

**Câu 1. (3,0 điểm)** Cho dãy số thực  $(u_n)$  xác định bởi  $u_1 = \frac{1}{3}; u_{n+1} = \frac{3u_n}{2 + 3u_n^3}$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

**Câu 2. (3,0 điểm)** Tìm tất cả các hàm số đa thức  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn  

$$f(xf(y)) = f(xy) + 2f(x) - 4, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

**Câu 3. (3,0 điểm)**

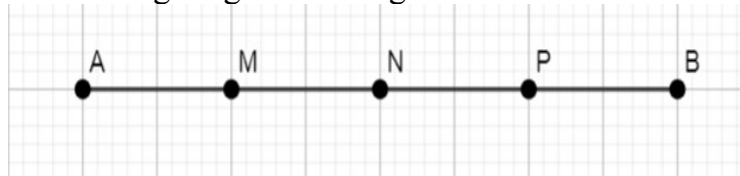
- a) Tìm tất cả các giá trị nguyên của  $x, y$  thỏa mãn phương trình  $2x^2 - 3y^2 = 3 - xy$ .  
 b) Tìm tất cả các số nguyên dương  $m, n$  và số nguyên tố  $p$  thỏa mãn  

$$(m^3 + n)(m + n^3) = p^3.$$

**Câu 4. (5,0 điểm)** Cho tam giác  $ABC$  nhọn ( $AB < AC$ ) và điểm  $D$  nằm trên đường trung tuyến  $AM$  kẻ từ đỉnh  $A$  của tam giác ( $D$  khác  $A$ ). Gọi  $E$  là điểm trên đoạn  $MC$  ( $E$  khác  $M, C$ ). Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $D$  lên  $AB$  và  $AC$ . Gọi  $(C_1)$  và  $(C_2)$  lần lượt là hai đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BHE$  và  $CKE$ ,  $(C_1)$  cắt  $(C_2)$  tại điểm thứ hai là  $L$ . Gọi  $d$  là đường thẳng kẻ từ  $B$  vuông góc với  $BC$ ,  $d$  cắt  $(C_1)$  tại điểm thứ hai là  $I$ ,  $N$  là giao điểm thứ hai của  $IL$  và  $(C_2)$ .

- a) Chứng minh  $BI$  song song  $NC$ .  
 b) Gọi  $P$  là giao điểm của  $IL$  và  $BC$ . Chứng minh tứ giác  $ALMP$  nội tiếp đường tròn.

**Câu 5. (3,0 điểm)** Cho đoạn thẳng  $AB$  được chia thành bốn phần bằng nhau bởi ba điểm  $M, N, P$  (hình vẽ). Ta đánh dấu 2024 điểm phân biệt trong đoạn  $AB$  bằng cách **chia đều** trong mỗi đoạn  $AM, MN, NP, PB$  có 506 điểm, thỏa mãn điều kiện với một điểm bất kỳ thuộc đoạn  $AM$  thì tồn tại một điểm thuộc đoạn  $MN$  đối xứng với nhau qua  $M$ ; tương tự với một điểm bất kỳ thuộc đoạn  $PB$  thì tồn tại một điểm thuộc đoạn  $NP$  đối xứng với nhau qua  $P$ . Sau đó ta thực hiện tô màu đỏ cho 1012 điểm tùy ý và 1012 điểm còn lại màu đen. Chứng minh tổng các khoảng cách từ  $A$  đến các điểm màu đỏ bằng tổng các khoảng cách từ  $B$  đến các điểm màu đen.



**Câu 6. (3,0 điểm)** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn  $x^3 \geq 0, y \leq 0$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  

$$P = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{y^2 - 2y + 2} + 3\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y + 8}$$

----- HẾT -----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

- Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh.....

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TỈNH QUẢNG NAM**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT  
NĂM HỌC 2023 – 2024 ĐỢT 2**

**HDC CHÍNH THỨC**

**HƯỚNG DẪN CHẤM  
MÔN: TOÁN LỚP 11 (CHUYÊN)**

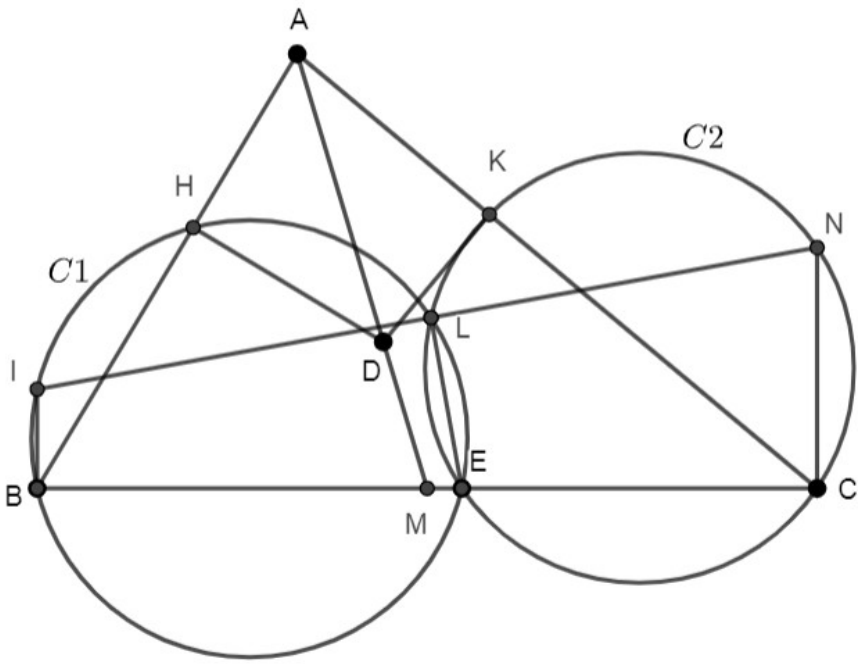
(Bản hướng dẫn này gồm 07 trang)

| Câu | Nội dung                                                                                                                                                                                                            | Điểm |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 1   | <b>Câu 1. (3,0 điểm)</b> Cho dãy số thực $(u_n)$ xác định bởi $u_1 = \frac{1}{3}; u_{n+1} = \frac{3u_n}{2 + 3u_n^3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh dãy $(u_n)$ có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó. | 3,0  |
|     | Nhận xét dãy số $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ .                                                                                                                                                              | 0,25 |
|     | Biến đổi $u_{n+1} = \frac{3u_n}{2 + 3u_n^3} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{u_n} + 3u_n^2 \right)$                                                                                  | 0,25 |
|     | Đặt dãy số $x_n = \frac{1}{u_n} > 0$ ta được $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left( 2x_n + \frac{3}{x_n^2} \right)$                                                                                                          | 0,25 |
|     | Dùng BĐT AM-GM ta được:<br>$x_{n+1} = \frac{1}{3} \left( x_n + x_n + \frac{3}{x_n^2} \right) \geq \sqrt[3]{3} \quad x_n = \frac{1}{u_n} \geq \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow u_n \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$<br>suy ra  | 0,5  |
|     | Dấu bằng xảy ra khi $u_{n+1} = \frac{3u_n}{2 + 3u_n^3} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ hay là $u_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ điều này vô lý, nên dấu bằng không xảy ra.                                                     | 0,25 |
|     | Vậy ta luôn có $u_n < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ ( bị chặn trên )                                                                                                                                                       | 0,25 |
|     | Mặt khác xét $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{2 + 3u_n^3} - u_n = \frac{u_n - 3u_n^4}{2 + 3u_n^3} = \frac{u_n(1 - 3u_n^3)}{2 + 3u_n^3} > 0; \left( u_n < \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)$                                 | 0,5  |
|     | Suy ra dãy số tăng và bị chặn trên nên tồn tại giới hạn hữu hạn $L$ .                                                                                                                                               | 0,5  |
|     | Từ công thức truy hồi suy ra $L = \frac{3L}{2 + 3L^3} \Leftrightarrow L = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \quad \text{Vậy} \quad \lim u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$                                                            | 0,5  |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |      |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 2  | <b>Câu 2. (3,0 điểm)</b> Tìm tất cả các hàm số đa thức $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn<br>$f(xf(y)) = f(xy) + 2f(x) - 4, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$                                                                                                                      | 3,0  |
|    | Giả sử tồn tại hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa yêu cầu đề bài<br>+ Xét $x = 1$ suy ra $f(f(y)) = f(y) + 2f(1) - 4, \quad \forall y \in \mathbb{Z}$ (2)                                                                                                                        | 0,5  |
|    | Đặt $\deg f = n \ (n \in \mathbb{N})$<br>$n^2 = n \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases}$<br>So sánh bậc 2 vế của (2) ta được:                                                                                                                                                 | 0,5  |
|    | Nếu $n = 0 \Rightarrow f(x) = C$ , thay vào (1) ta được $C = 2 \Rightarrow f(x) = 2, \forall x \in \mathbb{Z}$ . Thử lại thỏa mãn.                                                                                                                                                               | 0,5  |
|    | Nếu $n = 1 \Rightarrow f(x) = ax + b \ (a \neq 0)$<br>Thay vào (1) ta được:<br>$ax(ay + b) + b = axy + b + 2(ax + b) - 4, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$                                                                                                                                     | 0,5  |
|    | $\Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ ab = 2a \\ b = 3b - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$                                                                                                                                                                | 0,5  |
|    | $\Rightarrow f(x) = x + 2$ . Thử lại thỏa mãn                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,25 |
|    | Vậy hàm số tìm được là $f(x) = 2, \quad \forall x \in \mathbb{Z}$ hoặc $f(x) = x + 2, \quad \forall x \in \mathbb{Z}$                                                                                                                                                                            | 0,25 |
| 3  | <b>Câu 3. (3,0 điểm)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                         |      |
| a. | a/ Tìm tất cả các giá trị nguyên của $x, y$ thỏa mãn phương trình $2x^2 - 3y^2 = 3 - xy$ .                                                                                                                                                                                                       | 1,0  |
|    | Ta có phương trình: $2x^2 - 3y^2 = 3 - xy$<br>Biến đổi tương đương ta được $(x - y)(2x + 3y) = 3$<br>Với $x - y; 2x + 3y$ là các số nguyên nên ta có các trường hợp sau                                                                                                                          | 0,25 |
|    | 1) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$ (loại)      2) $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + 3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-6}{5} \\ y = \frac{-1}{5} \end{cases}$ (loại) | 0,25 |
|    | 3) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ (nhận)      4) $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$ (nhận)                                         | 0,25 |

|                                      |      |
|--------------------------------------|------|
| Vậy có 2 nghiệm $(2;-1)$ và $(-2;1)$ | 0,25 |
|--------------------------------------|------|

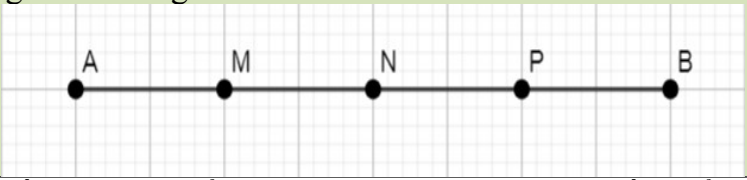
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>b. Câu 3.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |            |
| <i>b/ Tìm tất cả các số nguyên dương <math>m, n</math> và số nguyên tố <math>p</math> thỏa mãn</i><br>$(m^3 + n)(m + n^3) = p^3$                                                                                                                                                                                                                                                                                           | <b>2,0</b> |
| Không mất tính tổng quát, ta giả sử $m \geq n$<br>Từ: $(m^3 + n)(m + n^3) = p^3$ suy ra: $\begin{cases} m^3 + n = p^2 & (1) \\ n^3 + m = p & (2) \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                              | 0,25       |
| Để thấy: $p > m \geq n^3$ , ngoài ra từ (2) ta có: $m \equiv -n^3 \pmod{p}$ .<br>Từ (1) ta có: $n \equiv -m^3 \equiv -(-n^3)^3 \equiv n^9 \pmod{p}$<br>Chuyển về ta được: $p \mid (n - n^9) = -n(n-1)(n+1)(n^2+1)(n^4+1)$                                                                                                                                                                                                  | 0,75       |
| + Nếu $n=1$ thử lại được $m=2; p=3$ , nếu $n>1$ ta xét các trường hợp dưới đây                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0,25       |
| 1) $p \mid n$ ta có $p \leq n < p$ vô lý<br>2) Với $p \mid (n-1)$ ta có $p \leq n-1 < p-1$ mâu thuẫn<br>3) Với $p \mid (n+1)$ ta có $n+1 \geq p > n^3 > n+1$ mâu thuẫn<br>4) Với $p \mid (n^2+1)$ ta có $n^2+1 \geq p > n^3 > n^2+1$ mâu thuẫn<br>5) Với $p \mid (n^4+1)$ ta kết hợp với (2) có $p \mid [n(m+n^3) - (n^4+1)] = mn-1$ suy ra $mn > p$<br>Mà ta lại có $p^3 = (m+n^3)(n+m^3) > n^3 m^3$ suy ra (5) mâu thuẫn | 0,5        |
| Vậy ta chỉ có hai bộ số (1,2,3) hoặc (2,1,3) thỏa mãn bài toán.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,25       |

| Câu | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Điểm |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 4   | <p><b>Câu 4. (5,0 điểm)</b> Cho tam giác <math>ABC</math> nhọn (<math>AB &lt; AC</math>) và điểm <math>D</math> nằm trên đường trung tuyến <math>AM</math> kẻ từ đỉnh <math>A</math> của tam giác (<math>D</math> khác <math>A</math>). Gọi <math>E</math> là điểm trên đoạn <math>MC</math> (<math>E</math> khác <math>M, C</math>). Gọi <math>H, K</math> lần lượt là hình chiếu của <math>D</math> lên <math>AB</math> và <math>AC</math>. Gọi <math>(C_1)</math> và <math>(C_2)</math> lần lượt là hai đường tròn ngoại tiếp tam giác <math>BHE</math> và <math>CKE</math>, <math>(C_1)</math> cắt <math>(C_2)</math> tại điểm thứ hai là <math>L</math>. Gọi <math>d</math> là đường thẳng kẻ từ <math>B</math> vuông góc với <math>BC</math>, <math>d</math> cắt <math>(C_1)</math> tại điểm thứ hai là <math>I</math>, <math>N</math> là giao điểm thứ hai của <math>IL</math> và <math>(C_2)</math>.</p> <p>a) Chứng minh <math>BI</math> song song <math>NC</math>.</p> <p>b) Gọi <math>P</math> là giao điểm của <math>IL</math> và <math>BC</math>. Chứng minh tứ giác <math>ALMP</math> nội tiếp đường tròn.</p> | 5,0  |
| a.  | <p>a/ Chứng minh rằng <math>BI</math> song song <math>NC</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 2,0  |
|     | <p><b>Cách 1.</b><br/>Xét hai đường tròn <math>(C_1)</math> và <math>(C_2)</math> có hai giao điểm là <math>L, E</math> và có hai cát tuyến lần lượt là <math>ILN</math> và <math>BEC</math>, theo định lý Reim thì <math>BI</math> song song <math>NC</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,25 |
|     | <p><b>Cách 2.</b><br/>+ Xét tứ giác nội tiếp <math>IBEL</math> có <math>\angle B = 90^\circ</math> nên <math>\angle ELN = 90^\circ</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 1,75 |
|     | Suy ra với tứ giác nội tiếp $LECN$ thì ta được $\angle NCE = 90^\circ$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,75 |
|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0,5  |

|  |                                                                                      |     |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|  | + Vây $\overline{NC} \perp \overline{EC} \Rightarrow \overline{NC} // \overline{BI}$ | 0,5 |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|

|                                                                                                                                                                                             |               |                                                                                                |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| b.                                                                                                                                                                                          | <b>Câu 4.</b> | b/ Gọi $P$ là giao điểm của $IL$ với $BC$ . Chứng minh rằng tứ giác $ALMP$ nội tiếp đường tròn | <b>3,0</b> |
|                                                                                                                                                                                             |               |                                                                                                | 0,25       |
| (Có thể không có đường tròn $C1$ )                                                                                                                                                          |               |                                                                                                |            |
| Gọi đường tròn $(C3)$ ngoại tiếp 3 đỉnh $A, H, K$ .                                                                                                                                         |               |                                                                                                | 0,25       |
| Khi đó: điểm $L$ là điểm Miquel của 3 đường tròn $(C1)$ , $(C2)$ , $(C3)$ tương ứng 3 điểm $H, E, K$ trên 3 cạnh của tam giác $ABC$ .                                                       |               |                                                                                                | 0,5        |
| Gọi $O$ là giao điểm của $IL$ và $(C3)$ .                                                                                                                                                   |               |                                                                                                |            |
| Theo câu (a) ta vận dụng cho 2 đường tròn $(C2)$ , $(C3)$ suy ra $AO \parallel NC$ (hoặc vận dụng định lý Reim cho 2 đường tròn $(C2)$ , $(C3)$ có 2 cát tuyến lần lượt là $AKC$ và $OLN$ ) |               |                                                                                                | 0,75       |
| Khi đó ta được: $AO \perp BC$                                                                                                                                                               |               |                                                                                                |            |
| + Vì $HD \perp AB; KD \perp AC$ nên $D$ thuộc đường tròn $(C3)$ và $AD$ là đường kính                                                                                                       |               |                                                                                                | 0,25       |
| + Suy ra $OD \parallel BC$ nên $\angle ADO = \angle AMP$                                                                                                                                    |               |                                                                                                | 0,25       |
| + Lại có $\angle ADO = \angle ALO$                                                                                                                                                          |               |                                                                                                | 0,25       |

|                                                                                 |      |
|---------------------------------------------------------------------------------|------|
| + Suy ra $\widehat{AMP} = \widehat{ALO}$ hay là $\widehat{AMP} = \widehat{ALP}$ | 0,25 |
| + Vậy $ALMP$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.                                    | 0,25 |

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |      |
|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 5 | <p><b>Câu 5. (3,0 điểm)</b> Cho đoạn thẳng <math>AB</math> được chia thành bốn phần bằng nhau bởi ba điểm <math>M, N, P</math> (hình vẽ). Ta đánh dấu 2024 điểm phân biệt trong đoạn <math>AB</math> bằng cách <b>chia đều</b> trong mỗi đoạn <math>AM, MN, NP, PB</math> có 506 điểm, thỏa mãn điều kiện với một điểm bất kỳ thuộc đoạn <math>AM</math> thì tồn tại một điểm thuộc đoạn <math>MN</math> đối xứng với nhau qua <math>M</math>; tương tự với một điểm bất kỳ thuộc đoạn <math>PB</math> thì tồn tại một điểm thuộc đoạn <math>NP</math> đối xứng với nhau qua <math>P</math>. Sau đó ta thực hiện tô màu đỏ cho 1012 điểm tùy ý và 1012 điểm còn lại màu đen. Chứng minh tổng các khoảng cách từ <math>A</math> đến các điểm màu đỏ bằng tổng các khoảng cách từ <math>B</math> đến các điểm màu đen.</p>  | 3,0  |
|   | + Định hướng bằng đường thẳng từ $A$ tới $B$ và giả sử $N$ là gốc, điểm $B$ có tọa độ là 1 còn điểm $A$ có tọa độ là -1.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 0,25 |
|   | + Theo giả thiết 506 điểm $X_1; X_2; \dots; X_{506}$ (có tọa độ $x_1; x_2; \dots; x_{506}$ bất kỳ thuộc đoạn $AM$ ) thì ta cũng có tương ứng 506 điểm $Y_1; Y_2; \dots; Y_{506}$ có tọa độ $y_1; y_2; \dots; y_{506}$ đối xứng với $X_1; X_2; \dots; X_{506}$ qua $M$ , suy ra $y_i = 2x_M - x_i = x_A - x_i = -1 - x_i$ với $i = \overline{1, \dots, 506}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,5  |
|   | Tương tự với 506 điểm $Z_1; Z_2; \dots; Z_{506}$ có tọa độ $z_1; z_2; \dots; z_{506}$ bất kỳ thuộc đoạn $PB$ thì ta cũng có tương ứng 506 điểm $T_1; T_2; \dots; T_{506}$ có tọa độ $t_1; t_2; \dots; t_{506}$ đối xứng với $Z_1; Z_2; \dots; Z_{506}$ qua $P$ , suy ra $t_i = 2x_P - z_i = x_B - z_i = 1 - z_i$ với $i = \overline{1, \dots, 506}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,5  |
|   | + Tính tổng tọa độ 2024 điểm như sau<br>$\sum_{i=1}^{506} x_i + \sum_{i=1}^{506} y_i + \sum_{i=1}^{506} z_i + \sum_{i=1}^{506} t_i = \sum_{i=1}^{506} x_i + \sum_{i=1}^{506} (-1 - x_i) + \sum_{i=1}^{506} z_i + \sum_{i=1}^{506} (1 - z_i) = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0,25 |
|   | + Gọi tọa độ của 1012 điểm màu đỏ là $a_1; a_2; \dots; a_{1012}$ , suy ra tổng khoảng cách từ các điểm màu đỏ đến $A$ là $\sum_{i=1}^{1012} (a_i - x_A) = \sum_{i=1}^{1012} a_i + 1012$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,5  |

|                                                                                                                                                                                          |      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| + Gọi tọa độ của 1012 điểm màu đen là $b_1; b_2; \dots; b_{1012}$ , suy ra tổng khoảng cách từ các điểm màu đen đến B là $\sum_{i=1}^{1012} (x_B - b_i) = -\sum_{i=1}^{1012} b_i + 1012$ | 0,5  |
| Ta lại có $\sum_{i=1}^{1012} a_i + \sum_{i=1}^{1012} b_i = \sum_{i=1}^{506} x_i + \sum_{i=1}^{506} y_i + \sum_{i=1}^{506} z_i + \sum_{i=1}^{506} t_i = 0$                                | 0,25 |
| Vậy $\sum_{i=1}^{1012} a_i = -\sum_{i=1}^{1012} b_i$ hay là tổng khoảng cách từ các điểm màu đỏ đến A bằng tổng khoảng cách từ các điểm màu đen đến B                                    | 0,25 |

|          |                                                                                                                                                                                                                  |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>6</b> | <b>Câu 6. (3,0 điểm)</b> Cho hai số thực $x, y$ thỏa mãn $x \geq 0, y \leq 0$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{y^2 - 2y + 2} + 3\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y + 8}$ | <b>3,0</b> |
|          | <b>Cách 1.</b><br>Xét $y = 0$ và $x \geq 0$ .<br>Ta chứng minh P không bị chặn trên khi $x \rightarrow +\infty$                                                                                                  | 0,5        |
|          | $y=0, P = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{2} + 3\sqrt{x^2 + 4x + 8}.$                                                                                                                                          | 0,25       |
|          | Ta có: $\frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{(x+1)^2 + 1} > 0, \forall x$ nên                                                                                                                                       | 0,5        |
|          | $P > 3\sqrt{x^2 + 4x + 8} > \sqrt{x^2 + 4x + 8} > x.$                                                                                                                                                            | 1,0        |
|          | Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $P \rightarrow +\infty$ .                                                                                                                                                        | 0,5        |
|          | Vậy nên P không có giá trị lớn nhất trên miền $\{(x, y) / x \geq 0, y \leq 0\}$ .                                                                                                                                | 0,25       |
|          | <b>Cách 2.</b>                                                                                                                                                                                                   |            |
|          | Ta có: $\frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{y^2 - 2y + 2} = \frac{1}{1 + (x+1)^2} + \frac{1}{1 + (1-y)^2}$                                                                                                         | 0,25       |
|          | $x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y + 4 + 4 = (x+2-y)^2 + 4 = 4(x+1) + (1-y)^2 + 4$                                                                                                                                       | 0,25       |
|          | Đặt $\begin{cases} a = x+1 \\ b = 1-y \end{cases}, ab \geq 1$                                                                                                                                                    | 0,25       |
|          | $P = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + 3\sqrt{(a+b)^2 + 4}$                                                                                                                                                    | 0,25       |
|          | CM được: $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}, "ab \geq 1$                                                                                                                                     | 0,5        |
|          | Có: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ nên: $P \geq \frac{2}{1+ab} + 3\sqrt{4ab+4}$                                                                                                                                           | 0,5        |

|  |                                                                                                         |      |
|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|  | Đặt : $t = \sqrt{1+ab} \cdot \sqrt{2} \cdot P^3 \cdot \frac{2}{t^2} + 6t$ , " $t \cdot \sqrt{2}$        | 0,25 |
|  | Gọi $f(t) = \frac{2}{t^2} + 6t$ , " $t \cdot \sqrt{2}$<br>$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ | 0,5  |
|  | Vì $P > f(t)$ nên không tồn tại giá trị lớn nhất của P                                                  | 0,25 |

----- HẾT -----

\* **Lưu ý:** Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong HDC nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.