thẳng hàng.

2) Kẻ MH, NK, AD vuông góc với BC lần lượt tại H, K, D.

Chứng minh rằng MH + NK = AD.

3) Tìm vị trí của điểm I để MN song song với BC.

Câu 5 (2 điểm)

Cho $a<b<c<d$ và $x=(a+b)(c+d),\ y=(a+c)(b+d),\ z=(a+d)(b+c)$. Sắp xếp theo thứ tự giảm dần của x,y,z.

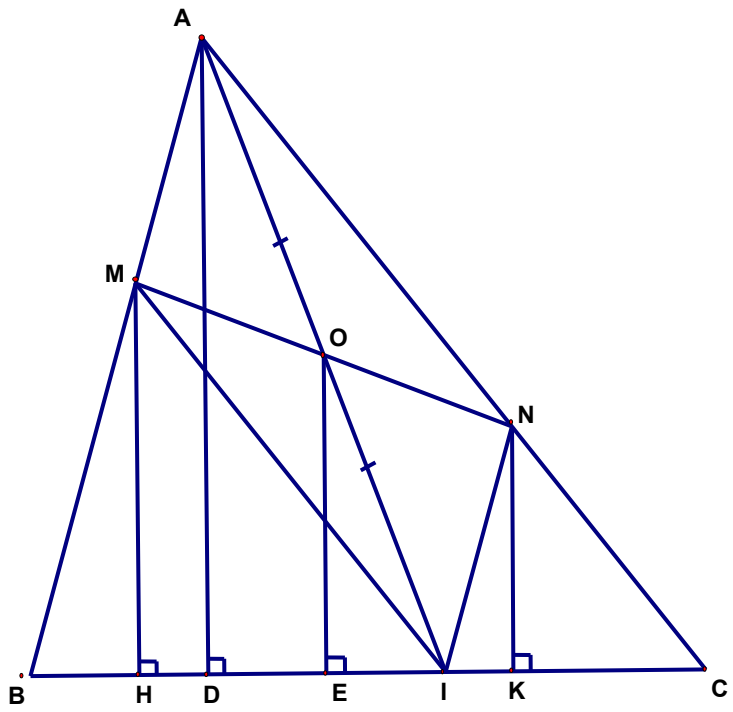
..... Hết .....

Họ và tên thí sinh: ....., Số báo danh: .....

ĐÁP ÁN

Chú ý: *Dưới đây là hướng dẫn cơ bản, bài làm của học sinh phải trình bày chi tiết. HS giải bằng nhiều cách khác nhau đúng vẫn cho điểm từng phần tương ứng.*

Câu	Ý	Nội Dung	Điểm
1	1	$x^2+2014x+2013=x^2+2013x+x+2013$	0.5
		$=x(x+2013)+(x+2013)$	1
		$=(x+1)(x+2013)$	0.5
	2	$x(x+2)(x^2+2x+2)+1=(x^2+2x)(x^2+2x+2)+1$	0.5
		$=(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)+1$	0.5
		$=(x^2+2x+1)^2$	0.5
		$=(x+1)^4$	0.5
2	1	Từ $\frac{1+2a}{15}=\frac{7-3a}{20}$ có $20(1+2a)=15(7-3a)$	0.5
		$\Rightarrow a=1$	0.5
		Thay $a=1$ vào tỉ lệ thức $\frac{1+2a}{15}=\frac{3b}{23+7a}$ ta được $\frac{1+2.1}{15}=\frac{3b}{23+7.1}$. Suy ra $b=2$	0.5
		Vậy $a=1$, $b=2$.	0.5
	2	Ta có $A=x^2+2y^2+2xy+2x-4y+2013$ $=x^2+2x(y+1)+y^2+2y+1+y^2-6y+9+2003$	0.5
		$=(x+y+1)^2+(y-3)^2+2003$	0.5

		Nhận thấy với mọi x,y ta có $(x+y+1)^2 \geq 0; (y-3)^2 \geq 0$. Suy ra $A \geq 2003$ Dấu "=" xảy ra khi $x=-4, y=3$	0.5
		Vậy Giá trị nhỏ nhất của A là 2003 đạt được khi $x=-4, y=3$	0.5
3	1	Dễ thấy $a^3-a=a(a+1)(a-1)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 3	0.5
		Xét hiệu $B-(a_1+a_2+...+a_{2013})=(a_1^3+a_2^3+...+a_{2013}^3)-(a_1+a_2+...+a_{2013})$ $=(a_1^3-a_1)+(a_2^3-a_2)+...+(a_{2013}^3-a_{2013})$ chia hết cho 3	0.5
		Mà $a_1, a_2, ...a_{2013}$ là các số tự nhiên có tổng bằng $2013^{2014}:3$.	0.5
		Do vậy B chia hết cho 3.	0.5
	2	Từ $2a^2+a=3b^2+b$ có $(a-b)(3a+3b+1)=a^2$	0.5
		Cũng có $(a-b)(2a+2b+1)=b^2$. Suy ra $(a-b)^2(2a+2b+1)(3a+3b+1)=(ab)^2$	0.5
		Gọi $(2a+2b+1, 3a+3b+1)=d$. Chứng minh được $d=1$	0.5
		$\Rightarrow 3a+3b+1$ là số chính phương $\Rightarrow a-b$ là số chính phương (đpcm)	0.5
4			
	1	Ta có IM//AC, IN//AB $\Rightarrow$ AMIN là hình bình hành	1
		$\Rightarrow$ MN cắt AI tại trung điểm mỗi đường . Mà O là trung điểm AI	0.5
		$\Rightarrow$ M, O, N thẳng hàng (đpcm)	0.5
	2	Kẻ OE vuông góc với BC. Chứng minh MHKN là hình thang vuông.	0.5
		Ta có O là trung điểm MN mà OE//MH//NK. Suy ra OE là đường trung bình của hình thang vuông MNKH nên MH + NK = 2OE (1)	0.5
		Xét ΔADI có O là trung điểm của AI và OE//AD. Suy ra OE là đường trung bình của ΔADI nên AD = 2OE (2)	0.5

		Từ (1) và (2) ta có MH + NK = AD (đpcm).	0.5
	3	Ta có MN // BC khi và chỉ khi MN là đường trung bình của ΔABC (Do O là trung điểm AI)	0.5
		$\Leftrightarrow$ I là trung điểm BC (Vì MI // AC, MA=MB)	1
		Vậy để MN song song với BC thì I là trung điểm BC	0.5
5		Xét hiệu $x-y=(a+b)(c+d)-(a+c)(b+d)=(d-a)(b-c)$	0.5
		Vì $d>a, b<c$ nên $(d-a)(b-c)<0$. Suy ra $x<y$ (1)	0.5
		Xét hiệu $y-z=(a+c)(b+d)-(a+d)(b+c)=(a-b)(d-c)$	0.5
		Vì $b>a, c<d$ nên $(a-a)(d-c)<0$. Suy ra $y<z$ (2) Từ (1) và (2) ta sắp xếp theo thứ tự giảm dần là $z>y>x$	0.5

uigeli.xyz **ĐỀ 17**	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **MÔN TOÁN LỚP 8** *Thời gian: 150 phút*

Câu 1. Cho phân thức $A=\dfrac{\left(5x^2+5y^2+5z^2\right)\left(x+y+z\right)^2+5\left(xy+yz+xz\right)^2}{\left(5x+5y+5z\right)^2-\left(25xy+25yz+25xz\right)}$

a) Tìm các giá trị của x, y, z để phân thức xác định

b) Rút gọn A

Câu 2

a) Tìm các giá trị của a để $h(x)=3x^2+ax-32$ chia cho $x+5$ có số dư là 3

b) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2+y+3=xy+x$

c) Phân tích đa thức $x^3+6x^2-13x-42$ thành nhân tử

Câu 3

a) Cho $M=\dfrac{a^4-16}{a^4-4a^3+8a^2-16a+16}$. Tìm $a\in\square$ để $M\in\square$

b) Biết $ax+by+cz=0$ và $a+b+c=\dfrac{1}{2016}$.

Tính $N=\dfrac{ax^2+by^2+cz^2}{bc\left(y-z\right)^2+ac\left(x-z\right)^2+ab\left(x-y\right)^2}$

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn, trực tâm H. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, vẽ các tia $Bx\perp AB$, $Cy\perp CA$ chúng cắt nhau tại D.

a) Tứ giác BHCD là hình gì? Vì sao?

b) Gọi E là điểm sao cho BC là đường trung trực của EH. Chứng minh tứ giác BCDE là hình thang cân.

c) BD cắt EH tại K. Tam giác ABC phải có thêm điều kiện gì để tứ giác HCDK là hình thang cân

Câu 5. Cho $0\le x,y,z\le 1$. Chứng minh rằng $0\le x+y+z-xy-yz-xz\le 1$

HƯỚNG DẪN

Câu 1

a) Ta có $(5x+5y+5z)^2-(25xy+25yz+25xz)=25\left[(x+y+z)^2-(xy+yz+xz)\right]$

Xét $(x+y+z)^2-(xy+yz+xz)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz=0$

$\Leftrightarrow (x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2=0$

$\Leftrightarrow x+y=y+z=z+x=0$

$\Leftrightarrow x=y=z=0$

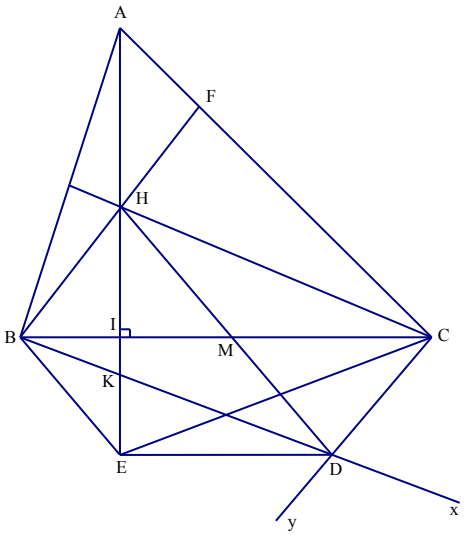
Để phân thức xác định thì x, y, z không đồng thời bằng 0

b) Đặt $x^2+y^2+z^2=a$ và $xy+yz+xz=b$ thì $(x+y+z)^2=a+2b$

Khi đó $A=\dfrac{a(a+2b)+b^2}{5(a+2b-b)}=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{5(a+b)}=\dfrac{(a+b)^2}{5(a+b)}=\dfrac{a+b}{5}$

Vậy $A=\dfrac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz}{5}$

Câu 4



a) HS tự làm

b) Gọi I là giao điểm của AE và BC, K là giao điểm của EH và BD

Ta có $IM//DE$ nên $BC//DE$, do đó tứ giác BCDE là hình thang

Lại có $CE=CH$ mà $CH=BD$ nên $BD=CE$, vậy tứ giác BDCE là hình thang cân

c) BH cắt AC tại F, ta có $\widehat{F}=90^0$

Hình thang HKDC là hình thang cân

$\widehat{KHC}=\widehat{HCD}\Leftrightarrow\widehat{KHC}=\widehat{CHF}$ (vì $\widehat{CHF}=\widehat{HCD}$ (so le trong))

$\Delta HIC=\Delta HFC\Leftrightarrow\widehat{HCI}=\widehat{HCF}$

$\Leftrightarrow$ CH là phân giác của góc ACB

$\Leftrightarrow\Delta ABC$ cân tại C.

Vậy HKDC là hình thang cân khi và chỉ khi ΔABC là tam giác cân tại C.

Câu 5

Từ $0\le x,y,z\le 1$ suy ra $x\ge xz$; $y\ge yz$ và $z\ge zx$ nên $x+y+z-xy-yz-xz\ge 0$ (1)

Xét $(1-x)(1-y)(1-z)=(x+y+z-xy-yz-xz-1-xyz)\ge 0$

$\Rightarrow x+y+z-xy-yz-xz\le 1-xyz\le 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $0 \le x+y+z-xy-yz-xz \le 1$

uigeli.xyz **ĐỀ 18**	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **MÔN TOÁN LỚP 8** *Thời gian: 150 phút*

Câu 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^4+2017x^2+2016x+2017$

b) $\left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z)^2+(xy+yz+xz)^2$

Câu 2

a) Một số điện thoại có 10 chữ số là $098716\overline{abcd}$. Hãy tìm bốn số cuối của bốn số điện thoại đó, biết rằng bốn số này tạo thành một số chính phương và nếu ta thêm vào mỗi chữ số của nó một đơn vị thì cũng được một số chính phương.

b) Chứng minh rằng với $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$, ta có $\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+...+\frac{1}{n^2+(n+1)^2} \le \frac{9}{20}$

Câu 3

a) Chứng minh rằng với $\forall x, y \in \mathbb{R}$, ta luôn có $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2} \ge \frac{1}{3}$

b) Cho $a+b+c=9$ và $a,b,c>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}$$

Câu 4

a) Tìm các số nguyên x, y, z biết $x^2+y^2+z^2<xy+3y+2z-3$

b) Phân tích đa thức $x^2-x-2015.2016$

Câu 5

1) Cho tam giác vuông ABC có độ dài các cạnh góc vuông AB=6cm, AC=8cm. M là điểm di chuyển trên cạnh huyền BC. Gọi D và E là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC. Khi đó tứ giác ADME có thể đạt được diện tích lớn nhất là bao nhiêu?

2) Cho hình vuông ABCD và một tứ giác MNPQ có bốn đỉnh thuộc bốn cạnh của hình vuông.

Chứng minh rằng:

a) $S_{ABCD}=\frac{AC}{4}(MN+NP+PQ+QM)$

b) Xác định vị trí của M, N, P, Q để chu vi tứ giác MNPQ nhỏ nhất

c) Xác định vị trí của M, N, P, Q để diện tích tứ giác MNPQ nhỏ nhất

HƯỚNG DẪN

Câu 1

b) Đặt $x^2+y^2+z^2=a$; $xy+yz+zx=b$, ta có $B=a(a+2b)+b^2=(a+b)^2$

Câu 2

a) Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases}\overline{abcd}=n^2\\ \overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}=m^2\end{cases}\ (31<m,n<100)$$

$$\Rightarrow m^2-n^2=1111=11.101=1111.1\Rightarrow\begin{cases}m-n=11\\ m+n=101\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=56\\ n=45\end{cases}$$

Vậy số điện thoại cần tìm là 0987162025

b) Ta có

$$\frac{1}{n^2+(n+1)^2}=\frac{1}{2n^2+2n+1}<\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{13}=\frac{1}{2^2+3^2}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{25}=\frac{1}{3^2+4^2}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

.....

$$\frac{1}{n^2+(n+1)^2}=\frac{1}{2n^2+2n+1}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+...+\frac{1}{n^2+(n+1)^2}<\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+....+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{9}{20}$$

Câu 4

a) $x^2+y^2+z^2<xy+3y+2z-3$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-3y-2z+3<0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-3y-2z+3\le -1$ (vì x, y, z là các số nguyên)

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+(z-1)^2\le 0$$

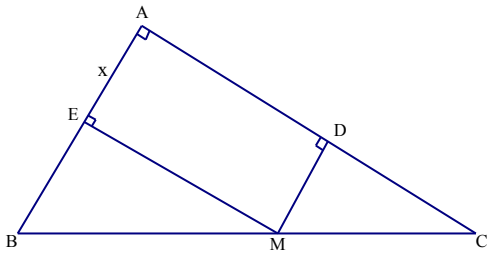
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=1\end{cases}$$

b) $x^2-x-2015.2016=x^2-2016x+2015x-2015.2016$

$=x(x-2016)+2015(x-2016)=(x-2016)(x+2015)$

Câu 5

1)



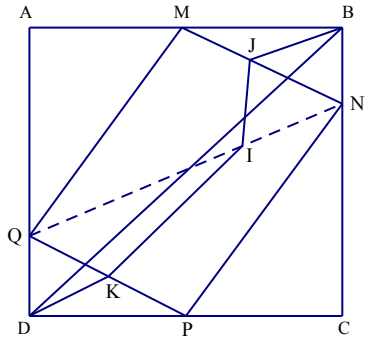
Đặt $AE=x\ (0<x<6)$

Ta có $\frac{BE}{AB}=\frac{EM}{AC}\Leftrightarrow\frac{6-x}{6}=\frac{EM}{8}\Leftrightarrow EM=\frac{4}{3}(6-x)$

$$S_{ADME} = AE.AD = x.\frac{4}{3}(6-x) = \frac{4}{3}(6x-x^2) = -\frac{4}{3}(x^2+6x) = -\frac{4}{3}\left[(x+3)^2-9\right] \le 9.\frac{4}{3} - \frac{4}{3}(x+3)^2$$

Vậy $minS_{ADME} = 12 \Leftrightarrow x = 3 \Leftrightarrow M$ là trung điểm của BC

2)



a) Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của QN, MN, PQ ta có

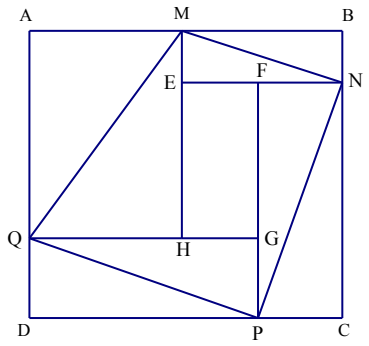
$$BJ = \frac{1}{2}MN \; ; \; IJ = \frac{1}{2}QM \; ; \; KI = \frac{1}{2}PN \; ; \; DK = \frac{1}{2}PQ$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{4}(MN+NP+PQ+QM) = \frac{AC}{2}(BJ+JI+IK+KD) \ge \frac{AC.BD}{2} = S_{ABCD}$$

b) Theo phần a) chu vi tứ giác MNPQ đạt giá trị nhỏ nhất khi đường gấp khúc BJIKD trùng với đoạn BD, tức là khi $MN//AC//PQ$ và $MQ//BD//NP$ lúc đó tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

Vậy với mọi hình chữ nhật nội tiếp hình vuông đã cho đều có chu vi bằng nhau và chu vi đó nhỏ nhất so với chu vi tất cả các tứ giác nội tiếp hình vuông này.

c)



Từ các đỉnh M, N, P, Q ta dựng các đường thẳng song song với các cạnh của hình vuông. Các đường thẳng đó hoặc trùng nhau hoặc song song.

Nếu chúng song song từng đôi thì giao điểm của chúng sẽ tạo thành hình chữ nhật. Ta có

$$S_{MNPQ} = S_{MHQ} + S_{QGP} + S_{PFN} + S_{MEN} + S_{EFGH}$$

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}\left(S_{AMHQ} + S_{QGPD} + S_{PFNC} + S_{EFGH} + S_{MEBN}\right) = \frac{1}{2}S_{ABCD} + \frac{1}{2}S_{EFGH} \ge \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

Do đó S_{MNPQ} đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow S_{EFGH} = 0 \Leftrightarrow EF \equiv HG$ hoặc $HE \equiv FG$

Vậy tứ giác nội tiếp hình vuông có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi có ít nhất một trong hai đường chéo của nó song song với cạnh của hình vuông

uigeli.xyz ĐỀ 19	ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 8 *Thời gian: 150 phút*

Câu 1. Cho a, b là bình phương của hai số nguyên lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng $ab-a-b+1$ chia hết cho 48.

Câu 2

a) Giải phương trình:

$$\left(2x^2+x-2016\right)^2+4\left(x^2-5x-2015\right)^2=4\left(2x^2+x-2016\right)\left(x^2-5x-2015\right)$$

b) Cho các số a, b, c, d thỏa mãn $abcd=1$. Tính giá trị của biểu thức

$$M=\frac{1}{abc+ab+a+1}+\frac{1}{bcd+bc+b+1}+\frac{1}{acb+cd+c+1}+\frac{1}{abd+ad+d+1}$$

Câu 3. Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn khi chia cho $x-3$ thì dư 17; khi chia cho $x-1$ dư 3. tìm dư của phép chia $P(x)$ cho x^2-4x+3

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AA'; BB'; CC', trực tâm H

a) Tính tổng $\frac{AH}{AA'}+\frac{BH}{BB'}+\frac{CH}{CC'}$

b) Gọi AI là phân giác của tam giác ABC; IM, IN theo thứ tự là phân giác của các góc AIC; AIB ($M\in AC$, $N\in AB$). Chứng minh $AN.BI.CM=BN.IC.AM$

c) Tam giác ABC phải thỏa mãn điều kiện gì thì biểu thức $\frac{\left(AB+BC+CA\right)^2}{AA'^2+BB'^2+CC'^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 5. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2016$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x+y}{x^2+y^2}+\frac{y+z}{y^2+z^2}+\frac{z+x}{z^2+x^2}$

HƯỚNG DẪN

Câu 1

Ta có $ab-a-b+1=(a-1)(b-1)$

Vì a, b là bình phương của hai số nguyên lẻ liên tiếp nên $a=(2n+1)^2$, $b=(2n+3)^2$, ($n\in\mathbb{Z}$), suy ra $ab-a-b+1=(a-1)(b-1)=16n(n+1)^2(n+2)$

Vì n, $(n+1)$, $(n+2)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 3, mà $(16,3)=1$ nên $16n(n+1)^2(n+2)\vdots 48$ nên $ab-a-b+1\vdots 48$.

Câu 2

a) Đặt $2x^2+x-2016=a$; $x^2-5x-2015=b$, ta có

$a^2+4b^2=4ab\Leftrightarrow(a-2b)^2=0\Leftrightarrow a=2b$, từ đó tìm ra x

Câu 3

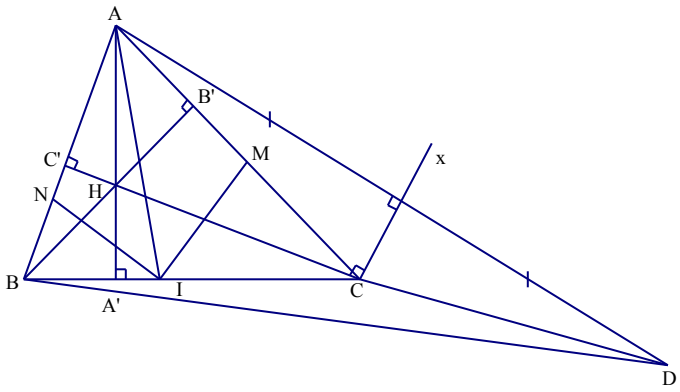
Vì đa thức chia là x^2-4x+3 có bậc hai nên đa thức dư có dạng $ax+b$

Ta có $P(x)=(x-1)(x-3).Q(x)+ax+b$

$P(3)=17\Rightarrow 3a+b=17$ và $P(1)=3\Rightarrow a+b=3$

Do đó $a=7$; $b=-4$ nên đa thức dư có dạng $7x-4$

Câu 4



a) Ta có

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AA'.BC$; $S_{BHA}=\frac{1}{2}BA'.AH$; $S_{CHA}=\frac{1}{2}CA'.AH$

$\Rightarrow \frac{S_{AHB}+S_{AHC}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{(A'B+A'C).AH}{2}}{\frac{AA'.BC}{2}}=\frac{AA'}{AH}$

Chứng minh tương tự ta có:

$\frac{S_{AHB}+S_{BHC}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{(AB'+B'C).BH}{2}}{\frac{BB'.AC}{2}}=\frac{BH}{BB'}$ $\frac{S_{BHC}+S_{AHC}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{(BC'+AC').CH}{2}}{\frac{CC'.AB}{2}}=\frac{CH}{CC'}$;

$\frac{AH}{AA'}+\frac{BH}{BB'}+\frac{CH}{CC'}=\frac{S_{AHB}+S_{AHC}+S_{AHB}+S_{BHC}+S_{BHC}+S_{AHC}}{S_{ABC}}=\frac{2S_{ABC}}{S_{ABC}}=2$

b) Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có:

$\frac{AN}{BN}=\frac{AI}{BI}$; $\frac{BI}{IC}=\frac{AB}{AC}$; $\frac{CM}{AM}=\frac{IC}{AI}$, từ đó suy ra

$\frac{AN}{BN}.\frac{BI}{IC}.\frac{CM}{AM}=\frac{AI}{BI}.\frac{AB}{AC}.\frac{IC}{AI}=\frac{AB}{AC}.\frac{IC}{BI}=\frac{AB}{AC}.\frac{AC}{AB}=1\Rightarrow AN.BI.CM=BN.IC.AM$

c) Vẽ $Cx\perp CC'$, gọi D là điểm đối xứng với A qua Cx

Ta có tam giác BAD vuông tại A và $CD=CA$; $AD=2CC'$

Xét ba điểm B, C, D, ta có $BD\le BC+CD$

ΔBAD vuông tại A nên $AB^2+AD^2=BD^2$

$\Rightarrow AB^2+AD^2\le (BC+CD)^2$

$\Rightarrow AB^2+4CC'^2\le (BC+AC)^2$

$\Rightarrow 4CC'^2\le (BC+AC)^2-AB^2$

Chứng minh tương tự ta có:

$4AA'^2\le (AB+AC)^2-BC^2$

$4BB'^2 \le (AB+BC)^2 - AC^2$

$\Rightarrow 4(AA'^2+BB'^2+CC'^2) \le (AB+BC+CA)^2 \Rightarrow \dfrac{(AB+BC+CA)^2}{AA'^2+BB'^2+CC'^2} \ge 4$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow BC=AC; AC=AB; AB=BC \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Câu 5

Áp dụng các bất đẳng thức $2(a^2+b^2) \ge (a+b)^2$; $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a+b}$

Ta có

$$P = \frac{x+y}{x^2+y^2} + \frac{y+z}{y^2+z^2} + \frac{z+x}{z^2+x^2} = \frac{2(x+y)}{2(x^2+y^2)} + \frac{2(y+z)}{2(y^2+z^2)} + \frac{2(z+x)}{2(z^2+x^2)}$$

$$P \le \frac{2(x+y)}{(x+y)^2} + \frac{2(y+z)}{(y+z)^2} + \frac{2(z+x)}{(z+x)^2} = 2\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right) \le 2.\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)$$

$$P \le 2.\frac{2}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \le 2016$$

Vậy $minP = 2016 \Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{3}{2016}$

uigeli.xyz **ĐỀ 20**	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **MÔN TOÁN LỚP 8** *Thời gian: 150 phút*

Câu 1. Chứng minh rằng:

a) Nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9.

b) Tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng 1 luôn là số chính phương.

Câu 2. Cho biểu thức $B = \left(\dfrac{1-x^3}{1-x} - x\right) : \dfrac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3}$

a) Rút gọn biểu thức B

b) Tính giá trị của biểu thức B tại $x = -1\dfrac{2}{3}$

c) Tìm giá trị của x để $B < 0$

Câu 3

a) Giải phương trình $(x^2-5x+6)^3 + (1-x^2)^3 = (7-5x)^3$

b) Cho $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ và $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$. Chứng minh rằng $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Câu 4. Cho hình chữ nhật ABCD. Trên đường chéo BD lấy điểm P, gọi M là điểm đối xứng của điểm C qua P.

a) Tứ giác AMDB là hình gì? Tại sao?

b) Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB và AD. Chứng minh $EF // AC$ và ba điểm E, F, P thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng tỉ số các cạnh của hình chữ nhật MEAF không phụ thuộc vào vị trí của điểm P.

d) Giả sử $CP \perp BD$ và $CP = 2,4cm$, $\frac{PD}{PB} = \frac{9}{16}$. Tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật ABCD.

Câu 5. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thoả mãn đồng thời các điều kiện: $x + y + z > 11$ và $8x + 9y + 10z = 100$

HD CHẤM THI Môn: Toán

Câu 1: (4 điểm)

a. (2,0)	Gọi 2 số phải tìm là a và b, ta có a + b chia hết cho 3. 0,25 Ta có $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)\left[(a^2 + 2ab + b^2) - 3ab\right] =$ $= (a + b)\left[(a + b)^2 - 3ab\right]$ 0,5 Vì a + b chia hết cho 3 nên $(a + b)^2$ - 3ab chia hết cho 3; Do vậy $(a + b)\left[(a + b)^2 - 3ab\right]$ chia hết cho 9	0,25 0,5 0,25 0,5 0,5
b. (2,0)	Gọi 4 số tự nhiên, liên tiếp đó là: n, n + 1, n + 2, n + 3 (n ∈ N). Ta có n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = n.(n + 3(n + 1)(n + 2) + 1 $= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$ (*) Đặt $n^2 + 3n = t$ (t ∈ N) thì (*) = t(t + 2) + 1 = $t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2$ $= (n^2 + 3n + 1)^2$ Vì n ∈ N nên $n^2 + 3n + 1$ ∈ N Vậy n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 là số chính phương	0,25 0,25 0,5 0,25 0,25 0,5

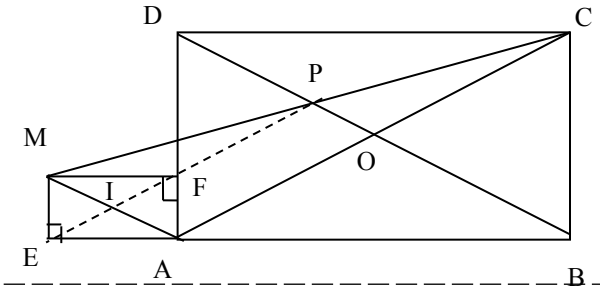
Câu 2 (*4,0 điểm*) .

a, (2 điểm) Với x khác -1 và 1 thì: $A = \frac{1 - x^3 - x + x^2}{1 - x} : \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 + x)(1 - x + x^2) - x(1 + x)}$ $= \frac{(1 - x)(1 + x + x^2 - x)}{1 - x} : \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 + x)(1 - 2x + x^2)} (1 + x^2) : \frac{1}{(1 - x)}$ $= (1 + x^2)(1 - x)$	0,5 1,0 0,5
b, (1 điểm) Tại x = $-1\frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$ thỡ A = $\left[1 + (-\frac{5}{3})^2\right] - \left[1 - (-\frac{5}{3})\right]$ $= (1 + \frac{25}{9})(1 + \frac{5}{3}) = \frac{34}{9} \cdot \frac{8}{3} = \frac{272}{27} = 10\frac{2}{27}$	0,25 0,75
c, (1 điểm) Với x khác -1 và 1 thì B < 0 khi và chỉ khi $(1 + x^2)(1 - x) < 0$ (1) Vì $1 + x^2 > 0$ với mọi x nên (1) xảy ra khi và chỉ khi $1 - x < 0 \Leftrightarrow x > 1$ KL: B < 0 khi và chỉ khi x > 1	0,25 0,5 0,25

Câu 3: (4,0 điểm)

a. (2,0)	Đặt $x^2 - 5x + 6 = a$, $1 - x^2 = b$ thì $a + b = 7 - 5x$ Phương trình trở thành $a^3 + b^3 = (a + b)^3$ Biến đổi thành $ab(a + b) = 0$ <=> a = 0 hoặc b = 0 hoặc a + b = 0 Từ đó tìm được S = {**2; 3; -1; 1; 1,2**}	0,5 0,5 1,0
b (2,0)	Từ : $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0 \Leftrightarrow \frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}=0$ $\Leftrightarrow ayz + bxz + cxy = 0$ Ta có : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow (\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c})^2=1$ $\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2(\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc})=1$ $\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\frac{cxy+bxz+ayz}{abc}=1$ $\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(dfcm)$	*0,5* *0,5* *0,5* *0,5*

Câu 4. (6,0 điểm):

Vẽ hình, ghi GT, KL đúng  	0,25
a) Gọi O là giao điểm 2 đường chéo của hình chữ nhật ABCD. PO là đường trung bình của tam giác CAM (...) AM//PO $\Rightarrow$ Tứ giác AMDB là hình thang.	1,0
b) Do AM //BD nên góc OBA = góc MAE (đồng vị) Tam giác AOB cân ở O nên góc OBA = góc OAB Gọi I là giao điểm 2 đường chéo của hình chữ nhật AEMF thì tam giác AIE cân ở I nên góc IAE = góc IEA. Từ chứng minh trên : có góc FEA = góc OAB, do đó EF//AC (1) Mặt khác IP là đường trung bình của tam giác MAC nên IP // AC (2) Từ (1) và (2) suy ra ba điểm E, F, P thẳng hàng.	1,75
c) Chứng minh Δ MAF ~ Δ DBA (g-g) nên => $\frac{MF}{FA}=\frac{AB}{AD}$ không đổi.	1,0
d) Nếu $\frac{PD}{PB}=\frac{9}{16}$ thì $\frac{PD}{9}=\frac{PB}{16}=k \Rightarrow PD=9k, PB=16k$ Nếu $CP \perp BD$ thì Δ CBD ~ Δ DCP (g-g) => $\frac{CP}{PD}=\frac{PB}{CP}$ do đó $CP^2 = PB.PD$ hay $(2,4)^2 = 9.16\ k^2$ => k = 0,2 PD = 9k = 1,8(cm); PB = 16k = 3,2 (cm => **BD** = 5 (cm)	2,0

C/m $BC^2 = BP.BD = 16$ do đó **BC** = 4 (cm); **CD** = 3 (cm)	

Câu 5. (2,0 điểm)

Ta có: $8x + 8y + 8z < 8x + 9y + 10z = 100 \Rightarrow x + y + z < \frac{100}{8} < 13$	0,5
cùng với giả thiết, có $11 < x + y + z < 13$, nhưng $x + y + z \in Z \Rightarrow x + y + z = 12$	0,5
Ta có hệ: $x + y + z = 12$ (1); $8x + 9y + 10z = 100$ (2).	0,25
Nhân 2 vế của (1) với 8 rồi trừ vế-vế của (2) cho (1), được: $y + 2z = 4$ (3)	0,25
Từ (3) suy ra $z = 1$ (vì nếu $z \geq 2$ thì do $y \geq 1 \Rightarrow y + 2z \geq 4$, mâu thuẫn)	0,25
Với $z = 1$, tìm được $y = 2$ và $x = 9$.	0,25
Thử lại, thấy đúng. Vậy có duy nhất bộ $x = 9$, $y = 2$ và $z = 1$ thoả mãn.	