

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày ... tháng 01 năm 2024

(Đề có 01 trang, gồm 05 câu)

Câu I: (4 điểm).

1. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x-4}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right) : \left(1 - \frac{x-8}{x^2+x+1} \right)$ (với $x \neq 1$).

a) Rút gọn P;

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

2. Cho $a^2(b+c) = b^2(c+a) = 2023$ với a, b, c đôi một khác nhau và khác không.

Tính giá trị của biểu thức $c^2(a+b)$.

Câu II: (4 điểm).

1. Giải phương trình : $2(6x+7)^2(3x+4)(x+1) - 12 = 0$

2. Để lập đội tuyển năng khiếu bóng rổ của trường, thầy giáo thể dục đưa ra quy định tuyển chọn như sau: Mỗi bạn dự tuyển được sẽ được ném 10 quả bóng vào rổ, quả bóng nào vào rổ được cộng 4 điểm; quả bóng nào ném ra ngoài bị trừ 2 điểm. Nếu bạn nào có số điểm từ 22 điểm trở lên thì sẽ được vào đội tuyển. Hỏi mỗi học sinh muốn được chọn vào đội tuyển thì phải ném ít nhất bao nhiêu quả vào rổ?

Câu III: (4 điểm).

1. Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$.

2. Cho số tự nhiên $n > 2$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p-1$ chia hết cho n đồng thời n^3-1 chia hết cho p . Chứng minh rằng $n+p$ là một số chính phương.

Câu IV: (6 điểm).

Cho tam giác ABC vuông tại C, đường cao CH. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của ba đường phân giác trong các tam giác ACH, BCH. Gọi M là giao điểm của BF và CE, N là giao điểm của AE và CF. Đường thẳng EF lần lượt cắt AC, BC tại P, K.

1. Chứng minh MCF vuông cân và $CM.CE = CN.CF$

2. Gọi I là giao điểm của AE và BF. Gọi T, Q lần lượt là hình chiếu của I trên AC, BC. Chứng minh tứ giác ETQF là hình bình hành.

3. Chứng minh $S_{ACB} \geq 2.S_{CPK}$ (Ký hiệu S_{ACB}, S_{CPK} là diện tích của các tam giác ACB và CPK)

Câu V: (2 điểm).

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức:
$$A = \frac{bc}{a^2 + 3} + \frac{ca}{b^2 + 3} + \frac{ab}{c^2 + 3}$$

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN CHẤM

CÂU	Ý	Nội dung	Điểm
I		Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x-4}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right) : \left(1 - \frac{x-8}{x^2+x+1} \right)$ (với $x \neq 1$).	
4đ	1a	<p>a) Rút gọn P</p> <p>Với $x \neq 1$ ta có:</p> $P = \left(\frac{x-4}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right) : \left(1 - \frac{x-8}{x^2+x+1} \right)$ $P = \left(\frac{x-4}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) : \left(\frac{x^2+x+1-x+8}{x^2+x+1} \right)$ $P = \frac{x-4+x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} : \frac{x^2+9}{x^2+x+1}$ $P = \frac{x^2+2x-3}{(x-1)(x^2+x+1)} : \frac{x^2+9}{x^2+x+1}$ $P = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2+9}$ $P = \frac{x+3}{x^2+9}$ <p>Vậy $x \neq 1$ thì $P = \frac{x+3}{x^2+9}$</p>	<p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p>
	1b	b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên	

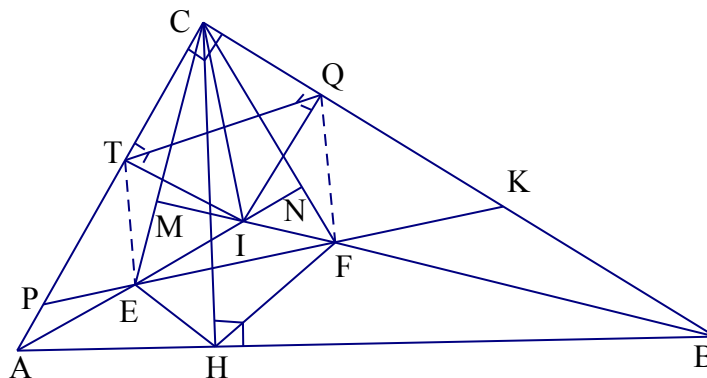
		<p>Với $x \neq 1$ thì $P = \frac{x+3}{x^2+9}$</p> <p>Đề P nhận giá trị nguyên khi x nguyên thì:</p> $x+3 : x^2+9 \Rightarrow (x+3)(x-3) : x^2+9 \Leftrightarrow x^2-9 : x^2+9 \Leftrightarrow (x^2+9)-18 : x^2+9$ <p>Suy ra $18 : x^2+9 \Rightarrow x^2+9 \in U(18)$.</p> <p>Vì $x^2+9 \geq 9, \forall x$ nên $x^2+9 = 9$ hoặc $x^2+9 = 18$.</p> <p>- Nếu $x^2+9 = 9$ thì $x = 0$ (thỏa mãn ĐKXD).</p> <p>- Nếu $x^2+9 = 18$ thì $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$ (thỏa mãn ĐKXD).</p> <p>Thử lại thấy $x = 0$ và $x = 3$ thì P không có giá trị nguyên (loại).</p> <p>Khi $x = -3$ thì $P = 0$ (thỏa mãn).</p> <p>Vậy với $x = -3$ thì P nhận giá trị nguyên.</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>
	2	<p>Cho $a^2(b+c) = b^2(c+a) = 2023$ với a, b, c đôi một khác nhau và khác không. Tính giá trị của biểu thức $c^2(a+b)$.</p> <p>Ta có</p> $a^2(b+c) = b^2(c+a) \Leftrightarrow a^2b + a^2c - b^2c - ab^2 = 0$ $\Leftrightarrow ab(a-b) + c(a-b)(a+b) = 0$ $\Leftrightarrow (a-b)(ab+bc+ca) = 0$ <p>Mà $a-b \neq 0$, suy ra:</p> $ab+bc+ca = 0 \Leftrightarrow bc = -a(b+c) \Leftrightarrow -abc = a^2(b+c) = 2023. (1)$ $ab+bc+ca = 0 \Leftrightarrow ab = -c(a+b) \Leftrightarrow -abc = c^2(a+b). (2)$ <p>Từ (1) và (2) ta được $c^2(a+b) = 2023$.</p> <p>Vậy $c^2(a+b) = 2023$</p>	<p>1,0</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p>
II		Giải phương trình: $2(6x+7)^2(3x+4)(x+1) - 12 = 0$	
	1	<p>Ta có: $2(6x+7)^2(3x+4)(x+1) - 12 = 0$</p> $\Leftrightarrow 2(6x+7)^2(3x+4)(x+1) = 12$ $\Leftrightarrow (6x+7)^2(6x+8)(6x+6) = 72$ <p>Đặt $6x+7 = t$, đẳng thức trên trở thành $t^2(t+1)(t-1) = 72$</p> $\Leftrightarrow t^2(t^2-1) = 72$ $\Leftrightarrow t^4 - t^2 - 72 = 0$ $\Leftrightarrow (t^2+8)(t^2-9) = 0$	0.5

4 đ	2	$\Leftrightarrow t^2 = 9$ (Vì $t^2 + 8$ dương) $\Leftrightarrow t = 3$ hoặc $t = -3$ Nếu $t = 3$ suy ra $x = -\frac{2}{3}$ Nếu $t = -3$, suy ra $x = -\frac{5}{3}$ Vậy $x = -\frac{2}{3}$ hoặc $x = -\frac{5}{3}$	0.5
-----	---	--	---

	<p>Ta có: $n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1) \vdots p(1)$</p> <p>Lại có $p - 1 \vdots n \Rightarrow p - 1 \geq n \Rightarrow p \geq n + 1 \Rightarrow p > n - 1$</p> <p>Do đó $n - 1$ Không chia hết cho P (2)</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra: $n^2 + n + 1 \vdots p$ (3)</p> <p>Vì $p - 1 \vdots n$ nên $p - 1 = kn (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow p = kn + 1$ (4)</p> <p>Từ (3) và (4) Suy ra:</p> $n^2 + n + 1 \vdots kn + 1 \Rightarrow kn + 1 \leq n^2 + n + 1 \Rightarrow kn \leq n^2 + n \Rightarrow k \leq n + 1 (*)$ <p>Mặt khác:</p> $k(n^2 + n + 1) - n(kn + 1) \vdots kn + 1$ $\Rightarrow kn^2 + kn + k - kn^2 - n \vdots kn + 1$ $\Leftrightarrow (k - 1)n + k \vdots kn + 1$ <p>Vì $k \geq 1 \Rightarrow k - 1 \geq 0 \Rightarrow (k - 1)n + k > 0$</p> <p>Nên $(k - 1)n + k \geq kn + 1 \Rightarrow kn - n + k \geq kn + 1 \Rightarrow k \geq n + 1 (**)$</p> <p>Từ (*) và (**) suy ra: $k = n + 1$</p> <p>Khi đó: $p = kn + 1 = (n + 1)n + 1 = n^2 + n + 1$</p> <p>Suy ra: $p + n = n^2 + n + 1 + n = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$</p> <p>Vậy $p + n$ là số chính phương (đpcm)</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>
IV	<p>Cho tam giác ACB vuông tại C, đường cao CH. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của ba đường phân giác trong các tam giác ACH, BCH. Gọi M là giao điểm của BF và CE, N là giao điểm của AE và CF. Đường thẳng EF lần lượt cắt AC, BC tại P, K.</p> <p>1. Chứng minh MCF vuông cân và $CM \cdot CE = CN \cdot CF$</p> <p>2. Gọi I là giao điểm của AE và BF. Gọi T, Q lần lượt là hình chiếu của I trên AC, BC. Chứng minh tứ giác ETQF là hình bình hành.</p> <p>3. Chứng minh $S_{ACB} \geq 2 \cdot S_{CPK}$ (Ký hiệu S_{ACB}, S_{CPK} là diện tích của các tam giác ACB và CPK)</p>	

6đ

Vẽ hình chính xác, ghi GT, KL đúng và đầy đủ.



1) Chứng minh MCF vuông cân tại M và $CM.CE = CN.CF$

2,0

Vì CE, CF lần lượt là tia phân giác các góc ACH, BCH nên :

$$\angle ECF = \angle ECH + \angle FCH = \frac{\angle ACH}{2} + \frac{\angle BCH}{2} = \frac{\angle ACB}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \text{ hay } \angle MCF = 45^\circ \quad (1)$$

Vì BF, CF lần lượt là tia phân giác các góc HBC, BCH nên :

$$\angle CFM = \angle FCB + \angle FBC = \frac{\angle BCH}{2} + \frac{\angle CBH}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \quad (2)$$

1

Từ (1) và (2) suy ra: $\angle MCF = \angle CFM = 45^\circ$. Suy ra tam giác MCF vuông cân tại M (đpcm).

0.25

Chứng minh tương tự ta cũng có tam giác NCE vuông cân tại N. Suy ra hai tam giác MCF và NCE là các tam giác vuông tại M, N.

0.25

Hai tam giác vuông MCF và NCE có chung góc nhọn MCF nên đồng dạng

$$\frac{CM}{CN} = \frac{CF}{CE} \Leftrightarrow CM.CE = CN.CF \quad (\text{đpcm})$$

0,5

với nhau (g.g). Suy ra:

2

2) Gọi I là giao điểm của AE và BF. Gọi T, Q lần lượt là hình chiếu của I trên AC, BC. Chứng minh tứ giác ETQF là hình bình hành. Ta có

$$\triangle OAC = \triangle OMC \Rightarrow OA = OM \text{ và } AC = CM$$

Vì $FM \perp CE, EN \perp CF$ nên I là trực tâm của tam giác CEF. Suy ra: $EF \perp CI$.

0.5

Vì AE và BF là các tia phân giác các góc ABC, ACB nên I cũng là giao điểm ba đường phân giác trong tam giác ACB. Suy ra $IT = IQ$.

Tứ giác CTIQ có ba góc vuông $\angle CTI = \angle CQI = \angle TCQ = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.

0,5

Hình chữ nhật CTIQ có hai cạnh bên bằng nhau $IT = IQ$ nên là hình vuông.

	<p>Suy ra $TQ = CI; TQ \perp CI$ (1)</p> <p>Xét hai tam giác CMI và FME có $CM = FM$ (vì tam giác MCF cân tại M), $\angle CMI = \angle FME = 90^\circ$, $MI = ME$ (vì tam giác MIE vuông cân tại M). $\Rightarrow \triangle CMI = \triangle FME (c.g.c)$ Suy ra $EF = CI$ (2)</p> <p>Từ (1), (2) suy ra $EF = TQ$. Mặt khác $EF \parallel TQ$ (do cùng vuông góc với CI). Do đó tứ giác ETQF có hai cạnh đối song song và bằng nhau. Vậy tứ giác ETQF là hình bình hành.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>
3	<p>3) Chứng minh $S_{ACB} \geq 2.S_{CPK}$ (kí hiệu S_{ACB}, S_{CPK} là diện tích của các tam giác ACB và CPK)</p> <p>Tam giác vuông CPK có tia phân giác góc PCK vuông góc với cạnh PK nên $\angle CPK = \angle CKP = 45^\circ; CP = CK$. (3) là tam giác vuông cân tại P. Do đó:</p> <p>Xét tam giác CEP và tam giác CEH có: $\angle CPE = \angle CHE (= 45^\circ)$, CE là cạnh chung, $\angle ECP = \angle ECH$. Do đó: $\triangle CEP = \triangle CEH (g.c.g) \Rightarrow CP = CH$ (4)</p> $CH = CP = CK \Rightarrow S_{CPK} = \frac{CP.CK}{2} = \frac{CH^2}{2} \quad (5)$ <p>Từ (3) và (4) suy ra:</p> <p>Xét hai tam giác ACH và CBH có $\angle AHC = \angle CHB = 90^\circ, \angle HAC = \angle HCB$ (do cùng phụ với góc ACH). Do đó:</p> $\triangle AHC \sim \triangle CHB (g.g) \Rightarrow \frac{HA}{HC} = \frac{HC}{HB} \Leftrightarrow CH^2 = HA.HB \quad (6).$ <p>Ta luôn có $(HA + HB)^2 \geq 4.HA.HB$ Do đó:</p> $(S_{ACB})^2 = \frac{CH^2 . AB^2}{4} = \frac{CH^2 . (HA + HB)^2}{2} \geq \frac{CH^2 . 4.HA.HB}{4} \quad (7).$ <p>Từ (5), (6), (7) $S_{ACB} \geq 2.S_{CPK}$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
V	<p>Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.</p> <p>Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{bc}{a^2 + 3} + \frac{ca}{b^2 + 3} + \frac{ab}{c^2 + 3}$</p>	
2đ	<p>$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ (*) ($a, b, x, y > 0$),</p> <p>+) Chứng minh được BĐT phụ</p>	

	đẳng thức xảy ra khi $ay = bx$.	
	<p>Ta có: $(b+c)^2 \geq 4bc \Leftrightarrow \frac{4bc}{a^2+3} \leq \frac{(b+c)^2}{a^2+3}$. Đẳng thức xảy ra khi $b = c$ (1)</p> <p>Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:</p> $\frac{(b+c)^2}{a^2+3} = \frac{(b+c)^2}{a^2+a^2+b^2+c^2} \leq \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2}$ <p>Đẳng thức xảy ra khi: $b(a^2 + c^2) = c(a^2 + b^2)$</p> $\Leftrightarrow a^2(b-c) - bc(b-c) = 0 \Leftrightarrow (b-c)(a^2 - bc) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ a^2 = bc \end{cases} \quad (2)$	0.25
	<p>Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{4bc}{a^2+3} \leq \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2}$</p> <p>Đẳng thức xảy ra khi $b = c$.</p>	0.25
	<p>Tương tự ta có: $\frac{4ca}{b^2+3} \leq \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{b^2+c^2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = c$;</p> $\frac{4ab}{c^2+3} \leq \frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2}$ <p>Đẳng thức xảy ra khi $a = b$;</p>	0.25
	<p>Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức ta được:</p> $4\left(\frac{bc}{a^2+3} + \frac{ca}{b^2+3} + \frac{ab}{c^2+3}\right) \leq \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{b^2+c^2} + \frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} = 3$ <p>Su</p> <p>y ra $A = \frac{bc}{a^2+3} + \frac{ca}{b^2+3} + \frac{ab}{c^2+3} \leq \frac{3}{4}$</p> <p>Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} a = b = c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$</p> <p>Vậy $\text{Max} A = \frac{3}{4} \Leftrightarrow a = b = c = 1$</p>	0.25

Chú ý:

1. Thí sinh có thể làm bài bằng cách khác, nếu đúng vẫn được điểm tối đa.
2. Nếu thí sinh chứng minh bài hình mà không vẽ hình thì không chấm điểm bài hình.

TRƯỜNG THCS QUẢNG THÁI

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2023-2024
MÔN: TOÁN LỚP 8
 (Thời gian làm bài: 150 phút)

Đề bài

Bài 2: (2 điểm): Phân tích thành nhân tử

a. $x^4 + x^3 - 4x - 4$

b. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1$

Bài 2: (2 điểm): Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$$

a, Tìm điều kiện của x để A xác định.

b, Rút gọn biểu thức A.

c, Tìm giá trị của x để $A > 0$

Bài 3: (5 điểm).

a) Giải phương trình: $\frac{2x+3}{2x+1} - \frac{2x+5}{2x+7} = 1 - \frac{6x^2+9x-9}{(2x+1)(2x+7)}$

b) Tìm x biết: $6x^4 - 11x^3 + 3x^2 + 11x - 6x^2 - 3 = 0$.

c) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $5x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 40 = 0$.

Bài 4: (3 điểm).

a) Cho $abc \neq \pm 1$ và $\frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a}$. Chứng minh rằng $a = b = c$.

b) Đa thức $f(x) = 4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x-2$; $x+1$. Tính $2a-3b$.

Bài 5: (6,0 điểm)

Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt BD ở E và cắt CD ở K. Qua B kẻ đường thẳng song song với AD cắt AC ở F và cắt CD ở I. Chứng minh rằng:

a) $DK = CI$

b) $EF \parallel CD$

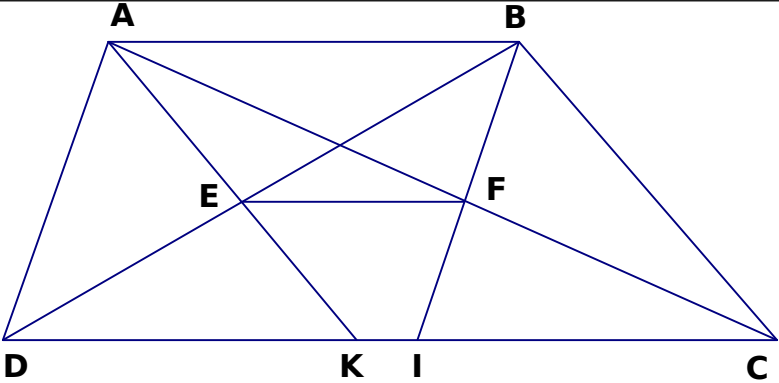
c) $AB^2 = CD \cdot EF$

Bài 6: (2 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng

minh rằng: $\frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{y^2 + y} + \frac{1}{z^2 + z} \geq \frac{3}{2}$.

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	ĐÁP ÁN	Điểm
Bài 1 2đ	<p>a) $x^4 + x^3 - 4x - 4 = x^3(x+1) - 4(x+1)$ $= (x+1)(x^3 - 4)$</p> <p>b) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1$ $= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) + 1$ $= [(x^2+5x+5) - 1][(x^2+5x+5) + 1] + 1 = (x^2+5x+5)^2$</p>	<p>1,0</p> <p>1,0</p>
Bài 2 2đ	<p>a) $x \neq 2, x \neq -2, x \neq 0$</p> <p>b) $A = \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \frac{6}{x+2}$ $= \frac{x-2(x+2)+x-2}{(x-2)(x+2)} : \frac{6}{x+2}$ $= \frac{-6}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{6} = \frac{1}{2-x}$</p> <p>c) Để $A > 0$ thì $\frac{1}{2-x} > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$</p>	<p>0,25</p> <p>1,0</p> <p>0,75</p>
Bài 3 5đ	<p>a) ĐK: $x \neq \frac{-1}{2}; x \neq \frac{-7}{2}$</p> <p>$\frac{(2x+3)(2x+7)}{(2x+1)(2x+7)} - \frac{(2x+5)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{(2x+7)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)} - \frac{6x^2+9x-9}{(2x+7)(2x+1)}$ $\Leftrightarrow \frac{4x^2+20x+21-4x^2-12x-5}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{4x^2+16x+7-6x^2-9x+9}{(2x+7)(2x+1)}$ $\Leftrightarrow \frac{8x+16}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{-2x^2+7x+16}{(2x+7)(2x+1)}$ $\Rightarrow 8x+16 = -2x^2+7x+16 \Leftrightarrow 2x^2+x=0 \Leftrightarrow x(2x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{2} \text{ (Loại)} \end{cases}$</p> <p>Vậy phương trình có một nghiệm $x=0$</p> <p>b) Ta có: $6x^4-11x^3+3x^2+11x-6x^2-3=0$ $\Leftrightarrow 6x^2(x^2-1)-11x(x^2-1)+3(x^2-1)=0$ $\Leftrightarrow (x^2-1)(6x^2-11x+3)=0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(3x-1)(2x-3)=0$</p>	<p>2,0</p> <p>1,0</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>

	<p>Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \pm 1; \frac{1}{3}; \frac{3}{2} \right\}$.</p> <p>c) Ta có: $5x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 40 = 0$</p> $\Leftrightarrow (4x^2 - 4x + 1) + (x^2 + 2xy + y^2) = 41$ $\Leftrightarrow (2x - 1)^2 + (x + y)^2 = 41$ <p>Vì $x, y \in \mathbb{Z}$, $2x - 1$ là số nguyên lẻ và $41 = 5^2 + 4^2$ nên $\begin{cases} (2x - 1)^2 = 25 \\ (x + y)^2 = 16 \end{cases}$</p> $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = \pm 5 \\ x + y = \pm 4 \end{cases}$ <p>Từ đó suy ra các cặp $(x; y)$ cần tìm là $(3; 1); (3; -7); (-2; 6); (-2; -2)$.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>
<p>Bài 4 3đ</p>	<p>a) Từ $\frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a} \Rightarrow a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$.</p> <p>Do đó:</p> $a - b = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{b - c}{bc}; \quad b - c = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{c - a}{ac}; \quad c - a = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a - b}{ab}$ $\frac{(a - b)(b - c)(c - a)}{a^2 b^2 c^2}$ <p>Suy ra: $(a - b)(b - c)(c - a) = \frac{(a - b)(b - c)(c - a)}{a^2 b^2 c^2}$</p> $\Leftrightarrow (a - b)(b - c)(c - a)(a^2 b^2 c^2 - 1) = 0$ $\Rightarrow (a - b)(b - c)(c - a) = 0 \text{ (do } abc \neq \pm 1)$ <p>Suy ra $a = b = c$</p> <p>b) Đa thức $f(x) = 4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x - 2; x + 1$ nên:</p> $f(2) = 0 \Rightarrow 32 + 2a + b = 0 \quad (1)$ $f(-1) = 0 \Rightarrow -4 - a + b = 0 \quad (2)$ <p>Từ (1) và (2) ta tìm được $a = -12; b = -8$</p> <p>Vậy $2a - 3b = 0$</p>	<p>1,5</p> <p>1,5</p>
<p>Bài 5 6đ</p>	 <p>a)</p> <p>Tứ giác ABCK có: $AB \parallel CK$ ($AB \parallel CD, K \in CD$)</p>	

	<p>AK // BC (gt) $\Rightarrow$ ABCK là hình bình hành $\Rightarrow CK = AB$ $\Rightarrow DK = CD - CK = CD - AB$ (1) Chứng minh tương tự, ta có DI = AB $\Rightarrow IC = CD - DI = CD - AB$ (2) Từ (1) và (2) suy ra: DK = IC</p> <p>b)</p> <p>$\triangle DEK$ có AB // DK, theo hệ quả định lý Ta-let ta có:</p> $\frac{AE}{EK} = \frac{AB}{DK} \quad (3)$ <p>$\triangle FIC$ có AB // IC, theo hệ quả định lý Ta-let ta có:</p> $\frac{AF}{FC} = \frac{AB}{IC} \quad (4)$ <p>Mà: DK = IC (câu a) (5)</p> <p>Từ (3), (4), (5) suy ra: $\frac{AE}{EK} = \frac{AF}{FC}$</p> $\frac{AE}{EK} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow EF // KC \text{ (định lý Ta-lét đảo)}$ $\Rightarrow EF // CD$ <p>c)</p> $\frac{AB}{CD} = \frac{CK}{CD} \quad (6)$ <p>Ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{CK}{CD}$ (vì AB = CK)</p> <p>$\triangle BCD$ có EK // BC, theo định lý Ta-lét ta có:</p> $\frac{CK}{CD} = \frac{BE}{BD} \quad (7)$ <p>$\triangle BDI$ có EF // DI, theo định lý Ta-let ta có:</p> $\frac{BE}{BD} = \frac{EF}{DI}$ <p>Mà DI = AB</p> $\frac{BE}{BD} = \frac{EF}{AB} \quad (8)$ <p>Suy ra: $\frac{AB}{CD} = \frac{CK}{CD} = \frac{BE}{BD} = \frac{EF}{AB}$</p> <p>Từ (6), (7), (8) suy ra: $\frac{AB}{CD} = \frac{CK}{CD} = \frac{BE}{BD} = \frac{EF}{AB}$</p> $\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow AB^2 = CD \cdot EF$	2,0
	<p>$\triangle DEK$ có AB // DK, theo hệ quả định lý Ta-let ta có:</p> $\frac{AE}{EK} = \frac{AB}{DK} \quad (3)$ <p>$\triangle FIC$ có AB // IC, theo hệ quả định lý Ta-let ta có:</p> $\frac{AF}{FC} = \frac{AB}{IC} \quad (4)$ <p>Mà: DK = IC (câu a) (5)</p> <p>Từ (3), (4), (5) suy ra: $\frac{AE}{EK} = \frac{AF}{FC}$</p> $\frac{AE}{EK} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow EF // KC \text{ (định lý Ta-lét đảo)}$ $\Rightarrow EF // CD$ <p>c)</p> $\frac{AB}{CD} = \frac{CK}{CD} \quad (6)$ <p>Ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{CK}{CD}$ (vì AB = CK)</p> <p>$\triangle BCD$ có EK // BC, theo định lý Ta-lét ta có:</p> $\frac{CK}{CD} = \frac{BE}{BD} \quad (7)$ <p>$\triangle BDI$ có EF // DI, theo định lý Ta-let ta có:</p> $\frac{BE}{BD} = \frac{EF}{DI}$ <p>Mà DI = AB</p> $\frac{BE}{BD} = \frac{EF}{AB} \quad (8)$ <p>Suy ra: $\frac{AB}{CD} = \frac{CK}{CD} = \frac{BE}{BD} = \frac{EF}{AB}$</p> <p>Từ (6), (7), (8) suy ra: $\frac{AB}{CD} = \frac{CK}{CD} = \frac{BE}{BD} = \frac{EF}{AB}$</p> $\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow AB^2 = CD \cdot EF$	2,0
Bài 6 2đ	<p>Đặt $P = \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{z(z+1)}$</p> $= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)$ <p>Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ và $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ với a, b, c dương, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.</p>	

	<p>Ta có $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1\right); \frac{1}{y+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{y} + 1\right); \frac{1}{z+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{z} + 1\right)$</p> <p>Bởi vậy</p> $P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right) \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{z} + 1\right)$ $= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{x+y+z} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$ <p>(ĐPCM)</p>	2,0
--	--	-----