

BÀI TOÁN THỰC TẾ BÀI CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Cường độ âm thanh (dB) tại một địa điểm được đo liên tục trong 12 giờ là một hàm số $y = f(t)$ có bảng biến thiên như sau:

t	0	3	8	12			
$f'(t)$		+	0	-	0	+	
$f(t)$	40	$\nearrow$	70	$\searrow$	25	$\nearrow$	60

Tại thời điểm t bằng bao nhiêu trong thời gian khảo sát thì cường độ âm thanh là nhỏ nhất ?

Câu 2. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s^{(m)}$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

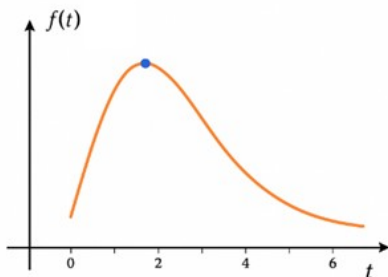
Câu 3. Một cửa hàng cà phê bán cà phê espresso, nhận thấy rằng lợi nhuận của cửa hàng y (tính theo đơn vị triệu đồng/ngày) phụ thuộc vào giá bán x (chục nghìn đồng) mỗi ly espresso. Qua khảo sát, cửa hàng mô tả lợi nhuận theo hàm số sau: $y = -2x^4 + 36x^2 - 90$. Hỏi cửa hàng nên chọn mức giá mỗi ly là bao nhiêu nghìn đồng để lợi nhuận tối ưu nhất?

Câu 4. Một vật chuyển động với vận tốc (m/s) được xác định bởi hàm số $f(t) = -t^3 + 3t^2$ với $t \geq 0$. Khi đó $f'(t)$ là gia tốc của vật tại thời điểm t (giây). Vận tốc của vật đạt được cao nhất trong khoảng thời gian 3 giây đầu là bao nhiêu m/s?

Câu 5. Doanh số bán hàng của một loại sản phẩm (chục triệu đồng) trong một phiên livestream bán

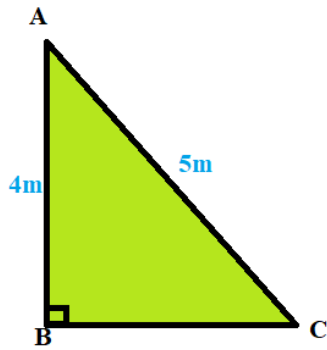
$$f(t) = \frac{3t}{e^{\frac{t}{2}}}, 0 \leq t \leq 6$$

hàng kéo dài sáu giờ theo quy luật hàm số trong đó thời gian t được tính bằng giờ kể từ khi bắt đầu livestream.

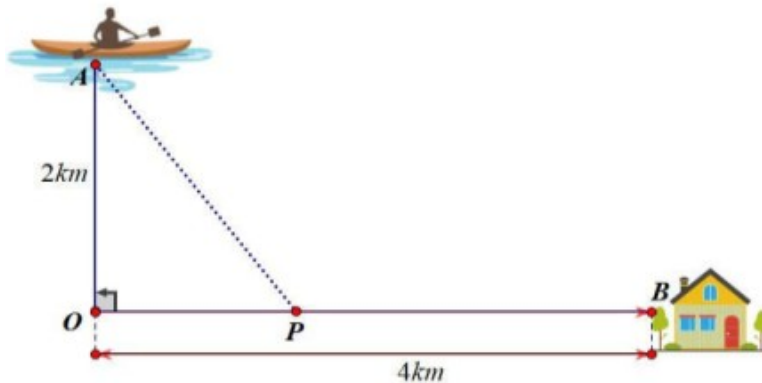


Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau bao nhiêu giờ kể từ khi bắt đầu phiên livestream thì doanh số bán hàng là lớn nhất?

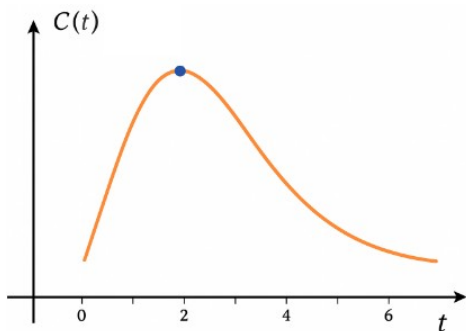
Câu 6. Chào đón năm mới 2025, Thành phố trang trí đèn led biểu tượng hình chữ V được ghép từ các thanh $AB = 4m$, $AC = 5m$ sao cho tam giác ABC vuông tại B . Để tăng hiệu ứng, các kỹ sư đã thiết kế một chuỗi led chạy từ B xuống A với vận tốc 4 m/phút và một chuỗi led chạy từ A lên C với vận tốc 10 m/phút. Sau khi đóng nguồn điện thì cả hai chuỗi led đồng thời xuất phát. Hỏi sau bao nhiêu giây từ thời điểm đóng nguồn thì khoảng cách giữa hai điểm sáng đầu tiên của hai chuỗi led là nhỏ nhất ?



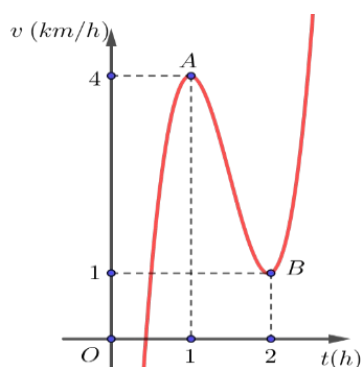
- Câu 7.** Vận tốc của một tàu con thoi từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0$ (s) cho đến thời điểm $t = 126$ (s) được cho bởi công thức $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 83$ (vận tốc được tính bằng đơn vị ft/s). Hỏi tại thời điểm tàu con thoi đạt gia tốc nhỏ nhất thì vận tốc tàu con thoi gần bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).
- Câu 8.** Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}$, $t \geq 0$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)
- Câu 9.** Anh Ba đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông $2km$, anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm B tọa lạc ven bờ sông, B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là $4km$ (hình vẽ). Biết rằng anh Ba chèo thuyền với vận tốc $6m/h$ và chạy bộ trên bờ với vận tốc $10km/h$. Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là bao nhiêu phút?



- Câu 10.** Nồng độ C của một hoá chất sau t giờ tiêm vào cơ thể được xác định bởi công thức $C(t) = \frac{3t}{27 + t^3}$ với $t \geq 0$. Sau khoảng bao nhiêu giờ tiêm thì nồng độ của hoá chất trong máu là lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



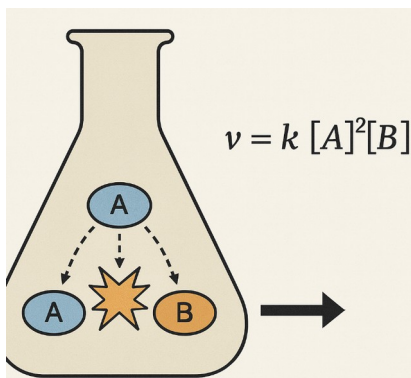
Câu 11. Một vật chuyển động với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị của hàm số dạng hàm bậc ba như hình bên. Biết rằng tại thời điểm $t_1 = 1\text{ h}$ vật có vận tốc $v_1 = 4\text{ km/h}$ và tại thời điểm $t_2 = 2\text{ h}$ vật có vận tốc $v_2 = 1\text{ km/h}$. Hỏi vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3\text{ h}$ bằng bao nhiêu km/h?



Câu 12. Một xưởng sản xuất nón bảo hiểm có hàm chi phí sản xuất cho x chiếc nón là $C(x) = 0,01x^2 + 20x + 1000$ (nghìn đồng). Giá bán mỗi chiếc nón là 50 nghìn đồng. Hãy xác định số lượng nón cần sản xuất để xưởng đạt lợi nhuận tối đa.

Câu 13. Trong một phản ứng hóa học, tốc độ phản ứng v được biểu diễn theo công thức: $v = k \cdot [A]^2 \cdot [B]$, trong đó:

- v là tốc độ phản ứng (mol/l/s),
- $k = 0,1$ là hằng số tốc độ phản ứng,
- $[A]$ và $[B]$ lần lượt là nồng độ của hai chất phản ứng (mol/l).



Giả sử tổng nồng độ ban đầu của $[A]$ và $[B]$ là $C = 2\text{ mol/l}$, tức là $[A] + [B] = 2$. Hãy tìm nồng độ của $[A]$ tại đó tốc độ phản ứng v đạt cực đại.

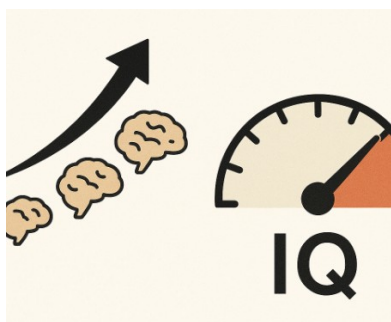
Câu 14. Giả sử tổng chi phí sản xuất x ($0 \leq x \leq 50$) đơn vị sản phẩm A mỗi ngày tại một nhà máy được cho bởi công thức $C(x) = \frac{x^2}{4} + 3x + 400$ (nghìn đồng) và toàn bộ chúng được bán hết với giá $(900 - 6x)$ nghìn đồng một sản phẩm. Tìm mức sản lượng (đó là số lượng sản phẩm được sản xuất) để chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm là đạt cực tiểu.

Câu 15. Lợi nhuận tổng hàng ngày (tính theo đô la) mà TKK Corporation thu được từ việc sản xuất và bán x đĩa DVD có thể ghi lại được cho bởi hàm lợi nhuận $P(x) = -0,000001x^3 + 0,001x^2 + 5x - 500$; $0 \leq x \leq 2000$

Tìm mức sản xuất x để lợi nhuận hàng ngày đạt cực đại. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Câu 16. Vận tốc trung bình của dòng xe trên đoạn đường 124 từ 6#A.M. đến 10#A.M. được xấp xỉ bởi $f(t) = 20t - 40\sqrt{t} + 50$, $0 \leq t \leq 4$ trong đó t tính bằng giờ kể từ 6 A.M. và $f(t)$ tính bằng km/giờ. Hỏi vào thời điểm mấy giờ trong buổi sáng (giữa 6#A.M. và 10#A.M.) thì vận tốc trung bình thấp nhất?

Câu 17. Trong một nghiên cứu tại Viện Sức khỏe Tâm thần Quốc gia, các nhà khoa học theo dõi độ dày vỏ não (cortex) của 307 trẻ em có IQ cao (121-149) qua tuổi t (tính bằng năm), với mô hình $S(t) = 0,000989t^3 - 0,0486t^2 + 0,7116t + 1,46$, $5 \leq t \leq 19$



Hỏi vỏ não của trẻ có IQ siêu trí tuệ đạt độ dày cực đại vào khoảng bao nhiêu tuổi (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Câu 18. Định mức cầu mỗi tháng của đồng hồ đeo tay Peget phụ thuộc vào giá đơn vị P theo phương trình cầu $p = \frac{50}{0,01x^2 + 1}$, $0 \leq x \leq 20$ trong đó P tính bằng đô la và x tính bằng nghìn chiếc. Hỏi nhà sản xuất phải bán bao nhiêu nghìn chiếc để doanh thu $R = px$ đạt cực đại?

Câu 19. Một bể ban đầu chứa 10 gal dung dịch muối với 2 lb muối. Dung dịch vào có nồng độ $1,5 \text{ lb/gal}$ chảy vào với tốc độ 3 gal/ phút, và hỗn hợp trong bể chảy ra với tốc độ 4 gal/ phút. Người ta cho biết lượng muối trong bể sau t phút là x (pound), với

$$x = f(t) = 1,5(10 - t) - 0,0013(10 - t)^4, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Hỏi lượng muối tối đa có thể có trong bể tại một thời điểm nào đó là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



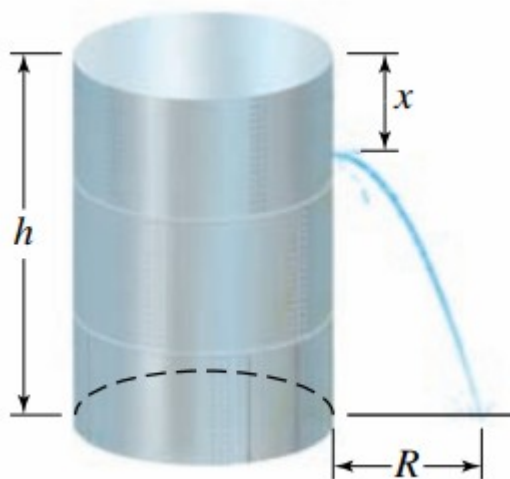
Câu 20. Sau khi kinh tế suy giảm, giá thuê văn phòng cao ngất ngưỡng cuối thập niên 1990 bắt đầu hạ nhiệt. Hàm $R(t)$ cho giá thuê (USD/ ft^2) của văn phòng hạng A ở khu Back Bay và Financial District (Boston) từ đầu 1997 ($t = 0$) đến đầu 2002 ($t = 5$) là

$$R(t) = -0,711t^3 + 3,76t^2 + 0,2t + 36,5; \quad 0 \leq t \leq 5.$$

Hỏi giá thuê cao nhất trong giai đoạn này là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Câu 21. Một bồn hình trụ cao h chứa nước. Theo định luật Torricelli, vận tốc tia nước chảy qua lỗ ở độ sâu x so với mặt nước là $V = \sqrt{2gx}$. Người ta cho rằng tầm xa R (feet) của tia nước được cho bởi $R = 2\sqrt{x(h-x)}$

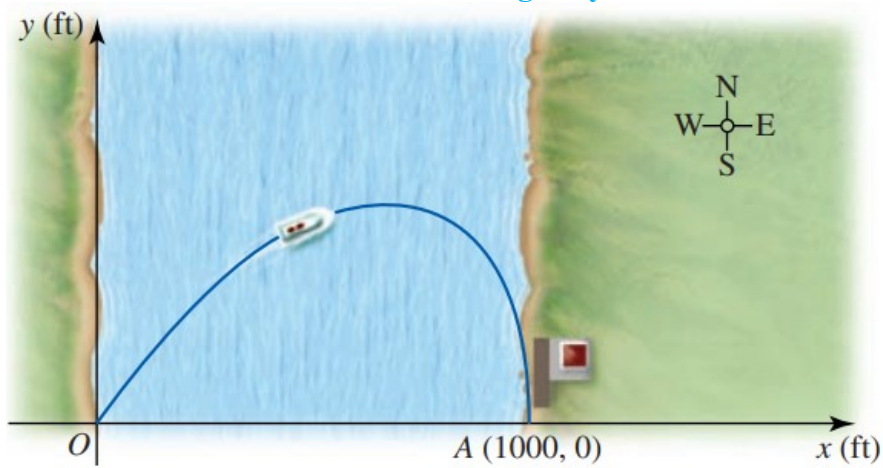
Biết lỗ phun nên đặt ở độ cao $x = Kh, (K \in \mathbb{R})$ so với mặt bồn thì tầm xa R đạt cực đại. Tìm K ?



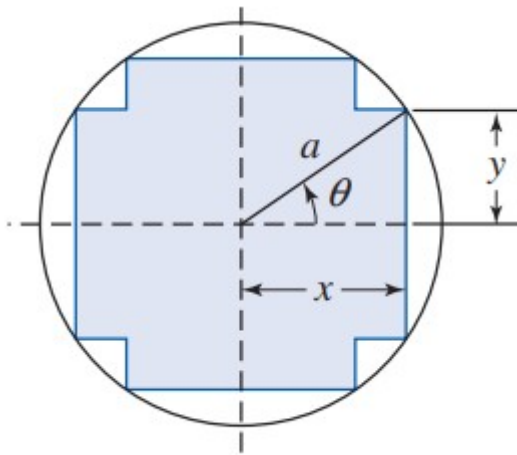
Câu 22. Một con thuyền rời bến $O(0,0)$ trên một bờ sông, luôn đi với vận tốc không đổi 20 dặm/giờ hướng về bến $A(1000,0)$ (phía đông của O); đồng thời nước sông chảy ngược lên phía bắc với tốc độ 5 dặm/giờ. Người ta cho rằng đường đi của thuyền là

$$y = 500 \left[\left(\frac{1000-x}{1000} \right)^{3/4} - \left(\frac{1000-x}{1000} \right)^{5/4} \right], \quad 0 \leq x \leq 1000$$

Tìm độ lệch bắc lớn nhất mà thuyền đạt được trong suốt hành trình.



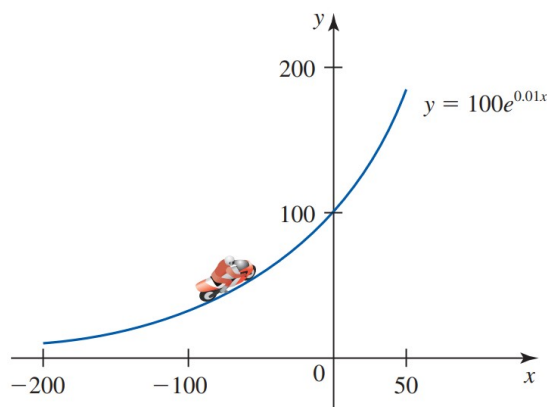
Câu 23. Khi chế tạo một biến áp AC , một lõi sắt dạng hình chữ thập được đặt vào cuộn dây (xem hình). Giả sử bán kính cuộn là a . Hỏi góc θ bằng bao nhiêu độ để tổng diện tích bề mặt lõi sắt là lớn nhất.



Câu 24. Một tay lái mô tô nặng 180 (lb), di chuyển với vận tốc không đổi 30 dặm/giờ, thực hiện một khúc cua trên đường cho bởi đồ thị $y = 100e^{0.01x}$, $-200 \leq x \leq 50$

Có thể chứng minh rằng độ lớn của lực pháp tuyến tác dụng lên tay lái mô tô xấp xỉ

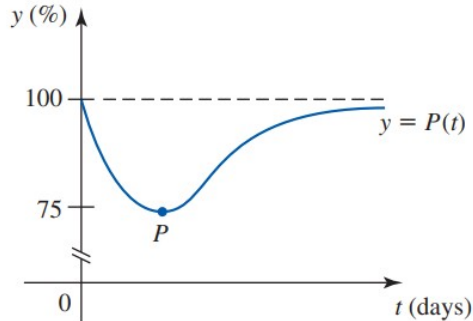
$$F(x) = \frac{10890e^{0.1x}}{(1 + 100e^{0.2x})^{3/2}} \quad (\text{đơn vị lb})$$



Hãy tìm lực pháp tuyến lớn nhất tác dụng lên tay lái trong suốt khúc cua (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

- Câu 25.** Khi chất thải hữu cơ được đổ vào một cái ao, quá trình ôxy hóa xảy ra sẽ làm giảm hàm lượng ôxy trong nước. Tuy nhiên, theo thời gian, tự nhiên sẽ phục hồi lại mức ôxy về giá trị bình thường. Trong đồ thị kèm theo, $P(t)$ cho biết phần trăm hàm lượng ôxy (so với mức bình thường) sau t ngày kể từ khi chất thải được đổ vào ao.

Giả sử hàm số cho hàm lượng ôxy là $P(t) = 100 \frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}$ (% mức bình thường), $t \geq 0$.



Khi đó tọa độ của điểm $P(a; b)$ trên đồ thị là điểm cực trị của đồ thị hàm số $P(t)$. Tính $a + b$?

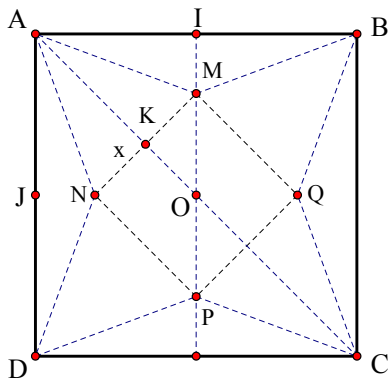
- Câu 26.** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $N(t) = 45t^2 - t^3, 0 \leq t \leq 30$ (người). Nếu xem $N'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ bao nhiêu?

- Câu 27.** Một người có một dây ruy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dải ruy băng này quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10 cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ). Dải ruy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích bằng $a \cdot \pi (\text{cm}^3), a \in \mathbb{R}^+$. Giá trị lớn nhất của a là bao nhiêu?

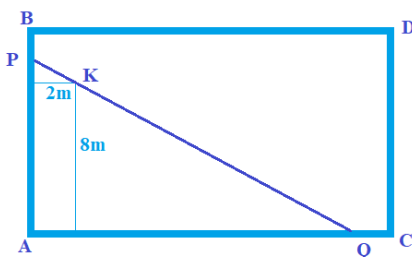


- Câu 28.** Hai chất điểm A và B chuyển động thẳng đều cùng hướng về O (như hình vẽ), biết rằng vận tốc $V_B = \frac{V_A}{\sqrt{3}}$ và góc $\angle AOB = 30^\circ$. Biết rằng khi khoảng cách giữa hai chất điểm A và B là nhỏ nhất thì số đo góc $\angle BAO = \gamma$. Tìm γ .

đáy của mô hình bằng $\frac{a\sqrt{2}}{b}(m)$ ($a, b \in \mathbb{N}; a, b$ nguyên tố cùng nhau). Tính tổng $a^2 + b^2$?



Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là $2m$ và cách bờ AC là $8m$, rồi dùng một cây sào thẳng PQ ngăn một góc của hồ để thả bè (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào hai bờ AB, AC và cây cọc (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).



Khi một vật lạ mắc kẹt trong khí quản khiến ta phải ho, cơ hoành đẩy lên trên gây ra tăng áp lực trong phổi, theo đó cuống họng co thắt làm hẹp khí quản khiến không khí đi qua mạnh hơn. Đối với một lượng không khí bị đẩy ra trong một khoảng thời gian cố định, khí quản càng nhỏ thì luồng không khí càng đẩy ra nhanh hơn. Vận tốc luồng khí thoát ra càng cao, lực tác động lên vật lạ càng lớn.

Qua nghiên cứu một số trường hợp, người ta nhận thấy vận tốc v của luồng khí liên hệ với bán

kinh x của khí quản theo công thức:

$$v(x) = k(x_0 - x) \cdot x^2 \quad \text{với} \quad \frac{1}{2}x_0 \leq x \leq x_0$$

trong đó k là hằng số ($k > 0$) và x_0 là bán kính khí quyển ở trạng thái bình thường (Theo James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning).

Khi đó $x = \dots\dots\dots x_0$ thì vận tốc luồng khí của một cơn bão trong trường hợp này là lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

LỜI GIẢI

Câu 1. Cường độ âm thanh (dB) tại một địa điểm được đo liên tục trong 12 giờ là một hàm số $y = f(t)$ có bảng biến thiên như sau:

t	0	3	8	12			
$f'(t)$		+	0	-	0	+	
$f(t)$	40	↗	70	↘	25	↗	60

Tại thời điểm t bằng bao nhiêu trong thời gian khảo sát thì cường độ âm thanh là nhỏ nhất ?

Lời giải

Trả lời: 8

Từ bảng biến thiên ta thấy tại thời điểm $t = 8$ thì hàm số đạt cường độ âm thanh nhỏ nhất là 25.

Câu 2. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s^{(m)}$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 24

Vận tốc của vật chuyển động là $v = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 12t = f(t)$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0; 6]$

Ta có $f'(t) = -3t + 12 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \in [0; 6]$

$f(0) = 0; f(4) = 24; f(6) = 18$

Vậy vận tốc lớn nhất là $24^{(m/s)}$.

Câu 3. Một cửa hàng cà phê bán cà phê espresso, nhận thấy rằng lợi nhuận của cửa hàng y (tính theo đơn vị triệu đồng/ngày) phụ thuộc vào giá bán x (chục nghìn đồng) mỗi ly espresso. Qua khảo sát, cửa hàng mô tả lợi nhuận theo hàm số sau: $y = -2x^4 + 36x^2 - 90$. Hỏi cửa hàng nên chọn mức giá mỗi ly là bao nhiêu nghìn đồng để lợi nhuận tối ưu nhất?

Lời giải

Trả lời: 30

Ta có $y' = -8x^3 + 72x$ Giải $y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \end{cases}$

Với đồ thị hàm bậc 4 trùng phương hệ số $a < 0$, ta chọn $x = 3$ để hàm số đạt cực đại.

Vậy giá bán để tối ưu lợi nhuận là 30 nghìn đồng/ly.

Câu 4. Một vật chuyển động với vận tốc (m/s) được xác định bởi hàm số $f(t) = -t^3 + 3t^2$ với $t \geq 0$. Khi đó $f'(t)$ là gia tốc của vật tại thời điểm t (giây). Vận tốc của vật đạt được cao nhất trong khoảng thời gian 3 giây đầu là bao nhiêu m/s?

Lời giải

Trả lời: 4

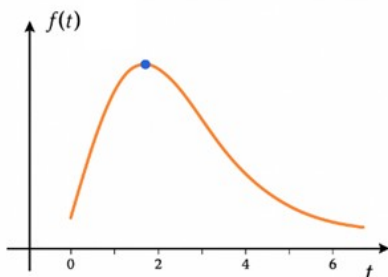
$$\Rightarrow f'(t) = -3t^2 + 6t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 0 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	0	2	3
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	<div style="text-align: center;"> $\nearrow$ 4 $\searrow$ </div>		

Vận tốc của vật đạt được cao nhất là 4 m/s

Câu 5. Doanh số bán hàng của một loại sản phẩm (chục triệu đồng) trong một phiên livestream bán hàng kéo dài sáu giờ theo quy luật hàm số $f(t) = \frac{3t}{e^{\frac{t}{2}}}, 0 \leq t \leq 6$ trong đó thời gian t được tính bằng giờ kể từ khi bắt đầu livestream.



Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau bao nhiêu giờ kể từ khi bắt đầu phiên livestream thì doanh số bán hàng là lớn nhất?

Lời giải

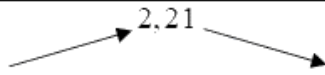
Trả lời: 2

$$f'(t) = \frac{6-3t}{2e^{\frac{t}{2}}}$$

Ta có:

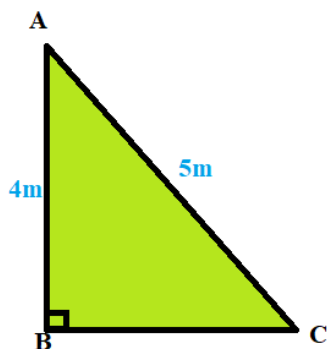
$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 6 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Ta có bảng biến thiên với $t \in [0; 6]$:

t	0	2	6	
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$				

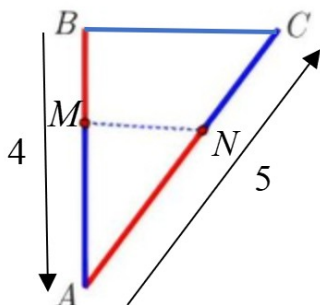
Vậy sau 2 giờ kể từ khi bắt đầu phiên livestream thì doanh số bán hàng là lớn nhất.

Câu 6. Chào đón năm mới 2025, Thành phố trang trí đèn led biểu tượng hình chữ V được ghép từ các thanh $AB = 4m$, $AC = 5m$ sao cho tam giác ABC vuông tại B . Để tăng hiệu ứng, các kỹ sư đã thiết kế một chuỗi led chạy từ B xuống A với vận tốc $4m/\text{phút}$ và một chuỗi led chạy từ A lên C với vận tốc $10m/\text{phút}$. Sau khi đóng nguồn điện thì cả hai chuỗi led đồng thời xuất phát. Hỏi sau bao nhiêu giây từ thời điểm đóng nguồn thì khoảng cách giữa hai điểm sáng đầu tiên của hai chuỗi led là nhỏ nhất?



Lời giải

Trả lời: 16



Gọi x (phút) là khoảng thời gian cả hai chuỗi led đồng thời xuất phát đến M và N là hai điểm sáng đầu tiên

$$\Rightarrow \begin{cases} BM = 4x \\ AN = 10x \Rightarrow AM = 4 - 4x \end{cases} \text{ với } 0 \leq x \leq 4$$

Xét tam giác ABC vuông tại $B \Rightarrow \cos \widehat{MAN} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$

Xét tam giác AMN ta có: $MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos \widehat{MAN}$

$$MN^2 = (4-4x)^2 + (10x)^2 - 2(4-4x) \cdot 10x \cdot \frac{4}{5} = 180x^2 - 96x + 16 = f(x)$$

Để khoảng cách giữa hai điểm sáng đầu tiên của hai chuỗi led nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN_{\min} \Leftrightarrow MN^2_{\min}$

Xét $f(x) = 180x^2 - 96x + 16$ với $x \in [0; 4]$

$$f'(x) = 360x - 96 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{15} \Rightarrow MN^2 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất} \Leftrightarrow x = \frac{4}{15} \text{ (phút)} = 16 \text{ (giây)}$$

Vậy sau 16 giây thì hai điểm sáng đầu tiên của chuỗi led có khoảng cách nhỏ nhất.

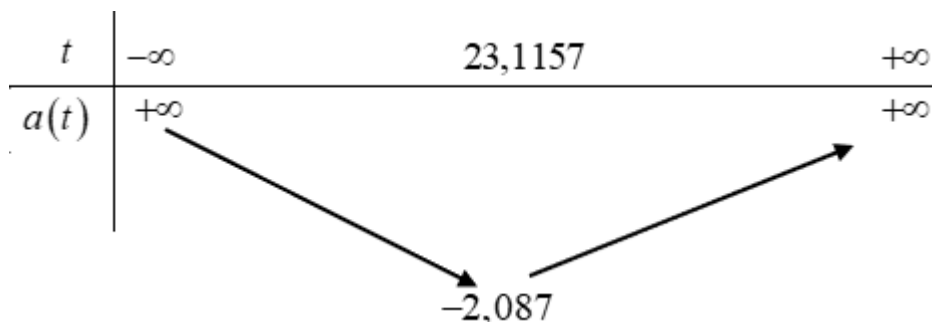
- Câu 7.** Vận tốc của một tàu con thoi từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0$ (s) cho đến thời điểm $t = 126$ (s) được cho bởi công thức $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 83$ (vận tốc được tính bằng đơn vị ft/s). Hỏi tại thời điểm tàu con thoi đạt gia tốc nhỏ nhất thì vận tốc tàu con thoi gần bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

Trả lời: 20,8

Ta có: $a(t) = v'(t) = 0,003906t^2 - 0,18058t$

Ta có BBT hàm $a(t) = 0,003906t^2 - 0,18058t$



Thời điểm tàu con thoi đạt gia tốc nhỏ nhất là $t \approx 23,1157$

$$v(23,1157) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 83 \approx 20,8 \text{ ft/s}$$

- Câu 8.** Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}, t \geq 0$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 1,6

$$f'(t) = \frac{-5000(1+5e^{-t})'}{(1+5e^{-t})^2} = \frac{25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^2}$$

Ta có:

Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi $f'(t)$ lớn nhất.

$$h(t) = \frac{25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^2}$$

Đặt

$$h'(t) = \frac{-25000e^{-t}(1+5e^{-t})^2 - 2 \cdot (-5e^{-t}) \cdot (1+5e^{-t}) \cdot 25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^4}$$

$$= \frac{-25000e^{-t}(1+5e^{-t})(1+5e^{-t}-10e^{-t})}{(1+5e^{-t})^4} = \frac{-25000e^{-t}(1-5e^{-t})}{(1+5e^{-t})^3}$$

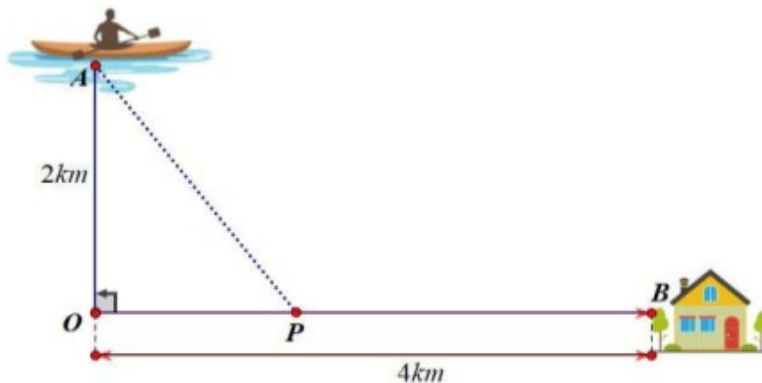
$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-25000e^{-t}(1-5e^{-t})}{(1+5e^{-t})^3} = 0 \Leftrightarrow 1-5e^{-t} = 0 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow t = \ln 5 (\text{tm})$$

Ta có bảng biến thiên với $t \in [0; +\infty)$:

t	0	$\ln 5$	$+\infty$
$h'(t)$		0	-
$h(t)$		1250	

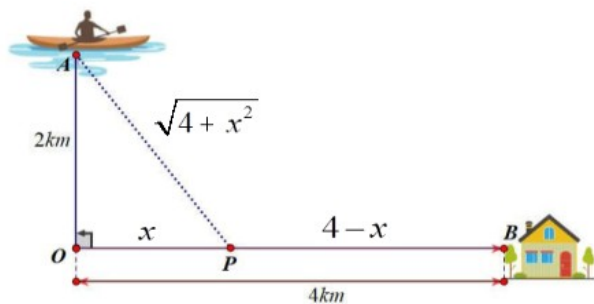
Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 5 \approx 1,6$ năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất.

Câu 9. Anh Ba đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông 2km , anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm B tọa lạc ven bờ sông, B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là 4km (hình vẽ). Biết rằng anh Ba chèo thuyền với vận tốc 6m/h và chạy bộ trên bờ với vận tốc 10km/h . Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là bao nhiêu phút?



Lời giải

Trả lời: 40



Đặt $OP = x$ ($0 < x < 4$) $\Rightarrow BP = 4 - x$; $AP = \sqrt{4 + x^2}$.

Khoảng thời gian để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

$$t_{(x)} = t_{AP} + t_{PB} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{6} + \frac{4-x}{10} \text{ (h)}. \Rightarrow t'_{(x)} = \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{10}$$

$$t'_{(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{4+x^2} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ 4x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

BBT:

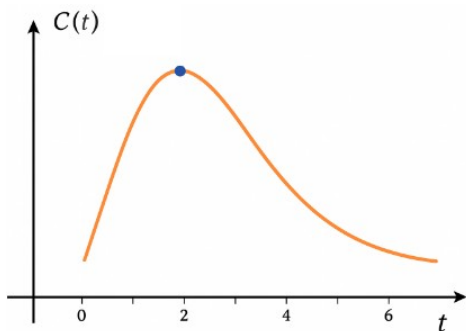
x	0	$\frac{3}{2}$	4
$t'(x)$		0	+
$t(x)$		$\frac{2}{3}$	

Từ BBT suy ra khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

$$t_{\min} = \frac{2}{3} \text{ (h)} = \frac{2}{3} \cdot 60 = 40 \text{ (phút)}.$$

Câu 10. Nồng độ C của một hoá chất sau t giờ tiêm vào cơ thể được xác định bởi công thức

$C(t) = \frac{3t}{27+t^3}$ với $t \geq 0$. Sau khoảng bao nhiêu giờ tiêm thì nồng độ của hoá chất trong máu là lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Lời giải

Trả lời: 2,38

$$C'(t) = \frac{3(27+t^3) - 3t \cdot 3t^2}{(27+t^3)^2} = \frac{81-6t^3}{(27+t^3)^2}$$

Ta có

$$\begin{cases} C'(t) = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{2}$$

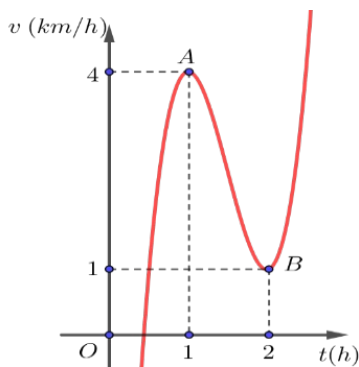
Ta có bảng biến thiên

t	0	$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	$+\infty$
$C'(t)$	+	0	-
$C(t)$	0	$\frac{6}{27\sqrt[3]{2}}$	0

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2,38$$

Do đó ở thời điểm $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ giờ thì nồng độ của hoá chất trong máu là lớn nhất.

Câu 11. Một vật chuyển động với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị của hàm số dạng hàm bậc ba như hình bên. Biết rằng tại thời điểm $t_1 = 1\text{ h}$ vật có vận tốc $v_1 = 4\text{ km/h}$ và tại thời điểm $t_2 = 2\text{ h}$ vật có vận tốc $v_2 = 1\text{ km/h}$. Hỏi vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3\text{ h}$ bằng bao nhiêu km/h?



Lời giải

Trả lời: 16

Giả sử hàm số vận tốc có dạng: $v(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ (với $a \neq 0$ và $t \geq 0$).

Ta có: $v'(t) = 3at^2 + 2bt + c$

Dựa vào đồ thị hàm số, tại các thời điểm t_1, t_2 đồ thị hàm vận tốc đi qua các điểm cực trị $A(1; 4)$, $B(2; 1)$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} v(1) = 4 \\ v'(1) = 0 \\ v(2) = 1 \\ v'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d = 4 \\ 3a+2b+c = 0 \\ 8a+4b+2c+d = 1 \\ 12a+4b+c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -27 \\ c = 36 \\ d = -11 \end{cases}$$

Suy ra: $v(t) = 6t^3 - 27t^2 + 36t - 11$ (km/h)

Vậy vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3h$ là: $v(3) = 6 \cdot 3^3 - 27 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 - 11 = 16$ km/h

Câu 12. Một xưởng sản xuất nón bảo hiểm có hàm chi phí sản xuất cho x chiếc nón là $C(x) = 0,01x^2 + 20x + 1000$ (nghìn đồng). Giá bán mỗi chiếc nón là 50 nghìn đồng. Hãy xác định số lượng nón cần sản xuất để xưởng đạt lợi nhuận tối đa.

Lời giải

Trả lời: 1500

* Doanh thu từ việc bán x chiếc nón là: $R(x) = 50x$ (nghìn đồng)

* Lợi nhuận là hiệu số giữa doanh thu và chi phí nên

$$P(x) = C(x) - R(x) = 50x - (0,01x^2 + 20x + 1000) = -0,01x^2 + 30x - 1000$$

$$* P'(x) = -0,02x + 30$$

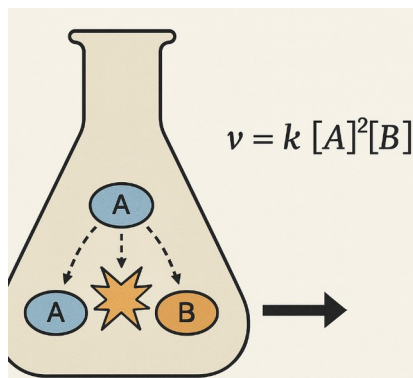
$$* P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1500$$

$$* P''(x) = -0,02 < 0 \text{ với mọi } x \text{ nên } x = 1500 \text{ là điểm cực đại.}$$

* Kết luận: Xưởng cần sản xuất 1500 chiếc nón bảo hiểm để đạt lợi nhuận tối đa.

Câu 13. Trong một phản ứng hóa học, tốc độ phản ứng v được biểu diễn theo công thức: $v = k \cdot [A]^2 \cdot [B]$, trong đó:

- v là tốc độ phản ứng (mol/l/s),
- $k = 0,1$ là hằng số tốc độ phản ứng,
- $[A]$ và $[B]$ lần lượt là nồng độ của hai chất phản ứng (mol/l).



Giả sử tổng nồng độ ban đầu của $[A]$ và $[B]$ là $C = 2 \text{ mol/l}$, tức là $[A] + [B] = 2$. Hãy tìm nồng độ của $[A]$ tại đó tốc độ phản ứng v đạt cực đại.

Ta có $[B] = 2 - [A]$ nên $v = 0,1 \cdot [A]^2 \cdot (2 - [A]) = 0,1 \cdot (2[A]^2 - [A]^3)$ với $0 \leq [A] \leq 2$.

Đạo hàm của v theo $[A]$ là $v' = 0,1 \cdot (4[A] - 3[A]^2)$.

$$v' = 0 \Leftrightarrow [A] = 0 \text{ hoặc } [A] = \frac{4}{3}.$$

* Với $[A] = 0$ tốc độ phản ứng $v = 0$ (loại vì không có ý nghĩa thực tế).

* Với $[A] = \frac{4}{3}$ thì $v = \frac{16}{135}$ (mol/l/s), đây là giá trị hợp lý.

Kết luận: Với $[A] = \frac{4}{3}$ (mol/l) thì tốc độ phản ứng v đạt cực đại.

Câu 14. Giả sử tổng chi phí sản xuất x ($0 \leq x \leq 50$) đơn vị sản phẩm A mỗi ngày tại một nhà máy

được cho bởi công thức $C(x) = \frac{x^2}{4} + 3x + 400$ (nghìn đồng) và toàn bộ chúng được bán hết với giá $(900 - 6x)$ nghìn đồng một sản phẩm. Tìm mức sản lượng (đó là số lượng sản phẩm được sản xuất) để chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm là đạt cực tiểu.

Lời giải

Đáp án: 40.

Kí hiệu $\bar{C}(x)$ là chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm.

Ta có
$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x}{4} + 3 + \frac{400}{x}.$$

Đạo hàm:
$$\bar{C}'(x) = \frac{x^2 - 1600}{4x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 40 \quad (\text{vì } 0 \leq x \leq 50).$$

Bảng biến thiên như sau

x	0	40	50
$\bar{C}'$	-	0	+
$\bar{C}$	$+\infty$	23	23,5

Vậy mức sản lượng $x = 40$.

Câu 15. Lợi nhuận tổng hàng ngày (tính theo đô la) mà TKK Corporation thu được từ việc sản xuất và bán x đĩa DVD có thể ghi lại được cho bởi hàm lợi nhuận $P(x) = -0,000001x^3 + 0,001x^2 + 5x - 500$; $0 \leq x \leq 2000$

Tìm mức sản xuất x để lợi nhuận hàng ngày đạt cực đại. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Trả lời: 1667

Tính đạo hàm $P'(x)$: $P'(x) = (-10^{-6}x^3 + 10^{-3}x^2 + 5x - 500)' = -3 \cdot 10^{-6}x^2 + 2 \cdot 10^{-3}x + 5$

Xét $P'(x) = 0$: $-3 \cdot 10^{-6}x^2 + 0,002x + 5 = 0 \Rightarrow 3 \cdot 10^{-6}x^2 - 0,002x - 5 = 0$.

Chia cả hai vế cho 10^{-6} : $3x^2 - 2000x - 5000000 = 0$

$$x = \frac{2000 \pm \sqrt{2000^2 + 4 \cdot 3 \cdot 5000000}}{2 \cdot 3} = \frac{2000 \pm \sqrt{4000000 + 60000000}}{6}$$

$$= \frac{2000 \pm \sqrt{64000000}}{6} = \frac{2000 \pm 8000}{6}$$

Giải phương trình bậc hai:

Kết quả: $x_1 = \frac{2000 + 8000}{6} = \frac{10000}{6} \approx 1666,67$, $x_2 = \frac{2000 - 8000}{6} = -1000$ (loại)

Chọn $x = 1666,67$ (nằm trong đoạn $[0; 2000]$).

Lập bảng biến thiên ta suy ra được P đạt cực đại tại $x \approx 1666,67$.

Để lợi nhuận hàng ngày lớn nhất, TKK Corporation nên sản xuất khoảng 1667 DVD

- Câu 16.** Vận tốc trung bình của dòng xe trên đoạn đường 124 từ 6#A.M. đến 10#A.M. được xấp xỉ bởi $f(t) = 20t - 40\sqrt{t} + 50$, $0 \leq t \leq 4$ trong đó t tính bằng giờ kể từ 6 A.M. và $f(t)$ tính bằng km/giờ. Hỏi vào thời điểm mấy giờ trong buổi sáng (giữa 6#A.M. và 10#A.M.) thì vận tốc trung bình thấp nhất?

Lời giải**Trả lời: 7**

Tính đạo hàm $f'(t) = 20 - 40 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = 20 - \frac{20}{\sqrt{t}}$

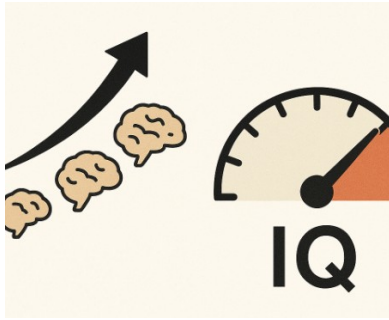
Xét $f'(t) = 0$: $20 - \frac{20}{\sqrt{t}} = 0 \Rightarrow \frac{20}{\sqrt{t}} = 20 \Rightarrow \sqrt{t} = 1 \Rightarrow t = 1$

Lập bảng xét dấu ta được:

t	0	1	4	
$f'(t)$		-	0	+

Suy ra vận tốc trung bình thấp nhất 30 mph xảy ra vào 7:00#A.M. ($t = 1$).

- Câu 17.** Trong một nghiên cứu tại Viện Sức khỏe Tâm thần Quốc gia, các nhà khoa học theo dõi độ dày vỏ não (cortex) của 307 trẻ em có IQ cao (121-149) qua tuổi t (tính bằng năm), với mô hình $S(t) = 0,000989t^3 - 0,0486t^2 + 0,7116t + 1,46$, $5 \leq t \leq 19$



Hồi vỏ não của trẻ có IQ siêu trí tuệ đạt độ dày cực đại vào khoảng bao nhiêu tuổi (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 11

Ta có: $S'(t) = 3 \cdot 0,000989t^2 - 2 \cdot 0,0486t + 0,7116 = 0,002967t^2 - 0,0972t + 0,7116$

Giải $S'(t) = 0 \Leftrightarrow 0,002967t^2 - 0,0972t + 0,7116 = 0$

$$t = \frac{0,0972 \pm 0,0316}{2 \cdot 0,002967} \approx \frac{0,0972 \pm 0,0316}{0,005934} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \approx \frac{0,1288}{0,005934} \approx 21,7 \quad (\notin [5;19]), \\ t_2 \approx \frac{0,0656}{0,005934} \approx 11,1 \quad (\in [5;19]). \end{cases}$$

Ta có

Vậy nghiệm khả dụng duy nhất trên $[5,19]$ là $t \approx 11,1$

Lập bảng biến thiên hàm số $S(t)$ suy ra $t \approx 11,1$ là điểm cực đại.

Vậy độ dày vỏ não của nhóm trẻ IQ cao đạt cực đại tại $t \approx 11$ tuổi.

Câu 18. Định mức cầu mỗi tháng của đồng hồ đeo tay Peget phụ thuộc vào giá đơn vị P theo phương

trình cầu $p = \frac{50}{0,01x^2 + 1}$, $0 \leq x \leq 20$ trong đó P tính bằng đô la và x tính bằng nghìn chiếc. Hỏi nhà sản xuất phải bán bao nhiêu nghìn chiếc để doanh thu $R = px$ đạt cực đại?

Lời giải

Trả lời: 10

Doanh thu $R(x)$ là $R(x) = p(x)x = \frac{50x}{0,01x^2 + 1}$

Tính đạo hàm $R'(x)$

$$R'(x) = \frac{(0,01x^2 + 1) \cdot 50 - 50x \cdot (0,02x)}{(0,01x^2 + 1)^2} = \frac{50(0,01x^2 + 1 - 0,02x^2)}{(0,01x^2 + 1)^2} = \frac{50(1 - 0,01x^2)}{(0,01x^2 + 1)^2}; 0 \leq x \leq 20$$

Giải $R'(x) = 0$: $1 - 0,01x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$

Có bảng xét dấu:

x	0	10	20	
$R'(x)$		+	0	-

Suy ra được hàm số đạt cực đại tại $x = 10$

Giá trị cực đại là $R(10) = 250$.

Câu 19. Một bể ban đầu chứa 10 gal dung dịch muối với 2 lb muối. Dung dịch vào có nồng độ 1.5 lb/gal chảy vào với tốc độ 3 gal/ phút, và hỗn hợp trong bể chảy ra với tốc độ 4 gal/ phút. Người ta cho biết lượng muối trong bể sau t phút là x (pound), với

$$x = f(t) = 1,5(10-t) - 0,0013(10-t)^4, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Hỏi lượng muối tối đa có thể có trong bể tại một thời điểm nào đó là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Lời giải

Trả lời: 7,43

Ta có công thức lượng muối x (pound) trong bể sau t phút:

$$x(t) = 1,5(10-t) - 0,0013(10-t)^4; \quad 0 \leq t \leq 10$$

Đặt $u = 10 - t$. Khi t chạy từ 0 đến 10 thì u chạy từ 10 xuống 0.

Khi đó $x = 1,5u - 0,0013u^4; \quad 0 \leq u \leq 10$

Tính đạo hàm theo u ta được: $1,5 - 0,0013 \cdot 4u^3 = 1,5 - 0,0052u^3$

$$1,5 - 0,0052u^3 = 0 \Rightarrow u^3 = \frac{1,5}{0,0052} \approx 288,46 \Rightarrow u \approx \sqrt[3]{288,46} \approx 6,62$$

Xét

Lập bảng xét dấu ta được:

u	0	6,62	10	
$x'(u)$		+	0	-

Suy ra tại $u \approx 6,62$: $x_{CD} = 1,5 \cdot 6,62 - 0,0013(6,62)^4 \approx 9,93 - 2,50 \approx 7,43 \text{ lb}$.

Lượng muối trong bể đạt tối đa khoảng 7,43 lb tại thời điểm $t \approx 3,38$ phút kể từ lúc bắt đầu.

Câu 20. Sau khi kinh tế suy giảm, giá thuê văn phòng cao ngất ngưỡng cuối thập niên 1990 bắt đầu hạ nhiệt. Hàm $R(t)$ cho giá thuê (USD/ ft^2) của văn phòng hạng A ở khu Back Bay và Financial District (Boston) từ đầu 1997 ($t = 0$) đến đầu 2002 ($t = 5$) là

$$R(t) = -0,711t^3 + 3,76t^2 + 0,2t + 36,5; \quad 0 \leq t \leq 5.$$

Hỏi giá thuê cao nhất trong giai đoạn này là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Tính đạo hàm $R'(t) = (-0,711t^3 + 3,76t^2 + 0,2t + 36,5)' = -2,133t^2 + 7,52t + 0,2$.

Giải $R'(t) = 0$: $-2,133t^2 + 7,52t + 0,2 = 0$

Áp dụng công thức nghiệm:

$$t = \frac{-7,52 \pm \sqrt{7,52^2 - 4(-2,133)(0,2)}}{2(-2,133)} \approx \frac{-7,52 \pm \sqrt{56,5504 + 1,7064}}{-4,266} = \frac{-7,52 \pm 7,632}{-4,266}.$$

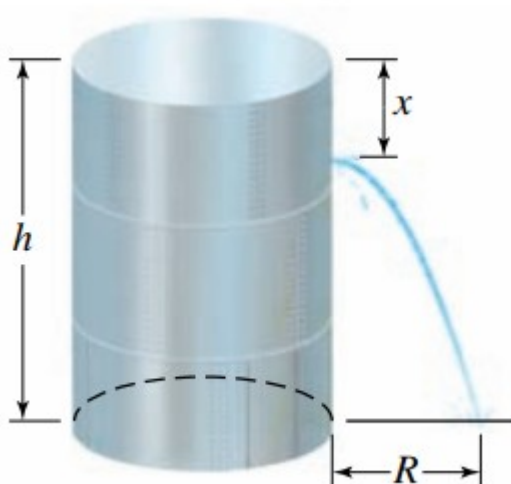
Hai nghiệm thu được: $t_1 \approx \frac{-7,52 + 7,632}{-4,266} \approx -0,03$ (loại), $t_2 \approx \frac{-7,52 - 7,632}{-4,266} \approx 3,55$.

Lập bảng biến thiên ta suy ra được hàm số đạt cực đại tại $t \approx 3,55$

Hay giá thuê cao nhất là $R(3,55) \approx 52,8 \text{ USD} / ft^2$

Câu 21. Một bồn hình trụ cao h chứa nước. Theo định luật Torricelli, vận tốc tia nước chảy qua lỗ ở độ sâu x so với mặt nước là $V = \sqrt{2gx}$. Người ta cho rằng tầm xa R (feet) của tia nước được cho bởi $R = 2\sqrt{x(h-x)}$

Biết lỗ phun nên đặt ở độ cao $x = Kh, (K \in \mathbb{R})$ so với mặt bồn thì tầm xa R đạt cực đại. Tìm K ?



Lời giải

Trả lời: 0,5

Thay vì trực tiếp tối đa $R(x)$, ta có thể tối đa $R^2(x)$ (vì hàm cần là tăng):

$$R^2(x) = 4x(h-x) = 4(hx - x^2)$$

Tính đạo hàm: $(R^2(x))' = 4(h-2x)$

Giải $(R^2)' = 0$: $h-2x=0 \Rightarrow x = \frac{h}{2}$.

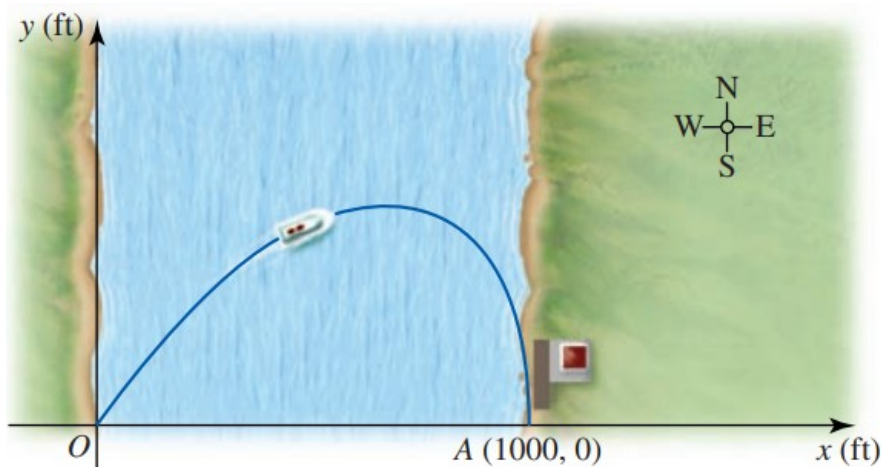
Lập bảng biến thiên ta có $x = \frac{h}{2}$ là điểm cực đại.

Vậy lỗ phun nên đặt ở độ cao $x = \frac{h}{2}$ để tầm xa R của tia nước đạt tối đa.

Câu 22. Một con thuyền rời bến $O(0,0)$ trên một bờ sông, luôn đi với vận tốc không đổi 20 dặm/giờ hướng về bến $A(1000,0)$ (phía đông của O); đồng thời nước sông chảy ngược lên phía bắc với tốc độ 5 dặm/giờ. Người ta cho rằng đường đi của thuyền là

$$y = 500 \left[\left(\frac{1000-x}{1000} \right)^{3/4} - \left(\frac{1000-x}{1000} \right)^{5/4} \right], \quad 0 \leq x \leq 1000$$

Tìm độ lệch bắc lớn nhất mà thuyền đạt được trong suốt hành trình.



Lời giải

Đặt $u = \frac{1000-x}{1000}$, thì $0 \leq u \leq 1$, $x = 1000(1-u)$.

Khi đó $y(u) = 500(u^{3/4} - u^{5/4})$.

Tính đạo hàm theo u : $500 \left(\frac{3}{4} u^{-1/4} - \frac{5}{4} u^{1/4} \right) = 500 \cdot \frac{1}{4} u^{-1/4} (3-5u)$

Vì $u^{-1/4} > 0$ trên $(0,1]$, ta chỉ cần giải $3-5u=0 \Rightarrow u = \frac{3}{5} = 0,6$

Lập bảng xét dấu ta có

u	0	0,6	1	
$y'(u)$		+	0	-

Suy ra $y(u)$ đạt điểm cực đại tại $u = 0,6$

Chuyển lại thành x và tính y_{CD}

- Tương ứng $x = 1000(1 - u) = 1000 \cdot 0,4 = 400$.

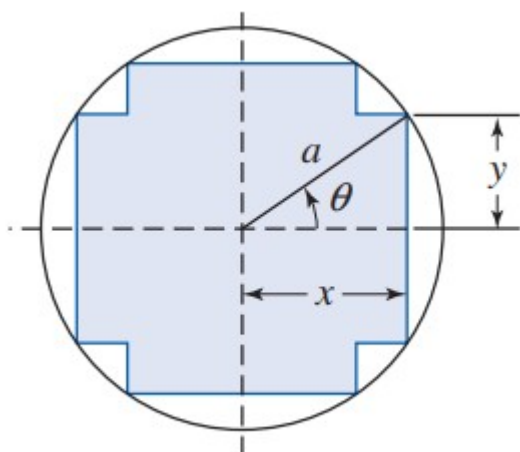
- Độ lệch bắc cực đại là $y_{CD} = 500 \left((0,6)^{3/4} - (0,6)^{5/4} \right) \approx 500(0,6817 - 0,5286) \approx 76,6$

Do đó giá trị $y_{CD} \approx 76,6$ tại $x = 400$

Kết luận:

Trong suốt hành trình, con thuyền bị dòng nước đẩy lệch về phía bắc cực đại khoảng 76,6 (đơn vị chiều dài) khi nó đã đi được $x = 400$ (đơn vị tương ứng) về phía đông.

Câu 23. Khi chế tạo một biến áp AC , một lõi sắt dạng hình chữ thập được đặt vào cuộn dây (xem hình). Giả sử bán kính cuộn là a . Hỏi góc θ bằng bao nhiêu độ để tổng diện tích bề mặt lõi sắt là lớn nhất.



Lời giải

Trả lời: 31,7

Đặt $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$ suy ra $S = 4xy + 4y(x - y) = 8xy - 4y^2 = 4a^2 (\sin 2\theta - \sin^2 \theta)$ trên

khoảng $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

Ta có $S(\theta) = 4a^2 (\sin 2\theta - \sin^2 \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

Tính đạo hàm $S'(\theta): S'(\theta) = 4a^2 (2 \cos 2\theta - \sin 2\theta)$

Giải $S'(\theta) = 0: 2 \cos 2\theta - \sin 2\theta = 0 \Rightarrow 2 \cos 2\theta = \sin 2\theta \Rightarrow \tan 2\theta = 2.$

$$0 \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2}, \text{ nghiệm duy nhất là } 2\theta = \arctan 2 \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \arctan 2 \approx 0,5536 \text{ rad } (\approx 31,7^\circ)$$

Lập bảng biến thiên ta có: tại $\theta \approx 0,5536 \text{ rad}$ là điểm cực đại hay tổng diện tích bề mặt lõi sắt lớn nhất khi $\theta \approx 31,7^\circ$

Khi đó:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan 2 \Rightarrow \cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{5}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}}$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}}$$

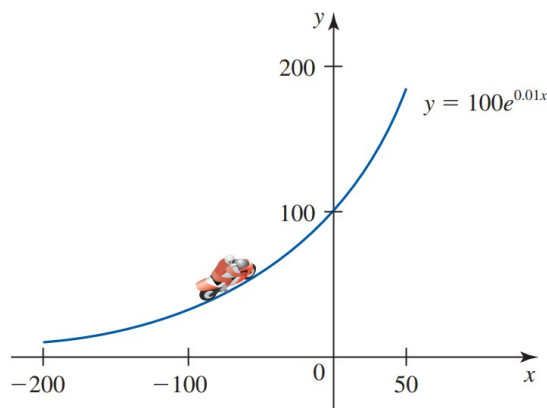
$$\theta = \frac{1}{2} \arctan 2, \quad x = a \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}}, \quad y = a \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}}.$$

Vậy nghiệm tối ưu là

Câu 24. Một tay lái mô tô nặng 180 (lb), di chuyển với vận tốc không đổi 30 dặm/giờ, thực hiện một khúc cua trên đường cho bởi đồ thị $y = 100e^{0,01x}$, $-200 \leq x \leq 50$

Có thể chứng minh rằng độ lớn của lực pháp tuyến tác dụng lên tay lái mô tô xấp xỉ

$$F(x) = \frac{10890e^{0,1x}}{(1 + 100e^{0,2x})^{3/2}} \quad (\text{đơn vị lb})$$



Hãy tìm lực pháp tuyến lớn nhất tác dụng lên tay lái trong suốt khúc cua (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 419

Đặt $u = e^{0,2x} (\Rightarrow e^{0,1x} = u^{1/2})$ khi đó $F(x) = 10890 \frac{u^{1/2}}{(1 + 100u)^{3/2}}$

Để tìm cực đại, xét $G(u) = \frac{u^{1/2}}{(1 + 100u)^{3/2}}, \quad u > 0$

$$\text{Tính } \ln G = \frac{1}{2} \ln u - \frac{3}{2} \ln(1+100u) \Rightarrow (\ln G)' = \frac{1}{2u} - \frac{150}{1+100u}$$

$$\text{Cho đạo hàm bằng 0: } \frac{1}{2u} = \frac{150}{1+100u} \Rightarrow 1+100u = 300u \Rightarrow 200u = 1 \Rightarrow u = 0,005$$

Lập bảng biến thiên cho hàm số $G(u), u > 0$ ta có được hàm số đạt cực đại tại $u = 0,005$

$$\text{Trả về biến } x: e^{0,2x} = 0,005 \Rightarrow 0,2x = \ln(0,005) \approx -5,298 \Rightarrow x \approx -26,49.$$

(thuộc miền $[-200, 50]$).

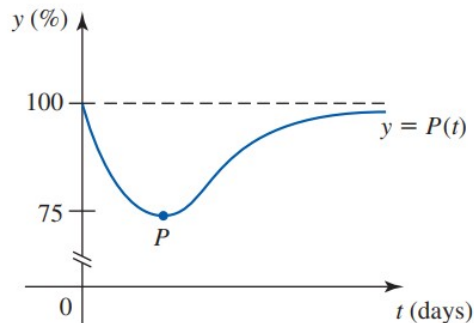
$$\text{Giá trị cực đại } F_{CD} = 10890 \frac{\sqrt{0,005}}{(1+100 \cdot 0,005)^{3/2}} = 10890 \frac{0,07071}{1,5^{3/2}} = 10890 \frac{0,07071}{1,8371} \approx 419,4 \text{ lb}$$

- Lực pháp tuyến đạt cực đại khi $x \approx -26,5$.

- Giá trị cực đại là khoảng 419 (lb).

Câu 25. Khi chất thải hữu cơ được đổ vào một cái ao, quá trình ôxy hóa xảy ra sẽ làm giảm hàm lượng ôxy trong nước. Tuy nhiên, theo thời gian, tự nhiên sẽ phục hồi lại mức ôxy về giá trị bình thường. Trong đồ thị kèm theo, $P(t)$ cho biết phần trăm hàm lượng ôxy (so với mức bình thường) sau t ngày kể từ khi chất thải được đổ vào ao.

$$\text{Giả sử hàm số cho hàm lượng ôxy là } P(t) = 100 \frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100} \text{ (% mức bình thường), } t \geq 0.$$



Khi đó tọa độ của điểm $P(a; b)$ trên đồ thị là điểm cực trị của đồ thị hàm số $P(t)$. Tính $a + b$?

Lời giải

Trả lời: 85

$$P'(t) = \frac{(2t+10)(t^2+20t+100) - (2t+20)(t^2+10t+100)}{(t^2+20t+100)^2}$$

Ta có:

$$\text{Khi đó } P'(t) = 0 \Leftrightarrow (2t+10)(t^2+20t+100) - (2t+20)(t^2+10t+100) = 0$$

$$\Rightarrow 10t^2 - 1000 = 0 \Rightarrow t^2 = 100 \Rightarrow t = 10 \quad (t \geq 0)$$

Lập bảng biến thiên ta có $t = 10$ là điểm cực tiểu của hàm số

Thay $t = 10$ vào $P(t)$: $P(10) = 100 \frac{10^2 + 10 \cdot 10 + 100}{10^2 + 20 \cdot 10 + 100} = 100 \frac{100 + 100 + 100}{100 + 200 + 100} = 100 \frac{300}{400} = 75$.

Vậy điểm P có tọa độ $(10; 75)$

Câu 26. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $N(t) = 45t^2 - t^3, 0 \leq t \leq 30$ (người). Nếu xem $N'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 15.

Ta có: $N(t) = 45t^2 - t^3, 0 \leq t \leq 30$;

$$N'(t) = 90t - 3t^2, N''(t) = 90 - 6t, N''(t) = 0 \Leftrightarrow 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 15$$

Bảng biến thiên:

t	0	15	30
$N''(t)$	+	0	-
$N'(t)$	0	675	0

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ 15.

Câu 27. Một người có một dây ruy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dải ruy băng này quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10 cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ). Dải ruy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích bằng $a \cdot \pi (cm^3), a \in \mathbb{Q}^+$. Giá trị lớn nhất của a là bao nhiêu?



Lời giải

Đáp án: 1000.

Gọi $x (cm); y (cm)$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ $(x, y > 0; x < 30)$.

Độ dài dải dây ruy băng còn lại khi đã thắt nơ là: 120 cm.

Ta có: $(2x + y) \cdot 4 = 120 \Leftrightarrow y = 30 - 2x > 0 \Rightarrow 0 < x < 15$.

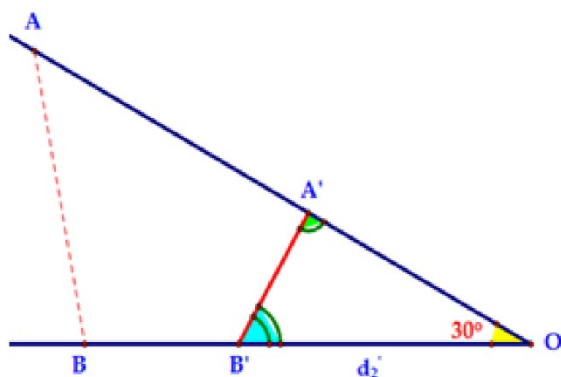
Thể tích khối hộp quà là: $V = \pi x^2 \cdot y = \pi x^2(30 - 2x)$. Thể tích V lớn nhất khi hàm số $f(x) = x^2(30 - 2x)$, $(0 < x < 15)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $f'(x) = -6x^2 + 60x$;

Cho $f'(x) = -6x^2 + 60x = 0 \Rightarrow x = 10$.

Lập bảng biến thiên ta thấy thể tích đạt GTLN là: $V = \pi \cdot f(10) = 1000\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

Câu 28. Hai chất điểm A và B chuyển động thẳng đều cùng hướng về O (như hình vẽ), biết rằng vận tốc $V_B = \frac{V_A}{\sqrt{3}}$ và góc $\angle AOB = 30^\circ$. Biết rằng khi khoảng cách giữa hai chất điểm A và B là nhỏ nhất thì số đo góc $\angle BAO = \gamma$. Tìm γ .



Lời giải

Đáp số: 30.

Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách các vật A và B đến O lúc đầu ($t = 0$), đồng thời $d = AB$.

Gọi t' là thời điểm mà $d_{\min}$. Khi đó A ở A' và B ở B' như hình vẽ.

$$\angle B'A'O = \beta, \angle A'B'O = \gamma$$

Kí hiệu góc

$$\triangle A'B'O$$

Áp dụng định lý sin trong tam giác $\triangle A'B'O$ ta có:

$$\frac{d}{\sin 30} = \frac{OA'}{\sin \gamma} = \frac{OB'}{\sin \beta} \Leftrightarrow 2d = \frac{d_1 - AA'}{\sin \gamma} = \frac{d_2 - BB'}{\sin \beta} \Leftrightarrow 2d = \frac{d_1 - v_1 t}{\sin \gamma} = \frac{d_2 - v_2 t}{\sin \beta} (*)$$

$$v_2 = \frac{v_1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{C - A}{D - B}$$

Do và áp dụng, ta có:

$$(*) \Leftrightarrow 2d = \frac{\sqrt{3}d_2 - d_1}{\sqrt{3}\sin\beta - \sin\gamma} \quad \sin\beta = \sin(180^\circ - \beta) = \sin(30^\circ + \gamma)$$

mà

$$d = \frac{\sqrt{3}d_2 - d_1}{2[\sqrt{3}\sin(30^\circ + \gamma) - \sin\gamma]} = \frac{\sqrt{3}d_2 - d_1}{\sqrt{3}\cos\gamma + \sin\gamma}$$

Do đó ta có

$$f(\gamma) = \sqrt{3}\cos\gamma + \sin\gamma \quad d_{\min} \Leftrightarrow f(\gamma)_{\max}$$

Xét . Ta có

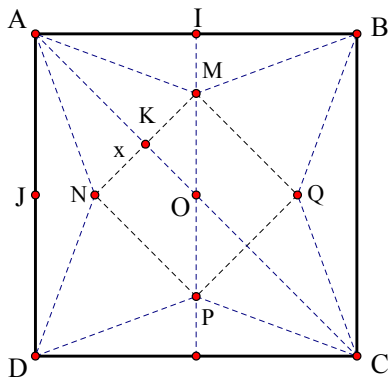
$$f'(\gamma) = -\sqrt{3}\sin\gamma + \cos\gamma; f'(\gamma) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}\sin\gamma + \cos\gamma = 0 \Leftrightarrow \tan\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \gamma = 30^\circ.$$

$$f''(\gamma) = -\sqrt{3}\cos\gamma - \sin\gamma; f''(30^\circ) = -\sqrt{3}\cos 30^\circ - \sin 30^\circ = -2 < 0$$

Vậy, khi $\gamma = 30^\circ$ thì khoảng cách giữa hai chất điểm A và B là nhỏ nhất.

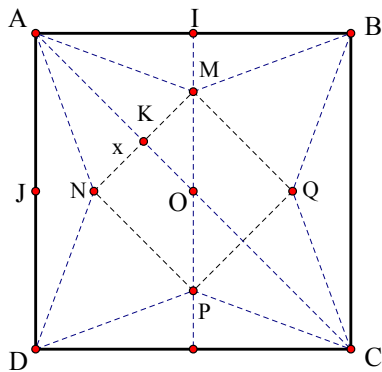
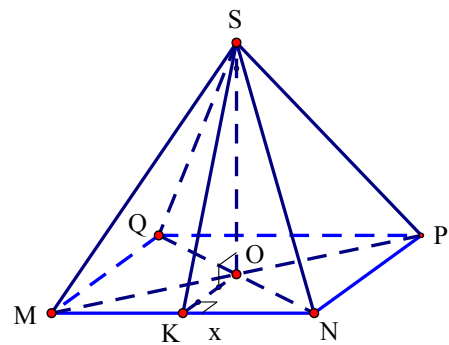
Câu 29. Cho một tấm bìa hình vuông có cạnh $2m$. Từ tấm bìa này làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là các cạnh của hình vuông rồi gấp lên và ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều. Thể tích của mô hình lớn nhất khi cạnh

đáy của mô hình bằng $\frac{a\sqrt{2}}{b}(m)$ ($a, b \in \mathbb{N}^+$; a, b nguyên tố cùng nhau). Tính tổng $a^2 + b^2$?



Lời giải

Trả lời: 41



Gọi độ dài cạnh đáy của hình chóp là $x(m)$. Do $MN < IJ = \sqrt{2} \Rightarrow x \in (0; \sqrt{2})$.

Ta có: $OK = \frac{x}{2}; OA = \frac{AC}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow SK = AK = \sqrt{2} - \frac{x}{2}$.

Do vậy: $SO = \sqrt{SK^2 - OK^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2} - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}x}$.

Khi đó thể tích khối chóp là: $V = \frac{1}{3}x^2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}$.

Xét $f(x) = \frac{1}{3}x^2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}, (x \in (0; \sqrt{2}))$, ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(2x\sqrt{2 - \sqrt{2}x} - x^2 \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{4x(2 - \sqrt{2}x) - \sqrt{2}x^2}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}} \right) = \frac{8x - 5\sqrt{2}x^2}{3(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x})}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - 5\sqrt{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

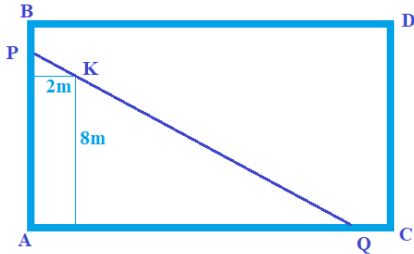
Ta có bảng biến thiên:

x	0	$\frac{4\sqrt{2}}{5}$	$\sqrt{2}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$			

Ta thấy thể tích của mô hình lớn nhất khi cạnh đáy của mô hình là

$$x = \frac{4\sqrt{2}}{5} \Rightarrow a = 4, b = 5 \Rightarrow a^2 + b^2 = 41$$

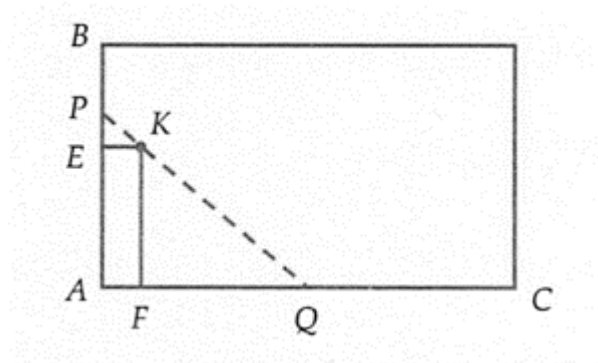
Câu 30. Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là $2m$ và cách bờ AC là $8m$, rồi dùng một cây sào thẳng PQ ngăn một góc của hồ để thả bè (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào hai bờ AB, AC và cây cọc (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).



Lời giải

Đáp án: 174.

Đặt $AP = a, AQ = b (a > 8; b > 2)(m)$.



Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K xuống AB và AC . Suy ra $KE = 2m, KF = 8m$.

Ta có: $\frac{KE}{AQ} = \frac{PK}{PQ}; \frac{KF}{AP} = \frac{QK}{PQ} \Rightarrow \frac{KF}{AP} + \frac{KE}{AQ} = 1$ hay $\frac{8}{a} + \frac{2}{b} = 1$.

Vì $\frac{8}{a} + \frac{2}{b} = 1$ nên $b = \frac{2a}{a-8}$.

Khi đó $PQ^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{2a}{a-8}\right)^2$.

Xét hàm số $y = f(a) = a^2 + \left(\frac{2a}{a-8}\right)^2$ trên khoảng $(8; +\infty)$.

Ta có:

$$f'(a) = 2a + \frac{4a}{a-8} \cdot \frac{-16}{(a-8)^2} = \frac{2a[(a-8)^3 - 32]}{(a-8)^3}; f'(a) = 0 \Rightarrow (a-8)^3 = 32 \Rightarrow a = 8 + \sqrt[3]{32} > 8.$$

Bả

ng biến thiên:

a	8	$8 + \sqrt[3]{32}$	$+\infty$
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	$+\infty$	$f(8 + \sqrt[3]{32})$	$+\infty$

Do đó $\min_{(8, +\infty)} f(a) = f(8 + \sqrt[3]{32}) \approx 174,43$.

Vậy chiều dài ngắn nhất của cây sào có thể chạm vào hai bờ AB, AC và cây cọc là 174 m.

Câu 31. Khi một vật lạ mắc kẹt trong khí quản khiến ta phải ho, cơ hoành đẩy lên trên gây ra tăng áp lực trong phổi, theo đó cuống họng co thắt làm hẹp khí quản khiến không khí đi qua mạnh hơn. Đối với một lượng không khí bị đẩy ra trong một khoảng thời gian cố định, khí quản càng nhỏ thì luồng không khí càng đẩy ra nhanh hơn. Vận tốc luồng khí thoát ra càng cao, lực tác động lên vật lạ càng lớn.

Qua nghiên cứu một số trường hợp, người ta nhận thấy vận tốc v của luồng khí liên hệ với bán

kính x của khí quản theo công thức:

$$v(x) = k(x_0 - x) \cdot x^2 \text{ với } \frac{1}{2}x_0 \leq x \leq x_0$$

trong đó k là hằng số ($k > 0$) và x_0 là bán kính khí quản ở trạng thái bình thường

(Theo James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning).

Khi đó $x = \dots\dots\dots x_0$ thì vận tốc luồng khí của một cơn ho trong trường hợp này là lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,67

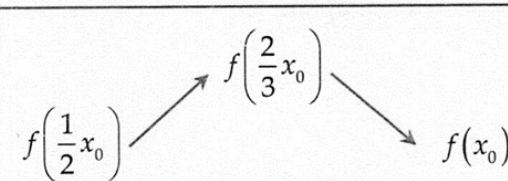
Xét hàm số $f(x) = (x_0 - x)x^2$ với x_0 cố định và $\frac{1}{2}x_0 \leq x \leq x_0$.

Do k là hằng số dương nên vận tốc của luồng khí của một cơn ho lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có:

$$f(x) = -x^3 + x_0x^2; f'(x) = -3x^2 + 2x_0x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{2}{3}x_0.$$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}x_0$	$\frac{2}{3}x_0$	x_0
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\max_{\left[\frac{1}{2}x_0; x_0\right]} f(x) = f\left(\frac{2}{3}x_0\right)$.

Vậy vận tốc của luồng khí của một con ho lớn nhất khi $x = \frac{2}{3}x_0$.

Đáp án: $\frac{2}{3} \approx 0,67$.