

CHUYÊN ĐỀ BÀI TOÁN THỰC TẾ: TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Cho $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

1. Tính đơn điệu của hàm số

a) Định lí

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập K . Nếu $f'(x) \geq 0$ (hoặc $f'(x) \leq 0$) với mọi x thuộc K và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên K .

b) Các bước để tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

2. Điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số

a) Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập K và $x_0 \in K, x_1 \in K$.

- x_0 được gọi là một điểm cực đại của hàm số đã cho nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a; b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b)$ và $x \neq x_0$.

Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số đã cho, kí hiệu là f_{CD} .

- x_1 được gọi là một điểm cực tiểu của hàm số đã cho nếu tồn tại một khoảng $(c; d)$ chứa điểm x_1 sao cho $(c; d) \subset K$ và $f(x) > f(x_1)$ với mọi $x \in (c; d)$ và $x \neq x_1$.

Khi đó, $f(x_1)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số đã cho, kí hiệu là f_{CT} .

- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị).

Chú ý: Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

b) Dấu hiệu nhận biết

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .

c) Các bước để tìm điểm cực trị của hàm số $f(x)$

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các điểm cực trị của hàm số.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. Giả sử toạ độ $x(t)$ (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm $t \geq 0$ (giây) được cho bởi công thức: $x(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 3$.

a) Trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang phải, trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang trái?

b) Khi nào chất điểm chuyển hướng?

c) Khi nào vận tốc của chất điểm tăng và khi nào vận tốc của chất điểm giảm?

Bài 2. Doanh thu hằng tháng R của một sản phẩm mới trong một khoảng thời gian dự kiến tuân

theo hàm logistic:
$$R = R(t) = \frac{20000}{1 + 50e^{-t}} - \frac{20000}{51}, t \geq 0,$$
 trong đó thời gian t được tính bằng tháng.

a) Tìm tốc độ thay đổi doanh thu bán hàng $R'(t)$. Có nhận xét gì về doanh thu bán hàng hằng tháng?

b) Tốc độ thay đổi doanh thu bán hàng tăng khi nào và giảm khi nào?

c) Khi nào tốc độ thay đổi doanh thu bán hàng đạt mức tối đa?

Bài 3. Một nhà phân phối đồ chơi trẻ em xác định hàm chi phí $C(x)$ và hàm doanh thu $R(x)$ (đều tính bằng trăm nghìn đồng) cho một loại đồ chơi như sau:

$C(x) = 1,2x - 0,0001x^2, 0 \leq x \leq 6000, R(x) = 3,6x - 0,0005x^2, 0 \leq x \leq 6000$, trong đó x là số lượng đồ chơi loại đó được sản xuất và bán ra. Xác định khoảng của x để hàm lợi nhuận

$P(x) = R(x) - C(x)$ đồng biến trên khoảng đó. Giải thích ý nghĩa thực tiễn của kết quả nhận được.

Bài 4. Hàm chi phí và hàm doanh thu (đều tính bằng triệu đồng) của một loại sản phẩm lần lượt là $C(x) = 25,5x + 1000$ và $R(x) = 75,5x$, trong đó x là số đơn vị sản phẩm đó được sản xuất và bán ra.

$$\bar{P}(x) = \frac{R(x) - C(x)}{x}$$

a) Tìm hàm lợi nhuận trung bình

b) Tìm lợi nhuận trung bình khi mức sản xuất x lần lượt là 100, 500 và 1000 đơn vị sản phẩm.

c) Xét tính đơn điệu của hàm lợi nhuận trung bình $\bar{P}(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$ và tính giới hạn của hàm số này

khi $x \rightarrow +\infty$. Giải thích ý nghĩa thực tiễn của kết quả nhận được.

Bài 5. Một con lắc lò xo, gồm một vật nặng có khối lượng 1kg được gắn vào một lò xo được cố định một đầu, dao động điều hòa với biên độ $A = 0,24$ m và chu kỳ $T = 4$ giây. Vị trí x (mét) của

vật tại thời điểm t được cho bởi $x(t) = A \cos(\omega t)$, trong đó $\omega = \frac{2\pi}{T}$ là tần số góc và thời gian t tính bằng giây.

a) Tìm vị trí của vaath tại thời điểm t và tại thời điểm $t = 0,5$ giây.

b) Tìm vận tốc v của vật tại thời điểm t giây và tìm vận tốc của vật tại thời điểm $t = 0,5$ giây

c) Tìm gia tốc a của vật.

d) Sử dụng Định luật thứ hai của Newton $F = ma$, tìm độ lớn và hướng của lực tác dụng lên vật khi $t = 0,5$ giây

e) tìm thời gian tối thiểu để vật chuyển động từ vị trí ban đầu đến vị trí $x = -0,12$ m. Tìm vận tốc của vật khi $x = -0,12$ m.

Bài 6. Một vật chuyển động dọc theo một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. Giả sử vị trí của vật x (mét) từ thời điểm $t = 0$ giây đến thời điểm $t = 5$ giây được cho bởi công thức $x(t) = t^3 - 7t^2 + 11t + 5$.

a) Xác định vận tốc v của vật. Xác định khoảng thời gian vật chuyển động sang phải và khoảng thời gian vật chuyển động sang trái.

b) Tìm tốc độ của vật và thời điểm vật dừng lại. Tính tốc độ cực đại của vật trong khoảng thời gian từ

$t = 1$ giây đến $t = 4$ giây.

c) Xác định gia tốc a của vật. Tìm khoảng thời gian vật tăng tốc và khoảng thời gian vật giảm tốc.

Bài 7: Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126(s)$, cho bởi hàm số sau:

$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23$ (v được tính bằng ft / s , $1\text{ft} = 0,3048\text{m}$) (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014). Hỏi gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi?

Bài 8. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 con vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công

thức: $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2}$, trong đó t là thời gian tính bằng giây ($t \geq 0$) (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014). Trong khoảng thời gian nào từ lúc nuôi cấy, số lượng vi khuẩn sẽ tăng lên?

Bài 9. Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình:

$s(t) = t^3 - 6t^2 + 14t + 1$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Trong khoảng thời gian nào của 5 giây đầu tiên thì vận tốc tức thời của chất điểm tăng lên?

Bài 10. Một chất điểm chuyển động lên, xuống theo phương thẳng đứng. Độ cao $h(t)$ của chất

điểm tại thời điểm t (giây) được cho bởi công thức: $h(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t + 1$; ($0 \leq t \leq 8$).

a) Viết công thức tính vận tốc của chất điểm.

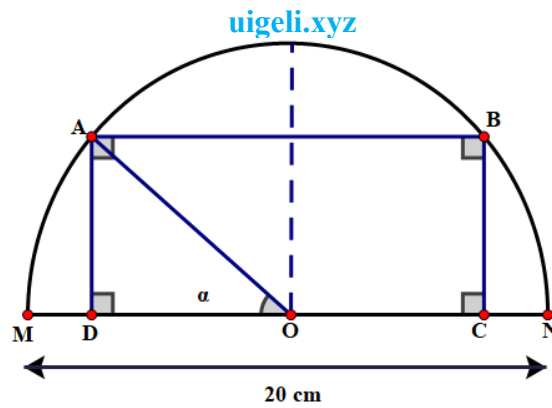
b) Trong khoảng thời gian nào chất điểm chuyển động lên, trong thời gian nào chất điểm chuyển động đi xuống?

Bài 11. Độ cao (tính bằng mét) của tàu lượn siêu tốc so với mặt tàu sau t (giây) ($0 \leq t \leq 20$) từ

lúc bắt đầu được cho bởi công thức: $h(t) = -\frac{4}{255}t^3 + \frac{49}{85}t^2 - \frac{98}{17}t + 20$.

Trong khoảng thời gian nào tàu lượn đi xuống, trong khoảng thời gian nào tàu lượn đi lên?

Bài 12. Cho điểm A di động trên nửa đường tròn tâm O đường kính $MN = 20\text{cm}$, $\angle MOA = \alpha$ với $0 \leq \alpha \leq \pi$. Lấy điểm B thuộc nửa đường tròn và C, D thuộc đường kính MN được xác định sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật. Khi A di động từ trái sang phải, trong các khoảng nào của α thì diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ tăng, trong các khoảng nào của α thì diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ giảm?



Bài 13. Người ta thấy rằng trong vòng 3 năm tính từ đầu năm 2020, giá thành P của một loại sản phẩm vào tháng thứ t thay đổi theo công thức: $P(t) = 80t^3 - 3600t^2 + 48000t + 100000$ (đồng) với $0 \leq t \leq 36$. Hãy cho biết trong khoảng thời gian nào giá thành sản phẩm tăng, trong khoảng thời gian nào giá thành sản phẩm giảm. Giá thành đạt cực đại và cực tiểu vào thời điểm nào?

Bài 14. Một cửa hàng ước tính số lượng sản phẩm q ($0 \leq q \leq 100$) bán được phụ thuộc vào giá bán P (tính bằng nghìn đồng) theo công thức $P + 2q = 300$. Chi phí cửa hàng cần chi để nhập về q sản phẩm là

$$C(q) = 0,05q^3 - 5,7q^2 + 295q + 300 \text{ (nghìn đồng).}$$

- Viết công thức tính lợi nhuận I của cửa hàng khi nhập về và bán được q sản phẩm.
- Trong khoảng nào của q thì lợi nhuận sẽ tăng khi q tăng, trong khoảng nào thì lợi nhuận giảm khi q tăng?

Bài 15. Thể tích V (đơn vị: centimet khối) của 1 kg nước tại nhiệt độ T ($0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$) được tính bởi công thức sau:

$$V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3.$$

(Nguồn: J. Stewart, Calculus, Seventh Edition, Brooks/Cole, CENGAGE Learning 2012)

Hỏi thể tích $V(T)$, $0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

Bài 16. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126(s)$. Cho bởi hàm số sau: $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23$, (v được tính bằng ft/s, 1foot=0,3048 m). (Nguồn: J. Stewart, Calculus, Seventh Edition, Brooks/Cole, CENGAGE Learning 2012).



(Nguồn: https://en.wikipedia.org/wiki/Hubble_Space_Telescope)

Hỏi gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi?

Bài 17. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số

$f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}, t \geq 0$, trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Bài 18. Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $f(x) = 0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44$ (tỉ USD) với x là số năm tính từ 2010 đến 2017 ($0 \leq x \leq 7$).

(Theo: <https://infographics.vn/interactive-xuat-khau-rau-quadu-bao-bung-no-dat-4-ty-usd-trong-nam-2023/116220.vna>)

- Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.
- Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

Bài 19. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t); v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

- Tìm các hàm $v(t)$ và $a(t)$.
- Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

LỜI GIẢI

Bài 1. Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. Giả sử toạ độ $x(t)$ (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm $t \geq 0$ (giây) được cho bởi công thức: $x(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 3$.

- a) Trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang phải, trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang trái?
- b) Khi nào chất điểm chuyển hướng?
- c) Khi nào vận tốc của chất điểm tăng và khi nào vận tốc của chất điểm giảm?

Lời giải

a) Vận tốc của chất điểm là $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 18t + 15$; $v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 5$.

Chất điểm chuyển động sang phải khi $v > 0$, tức là khi $t \in (0; 1)$ hoặc $t \in (5; +\infty)$; chất điểm chuyển động sang trái khi $v < 0$, tức là khi $t \in (1; 5)$.

b) Ta có bảng biến thiên của hàm số:

t	0	1	5	$+\infty$	
$v=x'(t)$	+	0	-	0	+
$x(t)$	3	10	-22	$+\infty$	

Chất điểm chuyển hướng tại các thời điểm mà vận tốc đổi dấu (từ âm sang dương, hoặc từ dương sang âm), tức là tại thời điểm $t = 1$ giây hoặc $t = 5$ giây.

c) Gia tốc của chất điểm là $a(t) = v'(t) = 6t - 18$; $a(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Vận tốc của chất điểm tăng (tương ứng, giảm) khi gia tốc của chất điểm dương (tương ứng, âm).

Do đó, vận tốc của chất điểm tăng khi $t \in (3; +\infty)$ và giảm khi $t \in (0; 3)$.

Bài 2. Doanh thu hằng tháng R của một sản phẩm mới trong một khoảng thời gian dự kiến tuân

theo hàm logistic: $R = R(t) = \frac{20000}{1 + 50e^{-t}} - \frac{20000}{51}, t \geq 0$, trong đó thời gian t được tính bằng tháng.

- a) Tìm tốc độ thay đổi doanh thu bán hàng $R'(t)$. Có nhận xét gì về doanh thu bán hàng hằng tháng?
- b) Tốc độ thay đổi doanh thu bán hàng tăng khi nào và giảm khi nào?
- c) Khi nào tốc độ thay đổi doanh thu bán hàng đạt mức tối đa?

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số $R(t)$ là $[0; +\infty)$.

$$R'(t) = \frac{-20000 \cdot (-50e^{-t})}{(1 + 50e^{-t})^2} = \frac{1000000e^{-t}}{(1 + 50e^{-t})^2}$$

Tốc độ thay đổi doanh thu bán hàng là

Ta có: $R'(t) > 0, \forall t \in [0; +\infty)$. Do đó $R(t)$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, tức là doanh thu bán hàng hàng tháng luôn tăng theo thời gian.

b) Tập xác định của hàm số $R'(t)$ là $[0; +\infty)$.

Ta có:

$$R''(t) = \frac{-10000000e^{-t} \cdot (1 + 50e^{-t})^2 - 10000000e^{-t} \cdot 2 \cdot (1 + 50e^{-t}) \cdot (-50e^{-t})}{(1 + 50e^{-t})^4} = \frac{10000000e^{-t} \cdot (50e^{-t} - 1)}{(1 + 50e^{-t})^3}$$

Ta có: $R''(t) = 0 \Leftrightarrow t = \ln 50$

Lập bảng biến thiên:

t	0	ln 50	$+\infty$
$R''(t)$	+	0	-
$R'(t)$	$\frac{10000000}{2001}$	5000	0

Vậy tốc độ thay đổi doanh thu bán hàng hàng tháng tăng trong khoảng $(0; \ln 50)$ và giảm trong khoảng $(\ln 50; +\infty)$

c) Tốc độ thay đổi doanh thu bán hàng đạt mức tối đa tại thời điểm $t = \ln 50 \approx 4$ tháng

Bài 3. Một nhà phân phối đồ chơi trẻ em xác định hàm chi phí $C(x)$ và hàm doanh thu $R(x)$ (đều tính bằng trăm nghìn đồng) cho một loại đồ chơi như sau:

$C(x) = 1,2x - 0,0001x^2, 0 \leq x \leq 6000, R(x) = 3,6x - 0,0005x^2, 0 \leq x \leq 6000$, trong đó x là số lượng đồ chơi loại đó được sản xuất và bán ra. Xác định khoảng của x để hàm lợi nhuận $P(x) = R(x) - C(x)$ đồng biến trên khoảng đó. Giải thích ý nghĩa thực tiễn của kết quả nhận được.

Lời giải

Hàm lợi nhuận $P(x) = R(x) - C(x) = 2,4x - 0,0004x^2, x \in [0; 6000]$.

Ta có: $P'(x) = 2,4 - 0,0008x; P'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3000$.

Suy ra hàm lợi nhuận $P(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 3000)$. Điều này nghĩa là khi số lượng đồ chơi loại đó được sản xuất và bán ra nằm trong khoảng $(0; 3000)$ thì càng sản xuất và bán nhiều, lợi nhuận thu được càng lớn.

Bài 4. Hàm chi phí và hàm doanh thu (đều tính bằng triệu đồng) của một loại sản phẩm lần lượt là $C(x) = 25,5x + 1000$ và $R(x) = 75,5x$, trong đó x là số đơn vị sản phẩm đó được sản xuất và bán ra.

$$\bar{P}(x) = \frac{R(x) - C(x)}{x}$$

- a) Tìm hàm lợi nhuận trung bình
- b) Tìm lợi nhuận trung bình khi mức sản xuất x lần lượt là 100, 500 và 1000 đơn vị sản phẩm.
- c) Xét tính đơn điệu của hàm lợi nhuận trung bình $\bar{P}(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$ và tính giới hạn của hàm số này khi $x \rightarrow +\infty$. Giải thích ý nghĩa thực tiễn của kết quả nhận được.

Lời giải

$$\bar{P}(x) = \frac{R(x) - C(x)}{x} = \frac{50x - 1000}{x} = 50 - \frac{1000}{x}$$

- a) Hàm lợi nhuận trung bình

Ta coi tập xác định của hàm lợi nhuận trung bình là $(0; +\infty)$.

- b) Với $x = 100$ thì $\bar{P}(100) = 40$ (triệu đồng).

Với $x = 500$ thì $\bar{P}(500) = 48$ (triệu đồng).

Với $x = 1000$ thì $\bar{P}(1000) = 49$ (triệu đồng).

- c) Ta có: $\bar{P}'(x) = \frac{1000}{x^2} > 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$.

Vậy hàm lợi nhuận trung bình đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Mặt khác, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{P}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(50 - \frac{1000}{x} \right) = 50$.

Như vậy, mặc dù lợi nhuận trung bình luôn tăng khi mức sản xuất tăng nhưng sẽ không vượt quá 50 triệu đồng.

Bài 5. Một con lắc lò xo, gồm một vật nặng có khối lượng 1kg được gắn vào một lò xo được cố định một đầu, dao động điều hòa với biên độ $A = 0,24$ m và chu kỳ $T = 4$ giây. Vị trí x (mét) của vật tại thời điểm t được cho bởi $x(t) = A \cos(\omega t)$, trong đó $\omega = \frac{2\pi}{T}$ là tần số góc và thời gian t tính bằng giây.

- a) Tìm vị trí của vật tại thời điểm t và tại thời điểm $t = 0,5$ giây.
- b) Tìm vận tốc v của vật tại thời điểm t giây và tìm vận tốc của vật tại thời điểm $t = 0,5$ giây
- c) Tìm gia tốc a của vật.

d) Sử dụng Định luật thứ hai của Newton $F = ma$, tìm độ lớn và hướng của lực tác dụng lên vật khi $t = 0,5$ giây

e) tìm thời gian tối thiểu để vật chuyển động từ vị trí ban đầu đến vị trí $x = -0,12 \text{ m}$. Tìm vận tốc của vật khi $x = -0,12 \text{ m}$.

Lời giải

a) Ta có: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Từ đó, vị trí của vật tại thời điểm t là $x(t) = 0,24 \cos \frac{\pi t}{2} (\text{m})$.

Suy ra vị trí của vật tại thời điểm $t = 0,5$ giây là $x(0,5) = 0,24 \cos \frac{0,5\pi}{2} = 0,12\sqrt{2} (\text{m})$.

b) Vận tốc của vật là $v(t) = x'(t) = -0,12\pi \sin \frac{\pi t}{2} (\text{m/s})$.

Tại thời điểm $t = 0,5$ giây thì $v(0,5) = -0,12\pi \sin \frac{0,5\pi}{2} = -0,06\pi\sqrt{2} (\text{m/s})$.

Dấu âm của vận tốc chứng tỏ tại thời điểm này, vật đang chuyển động theo chiều ngược với chiều dương của

trục đã chọn.

c) Gia tốc của vật là $a(t) = v'(t) = -0,06\pi^2 \cos \frac{\pi t}{2} (\text{m/s}^2)$.

d) Tại thời điểm $t = 0,5$ giây, ta có lực tác động lên vật là: $F(0,5) = m \cdot a(0,5) = -0,03\pi^2 \sqrt{2} (\text{N})$.

Vậy độ lớn của lực tác dụng lên vật là $0,03\pi^2 \sqrt{2} \text{ N}$ và lực có hướng ngược với chiều dương của trục đã chọn.

e) Vị trí của vật tại thời điểm ban đầu $t = 0$ là $x(0) = 0,24 (\text{m})$.

Ta có: $x(t) = 0,24 \cos \frac{\pi t}{2} = -0,12 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi t}{2} = -\frac{1}{2}$

Nghiệm t dương nhỏ nhất của phương trình trên là $t = \frac{4}{3}$.

Vậy thời gian tối thiểu để vật chuyển động từ vị trí ban đầu đến vị trí $x = -0,12 \text{ m}$ là $t = \frac{4}{3}$ giây.

Khi đó, vận tốc của vật là $v\left(\frac{4}{3}\right) = -0,12\pi \sin \frac{\pi \cdot \frac{4}{3}}{2} = -0,06\pi\sqrt{3} (\text{m/s})$.

Bài 6. Một vật chuyển động dọc theo một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. Giả sử vị trí của vật x (mét) từ thời điểm $t = 0$ giây đến thời điểm $t = 5$ giây được cho bởi công thức $x(t) = t^3 - 7t^2 + 11t + 5$.

- Xác định vận tốc v của vật. Xác định khoảng thời gian vật chuyển động sang phải và khoảng thời gian vật chuyển động sang trái.
- Tìm tốc độ của vật và thời điểm vật dừng lại. Tính tốc độ cực đại của vật trong khoảng thời gian từ $t = 1$ giây đến $t = 4$ giây.
- Xác định gia tốc a của vật. Tìm khoảng thời gian vật tăng tốc và khoảng thời gian vật giảm tốc.

Lời giải

Ta có: $x(t) = t^3 - 7t^2 + 11t + 5, t \in [0; 5]$.

a) Vận tốc của vật là $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 14t + 11, t \in [0; 5]; v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = \frac{11}{3}$.

Ta có: $v(t) > 0$ khi $t \in (0; 1)$ hoặc $t \in \left(\frac{11}{3}; 5\right); v(t) < 0$ khi $t \in \left(1; \frac{11}{3}\right)$.

Vật chuyển động theo chiều dương khi vận tốc $v(t) > 0$.

Do đó, vật chuyển động sang phải trong các khoảng thời điểm từ 0 giây đến 1 giây và từ $\frac{11}{3}$ giây đến 5 giây; vật chuyển động sang trái trong các khoảng thời điểm từ 1 giây đến $\frac{11}{3}$ giây.

b) Tốc độ của vật là độ lớn của vận tốc, tức là $|v(t)| = |3t^2 - 14t + 11|, t \in [0; 5]$,

Ta có: $|v(t)| = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = \frac{11}{3}$. Vậy vật dừng lại tại các thời điểm $t = 1$ giây hoặc $t = \frac{11}{3}$ giây.

Trên đoạn $[1; 4]$, ta có: $v(1) = 0; v(4) = -5; v\left(\frac{7}{3}\right) = -\frac{16}{3}$ là tung độ đỉnh của parabol $y = 3t^2 - 14t + 11$.

Do đó $\max_{t \in [1; 4]} |v(t)| = \left|v\left(\frac{7}{3}\right)\right| = \frac{16}{3}$. Vậy tốc độ cực đại của vật trong khoảng thời gian từ $t = 1$ giây đến $t = 4$ giây là $\frac{16}{3}$ (m/s).

c) Gia tốc của vật là $a(t) = v'(t) = 6t - 14$.

Ta có: $a(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{3}; a(t) > 0$ khi $t \in \left(\frac{7}{3}; 5\right); a(t) < 0$ khi $t \in \left(0; \frac{7}{3}\right)$.

Vật tăng tốc khi $a(t) > 0$ và vật giảm tốc khi $a(t) < 0$. Vậy vật tăng tốc trong khoảng thời gian từ $\frac{7}{3}$ giây đến

5 giây và vật giảm tốc trong khoảng thời gian từ 0 giây đến $\frac{7}{3}$ giây.

Bài 7: Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126(s)$, cho bởi hàm số sau:
 $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23$ (v được tính bằng ft/s , $1\text{ft} = 0,3048\text{m}$) (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014). Hỏi gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi?

Lời giải

Gia tốc của tàu con thoi được tính bởi công thức: $a(t) = v'(t) = 0,003906t^2 - 0,18058t$.

Khi đó, $a'(t) = 0,007812t - 0,18058, a'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{45145}{1953} \approx 23,12$.

Ta có bảng xét dấu của $a'(t)$ như sau:

t	0	$\frac{45145}{1953}$	126
a'(t)	-	0	+

Vậy gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian từ $23,12s$ đến $126s$.

Bài 8. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 con vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công

thức: $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2}$, trong đó t là thời gian tính bằng giây ($t \geq 0$) (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014). Trong khoảng thời gian nào từ lúc nuôi cấy, số lượng vi khuẩn sẽ tăng lên?

Lời giải

Ta có: $N'(t) = \frac{100 \cdot (100 + t^2) - 100t \cdot 2t}{(100 + t^2)^2} = \frac{100 \cdot (100 - t^2)}{(100 + t^2)^2}$ và $N'(t) = 0$ khi $t = 10$.

Bảng xét dấu của $N'(t)$:

t	0	10	$+\infty$
$N'(t)$		+	0 -

Trong khoảng thời gian 10 giây đầu thì số lượng vi khuẩn sẽ tăng lên.

Bài 9. Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình:

$s(t) = t^3 - 6t^2 + 14t + 1$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Trong khoảng thời gian nào của 5 giây đầu tiên thì vận tốc tức thời của chất điểm tăng lên?

Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t là: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 14$.

Xét $v'(t) = 6t - 12$; $v'(t) = 0$ khi $t = 2$.

Ta có bảng xét dấu của $v'(t)$:

t	0	2	5
$v'(t)$		-	0 +

Vận tốc tức thời của chất điểm tăng lên trong khoảng thời gian từ 2 giây đến 5 giây.

Bài 10. Một chất điểm chuyển động lên, xuống theo phương thẳng đứng. Độ cao $h(t)$ của chất

điểm tại thời điểm t (giây) được cho bởi công thức:

$$h(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t + 1; \quad (0 \leq t \leq 8).$$

a) Viết công thức tính vận tốc của chất điểm.

b) Trong khoảng thời gian nào chất điểm chuyển động lên, trong thời gian nào chất điểm chuyển động đi xuống?

Lời giải

a) $v(t) = h'(t) = t^2 - 8t + 12$.

b) Chất điểm chuyển động đi lên ($h(t)$ tăng) khi t trong các khoảng $(0; 2)$ và $(6; 8)$,

đi xuống ($h(t)$ giảm) khi t trong khoảng $(2; 6)$.

Bài 11. Độ cao (tính bằng mét) của tàu lượn siêu tốc so với mặt tàu sau t (giây) ($0 \leq t \leq 20$) từ

lúc bắt đầu được cho bởi công thức:

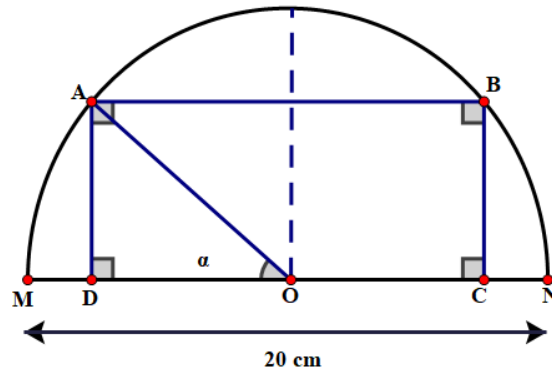
$$h(t) = -\frac{4}{255}t^3 + \frac{49}{85}t^2 - \frac{98}{17}t + 20.$$

Trong khoảng thời gian nào tàu lượn đi xuống, trong khoảng thời gian nào tàu lượn đi lên?

Lời giải

Tàu lượn đi xuống khi t trong các khoảng $(0; 7)$ và $(17, 5; 20)$, tàu lượn đi lên khi t trong khoảng $(7; 17, 5)$.

Bài 12. Cho điểm A di động trên nửa đường tròn tâm O đường kính $MN = 20$ cm, $\angle MOA = \alpha$ với $0 \leq \alpha \leq \pi$. Lấy điểm B thuộc nửa đường tròn và C, D thuộc đường kính MN được xác định sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật. Khi A di động từ trái sang phải, trong các khoảng nào của α thì diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ tăng, trong các khoảng nào của α thì diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ giảm?



Lời giải

Diện tích của hình chữ nhật là $y = 200 \sin \alpha \cos \alpha = 100 \sin 2\alpha$.

Ta có $y' = 200 \cos \alpha$; $y' = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$.

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y'	+	0	-
y			

Diện tích $ABCD$ tăng trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, giảm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Bài 13. Người ta thấy rằng trong vòng 3 năm tính từ đầu năm 2020, giá thành P của một loại sản phẩm vào tháng thứ t thay đổi theo công thức: $P(t) = 80t^3 - 3600t^2 + 48000t + 100000$

(đồng) với $0 \leq t \leq 36$. Hãy cho biết trong khoảng thời gian nào giá thành sản phẩm tăng, trong khoảng thời gian nào giá thành sản phẩm giảm. Giá thành đạt cực đại và cực tiểu vào thời điểm nào?

Lời giải

Giá thành tăng khi t trong khoảng $(0; 10)$ và $(20; 36)$, giảm khi t trong khoảng $(10; 20)$.

Giá thành đạt cực đại khi $t = 10$ tháng và đạt cực tiểu khi $t = 20$ tháng.

Bài 14. Một cửa hàng ước tính số lượng sản phẩm q ($0 \leq q \leq 100$) bán được phụ thuộc vào giá bán p (tính bằng nghìn đồng) theo công thức $p + 2q = 300$. Chi phí cửa hàng cần chi để nhập về q sản phẩm là $C(q) = 0,05q^3 - 5,7q^2 + 295q + 300$ (nghìn đồng).

a) Viết công thức tính lợi nhuận I của cửa hàng khi nhập về và bán được q sản phẩm.

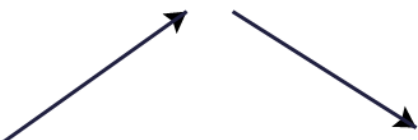
b) Trong khoảng nào của q thì lợi nhuận sẽ tăng khi q tăng, trong khoảng nào thì lợi nhuận giảm khi q tăng?

Lời giải

a) $I = pq - C = q(300 - 2q) - (0,05q^3 - 5,7q^2 + 295q + 300) = -0,05q^3 + 3,7q^2 + 5q - 300$

b) $I' = -0,15q^2 + 7,4q + 5 = 0 \Leftrightarrow q = -\frac{2}{3}$ (loại) hoặc $q = 50$.

x	0	50	100
I'	+	0	-
I			



Lợi nhuận tăng khi q trong khoảng $(0; 50)$, giảm khi q trong khoảng $(50; 100)$.

Bài 15. Thể tích V (đơn vị: centimet khối) của 1 kg nước tại nhiệt độ T ($0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$) được tính bởi công thức sau: $V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$.

(Nguồn: J. Stewart, Calculus, Seventh Edition, Brooks/Cole, CENGAGE Learning 2012)

Hỏi thể tích $V(T)$, $0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

Lời giải

Tập xác định: $D = \square$.

Ta có $V'(T) = -0,06426 + 2,0,0085043.T - 3,0,0000679T^2$.

$$V'(T) = 0 \Leftrightarrow -0,06426 + 2,0,0085043.T - 3,0,0000679T^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} T \approx 79,5 \\ T \approx 3,97 \end{cases} \text{ Vì } T \in [0; 30] \text{ nên } T \approx 4.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0	4	30
y'	-	0	+
y	999,87	999,745	1003,765

Vậy thể tích giảm trong khoảng nhiệt độ từ $(0^\circ\text{C}; 4^\circ\text{C})$.

Bài 16. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126(s)$. Cho bởi hàm số sau: $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23$, (v được tính bằng ft/s, 1foot=0,3048 m). (Nguồn: J. Stewart, Calculus, Seventh Edition, Brooks/Cole, CENGAGE Learning 2012).



(Nguồn: https://en.wikipedia.org/wiki/Hubble_Space_Telescope)

Hỏi gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi?

Lời giải

Xét hàm số vận tốc của tàu con thoi $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23$ với $t \in [0; 126]$.

Gia tốc của tàu con thoi là $a(t)v'(t) = 0,003906t^2 - 0,18058t$.

Ta có $a'(t) = 0,007812t - 0,18058$

$$a'(t) = 0 \Leftrightarrow t \approx 23$$

Bảng biến thiên của hàm số $a(t)$ như sau:

t	0	23	126		
a'(t)		-	0	+	
a(t)	0		-2,087		39,259

Vậy gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian $(23s; 126s)$ tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi.

Bài 17. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số

$$f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}, t \geq 0,$$

trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Lời giải

Ta có:
$$f'(t) = \frac{-5000(1 + 5e^{-t})'}{(1 + 5e^{-t})^2} = \frac{25000e^{-t}}{(1 + 5e^{-t})^2}.$$
 Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi $f'(t)$ lớn nhất.

Đặt
$$h(t) = \frac{25000e^{-t}}{(1 + 5e^{-t})^2}.$$

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{-25000e^{-t}(1 + 5e^{-t})^2 - 2 \cdot (-5e^{-t}) \cdot (1 + 5e^{-t}) \cdot 25000e^{-t}}{(1 + 5e^{-t})^4} \\ &= \frac{-25000e^{-t}(1 + 5e^{-t})(1 + 5e^{-t} - 10e^{-t})}{(1 + 5e^{-t})^4} = \frac{-25000e^{-t}(1 - 5e^{-t})}{(1 + 5e^{-t})^3} \end{aligned}$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-25000e^{-t}(1 - 5e^{-t})}{(1 + 5e^{-t})^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - 5e^{-t} = 0 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow t = \ln 5 \text{ (tm)}$$

Ta có bảng biến thiên với $t \in [0; +\infty)$:

t	0	$\ln 5$	$+\infty$
f''	+	0	-
f'	$\frac{6250}{9}$	1250	0

Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 5 \approx 1,6$ năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất.

Bài 18. Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $f(x) = 0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44$ (tỉ USD) với x là số năm tính từ 2010 đến 2017 ($0 \leq x \leq 7$).

(Theo: <https://infographics.vn/interactive-xuat-khau-rau-quadu-bao-bung-no-dat-4-ty-usd-trong-nam-2023/116220.vna>)

a) Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.

b) Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

Lời giải

a) $y' = f'(x) = 0,03x^2 - 0,08x + 0,25$

b) Tập xác định: $D = [0; 7]$

Ta có: $y' = f'(x) > 0 \forall x \in \square$ nên $y = f(x)$ luôn đồng biến $\forall x \in [0; 7]$

Vậy kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

Bài 19. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

a) Tìm các hàm $v(t)$ và $a(t)$.

b) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

Lời giải

a) Ta có $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9$, $a(t) = v'(t) = 6t - 12$.

b) Để tìm khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm ta đi xét sự biến thiên của hàm $v(t)$.

Có $v'(t) = 0 \Leftrightarrow 6t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên:

x	0	2	$+\infty$
y'	-	0	+
y	9	-3	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Vận tốc của chất điểm tăng khi $t > 2$ và vận tốc của chất điểm giảm khi $0 < t < 2$.