

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa và cách giải

Bất phương trình bậc hai (ẩn x) là bất phương trình có một trong các dạng

$f(x) > 0, f(x) < 0, f(x) \geq 0, f(x) \leq 0$, trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

Cách giải. Để giải bất phương trình bậc hai, ta áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai.

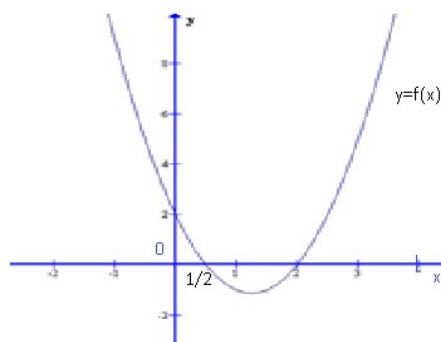
2. Ứng dụng

Giải bất phương trình tích, thương chứa các tam thức bậc hai bằng cách lập bảng xét dấu của chúng

DẠNG TOÁN 1: GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Bài tập tự luận:

Ví dụ 1: Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị hình vẽ. Dựa vào đồ thị hãy viết tập nghiệm của các bất phương trình $f(x) > 0; f(x) \geq 0; f(x) < 0; f(x) \leq 0$.



Lời giải:

Dựa vào đồ thị ta có:

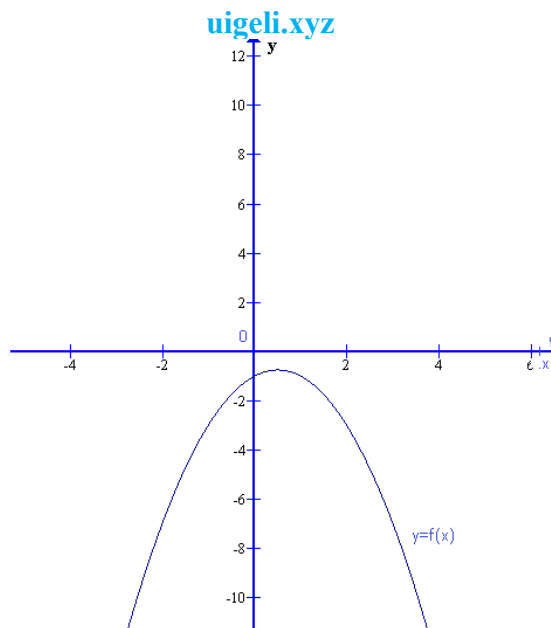
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (2; +\infty)$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; \frac{1}{2}] \cup [2; +\infty)$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$$

Ví dụ 2: Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị hình vẽ. Dựa vào đồ thị hãy viết tập nghiệm của các bất phương trình $f(x) > 0; f(x) \geq 0; f(x) < 0; f(x) \leq 0$.



Lời giải:

Dựa vào đồ thị ta có:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \square$$

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \square$$

Ví dụ 3: Giải các bất phương trình bậc hai:

a) $x^2 - 1 \geq 0$

b) $x^2 - 2x - 1 < 0$

c) $-3x^2 + 12x + 1 \leq 0$

d) $5x^2 + x + 1 \geq 0$

Lời giải:

a) Dễ thấy $f(x) = x^2 - 1$ có $\Delta' = 1 > 0, a = 1 > 0$ và có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1; x_2 = 1$.

Do đó ta có bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Nên bất phương trình $x^2 - 1 \geq 0$ có tập nghiệm là $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

b) Dễ thấy $g(x) = x^2 - 2x - 1$ có $\Delta' = 2 > 0, a = 1 > 0$ và có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1 - \sqrt{2}; x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

Do đó ta có bảng xét dấu $g(x)$:

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$	
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Nên bất phương trình $x^2 - 2x - 1 < 0$ có tập nghiệm là $S = (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$.

c) Dễ thấy $h(x) = -3x^2 + 12x + 1$ có $\Delta' = 39 > 0, a = -3 < 0$ và có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{39}}{3}; \quad x_2 = \frac{6 - \sqrt{39}}{3}$$

Do đó ta có bảng xét dấu $h(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{6-\sqrt{39}}{3}$	$\frac{6+\sqrt{39}}{3}$	$+\infty$	
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$S = \left(-\infty; \frac{6 - \sqrt{39}}{3}\right) \cup \left(\frac{6 + \sqrt{39}}{3}; +\infty\right)$$

Nên bất phương trình $-3x^2 + 12x + 1 \leq 0$ có tập nghiệm là

d) $k(x) = 5x^2 + x + 1$ có $\Delta = -19 < 0$ và $a = 5 > 0$ nên $k(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Từ đó suy ra bất phương trình $5x^2 + x + 1 \geq 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 4: Giải các bất phương trình sau:

a) $-3x^2 + 2x + 1 < 0$

b) $-36x^2 + 12x - 1 \geq 0$

Lời giải:

a) Tam thức $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$ có $a = -3 < 0$ và có hai nghiệm $x_1 = -\frac{1}{3}; x_2 = 1$ ($f(x)$ cùng dấu với hệ số a).

Suy ra $-3x^2 + 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$ hoặc $x > 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (1; +\infty)$.

b) Tam thức $f(x) = -36x^2 + 12x - 1$ có $a = -36 < 0$ và $\Delta = 0$

$f(x)$ trái dấu với hệ số a nên $f(x)$ âm với $\forall x \neq \frac{1}{6}$ và $f\left(\frac{1}{6}\right) = 0$

Suy ra $-36x^2 + 12x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$.

Ví dụ 5: Tìm tập xác định của hàm số: $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

Lời giải:

Điều kiện: $x^2 - 2x + 5 \geq 0$

Xét tam thức vé trái có $\Delta' = -4 < 0$ và $a = 1 > 0$ nên $x^2 - 2x + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$.

Ví dụ 6: Giải bất phương trình $(x^2 - x)^2 + 3(x^2 - x) + 2 \geq 0$

Lời giải:

Ta có $(x^2 - x)^2 + 3(x^2 - x) + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \leq -2 \\ x^2 - x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2 \leq 0 \\ x^2 - x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{đúng } \forall x.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $T = \mathbb{R}$.

Ví dụ 7: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn âm: $f(x) = -x^2 - 2x - m$

Lời giải:

$$f(x) < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = 1 - 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$$

Vậy với $-\frac{1}{4} < m < 0$ thì biểu thức $f(x)$ luôn âm.

Ví dụ 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$

$$3x^2 - 2(m+1)x - 2m^2 + 3m - 2 \geq 0$$

Lời giải:

$$3x^2 - 2(m+1)x - 2m^2 + 3m - 2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 + 3(2m^2 - 3m + 2) \leq 0 \Leftrightarrow 7m^2 - 7m + 7 \leq 0 \text{ bpt vô nghiệm}$$

Vậy không có m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 9: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số sau xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(m-1)x^2 - 2(m-2)x + 2 - m}}$$

Lời giải:

$$(m-1)x^2 - 2(m-2)x + 2 - m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Trường hợp 1: $m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow 2x+1 > \forall x \in \mathbb{R}$ (Sai).

Trường hợp 2: $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ \Delta' = (m-2)^2 - (m-1)(2-m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 2m^2 - 7m + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ \frac{3}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < m < 2$$

Vậy

$$\frac{3}{2} < m < 2$$

Ví dụ 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau vô nghiệm.

$$x^2 + 2(m-2)x + 2m - 1 \leq 0$$

Lời giải:

BPT có vô nghiệm $\Leftrightarrow x^2 + 2(m-2)x + 2m - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = (m-2)^2 - 2m + 1 < 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < m < 5$$

Ví dụ 11: Tìm m để mọi $x \in [-1; 1]$ đều là nghiệm của bất phương trình.

$$3x^2 - 2(m+5)x - m^2 + 2m + 8 \leq 0 \quad (1)$$

Lời giải:

Ta có $3x^2 - 2(m+5)x - m^2 + 2m + 8 = 0 \Leftrightarrow x = m+2$ hoặc $x = \frac{4-m}{3}$

* Với $m+2 > \frac{4-m}{3} \Leftrightarrow 3m+6 > 4-m \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$ ta có

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow \frac{4-m}{3} \leq x \leq m+2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $\left[\frac{4-m}{3}; m+2 \right]$

Suy ra mọi $x \in [-1; 1]$ đều là nghiệm của bất phương trình (1)

$$[-1; 1] \subset \left[\frac{4-m}{3}; m+2 \right] \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \geq \frac{4-m}{3} \\ 1 \leq m+2 \end{cases}$$

khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 7 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 7$$

Kết hợp với điều kiện $m > -\frac{1}{2}$ ta có $m \geq 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

* Với $m+2 < \frac{4-m}{3} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$ ta có

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow m+2 \leq x \leq \frac{4-m}{3}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $\left[m+2; \frac{4-m}{3} \right]$

Suy ra mọi $x \in [-1; 1]$ đều là nghiệm của bất phương trình (1)

$$[-1; 1] \subset \left[m+2; \frac{4-m}{3} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \geq m+2 \\ 1 \leq \frac{4-m}{3} \end{cases}$$

khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -3$$

Kết hợp với điều kiện $m < -\frac{1}{2}$ ta có $m \leq -3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

* Với $m = -\frac{1}{2}$ ta có bất phương trình (1) $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ nên $m = -\frac{1}{2}$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $m \in (-\infty; -3] \cup [7; +\infty)$ là giá trị cần tìm.

2. Bài tập trắc nghiệm

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $-3x^2 + 2x + 1 < 0$

A. $S = (-\infty; -\frac{1}{3})$ B. $S = (1; +\infty)$ C. $S = (-\frac{1}{3}; 1)$ D. $S = (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (1; +\infty)$

b) $x^2 + x - 12 < 0$

A. $S = (-4; 3)$ B. $S = (-\infty; -4)$ C. $S = (3; +\infty)$ D. $S = \emptyset$

c) $5x^2 - 6\sqrt{5}x + 9 > 0$

A. $S = \emptyset \setminus \left\{ -\frac{3\sqrt{5}}{5} \right\}$ B. $S = \emptyset \setminus \left\{ \pm \frac{3\sqrt{5}}{5} \right\}$ C. $S = \emptyset \setminus \left\{ \frac{3\sqrt{5}}{5} \right\}$ D. $S = \emptyset$

d) $-36x^2 + 12x - 1 \geq 0$

A. $S = \left\{ \pm \frac{1}{6} \right\}$ B. $S = \left(-\infty; \frac{1}{6} \right)$ C. $S = \left\{ \frac{1}{6} \right\}$ D. $S = \left(\frac{1}{6}; +\infty \right)$

Lời giải:

a) Tam thức $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$ có $a = -3 < 0$ và có hai nghiệm $x_1 = -\frac{1}{3}$; $x_2 = 1$ ($f(x)$ cùng dấu với hệ số a).

Suy ra $-3x^2 + 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$ hoặc $x > 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình : $S = (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (1; +\infty)$.

b) Tam thức $f(x) = x^2 + x - 12$ có $a = 1 > 0$ và có hai nghiệm $x_1 = -4$; $x_2 = 3$ ($f(x)$ trái dấu với hệ số a).

Suy ra $x^2 + x - 12 < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-4; 3)$

c) Tam thức $f(x) = 5x^2 - 6\sqrt{5}x + 9$ có $a = 5 > 0$ và $\Delta = 0$ ($f(x)$ cùng dấu với hệ số a).

Suy ra $5x^2 - 6\sqrt{5}x + 9 > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3\sqrt{5}}{5}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \emptyset \setminus \left\{ \frac{3\sqrt{5}}{5} \right\}$

d) Tam thức $f(x) = -36x^2 + 12x - 1$ có $a = -36 < 0$ và $\Delta = 0$

$f(x)$ trái dấu với hệ số a nên $f(x)$ âm với $\forall x \neq \frac{1}{6}$ và $f\left(\frac{1}{6}\right) = 0$

$$-36x^2 + 12x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

Suy ra

$$S = \left\{ \frac{1}{6} \right\}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình sau có nghiệm

a) $x^2 - mx + m + 3 = 0$

A. $m \in (-\infty; -2]$ B. $m \in [6; +\infty)$ C. $m \in [-2; 6]$ D. $m \in (-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$

b) $(1+m)x^2 - 2mx + 2m = 0$

A. $m \leq 0$ B. $-2 \leq m$ C. $-2 \leq m \leq 0$ D. $\begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases}$

Lời giải:

a) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4(m+3) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m \leq -2 \end{cases}$$

Vậy với $m \in (-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$ thì phương trình có nghiệm

b) Với $m = -1$ phương trình trở thành $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ suy ra $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m \neq -1$ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m(1+m) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$$

Vậy với $-2 \leq m \leq 0$ thì phương trình có nghiệm

Ví dụ 3: Tìm m để mọi $x \in [-1; 1]$ đều là nghiệm của bất phương trình

$$3x^2 - 2(m+5)x - m^2 + 2m + 8 \leq 0 \quad (1)$$

A. $m \in (-\infty; -3] \cup [7; +\infty)$ B. $m > -\frac{1}{2}$ C. $m \geq 7$ D. $m \leq -3$

Lời giải:

Ta có $3x^2 - 2(m+5)x - m^2 + 2m + 8 = 0 \Leftrightarrow x = m+2$ hoặc $x = \frac{4-m}{3}$

* Với $m+2 > \frac{4-m}{3} \Leftrightarrow 3m+6 > 4-m \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$ ta có

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow \frac{4-m}{3} \leq x \leq m+2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $\left[\frac{4-m}{3}; m+2 \right]$

Suy ra mọi $x \in [-1; 1]$ đều là nghiệm của bất phương trình (1)

$$[-1; 1] \subset \left[\frac{4-m}{3}; m+2 \right] \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \geq \frac{4-m}{3} \\ 1 \leq m+2 \end{cases}$$

khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 7 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 7$$

Kết hợp với điều kiện $m > -\frac{1}{2}$ ta có $m \geq 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

* Với $m+2 < \frac{4-m}{3} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$ ta có

$$\Leftrightarrow m+2 \leq x \leq \frac{4-m}{3}$$

Bất phương trình (1)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $\left[m+2; \frac{4-m}{3} \right]$

Suy ra mọi $x \in [-1; 1]$ đều là nghiệm của bất phương trình (1)

$$[-1; 1] \subset \left[m+2; \frac{4-m}{3} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \geq m+2 \\ 1 \leq \frac{4-m}{3} \end{cases}$$

khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -3$$

Kết hợp với điều kiện $m < -\frac{1}{2}$ ta có $m \leq -3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

* Với $m = -\frac{1}{2}$ ta có bất phương trình (1) $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ nên $m = -\frac{1}{2}$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $m \in (-\infty; -3] \cup [7; +\infty)$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4: Cho $(m+1)x^2 - 2(2m-1)x - 4m+2 < 0$ khẳng định nào sau đây sai?

A. $m = -1$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; -1)$

B. $-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{2}$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = \emptyset$

C. $\begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ -1 < m < -\frac{1}{4} \end{cases}$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (x_1; x_2)$

D. $m > -1$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

Lời giải:

Với $m = -1$: bất phương trình trở thành $6x + 6 < 0 \Leftrightarrow x < -1$

Với $m \neq -1$ ta có $g(x) = (m+1)x^2 - 2(2m-1)x - 4m+2$ là tam thức bậc hai có :

$$a = m+1; \Delta' = 8m^2 - 2m - 1$$

Bảng xét dấu

m	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$m+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$8m^2 - 2m - 1$	$+$	0	0	$-$	$+$

$$* \quad -\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{bất phương trình vô nghiệm.}$$

$$* \quad \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ -1 < m < -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Rightarrow S = (x_1; x_2), \text{ với}$$

$$x_1 = \frac{2m-1 - \sqrt{(2m-1)(m+1)}}{m+1}; x_2 = \frac{2m-1 + \sqrt{(2m-1)(m+1)}}{m+1}$$

$$* \quad m < -1 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Rightarrow S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$$

Kết luận

$m = -1$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; -1)$

$-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{2}$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = \emptyset$

$\begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ -1 < m < -\frac{1}{4} \end{cases}$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (x_1; x_2)$

$m < -1$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $-2x^2 + 3x - 1 \geq 0$

A. $T = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$

B. $T = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$

C. $T = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

D. $T = (1; +\infty)$

b) $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 \leq 0$

A. $T = \{3\}$

B. $T = \{4\}$

C. $T = (2; 3)$

D. $T = \{2\}$

c) $-2x^2 + x - 1 \leq 0$

A. $T = \emptyset$

B. $T = \emptyset \setminus \{1\}$

C. $T = (-1; +\infty)$

D. $T = \emptyset \setminus (3; 7)$

d) $7x > 2x^2 - 6$

A. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$

B. $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$

C. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$

D. $(2; +\infty)$

e) $x^2 - 22x + 51 < 0$

A. $T = \emptyset$

B. $T = \square$

C. $T = \left(9; \frac{170}{3}\right)$

D. $T = (-\infty; 2)$

f) $x^2 + 5x + 6 \geq 0$

A. $T = (-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$

B. $T = (-\infty; -3]$

C. $T = [-3; -2]$

D. $T = [-2; +\infty)$

Lời giải:

a) $T = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ b) $T = \{2\}$ c) $T = \square$

d) $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ e) $T = \emptyset$ f) $T = (-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$

Bài 2: Tìm m để phương trình sau vô nghiệm

a) $x^2 - 2mx + m + 3 = 0$

A. $m \in \left(\frac{1-2\sqrt{13}}{2}; \frac{1+2\sqrt{13}}{2}\right)$

B. $m \in \left(\frac{1-3\sqrt{13}}{2}; \frac{1+3\sqrt{13}}{2}\right)$

C. $m \in \left(\frac{1-4\sqrt{13}}{2}; \frac{1+4\sqrt{13}}{2}\right)$

D. $m \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

b) $(m-1)x^2 - (2m-2)x + 2m = 0$

A. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < -2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m \geq 3 \\ m < -3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m < -1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} m \geq 4 \\ m < -4 \end{cases}$

Lời giải:a) Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' < 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$m \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$$

Vậy với $m \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ thì phương trình vô nghiệmb) Với $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toánVới $m \neq 1$ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' < 0$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 - 2m(m-1) < 0 \Leftrightarrow (m-1)(-m-1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$$

Vậy với $\begin{cases} m \geq 1 \\ m < -1 \end{cases}$ thì phương trình có nghiệm

Bài 3: Cho $mx^2 - 2mx + m - 1 > 0$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $m \leq 0$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = \emptyset$

B. $m > 0$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; \frac{m - \sqrt{m}}{m}) \cup (\frac{m + \sqrt{m}}{m}; +\infty)$

C. Cả A, B đều đúng

D. Cả A, B đều sai

Lời giải:

Bài 3:: Với $m = 0$, bất phương trình trở thành: $-1 > 0 \Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm

Với $m \neq 0 \Rightarrow f(x) = mx^2 - 2mx + m - 1$ là tam thức bậc hai có $a = m$, $\Delta' = m$

* $m > 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow$ bất phương trình có tập nghiệm: $S = (-\infty; \frac{m - \sqrt{m}}{m}) \cup (\frac{m + \sqrt{m}}{m}; +\infty)$

* $m < 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm.

Kết luận

$m \leq 0$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = \emptyset$

$m > 0$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; \frac{m - \sqrt{m}}{m}) \cup (\frac{m + \sqrt{m}}{m}; +\infty)$

Bài 4: Tìm m để mọi $x \in [0; +\infty)$ đều là nghiệm của bất phương trình

$$(m^2 - 1)x^2 - 8mx + 9 - m^2 \geq 0$$

A. $m \in (-3; -1)$

B. $m \in \{-3; -1\}$

C. $m \in [-3; -1]$

D. $m \in \emptyset$

Lời giải:

$m = 1$ không thỏa mãn ycbt; $m = -1$ thỏa mãn ycbt

Với $m \neq \pm 1$ ta có $bpt \Leftrightarrow [(m+1)x + m - 3][(m-1)x - m - 3] \geq 0$

Đáp số $m \in [-3; -1]$

Bài 5: Cho hàm số $f(x) = x^2 + bx + 1$ với $b \in (3, \frac{7}{2})$. Giải bất phương trình $f(f(x)) > x$.

A. $S = \left(-\infty; \frac{1 - b - 2\sqrt{b^2 - 2b - 3}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 - b + 2\sqrt{b^2 - 2b - 3}}{2}; +\infty\right)$

B. $S = \left(-\infty; \frac{1 - 2b - \sqrt{b^2 - 2b - 3}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 - 2b + \sqrt{b^2 - 2b - 3}}{2}; +\infty\right)$

C. $S = \left(-\infty; \frac{1 - 3b - \sqrt{b^2 - 2b - 3}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 - 3b + \sqrt{b^2 - 2b - 3}}{2}; +\infty\right)$

$$D. S = \left(-\infty; \frac{1-b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2} \right) \cup \left(\frac{1-b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2}; +\infty \right)$$

Lời giải:

Bài 5: Ta có $f(f(x)) - x = [x^2 + (b+1)x + b + 2] [x^2 + (b-1)x + 1]$

Suy ra $f(f(x)) - x > 0 \Leftrightarrow [x^2 + (b+1)x + b + 2] [x^2 + (b-1)x + 1] > 0$

Đặt $g(x) = x^2 + (b-1)x + 1$, $h(x) = x^2 + (b+1)x + b + 2$

Ta có $\Delta_{g(x)} = b^2 - 2b - 3$, $\Delta_{h(x)} = b^2 - 2b - 7$

Vì $b \in \left(3, \frac{7}{2} \right)$ nên $\Delta_{g(x)} > 0$ và $\Delta_{h(x)} < 0$. Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{1-b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2}$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là

$$S = \left(-\infty; \frac{1-b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2} \right) \cup \left(\frac{1-b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2}; +\infty \right)$$

DẠNG TOÁN 2: GIẢI HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN.

1. Phương pháp: + Giải từng bất phương trình

+ Lấy giao các tập hợp nghiệm

2. Bài tập tự luận

Ví dụ 1: Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \\ x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$$

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của hàm số
$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{x+3}}$$

Lời giải

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$$

Ví dụ 3: Giải hệ bất phương trình

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 1 \\ -2 \leq x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 1 \\ \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ví dụ 4: Giải hệ bất phương trình: } \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x + 2} \geq 0 \\ \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x - 3} \leq 0 \end{cases}$$

Lời giải

Nhận xét $x^2 - x + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x + 2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -2 \end{cases} \quad (1)$$

Nhận xét $x^2 - x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x - 3} \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} -3 < x \leq -2 \\ -1 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Ví dụ 5: Giải bất phương trình: } 1 < \frac{x^2 + x + 5}{x^2 + x + 3} < 3$$

Lời giải

Nhận xét: $x^2 + x + 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$$1 < \frac{x^2 + x + 5}{x^2 + x + 3} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 5 > x^2 + x + 3 \\ x^2 + x + 5 < 3x^2 + 3x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 > 0 \\ x^2 + x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

3. Bài tập trắc nghiệm:

Ví dụ 1: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}$

A. $S = [-1; 2]$

B. $S = (-1; 2)$

C. $S = (-\infty; -1)$

D. $S = \emptyset$

b) $\begin{cases} 2x^2 + x - 6 > 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 \geq 0 \end{cases}$

A. $S = (-\infty; -2]$

B. $S = (3; +\infty)$

C. $S = (-2; 3)$

D.

$S = (-\infty; -2] \cup (3; +\infty)$

$$c) \begin{cases} -x^2 + 5x - 4 \geq 0 \\ x^2 + x - 13 \leq 0 \end{cases}$$

$$A. S = \left(1; \frac{-1 + \sqrt{53}}{2}\right)$$

$$B. S = (-\infty; 1)$$

$$C. S = \left(\frac{-1 + \sqrt{53}}{2}; +\infty\right)$$

D.

$$S = \left[1; \frac{-1 + \sqrt{53}}{2}\right]$$

$$d) \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$$

$$A. S = \left(1; \frac{3}{2}\right)$$

$$B. S = \left[1; \frac{3}{2}\right]$$

$$C. S = (-\infty; 1)$$

$$D. S = \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

Lời giải:

$$\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

a) Ta có

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S = (-1; 2)$.

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 6 \geq 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq -2 \\ x > 3 \\ x < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

b) Ta có

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S = (-\infty; -2] \cup (3; +\infty)$.

$$c) \begin{cases} -x^2 + 5x - 4 \geq 0 \\ x^2 + x - 13 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ \frac{-1 - \sqrt{53}}{2} \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{53}}{2} \end{cases}$$

c) Ta có

$$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{53}}{2}$$

$$S = \left[1; \frac{-1 + \sqrt{53}}{2}\right]$$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -3 \\ -2 \leq x \leq \frac{5}{2} \\ 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

d) Ta có

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S = \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

Ví dụ 2: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} mx^2 - x - 5 \leq 0 \\ (1-m)x^2 + 2mx + m + 2 \geq 0 \end{cases}$

a) Giải hệ bất phương trình khi $m = 1$

A. $S = \left[\frac{1-2\sqrt{21}}{2}; \frac{1+2\sqrt{21}}{2}\right]$

B. $S = \left[\frac{1-3\sqrt{21}}{2}; \frac{1+3\sqrt{21}}{2}\right]$

C. $S = \left[\frac{1-4\sqrt{21}}{2}; \frac{1+4\sqrt{21}}{2}\right]$

D. $S = \left[\frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right]$

b) Tìm m để hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x

A. $\frac{-1-2\sqrt{17}}{4} \leq m \leq -\frac{31}{20}$

B. $m \leq -\frac{1}{20}$

C. $\frac{-1-\sqrt{17}}{4} \leq m$

D. $\frac{-1-\sqrt{17}}{4} \leq m \leq -\frac{1}{20}$

Lời giải:

a) Khi $m = 1$ hệ bất phương trình trở thành

$$\begin{cases} x^2 - x - 5 \leq 0 \\ 2x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{21}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{21}}{2} \\ x \geq -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{21}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

$$S = \left[\frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right]$$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là

b) Khi $m = 0$ hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} -x - 5 \leq 0 \\ x^2 + 2 \geq 0 \end{cases}$ (vô nghiệm) do đó $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Khi $m = 1$ theo câu a ta thấy cũng không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$ ta có hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi các bất phương trình trong hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < 0 \\ \Delta_1 = 1 + 20m \leq 0 \\ 1 - m > 0 \\ \Delta'_2 = m^2 - (1 - m)(m + 2) \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \leq -\frac{1}{20} \\ m < 1 \\ 2m^2 + m - 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \leq -\frac{1}{20} \\ m < 1 \\ \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} \leq m \leq \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} \leq m \leq -\frac{1}{20}$$

Vậy $\frac{-1 - \sqrt{17}}{4} \leq m \leq -\frac{1}{20}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 0 \\ mx^2 - 2(2m + 1)x + 5m + 3 \geq 0 \end{cases}$$

A. $m > -\frac{1}{2}$

B. $m = -\frac{1}{2}$

C. $m \geq -\frac{1}{2}$

D. $m = \emptyset$

Lời giải:

Ta có bất phương trình $x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Yêu cầu bài toán tương đương với bất phương trình:

$$mx^2 - 2(2m + 1)x + 5m + 3 \leq 0 \quad (1) \text{ có nghiệm } x \in S = [1; 2].$$

Ta đi giải bài toán phủ định là: tìm m để bất phương trình (1) vô nghiệm trên S

Tức là bất phương trình $f(x) = mx^2 - 2(2m + 1)x + 5m + 3 < 0$ (2) đúng với mọi $x \in S$.

• $m = 0$ ta có (2) $\Leftrightarrow -2x + 3 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$ nên (2) không đúng với $\forall x \in S$

• $m \neq 0$ tam thức $f(x)$ có hệ số $a = m$, biệt thức $\Delta' = -m^2 + m + 1$

Bảng xét dấu

m	$-\infty$	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$	0	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
m		-	0	+	
$-\Delta'$		+	0	-	

+) $m \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ta có: $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$ nên $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra $m \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ không thỏa mãn

+) $m \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ta có: $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$ nên $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) = 0$, suy ra $m \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn.

+) $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < 0$ ta có: $a < 0$ và $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{2m+1+\sqrt{\Delta'}}{m}, x_2 = \frac{2m+1-\sqrt{\Delta'}}{m} \quad (x_1 < x_2)$$

Do đó: $f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < x_1 \\ x > x_2 \end{cases}$, suy ra (2) đúng với $\forall x \in S \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 > 2 \\ x_2 < 1 \end{cases} (*)$

Ta có $x_1 = 2 + \frac{1+\sqrt{\Delta'}}{m} < 2$

$$x_2 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'} < m+1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < 0 \\ \Delta' < m^2 + 2m + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < 0 \\ 2m^2 + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < 0 \\ m > 0 \\ m < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < -\frac{1}{2}$$

Suy ra (*) $\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < -\frac{1}{2}$

+) $0 < m < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ta có: $a < 0$ và $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{2m+1+\sqrt{\Delta'}}{m}, x_2 = \frac{2m+1-\sqrt{\Delta'}}{m} \quad (x_1 > x_2)$$

Suy ra $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (x_2; x_1)$

Do đó (2) đúng với $\forall x \in S \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 < 1 \\ x_1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\Delta'} + m + 1 < 0 \\ \sqrt{\Delta'} + 1 > 0 \end{cases} (**)$

Vì $m > 0$ nên (**) vô nghiệm.

Từ đó, ta thấy (2) đúng với $\forall x \in S \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$.

Vậy $m \geq -\frac{1}{2}$ là những giá trị cần tìm.

3. Bài tập luyện tập

Bài 4.97: Giải các hệ bất phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} -x^2 + 4x - 7 < 0 \\ x^2 - 2x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

A. $T = (-\infty; 1 - \sqrt{2}]$

B. $T = [1 + \sqrt{2}; +\infty)$

C. $T = (-\infty; 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}; +\infty)$

D. $T = (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$

b) $\begin{cases} x^2 + x + 5 < 0 \\ x^2 - 6x + 1 > 0 \end{cases}$

A. $S = \square$

B. $S = \emptyset$

C. $S = \left(\frac{1}{2}; 4\right)$

D. $S = \{1; 2\}$

c) $-4 \leq \frac{x^2 - 2x - 7}{x^2 + 1} \leq 1$

A. $T = [1; +\infty)$

B. $T = \left[-4; -\frac{3}{5}\right]$

C. $T = \left[-4; -\frac{3}{5}\right] \cup [1; +\infty)$

D. $T = \emptyset$

d) $\frac{1}{13} \leq \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 5x + 7} \leq 1$

A. $T = (-\infty; -1] \cup \left[\frac{11}{4}; 3\right]$

B. $T = \square$

C. $T = \left[\frac{11}{4}; 3\right]$

D.

$T = (-\infty; -1]$

Lời giải:

Bài 4.97: a) $T = (-\infty; 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}; +\infty)$

b) Vô nghiệm

c) $-4 \leq \frac{x^2 - 2x - 7}{x^2 + 1} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -4(x^2 + 1) \leq x^2 - 2x - 7 \\ x^2 - 2x - 7 \leq x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ 2x \geq -8 \end{cases}$

$T = \left[-4; -\frac{3}{5}\right] \cup [1; +\infty)$

Suy ra tập

d) $T = (-\infty; -1] \cup \left[\frac{11}{4}; 3\right]$

Bài 4.98: Tìm m để bất phương trình $m^2x + m(x+1) - 2(x-1) > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 1]$

A. $0 < m < \frac{3}{2}$

B. $0 < m$

C. $m < \frac{3}{2}$

D. $\begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{3}{2} \end{cases}$

Lời giải:

Bài 4.98: Đặt $f(x) = (m^2 + m - 2)x + m + 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-2) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 + m - 2)(-2) + m + 2 > 0 \\ (m^2 + m - 2)(1) + m + 2 > 0 \end{cases}$

Bài toán thỏa mãn:

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - m + 6 > 0 \\ m^2 + 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < \frac{3}{2} \\ m < -2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{3}{2}$

Bài 4.99: Cho $\begin{cases} x^2 - (1+2m)x + 2m \leq 0 \\ x^2 + (2+m)x + 2m \leq 0 \end{cases}$ khẳng định nào sai?

A. $m \leq -1: S = [-2; 1],$

B. $-1 < m < 0: S = [2a; -a]$

C. $m = 0: S = \{0\}$

D. $m > 0: S = \{1\}$

Lời giải:

Bài 4.99: $m \leq -1: S = [-2; 1], -1 < m < 0: S = [2a; -a], m = 0: S = \{0\}, m > 0: S = \emptyset$

Bài 4.100: Tìm m để bất phương trình $2x^2 - (2m+1)x + m^2 - 2m + 2 \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

A. $2 \leq m \leq \frac{21+2\sqrt{34}}{10}$

B. $m \leq \frac{21+2\sqrt{34}}{10}$

C. $2 \leq m$

D. $\begin{cases} m < 2 \\ m > \frac{21+2\sqrt{34}}{10} \end{cases}$

Lời giải:

Bài 4.100: Đặt $f(x) = 2x^2 - (2m+1)x + m^2 - 2m + 2$, có $\Delta = -4m^2 + 20m - 15$

• $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{5-\sqrt{10}}{2} \\ m \geq \frac{5+\sqrt{10}}{2} \end{cases}$, suy ra $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên trường hợp này không thỏa yêu cầu bài toán.

• $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{5-\sqrt{10}}{2}; \frac{5+\sqrt{10}}{2}\right)$, khi đó $f(x)$ có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{2m+1-\sqrt{\Delta}}{4}, x_2 = \frac{2m+1+\sqrt{\Delta}}{4} \quad (x_1 < x_2)$$

Và $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [x_1; x_2]$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leq \frac{1}{2} \\ x_2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 \leq 2\sqrt{\Delta} \\ 7-2m \leq \sqrt{\Delta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 \leq 4\Delta \\ (7-2m)^2 \leq \Delta \\ \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{7}{2} \end{cases}$$

Do đó yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20m^2 - 84m + 61 \leq 0 \\ m^2 - 6m + 8 \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq \frac{21+2\sqrt{34}}{10}$$

Vậy $2 \leq m \leq \frac{21+2\sqrt{34}}{10}$ là những giá trị cần tìm.

Bài 4.101: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ (1)

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x \geq 1$.

- A. $m \in [2; +\infty)$ B. $m \in [3; +\infty)$ C. $m \in [4; +\infty)$ D. $m \in [1; +\infty)$

b) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x \leq 1$.

- A. $m \in (1; 2)$ B. $m \in (-\infty; 1)$ C. $m \in (2; +\infty)$ D. $m \in [1; 2]$

c) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x_1 < 1 < x_2$.

- A. $1 < m$ B. $m < 2$ C. $1 < m < 2$ D. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$

d) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x_1 < x_2 < 1$.

- A. $1 < m$ B. $m < 2$ C. $1 < m < 2$ D. không tồn tại m

Lời giải:

Bài 4.101: Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$, thay vào pt (1) ta được phương trình:

$$t^2 + 2(1-m)t + m^2 - 3m + 2 = 0 \quad (2)$$

a) Để phương trình (1) có nghiệm $x \geq 1 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \geq 0$

TH1: Phương trình (2) có nghiệm $t_1 \leq 0 \leq t_2 \Leftrightarrow P \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$.

TH2: Phương trình (2) có nghiệm :

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P \geq 0 \\ S \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq 0 \\ m^2 - 3m + 2 \geq 0 \\ m-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \geq 2 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$$

Kết luận: với $m \in [1; +\infty)$ thì phương trình (1) có nghiệm $x \geq 1$.

b) Để phương trình (1) có nghiệm $x \leq 1 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \leq 0$

TH1: Phương trình (2) có nghiệm $t_1 \leq 0 \leq t_2 \Leftrightarrow P \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$.

$$t_1 \leq t_2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P \geq 0 \\ S \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq 0 \\ m^2-3m+2 \geq 0 \\ m-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1$$

TH2: Phương trình (2) có nghiệm

Kết luận: với $m \in [1; 2]$ thì phương trình (1) có nghiệm $x \leq 1$.

c) Phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm:

$$t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$$

Kết luận: với $1 < m < 2$ thì phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 < 1 < x_2$

d) Phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa $x_1 < x_2 < 1 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm:

$$t_1 < t_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ m^2-3m+2 > 0 \\ m-1 < 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

Kết luận: không tồn tại m để phương trình (1) có nghiệm $x_1 < x_2 < 1$.

➤ DẠNG TOÁN 3: Giải bất phương trình tích, bất phương trình chứa ẩn ở mẫu

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải bất phương trình

a) $(x-1)(x^2+5x+4) \geq 0$

b) $\frac{(x-2)(3x^2+3x-4)}{(x-1)(x^2-3)} < 0$

Lời giải

a) Cho $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$$x^2+5x+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-4 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-1	1	$+\infty$
$x-1$	-		-		0 +
x^2+5x+4		+ 0 -	0 +		+
$(x-1)(x^2+5x+4)$		- 0 +	0 -	0 +	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-4; 1] \cup [1; +\infty)$

b) Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{-3-\sqrt{57}}{6}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{-3+\sqrt{57}}{6}$	1	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	-	0	+
$3x^2+3x-4$	+	0	-	-	0	+	+	+

x^2-3	+	+	0	-	-	-	0	+	+			
$\frac{(x-2)(3x^2+3x-4)}{(x-1)(x^2-3)}$	+	0	-		+	0	-		+		-	0
	+											

Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{(x-2)(3x^2+3x-4)}{(x-1)(x^2-3)} < 0$ là

$$S = \left(\frac{-3-\sqrt{57}}{6}; -\sqrt{3} \right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{57}}{6}; 1 \right) \cup (\sqrt{3}; 2)$$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình : $\frac{x^2+x-1}{x-2} > \frac{1}{x^2-x} + \frac{x^3-2x}{x^2-3x+2}$.

Lời giải:

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+x-1)(x^2-x) - (x-2) + x(x^3-2)}{x(x^2-3x+2)} > 0$$

BPT

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x(x^2-3x+2)} > 0 \Leftrightarrow x(x^2-3x+2) > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 1 \vee x > 2.$$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình: $(x^2-4)(x^2+2x) \leq 3(x^2+4x+4)$.

Lời giải:

$$\text{BPT} \Leftrightarrow (x+2)^2(x^2-2x) \leq 3(x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2(x^2-2x-3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2-2x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Ví dụ 4: Giải bất phương trình

a) $(1-2x)(x^2-x-1) > 0$

A. $S = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$

C. $S = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$

b) $x^4 - 5x^2 + 2x + 3 \leq 0$

A. $S = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]$

B. $S = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} \right)$

D. $S = \left(\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$

B. $S = \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$

C. $S = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$ D. $S = \emptyset$

Lời giải

a) Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$1-2x$	-		-	0	+
x^2-x-1	+	0	-		-
VT	-	0	+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$S = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$$

b) Bất phương trình $(x^4 - 4x^2 + 4) - (x^2 - 2x + 1) \leq 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 - (x - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 + x - 3)(x^2 - x - 1) \leq 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$			
x^2+x-3	+	0	-		-	0	+		+
x^2-x-1	+		+	0	-		-	0	+
VT	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$S = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$$

Ví dụ 5: Giải các bất phương trình :

a) $\frac{x^2-1}{(x^2-3)(-3x^2+2x+8)} > 0$

A. $S = \left(-\sqrt{3}; -\frac{4}{3} \right) \cup (-1; 1)$

B. $S = \left(-\sqrt{3}; -\frac{4}{3} \right) \cup (\sqrt{3}; 2)$

C. $S = (-1; 1) \cup (\sqrt{3}; 2)$

D. $S = \left(-\sqrt{3}; -\frac{4}{3} \right) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{3}; 2)$

b) $x^2 + 10 \leq \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 8}$

A. $S = (2\sqrt{2}; 3]$

B. $S = [-3; -2\sqrt{2})$

C. $S = [-3; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 3]$

D.

$$S = \emptyset \setminus \{ \pm \sqrt{8} \}$$

Lời giải:

a) Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$
$x^2 - 1$		+		+		+	0	+
$x^2 - 3$		+	0	-		-		-
$-3x^2 + 2x + 8$		-		-	0	+	0	+
VT		-		+		-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$S = \left(-\sqrt{3}; -\frac{4}{3}\right) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{3}; 2)$$

b) Ta có $x^2 + 10 \leq \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 8} \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 8} - (x^2 + 10) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 1 - (x^2 - 8)(x^2 + 10)}{x^2 - 8} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{81 - x^4}{x^2 - 8} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(9 - x^2)(9 + x^2)}{x^2 - 8} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{9 - x^2}{x^2 - 8} \geq 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	3	$+\infty$			
$9-x^2$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	0	$-$		
x^2-8	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$+$		
VT	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S = [-3; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 3]$$

Ví dụ 6: Giải bất phương trình sau

$$\frac{|x^2 - x| - 2}{x^2 - x - 1} \geq 0$$

a)

A. $S = (-\infty; -1] \cup \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right);$

B. $S = (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

C. $S = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \cup [2; +\infty);$

D.

$$S = (-\infty; -1] \cup \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \cup [2; +\infty)$$

b) $\frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{x^2 + \sqrt{3}x - 6} \leq 0$

A. $S = [-1; 0]$

B. $S = [1; \sqrt{3})$

C. $S = [-1; 0] \cup [1; \sqrt{3})$

D. $S = \emptyset$

Lời giải:

a) Vì $|x^2 - x| + 2 > 0$ nên

$$\frac{|x^2 - x| - 2}{x^2 - x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(|x^2 - x| - 2)(|x^2 - x| + 2)}{x^2 - x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 2)}{x^2 - x - 1} \geq 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	2	$+\infty$			
x^2-x-2	+	0	-		-	0	+		
x^2-x+2	+		+		+		+		
x^2-x-1	+		+		-		+	0	
$\frac{(x^2-x-2)(x^2-x+2)}{x^2-x-1}$	+	0	-		+		-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S = (-\infty; -1] \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \cup [2; +\infty)$$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2 + \sqrt{3}x - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq \sqrt{3} \\ x \neq -2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq \sqrt{3} \end{cases}$$

b) ĐKXD:

Vì $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x + 1} > 0$ nên

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{x^2 + \sqrt{3}x - 6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x + 1})}{x^2 + \sqrt{3}x - 6} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x}{x^2 + \sqrt{3}x - 6} \leq 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$			
x^2-x	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$x^2+\sqrt{3}x-6$	$+$	0	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$\frac{x^2-x}{x^2+\sqrt{3}x-6}$	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu và đối chiếu điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S = [-1; 0] \cup [1; \sqrt{3})$$

Nhận xét: Ở câu b chúng ta phải đặt điều kiện thì khi đó các phép biến đổi trên mới đảm bảo là phép biến đổi tương đương.

$$\sqrt{x-m^2-m} \left(3 - \frac{x+1}{x^3-x^2-3x+3} \right) < 0 \quad (*)$$

Ví dụ 7: Tìm m để bất phương trình

có nghiệm .

A. $-2 < m$

B. $m < 1$

C. $-2 < m < 1$

D. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 1 \end{cases}$

Lời giải:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \frac{x+1}{x^3-x^2-3x+3} > 0 \\ x > m^2 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-2)(3x^2+3x-4)}{(x-1)(x^2-3)} < 0 \\ x > m^2 + m \end{cases} \quad (**)$$

Ta có

Bảng xét dấu

x	$\frac{-3-\sqrt{57}}{6} \quad -\sqrt{3} \quad \frac{-3+\sqrt{57}}{6} \quad 1 \quad \sqrt{3} \quad 2 \quad +\infty$												
$x-1$	-		-		-		-	0	+		+		+
$x-2$	-		-		-		-		-		-	0	+
$3x^2+3x-4$	+	0	-		-	0	+		+		+		+
x^2-3	+		+	0	-		-		-	0	+		+
$\frac{(x-2)(3x^2+3x-4)}{(x-1)(x^2-3)}$	+	0	-		+	0	-		+		-	0	
	+												

$$\frac{(x-2)(3x^2+3x-4)}{(x-1)(x^2-3)} < 0$$

Tập nghiệm của bất phương trình

là

$$S = \left(\frac{-3-\sqrt{57}}{6}; -\sqrt{3} \right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{57}}{6}; 1 \right) \cup (\sqrt{3}; 2)$$

Do đó bất phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi hệ bất phương trình (**) có nghiệm

$$\Leftrightarrow m^2 + m < 2 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$$

Vậy $-2 < m < 1$ là giá trị cần tìm.

2. Bài tập luyện tập.

Bài 1: Giải các bất phương trình sau

a) $(4-3x)(-2x^2+3x-1) \leq 0$

A. $T = (-\infty; \frac{1}{2}]$

B. $T = [1; \frac{4}{3}]$

C. $T = (-\infty; \frac{1}{2}] \cup [1; \frac{4}{3}]$

D. $T = (\frac{1}{2}; 1)$

b) $x^2 + x - \frac{3}{x^2 + x - 2} \leq 0$

A. $T = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; -2 \right)$

B. $T = \left(1; \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right]$

C. $T = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; -2 \right) \cup \left(1; \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right]$

D. $T = (-2; 1)$

c) $x^4 - x^2 - 2x - 1 > 0$

A. $T = \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$

B. $T = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$

C. $T = \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$

D. $T = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$

d) $\frac{(x^2 - 4)(-3x^2 + 2x + 8)}{x^2 - \sqrt{2}x} < 0$

A. $T = (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{4}{3}; 0 \right) \cup (\sqrt{2}; 2)$

B. $T = (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{4}{3}; 0 \right) \cup (2; +\infty)$

C. $T = (-\infty; -2) \cup (\sqrt{2}; 2) \cup (2; +\infty)$

D.

$T = (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{4}{3}; 0 \right) \cup (\sqrt{2}; 2) \cup (2; +\infty)$

e) $\frac{1 - |x^2 - 2x|}{x^2 + x - 2} \geq 0$

A. $T = (-2; 1 - \sqrt{2}]$

B. $T = [1; 1 + \sqrt{2}]$

C. $T = (-2; 1 - \sqrt{2}] \cup [1; 1 + \sqrt{2}]$

D. $T = (1 - \sqrt{2}; 1)$

f) $\frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^3 + 1}}{x^2 + x} \leq 0$

A. $T = (-1; 0)$

B. $T = [1; +\infty)$

C. $T = (-1; 0) \cup [1; +\infty)$

D. $T = (0; 1)$

Lời giải:

Bài2: a) BXD :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{3}$	$+\infty$		
$4-3x$	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$-2x^2+3x-1$	$-$	0	$+$	0	$-$	$ $	$-$
VT	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$T = (-\infty; \frac{1}{2}] \cup [1; \frac{4}{3}]$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+x)^2 - 2(x^2+x) - 3}{x^2+x-2} \leq 0$$

b) Bpt

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+x+1)(x^2+x-3)}{x^2+x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-3}{x^2+x-2} \leq 0 \Rightarrow T = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; -2 \right) \cup \left(1; \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right]$$

$$T = \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$$

c)

$$T = (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{4}{3}; 0 \right) \cup (\sqrt{2}; 2) \cup (2; +\infty)$$

d)

$$T = (-2; 1-\sqrt{2}] \cup [1; 1+\sqrt{2}]$$

e)

$$T = (-1; 0) \cup [1; +\infty)$$

f)

Bài 3: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2+x+3}{x^2-4} \geq 1$. Khi đó $S \cap (-2; 2)$ là tập nào sau đây?

A. $(-2; -1)$

B. $(-1; 2)$

C. $\emptyset$

D. $(-2; -1]$

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Xét } \frac{x^2+x+3}{x^2-4} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+7}{x^2-4} \geq 0$$

Bất phương trình có tập nghiệm $S = [-7; -2) \cup (2; +\infty)$.

Vậy $S \cap (-2; 2) = \emptyset$.

Bài 4: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2x^2-3x+4}{x^2+3} > 2$ là

A. $\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}; \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4} \right)$

B. $\left(-\infty; \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4} \right) \cup \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}; +\infty \right)$

C. $\left(-\frac{2}{3}; +\infty \right)$

D. $\left(-\infty; -\frac{2}{3} \right)$

Lời giải

Chọn D.

Do $x^2+3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x^2-3x+4}{x^2+3} > 2 \Leftrightarrow 2x^2-3x+4 > 2(x^2+3) \Leftrightarrow 3x < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$$

a) $(1-2x)(x^2-x-1) > 0$

A. $S = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$ B. $S = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} \right)$ C. $S = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$ D. $S = \left(\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$

Bài 5: Hệ bất phương trình
$$\begin{cases} \frac{16-4x}{x^2-x-12} < 4 \\ \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} > \frac{1}{x} \end{cases}$$
 có nghiệm là:

A. $(-\sqrt{2}; 0) \cup (1; \sqrt{2}) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$ B. $(-4; -3) \cup (0; 1) \cup (\sqrt{2}; 2)$
C. $(-3; \sqrt{2}) \cup (4; +\infty)$ D. $(-4; -\sqrt{2}) \cup (1; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

➤ Giải bất phương trình: $\frac{16-4x}{x^2-x-12} < 4 \Leftrightarrow \frac{-4x^2+64}{x^2-x-12} < 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-4	-3	4	$+\infty$			
$\frac{-4x^2+64}{x^2-x-12}$		$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$

$\Rightarrow S_1 = (-\infty; -4) \cup (-3; 4) \cup (4; +\infty)$

➤ Giải bất pt: $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} > \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2-2}{x(x-1)(x-2)} > 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	1	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
$\frac{x^2-2}{x(x-1)(x-2)}$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$

$\Rightarrow S_2 = (-\sqrt{2}; 0) \cup (1; \sqrt{2}) \cup (2; +\infty)$

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là: $S = S_1 \cap S_2 = (-\sqrt{2}; 0) \cup (1; \sqrt{2}) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$

$$\begin{cases} \frac{1}{3x} < 0 \\ x + \frac{4}{3} \geq \frac{4}{3x} \\ 4x^2 - 5x + 1 < 0 \end{cases}$$

Bài 6: Hệ bất phương trình:

có nghiệm là:

A. $-2 \leq x < 0$

B. $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}$

D. $\frac{2}{3} \leq x < 1$

Lời giải

Chọn A

➤ $\frac{1}{3x} < 0 \Leftrightarrow x < 0$

$\Rightarrow S_1 = (-\infty; 0)$

➤ Xét bất phương trình: $x + \frac{4}{3} \geq \frac{4}{3x} \Leftrightarrow x + \frac{4}{3} - \frac{4}{3x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 4x - 4}{3x} \geq 0$

Bảng xét dấu:

x	$\frac{2}{3}$					
	$-\infty$	-2	0			$+\infty$
$\frac{3x^2+4x-4}{3x}$		$-$	0	$+$	$ $	$-$
				$ $		$+$

$\Rightarrow S_2 = [-2; 0) \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$

➤ Xét bất pt: $4x^2 - 5x + 1 < 0$

$\Rightarrow S_3 = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là: $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = [-2; 0)$

Bài 7: Hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 7}{-2x^2 + 3x + 2} > 0 \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 11x + 30} < 0 \end{cases}$ có nghiệm là:

A. $-\frac{1}{2} < x < 2$

B. $2 < x < 3$

C. $0 < x < 3$

D. Vô

nghiệm.

Lời giải

Chọn D

Xét bất phương trình: $\frac{x^2 - 5x + 7}{-2x^2 + 3x + 2} > 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$\frac{x^2 - 5x + 7}{-2x^2 + 3x + 2}$	$-$	$\parallel$	$+$	$-$

Tập nghiệm bất phương trình là: $S_1 = \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

Xét bất pt: $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 11x + 30} < 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	2	3	5	6	$+\infty$			
$\frac{x^2-5x+6}{x^2-11x+30}$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$

Tập nghiệm của bất phương trình là: $S_2 = (2; 3) \cup (5; 6)$.

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là: $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Bài 8: Hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{x^2 - 9}{-x^2 + 3x - 12} > 0 \\ \frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm là:

A. $x < -3$ hoặc $x > 1$.

B. $3 < x < 5$.

C. $1 \leq x < 3$.

D. $1 < x < 3$.

Lời giải

Chọn C

Xét bất phương trình: $\frac{x^2 - 9}{-x^2 + 3x - 12} > 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$	
$\frac{x^2-9}{-x^2+3x-12}$	$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy nghiệm bất phương trình là: $S_1 = (-3; 3)$.

Xét bất pt: $\frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+14+(3x+1)(x-5)}{2(x-5)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 12x + 9}{2(x-5)} \geq 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$			
$\frac{3x^2-12x+9}{2(x-5)}$		-	0	+	0	-		+

Vậy nghiệm của bất phương trình là:

$$S_2 = [1; 3] \cup (5; +\infty)$$

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là: $S = S_1 \cap S_2 = [1; 3)$.

4. Dạng 4-Điều kiện về nghiệm của tam thức bậc hai

I-BÀI TẬP TỰ LUẬN

Ví dụ 1: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $(m+2)x^2 - 3x + 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

Lời giải

Điều kiện cần và đủ để phương trình có hai nghiệm trái dấu là: $(m+2)(2m-3) < 0$.

$$\Leftrightarrow -2 < m < \frac{3}{2}$$

Ví dụ 2: Tìm giá trị của tham số m để phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

Lời giải

$(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m-3 \neq 0 \\ (m-3)^2 - 4(m-3)(m+1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ (m-3)(3m+7) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{3} < m < 3$$

Ví dụ 3: Xác định m để phương trình: $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

khác 0 sao cho $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2$.

Lời giải

$$(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m - 1 = 0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 0 khi

$$\begin{cases} m+1 \neq 0 \\ (m+2)^2 - (m+1)(m-1) > 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ 4m+5 > 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m > -\frac{5}{4} \\ m \neq 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Viết } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m+2)}{m+1} \\ x_1 x_2 = \frac{m-1}{m+1} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2(m+2)}{m+1} - 2 \frac{m-1}{m+1}}{\frac{m-1}{m+1}} > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{m-1} > 0 \Leftrightarrow m > 1 \quad (2)$$

Từ (1); (2) $\Rightarrow m > 1$.

Ví dụ 4: Với giá trị nào của m thì phương trình: $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_1 x_2 < 1$?

Lời giải

PT $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ 1 > 0 \quad \forall m \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1$.

Khi đó, theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-2)}{m-1} \\ x_1 x_2 = \frac{m-3}{m-1} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_1 x_2 < 1 \Leftrightarrow \frac{2(m-2)}{m-1} + \frac{m-3}{m-1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(m-2)}{m-1} + \frac{m-3}{m-1} - \frac{m-1}{m-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2m-6}{m-1} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3$$

Vậy $1 < m < 3$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = (m-2)x^2 - 3mx + 2m-3$ (m là tham số). Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho gốc tọa độ O nằm giữa A và B .

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là $(m-2)x^2 - 3mx + 2m-3 = 0$

Điều kiện để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho gốc

tọa độ O nằm giữa A và B là $x_A \cdot x_B < 0 \Leftrightarrow \frac{2m-3}{m-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < m < 2$

II-BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm điều kiện của b để $f(x) = x^2 - bx + 3$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $b \in [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$.

B. $b \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.

C. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; +\infty)$ D. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = x^2 - bx + 3$ có nghiệm khi $b^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b < -2\sqrt{3} \\ b > 2\sqrt{3} \end{cases}$

Câu 2: Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

A. $m \in (-\infty; -\frac{3}{5}) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$ B. $m \in (-\frac{3}{5}; 1)$

C. $m \in (-\frac{3}{5}; +\infty)$ D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Lời giải

Chọn A

Ta có (1) có hai nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m < -\frac{3}{5} \\ m > 1 \end{cases}$

Câu 3: Các giá trị m để tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m+1$ đổi dấu 2 lần là

A. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 28$ B. $m < 0$ hoặc $m > 28$

C. $0 < m < 28$ D. $m > 0$

Lời giải

Chọn B

để tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m+1$ đổi dấu 2 lần khi và chỉ khi

$\Delta > 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 - 4(8m+1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 28m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 28 \\ m < 0 \end{cases}$

Câu 4: Cho phương trình $x^2 - 2x - m = 0$ (1). Tìm tất cả các giá trị của m để (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < 2$.

A. $m > 0$ B. $m < -1$ C. $-1 < m < 0$ D. $m > -\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn C

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\hat{U} \begin{cases} 1^1 & 0 \\ D' = (-1)^2 + m > 0 \end{cases} \hat{U} m > -1$

Khi đó, phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < 2$

$$\bigcup \begin{cases} x_1 - 2 + x_2 - 2 < 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x_1 + x_2 - 4 < 0 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} 2 - 4 < 0 \\ -m - 2 \cdot 2 + 4 > 0 \end{cases} \bigcup m < 0.$$

Kết hợp với điều kiện ta được: $-1 < m < 0$.

Câu 5: Với điều kiện nào của m để phương trình $x^2 - (m-1)x + m + 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 1$.

A. $-2 < m < 7$.

B. $-2 \neq m < -1$.

C. $m < -\frac{7}{8}$ và $m \neq -2$.

D. $-2 \neq m < -1 \vee m > 7$.

Lời giải

Chọn B

PT có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ \Delta = (m-1)^2 - 4(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m^2 - 6m - 7 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m < -1 \vee m > 7 \end{cases} (*)$

Theo Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m-1 \\ x_1 x_2 = m+2 \end{cases} (1)$

Ta có $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{(m-1)^2 - 2(m+2)}{(m+2)^2} > 1$

$\Leftrightarrow \frac{-8m-7}{(m+2)^2} > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{7}{8}$

Kết hợp (*) ta có $-2 \neq m < -1$.

Câu 6: Với điều kiện nào của m để phương trình $x^2 - (m-1)x + m + 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} < 1$.

A. $-2 < m < -1 \vee m > 7$.

B. $m < -2 \vee m > 7$.

C. $-1 < m < -\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{2} < m < 7$.

Lời giải

Chọn A

PT có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ \Delta = (m-1)^2 - 4(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m^2 - 6m - 7 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m < -1 \vee m > 7 \end{cases} \quad (1)$$

Theo Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 1 \\ x_1 x_2 = m + 2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} < 1 &\Leftrightarrow \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 x_2^3} < 1 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 \right]}{x_1^3 x_2^3} < 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(m-1) \left[(m-1)^2 - 3(m+2) \right]}{(m+2)^3} < 1 \Leftrightarrow \frac{-12m^2 - 7m - 3}{(m+2)^3} < 0 (*) \end{aligned}$$

Do $-12m^2 - 7m - 3 < 0; \forall x$ nên $(*) \Leftrightarrow m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$.

Kết hợp (1) ta có $-2 < m < -1 \vee m > 7$.

Câu 7: Định m để phương trình $x^2 - (2m-3)x + m^2 - 3m + 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 2)$?

A. $-2 < m < 4$.

B. $m < -2 \vee m > 4$.

C. $-1 < m < 3$.

D. $m < -1 \vee m > 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\Delta = 1$ nên PT luôn có hai phân biệt $\begin{cases} x = m - 1 \\ x = m - 2 \end{cases}$.
YCBT $\Leftrightarrow -3 < m - 2 < m - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 3$.

Câu 8: Giá trị của m làm cho phương trình $(m-2)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt là:

A. $m < 6$ và $m \neq 2$.

B. $m < -3$ hoặc $2 < m < 6$.

C. $2 < m < 6$.

D. $m > 6$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt khi

$$\begin{cases} a = m - 2 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - (m-2)(m+3) > 0 \\ S = \frac{2m}{m-2} > 0 \\ P = \frac{m+3}{m-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m < 6 \\ m > 2 \vee m < 0 \\ m > 2 \vee m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m < 6 \\ m < -3 \end{cases}$$

Câu 9: Cho phương trình $(m-5)x^2 + (m-1)x + m = 0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 2 < x_2$.

A. $m < \frac{22}{7}$.

B. $\frac{22}{7} < m < 5$.

C. $m \geq 5$.

D. $\frac{22}{7} \leq m \leq 5$.

Lời giải

Chọn B

(1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 2 < x_2 \Leftrightarrow a.f(2) = (m-5)[4(m-5) + 2(m-1) + m] < 0$

$$\Leftrightarrow (m-5)(7m-22) < 0 \Leftrightarrow \frac{22}{7} < m < 5$$

Câu 10: Giá trị nào của m thì phương trình: $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu?

A. $m < 1$.

B. $m > 2$.

C. $m > 3$.

D. $1 < m < 3$.

Lời giải

Chọn D

$(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu: $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-3) < 0$

$$\Leftrightarrow 1 < m < 3$$

Câu 11: Định m để phương trình $(m+1)x^2 - 2mx + m-2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 3$$

A. $m < 2 \vee m > 6$.

B. $-2 < m < -1 \vee -1 < m < 2 \vee m > 6$.

C. $2 < m < 6$.

D. $-2 < m < 6$.

Lời giải

Chọn B

PT có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - (m+1)(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m > -2 \end{cases} (*)$

Khi đó, theo Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m+1} \\ x_1 x_2 = \frac{m-2}{m+1} \end{cases}$$

Ta có $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 3 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} < 3 \Leftrightarrow \frac{2m}{m-2} < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 3$

$$\Leftrightarrow \frac{6-m}{m-2} < 0 \Leftrightarrow m < -2 \vee m > 6$$

Kết hợp (*) ta có $-2 < m < -1 \vee -1 < m < 2 \vee m > 6$.

Câu 12: Với điều kiện nào của m thì phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$ có đúng 1 nghiệm thuộc khoảng $(-1; 2)$?

- A.** $-2 \leq m \leq 1$. **B.** $m < -1 \vee m > 1$. **C.** $m < \frac{4}{3}$. **D.** $0 < m < \frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Khi $m = 0$, PT $\Leftrightarrow x = 1 \in (-1; 2)$. Ta có $m = 0$ (tmyc).(*)

Khi $m \neq 0$, PT luôn có hai nghiệm $x = 1; x = \frac{m-2}{m}$. PT có đúng 1 nghiệm thuộc

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-2}{m} \leq -1 \\ \frac{m-2}{m} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m-2}{m} \leq 0 \\ \frac{-m-2}{m} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m \leq 1 \\ -2 \leq m < 0 \end{cases}$$

khoảng $(-1; 2)$

Kết hợp (*) ta có $-2 \leq m \leq 1$.

Câu 13: Phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m^2 + 4m - 5 = 0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thoả $2 < x_1 < x_2$.
Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau

- A.** $-2 < m < -1$. **B.** $m > 1$. **C.** $-5 < m < -3$. **D.** $-2 < m < 1$.

Lời giải

Chọn A

Để phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m^2 + 4m - 5 = 0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thoả $2 < x_1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ m+1 \neq 0 \\ x_2 > x_1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - (m+1)(m^2 + 4m - 5) > 0 \\ m \neq -1 \\ (x_1 - 2) + (x_2 - 2) > 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \end{cases}$$

$$\text{Theo Vi-et ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2 + 4m - 5}{m+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m-1)(-m^2-5m-6) > 0 \\ m \neq -1 \\ \frac{2(m-1)}{m+1} - 4 > 0 \\ \frac{m^2+4m-5}{m+1} - 2 \cdot \frac{2(m-1)}{m+1} + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -2 < m < 1 \\ m < -3 \end{cases} \\ m \neq -1 \\ -3 < m < -1 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < -1.$$

Câu 14: Xác định m để phương trình $(x-1)[x^2+2(m+3)x+4m+12]=0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1 .

- A. $m < -\frac{7}{2}$. B. $-2 < m < 1$ và $m \neq -\frac{16}{9}$.
- C. $-\frac{7}{2} < m < -1$ và $m \neq -\frac{16}{9}$. D. $-\frac{7}{2} < m < -3$ và $m \neq -\frac{19}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(x-1)[x^2+2(m+3)x+4m+12]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2+2(m+3)x+4m+12=0 \end{cases} (*)$.

Giải sử phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , theo Vi-et ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+3) \\ x_1 \cdot x_2 = 4m+12 \end{cases}.$$

Để phương trình $(x-1)[x^2+2(m+3)x+4m+12]=0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1 , thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 và đều lớn hơn -1 .

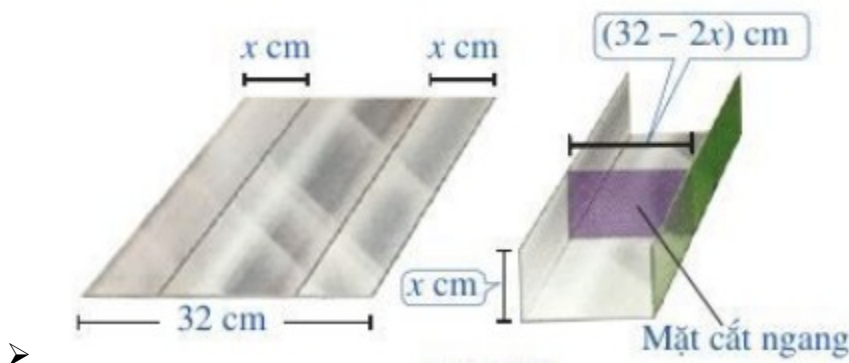
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1+2(m+3)+4m+12 \neq 0 \\ x_2 > x_1 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 - (4m+12) > 0 \\ 6m+19 \neq 0 \\ (x_1+1)+(x_2+1) > 0 \\ (x_1+1)(x_2+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3 > 0 \\ m \neq -\frac{19}{6} \\ -2(m+3)+2 > 0 \\ 4m+12-2(m+3)+1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -3 \\ m \neq -\frac{19}{6} \\ m < -2 \\ m > -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{2} < m < -3 \\ m \neq -\frac{19}{6} \end{cases}.$$



5.DẠNG 5: BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

- Bác Dũng muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật với bề ngang 32 cm thành
- Ví dụ 1:** một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông (Hình vẽ).



- của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng
- Để đảm bảo kỹ thuật, diện tích mặt cắt ngang 120 cm^2 . Rãnh nước phải có độ cao ít nhất bao nhiêu xăng-ti-mét?

Lời giải

Gọi kích thước của mặt cắt ngang là $x(\text{cm})$ và $32 - 2x(\text{cm})$.

Khi đó diện tích mặt cắt ngang là $S(x) = x(32 - 2x)(\text{cm}^2)$

Diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng 120 cm^2 khi và chỉ khi $x(32 - 2x) \geq 120 \Leftrightarrow -2x^2 + 32x - 120 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [6; 10]$.

ãnh nước phải có độ cao ít nhất 6 cm

Vậy r

Ví dụ 2: Một công ty bình gia dụng sản xuất bình đựng nước thấy rằng khi đơn giá của bình đựng nước là x nghìn đồng thì doanh thu R (tính theo đơn vị nghìn đồng) sẽ là

$$R(x) = -560x^2 + 50000x.$$

- a) Theo mô hình doanh thu này thì đơn giá nào là quá cao dẫn đến doanh thu từ việc bán bình đựng nước bằng 0 (tức là không có người mua)
- b) Với khoảng đơn giá nào của bình đựng nước thì doanh thu từ việc bán bình đựng nước vượt mức 1 tỉ đồng?

Lời giải

$$R(x) = -560x^2 + 50000x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 89 \end{cases}$$

a) Doanh thu từ việc bán bình đựng nước bằng 0 tức là

Vậy theo mô hình đã cho, với đơn giá 89 nghìn đồng thì công ty không có doanh thu. (Đơn giá quá cao dẫn đến không có người mua hàng)

b) Doanh thu từ việc bán bình đựng nước vượt mức 1 tỉ đồng, tức là

$$\begin{aligned} -560x^2 + 50000x &> 1000000 \Leftrightarrow 56x^2 - 5000x + 100000 < 0 \\ \Leftrightarrow 30,25 < x < 59,04. \end{aligned}$$

Vậy với đơn giá của bình đựng nước khoảng 31 nghìn đồng đến 59 nghìn đồng thì doanh thu vượt mức 1 tỉ đồng

Ví dụ 3: Một công ty du lịch báo giá tiền cho chuyến tham quan của một nhóm khách du lịch như sau:

50 khách đầu tiên với giá 300000đồng/người. Nếu có nhiều hơn 50 người đăng kí thì cứ thêm một người, giá vé sẽ giảm 5000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

- a) Gọi x là số lượng khách từ người thứ 51 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x
- b) Số người của nhóm du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực sự cho chuyến đi là 15 080 000 đồng.

Lời giải

a) Cứ thêm 1 người thì giá vé còn $(300000 - 5000.1)$ đồng/người cho toàn bộ hành khách.

Cứ thêm x người thì giá vé còn $(300000 - 5000.x)$ đồng/người cho toàn bộ hành khách. Vậy doanh thu theo x là $(50 + x).(300000 - 5000.x)$ đồng.

b) Công ty không bị lỗ khi và chỉ khi

$$(50 + x).(300000 - 5000.x) \geq 15080000$$

$$\Leftrightarrow (50 + x).(60 - x) \geq 3016$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 10x - 16 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 8.$$

Vậy số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là 58 người.

Ví dụ 4: Công ty An Bình báo giá tiền cho chuyến tham quan của một nhóm khách du lịch như sau:

10 khách đầu tiên với giá 800000đồng/người. Nếu có nhiều hơn 10 người đăng kí thì cứ thêm một người, giá vé sẽ giảm 10000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

- a) Gọi x là số lượng khách từ người thứ 11 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x
- b) Số người của nhóm du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí

thực sự cho chuyến đi là 700 000 đồng/người.

Lời giải

a) Cứ thêm 1 người thì giá vé còn $(800000 - 10000 \cdot 1)$ đồng/người cho toàn bộ hành khách.

Cứ thêm x người thì giá vé còn $(800000 - 10000 \cdot x)$ đồng/người cho toàn bộ hành khách.

Vậy doanh thu theo x là $(10 + x) \cdot (800000 - 10000x)$ đồng.

b) Chi phí thực sự sau khi thêm x khách là $700000(10 + x)$ đồng.

Công ty không bị lỗ khi và chỉ khi

$$(10 + x) \cdot (800000 - 10000x) \geq 700000(10 + x)$$

$$\Leftrightarrow (10 + x) \cdot 10000(80 - x) \geq 700000(10 + x)$$

$$\Leftrightarrow (10 + x)(80 - x) \geq 70(10 + x)$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 70x + 800 \geq 700 + 70x$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 100 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -10 \leq x \leq 10.$$

Vậy số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là 20 người thì công ty không bị lỗ.

Ví dụ 5: Bộ phận nghiên cứu thị trường của một xí nghiệp xác định tổng chi phí để sản xuất Q sản phẩm là $Q^2 + 180Q + 140000$ (nghìn đồng). Giả sử giá mỗi sản phẩm bán ra thị trường là 1200 nghìn đồng.

a) Xác định lợi nhuận của xí nghiệp thu được sau khi bán hết Q sản phẩm đó., biết rằng lợi nhuận là hiệu của doanh thu trừ đi tổng chi phí để sản xuất.

b) Xí nghiệp sản xuất bao nhiêu sản phẩm là hòa vốn?

c) Xí nghiệp cần sản xuất số sản phẩm là bao nhiêu để không bị lỗ?

Lời giải

a) Lợi nhuận của xí nghiệp thu được sau khi bán hết Q sản phẩm là:

$$1200Q - (Q^2 + 180Q + 140000) = -Q^2 + 1020Q - 140000.$$

$$-Q^2 + 1020Q - 140000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Q \leq 163 \\ Q \geq 857 \end{cases}$$

b) Để xí nghiệp hòa vốn thì lợi nhuận bằng 0, tức là

Vậy xí nghiệp sản xuất 163 sản phẩm hoặc 857 sản phẩm thì hòa vốn.

c) Xí nghiệp không bị lỗ khi và chỉ khi

$$-Q^2 + 1020Q - 140000 \geq 0 \Rightarrow 163,45 \leq Q \leq 857,55 \Rightarrow 164 \leq Q \leq 857.$$

Vậy để không bị lỗ thì xí nghiệp cần sản xuất từ 164 đến 857 sản phẩm.

Ví dụ 6: Một viên đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu là 500 m/s , hợp với phương ngang một góc 45° . Biết rằng bỏ qua sức cản của không khí, quỹ đạo chuyển động của một vật ném xiên sẽ tuân theo phương trình

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha.$$

Trong đó x là khoảng cách (tính bằng mét) vật bay theo phương ngang, vận tốc ban đầu v_0

của vật hợp với phương ngang một góc α và $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc trọng trường.

a) Viết phương trình của chuyển động

b) Để viên đạn bay qua ngọn núi cao 4000 mét thì khẩu pháo phải đặt cách chân núi một khoảng cách bao xa?

Lời giải

a) Phương trình chuyển động của viên đạn là

$$y = \frac{-9,8}{2.500^2 \cos^2 45^\circ} x^2 + x \tan 45^\circ \Leftrightarrow y = \frac{-9,8}{250000} x^2 + x.$$

b) Để viên đạn bay qua ngọn núi cao 4000 mét thì

$$\begin{aligned} \frac{-9,8}{250000} x^2 + x > 4000 &\Leftrightarrow \frac{-9,8}{250000} x^2 + x - 4000 > 0 \\ \Rightarrow 4967,17 < x < 20543,03. \end{aligned}$$

Vậy khẩu pháo phải đặt cách chân núi trong khoảng từ 4967 m đến 20543 m thì viên đạn bay qua ngọn núi.

Ví dụ 7: Xét hệ tọa độ Oth trên mặt phẳng, trong đó trục Ot biểu thị thời gian t (tính bằng giây) và trục Oh biểu thị độ cao h (tính bằng mét). Một quả bóng được đá lên từ điểm $A(0; 0,2)$ và chuyển động theo quỹ đạo là một cung parabol. Quả bóng đạt độ cao $8,5 \text{ m}$ sau 1 giây và đạt độ cao 6 m sau 2 giây.

a) Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị quỹ đạo chuyển động của quả bóng.

b) Trong khoảng thời gian nào thì quả bóng vẫn chưa chạm đất?

Lời giải

a) Phương trình của parabol là $h = h(t) = at^2 + bt + c$ ($a \neq 0$), trong đó h là độ cao, t là thời gian, a, b, c là các hằng số cần tìm.

Quỹ đạo của quả bóng là một parabol đi qua điểm $A(0; 0,2)$ nên thay $t = 0$ và $h = 0,2$ vào hàm số ta được: $c = 0,2$.

Khi đó: $h = h(t) = at^2 + bt + 0,2$

Lại có quả bóng đạt độ cao $8,5 \text{ m}$ sau 1 giây và đạt độ cao 6 m sau 2 giây.

Do đó quỹ đạo của bóng là parabol đi qua các điểm có tọa độ $(1; 8,5)$ và $(2; 6)$

Ta có hệ:

$$\begin{cases} 8,5 = a + b + 0,2 \\ 6 = a.4 + b.2 + 0,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8,3 = a + b \\ 5,8 = 4a + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-27}{5} \\ b = \frac{137}{10} \end{cases}$$

Vậy hàm số bậc hai biểu thị quỹ đạo chuyển động của quả bóng là:

$$h = h(t) = -\frac{27}{5}t^2 + \frac{137}{10}t + 0,2$$

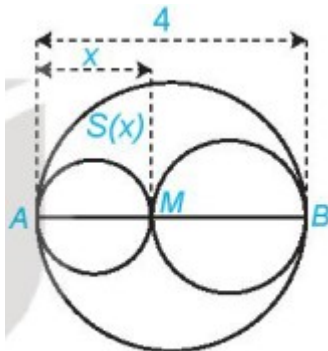
$$h > 0 \Leftrightarrow -\frac{27}{5}t^2 + \frac{137}{10}t + 0.2 > 0 \Rightarrow -0,01 < t < 2,55$$

b) Bóng chưa chạm đất khi và chỉ khi

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 2,55 giây thì bóng vẫn chưa chạm đất.

Ví dụ 8: Xét đường tròn đường kính $AB = 4$ và một điểm M di chuyển trên đoạn AB , đặt $AM = x$

(H.6.19). Xét hai đường tròn đường kính AM và MB . Kí hiệu $S(x)$ là diện tích phần hình phẳng nằm trong hình tròn lớn và nằm ngoài hai hình tròn nhỏ. Xác định các giá trị của x để diện tích $S(x)$ không vượt quá một nửa tổng diện tích hai hình tròn nhỏ.



Hình 6.19

Lời giải

Ta có $S_{(O;AB)} = \frac{\pi}{4} AB^2$; $S_{(O_1;AM)} = \frac{\pi}{4} x^2$; $S_{(O_2;MB)} = \frac{\pi}{4} (4-x)^2$;

$$S_x = S_{(O;AB)} - S_{(O_1;AM)} - S_{(O_2;MB)}$$

$$= \frac{\pi}{4} (AB^2 - x^2 - (4-x)^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} (-2x^2 + 8x)$$

$$S_x \leq \frac{1}{2} (S_{(O_1;AM)} + S_{(O_2;MB)})$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} (-2x^2 + 8x) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} (x^2 + (4-x)^2)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 12x + 8 \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{6-2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{6+2\sqrt{3}}{3} \leq x < 4 \end{cases}$$

➤ **DẠNG TOÁN 5: ỨNG DỤNG TAM THỨC BẬC HAI, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT.**

1. Phương pháp giải.

- Ta đưa bất đẳng thức về một trong các dạng $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$,

$$ax^2 + bx + c < 0 \text{ hoặc } ax^2 + bx + c \leq 0 \text{ rồi đi chứng minh (theo thứ tự) } \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}, \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}.$$

- Nếu BĐT cần chứng minh có dạng: $A^2 \leq 4BC$ (hoặc $A^2 \leq BC$) ta có thể chứng minh tam thức $f(x) = Bx^2 + Ax + C$ (hoặc $f(x) = Bx^2 + 2Ax + C$) luôn cùng dấu với B. Khi đó ta sẽ có $\Delta \leq 0$.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho hai số thực x, y . Chứng minh rằng $3x^2 + 5y^2 - 2x - 2xy + 1 > 0$

Lời giải:

Viết bất đẳng thức lại dưới dạng $3x^2 - 2(y+1)x + 5y^2 + 1 > 0$

Đặt $f(x) = 3x^2 - 2(y+1)x + 5y^2 + 1$ xem y là tham số khi đó $f(x)$ là tam thức bậc hai ẩn x có hệ số $a_x = 3 > 0$ và

$$\Delta'_x = (y+1)^2 - 3(5y^2 + 1) = -14y^2 + 2y - 2$$

Xét tam thức $g(y) = -14y^2 + 2y - 2$ có hệ số $a_y = -14 < 0$ và $\Delta'_y = -27 < 0$

Suy ra $\Delta'_x < 0$

Do đó $f(x) < 0$ với mọi x, y .

Nhận xét: * Khi gặp bài toán chứng minh BĐT có dạng: $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0$

$\forall a_1, a_2, \dots, a_n$ mà $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = g(a_i)$ là một tam thức bậc hai với ẩn a_i có hệ số $a > 0$, ta có thể sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai để chứng minh. Khi đó $g(a_i) \geq 0 \Leftrightarrow \Delta_{a_i} \leq 0$.

Ví dụ 2: Cho x, y, z là số thực. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2z^2 - 4xyz + y^2z^2 - 2yz + 1 \geq 0.$$

Lời giải

Bất đẳng thức viết lại $(1 + y^2z^2)x^2 - 4xyz + y^2 + z^2 + y^2z^2 - 2yz + 1 \geq 0$

Đặt $f(x) = (1 + y^2z^2)x^2 - 4xyz + y^2 + z^2 + y^2z^2 - 2yz + 1$, khi đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai

ẩn x có hệ số $a = 1 + y^2z^2 > 0$ và $\Delta'_x = 4y^2z^2 - (1 + y^2z^2)(y^2 + z^2 + y^2z^2 - 2yz + 1)$

$$\Rightarrow \Delta'_x = -(1 + y^2 - 2yz + z^2 - 2y^2z^2 + y^4z^2 - 2y^3z^3 + y^2z^4 + y^4z^4)$$

Áp dụng BĐT $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ta có

$$y^4z^2 + y^2z^4 \geq 2y^3z^3, \quad y^4z^4 + 1 \geq 2y^2z^2 \quad \text{và} \quad y^2 + z^2 \geq 2yz$$

Cộng vế với vế lại suy ra $\Delta'_x \leq 0$

Do đó $f(x) \geq 0, \forall x, y, z$. ĐPCM.

Ví dụ 3: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và x, y, z thỏa mãn:
 $a^2x + b^2y + c^2z = 0$. Chứng minh rằng: $xy + yz + zx \leq 0$.

Lời giải:

* Nếu trong ba số x, y, z có một số bằng 0, chẳng hạn $x = 0 \Rightarrow b^2y = -c^2z$.

$$\Rightarrow xy + yz + zx = yz = -\frac{c^2}{b^2}z^2 \leq 0$$

* $x, y, z \neq 0$. Do $a^2x + b^2y + c^2z = 0 \Rightarrow x = -\frac{b^2y + c^2z}{a^2}$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \leq 0 \Leftrightarrow -(y+z)\frac{b^2y + c^2z}{a^2} + yz \leq 0$$

$$\Leftrightarrow f(y) = b^2y^2 + (b^2 + c^2 - a^2)yz + c^2z^2 \geq 0$$

Tam thức $f(y)$ có $\Delta_y = [(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2]z^2$

$$\text{Vi} \begin{cases} |b-c| < a \\ b+c > a \end{cases} \Rightarrow -2bc < b^2 + c^2 - a^2 < 2bc$$

$$\Rightarrow (b^2 + c^2 - a^2)^2 < 4c^2b^2 \Rightarrow \Delta_y \leq 0, \forall z \Rightarrow f(y) \geq 0 \quad \forall y, z$$

Ví dụ 4: (BĐT Bunhiacôpski) Cho $2n$ số $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$. Chứng minh rằng :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Lời giải:

* Nếu $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 0 \Rightarrow$ BĐT hiển nhiên đúng.

* Nếu $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0$. Xét tam thức :

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)x + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$$

$$= (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2 \geq 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \Delta = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

Đẳng thức có

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.104: Tìm tất cả các giá trị của y sao cho BĐT sau đúng với $\forall x, z \in \mathbb{R}$.

$$x^2 + 9y^2 + 5z^2 + 6xy - 4xz - 12yz - 2z + 1 \geq 0$$

A. $-\frac{2}{3} \leq y$

B. $y \leq 0$

C. $-\frac{2}{3} \leq y \leq 0$

D. $\begin{cases} y < -\frac{2}{3} \\ y > 0 \end{cases}$

Lời giải:

Bài 4.104: BĐT đã cho đúng với $\forall x, z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ tam thức $f(x) \geq 0 \quad \forall x, z$

(Trong đó $f(x) = x^2 + 2(3y - 2z)x + 9y^2 + 5z^2 - 12yz - 2z + 1$)

$$\Leftrightarrow \Delta'_x = (3y-2z)^2 - (9y^2 + 5z^2 - 12yz - 2z + 1) = -z^2 + 2(3y+1)z - 1 \leq 0 \quad \forall z$$

$$\Leftrightarrow \Delta'_z = (3y+1)^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3y(3y+2) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq y \leq 0$$

Vậy $-\frac{2}{3} \leq y \leq 0$ là những giá trị cần tìm.

Bài 4.105: Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn: $xy + yz + zx + xyz = 4$.

Chứng minh rằng: $x + y + z \geq xy + yz + zx$.

Lời giải:

Bài 4.105: Ta giả sử $z = \min\{x, y, z\} \Rightarrow z \leq 1$. Từ giả thiết $\Rightarrow x = \frac{4-yz}{y+z+yz}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{4-yz}{y+z+yz} + y + z \geq (y+z) \frac{4-yz}{y+z+yz} + yz$$

Nên

$$\Leftrightarrow f(y) = (1+z-z^2)y^2 + (z^2+z-4)y + (z-2)^2 \geq 0$$

Tam thức $f(y)$ có hệ số $a = 1+z-z^2 > 0$ (do $z \leq 1$) và có biệt thức:

$$\Delta = z(z-1)^2(5z-8) \leq 0 \Rightarrow f(y) \geq 0 \quad \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ hoặc $(x, y, z) = (2, 2, 0)$ và các hoán vị.

Bài 4.106: Cho các số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng:

$$xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x + y + z)$$

Lời giải:

Bài 4.106: Trong ba số x, y, z luôn tồn tại hai số cùng không nhỏ hơn 1 hoặc cùng không lớn hơn 1. Ta giả sử hai số đó là x và y . Khi đó ta có:

$$(x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq x + y - 1 \Rightarrow xyz \geq xz + yz - z$$

$$\Rightarrow xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq xz + yz - z + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8$$

Nên ta chứng minh:

$$xz + yz - z + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow f(z) = 2z^2 + (x+y-6)z + 2(x^2 + y^2) - 5(x+y) + 8 \geq 0$$

Tam thức $f(z)$ có $a = 2 > 0$ và $\Delta_z = -15x^2 + 2(y+14)x - 15y^2 + 28y - 28$

Δ_z là tam thức bậc hai ẩn x , có $a = -15 < 0$ và $\Delta_x = -224(y-1)^2 \leq 0 \Rightarrow \Delta_z \leq 0 \Rightarrow f(z) \geq 0$

(đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 4.107: Cho các số thực x, y thỏa mãn bất phương trình $5x^2 + 5y^2 - 5x - 15y + 8 \leq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 3y$.

A.2

B.3

C.4

D.5

Lời giải:

Bài 4.107: Cho các số thực x, y thỏa mãn bất phương trình $5x^2 + 5y^2 - 5x - 15y + 8 \leq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 3y$.

HD: Do $S = x + 3y \Rightarrow x = S - 3y$, thay vào giả thiết $5x^2 + 5y^2 - 5x - 15y + 8 \leq 0$ và viết theo hệ số của biến y ta thu được

$$50y^2 - 30Sy + 5S^2 - 5S + 8 \leq 0(*)$$

Vì bất đẳng thức trên đúng với mọi y nên ta có $\Delta \geq 0$, tức là $900S^2 - 4.50.(5S^2 - 5S + 8) \geq 0$

Biến đổi tương đương ta thu được $-100S^2 + 1000S - 1600 \leq 0$
hay $100S^2 - 1000S + 1600 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq S \leq 8$

Khi $S = 2$ thay vào (*) được $50y^2 - 60y + 18 \leq 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{5}$ nên $x = S - 3y = 2 - \frac{9}{5} = \frac{1}{5}$

Khi $S = 8$ thay vào (*) được $50y^2 - 240y + 288 \leq 0 \Leftrightarrow y = \frac{12}{5} \Rightarrow x = S - 3y = 8 - \frac{36}{5} = \frac{4}{5}$
 $\max S = 8, \min S = 2$

Bài 4.108: Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4a - 3b$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 2a + 3b$.

A. $\frac{-9 + 45\sqrt{13}}{18}$

B. $\frac{-9 + 5\sqrt{13}}{18}$

C. $\frac{-9 + 4\sqrt{13}}{18}$

D. $\frac{-9 + 45\sqrt{13}}{8}$

Lời giải:

Bài 4.108: Ta có: $P = 2a + 3b \Rightarrow b = \frac{P - 2a}{3}$

Thay vào biểu thức phía trên ta được:

$$a^2 + \left(\frac{P - 2a}{3}\right)^2 = 4a - 3\left(\frac{P - 2a}{3}\right) \Leftrightarrow 13a^2 - 2(27 + 2P)a + 9P + P^2 = 0$$

Ta cần tìm P để phương trình trên tồn tại a. Tức là ta phải có:

$$\Delta' = -9P^2 - 9P + 729 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-9 - 45\sqrt{13}}{18} \leq P \leq \frac{-9 + 45\sqrt{13}}{18}$$

Bài 4.109: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ và $x - y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất

$P = \frac{x + y - 2}{z + 2}$
nhất

A.0

B.1

C.2

D.3

Lời giải:

Bài 4.109: Từ điều kiện ta có

$$x^2 + y^2 = \frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{2} = 5 - z^2 \Rightarrow (x + y)^2 = 10 - 2z^2 - (3 - z)^2$$

Do đó $(x + y)^2 = 1 + 6z - 3z^2$

Để thấy $z \neq -2$. Ta có $P(z + 2) + 2 = x + y$

Do đó $[P(z + 2) + 2]^2 = 1 + 6z - 3z^2$

$$\Leftrightarrow (z+2)^2 P^2 + 4(z+2)P + 4 = 1 + 6z - 3z^2 \Leftrightarrow (P^2 + 3)z^2 + (4P^2 + 4P - 6)z + 4P^2 + 8P + 3 = 0$$

Phương trình có nghiệm ẩn z khi và chỉ khi

$$\Delta_z \geq 0 \Leftrightarrow (2P^2 + 2P - 3)^2 - (P^2 + 3)(4P^2 + 8P + 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{36}{23} \leq P \leq 0$$

Ta có $P = 0$ khi $x = 2, y = 0, z = 1$

$$P = -\frac{36}{23} \text{ khi } x = \frac{20}{31}, y = -\frac{66}{31}, z = \frac{7}{31}$$

Bài 4.110: Cho a, b, c là số thực. Chứng minh rằng

$$2(a+b+c-ab-bc-ca+1)^2 + (ab+bc+ca-2)^2 \geq 3$$

Lời giải:

Bài 4.110: Nếu $\begin{cases} ab+bc+ca \leq 2-\sqrt{3} \\ ab+bc+ca \geq 2+\sqrt{3} \end{cases}$ thì bất đẳng thức dễ dàng được chứng minh.

Xét trường hợp ngược lại $2-\sqrt{3} \leq ab+bc+ca \leq 2+\sqrt{3}$. Ta đặt $x = a+b+c, y = ab+bc+ca$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$2(x-y+1)^2 + (y-2)^2 \geq 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x(y-1) + 3y^2 - 8y + 3 \geq 0$$

Đặt $f(x) = 2x^2 - 4x(y-1) + 3y^2 - 8y + 3$. Ta dễ dàng tính được

$$\Delta'_{f(x)} = 4(y-1)^2 - 2(3y^2 - 8y + 3) = -2y^2 + 8y - 2 = -2[y - (2-\sqrt{3})][y - (2+\sqrt{3})] \leq 0.$$

Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai thì bài toán được chứng minh.

Bài 4.111: Cho a và b là các số thực thỏa mãn $9a^2 + 8ab + 7b^2 \leq 6$. Chứng minh rằng

$$7a + 5b + 12ab \leq 9.$$

Lời giải:

Bài 4.111: Xét tam thức bậc hai $f(a) = 9a^2 - (4b+7)a + 7b^2 - 5b + 3$ với b là tham số

$$\Delta_f = (4b+7)^2 - 36(7b^2 - 5b + 3) = -59(2b-1)^2 \leq 0$$

$$\text{Suy ra } f(a) \geq 0 \Leftrightarrow 9a^2 - (4b+7)a + 7b^2 - 5b + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 7a + 5b + 12ab - 9 \leq 9a^2 + 8ab + 7b^2 - 6$$

Theo giả thiết ta có $9a^2 + 8ab + 7b^2 \leq 6$ nên $7a + 5b + 12ab \leq 9$.

Bài 4.112: Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của: $P = 9xy + 10yz + 11zx$.

A. $\max P = \frac{45}{18}$

B. $\max P = \frac{49}{148}$

C. $\max P = \frac{95}{148}$

D. $\max P = \frac{495}{148}$

Lời giải:

Bài 4.112: Để ý rằng, với giả thiết $x + y + z = 1$ thì

$$P = 9xy + 10yz + 11zx = 9xy + z(10y + 11x) = 9xy + (1-x-y)(10y + 11x)$$

Khai triển và rút gọn, ta thu được: $P = -11x^2 - 10y^2 + 11x + 10y - 12xy$

Tương đương với $11x^2 + (12y - 11)x + 10y^2 - 10y + P = 0 \quad (*)$

Coi đây là tam thức bậc hai ẩn x , do điều kiện tồn tại của x nên suy ra $(*)$ phải có nghiệm, tức $\Delta = (12y - 11)^2 - 44(10y^2 - 10y + P) \geq 0$

Hay $-296y^2 + 176y + 121 - 44P \geq 0$. Tương đương $P \leq -\frac{74}{11}\left(y^2 - \frac{22}{37}y - \frac{121}{296}\right)$

Ta có $y^2 - \frac{22}{37}y - \frac{121}{296} \geq -\frac{5445}{10952}$ Suy ra $P \leq \left(-\frac{74}{11}\right) \cdot \left(-\frac{5445}{10952}\right) = \frac{495}{148}$

Vậy $\max P = \frac{495}{148}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Câu 1: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 8x + 7 \geq 0$. Trong các tập hợp sau, tập nào **không** là tập con của S ?

- A. $(-\infty; 0]$ B. $[8; +\infty)$ C. $(-\infty; -1]$ D. $[6; +\infty)$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $x^2 - 8x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x \leq 1 \end{cases}$

Câu 2: Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

- A. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$ B. $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$
C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$ D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có (1) có hai nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m < -\frac{5}{3} \\ m > 1 \end{cases}$

Câu 3: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$.

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ B. $[2; +\infty)$ C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$ D. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Điều kiện $2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

Câu 4: Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{2x^2 - 7x - 15}$ là

A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (5; +\infty)$

B. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$

C. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup [5; +\infty)$

D. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện $2x^2 - 7x - 15 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$.

Câu 5: Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases}$ là

A. $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

B. $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$

C. $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$

D. $(1; 4)$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 4 \end{cases}$

Câu 6: Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$ có nghiệm là

A. $-1 \leq x < 1$ hoặc $\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}$

B. $-2 \leq x < 1$

C. $-4 \leq x < -3$ hoặc $-1 \leq x < 3$

D. $-1 \leq x \leq 1$ hoặc $\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 1 \\ -2 \leq x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 1 \\ \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

Câu 7: Xác định m để với mọi x ta có $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$.

A. $-\frac{5}{3} \leq m < 1$.

B. $1 < m \leq \frac{5}{3}$.

C. $m \leq -\frac{5}{3}$.

D. $m < 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$ có tập nghiệm là $\square$ khi hệ sau có tập nghiệm là $\square$ (do $2x^2 - 3x + 2 > 0 \forall x \in \square$)

$$\begin{cases} -1(2x^2 - 3x + 2) \leq x^2 + 5x + m \\ x^2 + 5x + m < 7(2x^2 - 3x + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x^2 - 26x + 14 - m > 0 \quad (1) \\ 3x^2 + 2x + m + 2 \geq 0 \quad (2) \end{cases} \text{ có tập nghiệm là } \square$$

Ta có (1) có tập nghiệm là $\square$ khi $\Delta' < 0 \Leftrightarrow -13 + 13m < 0 \Leftrightarrow m < 1$ (3)

(2) có tập nghiệm là $\square$ khi $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow -5 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{3}$ (4)

Từ (2) và (4), ta có $-\frac{5}{3} \leq m < 1$.

Câu 8: Tìm m để $(m+1)x^2 + mx + m < 0, \forall x \in \square$?

A. $m < -1$.

B. $m > -1$.

C. $m < -\frac{4}{3}$.

D. $m > \frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Với $m = -1$ không thỏa mãn.

$$\text{Với } m \neq -1, \quad (m+1)x^2 + mx + m < 0, \forall x \in \square \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 0 \\ -3m^2 - 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m < -\frac{4}{3} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{4}{3}.$$

Câu 9: Với giá trị nào của a thì bất phương trình $ax^2 - x + a \geq 0, \forall x \in \square$?

- A. $a = 0$. B. $a < 0$. C. $0 < a \leq \frac{1}{2}$. D. $a \geq \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Để bất phương trình } ax^2 - x + a \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4a^2 \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{1}{2} \\ a \leq -\frac{1}{2} \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{2}.$$

Câu 10: Với giá trị nào của m thì bất phương trình $x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm?

- A. $m < 1$. B. $m > 1$. C. $m < \frac{1}{4}$. D. $m > \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Bất phương trình $x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình

$$x^2 - x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}.$$

Câu 11: Tìm giá trị nguyên của k để bất phương trình $x^2 - 2(4k-1)x + 15k^2 - 2k - 7 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ là

- A. $k = 2$. B. $k = 3$. C. $k = 4$. D. $k = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow (4k-1)^2 - 15k^2 + 2k + 7 < 0 \Leftrightarrow 2 < k < 4$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 3$.

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị m nguyên âm để mọi $x > 0$ đều thỏa bất phương trình $(x^2 + x + m)^2 \geq (x^2 - 3x - m)^2$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$(x^2 + x + m)^2 \geq (x^2 - 3x - m)^2 \Leftrightarrow (x^2 + x + m)^2 - (x^2 - 3x - m)^2 \geq 0$$

Ta có

$$\Leftrightarrow 4x(2x+m)(x-1) \geq 0$$

Với $m < 0$ ta có bảng xét dấu

TH1: $-\frac{m}{2} \geq 1$

x	$-\infty$	0		1		$-\frac{m}{2}$	$+\infty$
$4x$	-	0	+		+		+
$x-1$	-		-	0	+		+
$2x+m$	-		-		-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Từ Bảng xét dấu ta thấy để BPT nghiệm đúng với $x > 0$ thì $-\frac{m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = -2$

TH 2: $-\frac{m}{2} < 1$

x	$-\infty$	0		$-\frac{m}{2}$		1	$+\infty$
$4x$	-	0	+		+		+
$2x+m$	-		-	0	+		+
$x-1$	-		-		-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Từ Bảng xét dấu ta thấy để BPT nghiệm đúng với $x > 0$ thì $-\frac{m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = -2$
 Vậy có 1 giá trị

Câu 13: Bảng xét dấu nào sau đây là của tam thức $f(x) = -x^2 - x + 6$?

A.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

B.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

C.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

D.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $-x^2 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$

Hệ số $a = -1 < 0$

Áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai ta có đáp án C là đáp án cần tìm.

Câu 14: Bảng xét dấu nào sau đây là của tam thức $f(x) = -x^2 + 6x - 9$?

A.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

B.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

C.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

D.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

Hướng dẫn giải

Chọn C

Tam thức có 1 nghiệm $x = 3$ và hệ số $a = -1 < 0$

Vậy đáp án cần tìm là C

Câu 15: Bảng xét dấu nào sau đây là của tam thức $f(x) = x^2 + 12x + 36$?

A.

x	$-\infty$	-6	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

B.

x	$-\infty$	-6	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

C.

x	$-\infty$	-6	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

D.

x	$-\infty$	-6	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

Hướng dẫn giải

Chọn C

Tam thức có một nghiệm $x = -6, a = 1 > 0$ đáp án cần tìm là C

Câu 16: Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - bx + 3$. Với giá trị nào của b thì tam thức $f(x)$ có hai nghiệm?

A. $b \in [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$.

B. $b \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.

C. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; +\infty)$.

D. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $f(x) = x^2 - bx + 3$ có nghiệm khi $b^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b < -2\sqrt{3} \\ b > 2\sqrt{3} \end{cases}$.

Câu 17: Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$.

B. $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$.

C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có (1) có hai nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m < -\frac{5}{3} \\ m > 1 \end{cases}$.

Câu 18: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$.

A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

B. $[2; +\infty)$.

C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

D. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Điều kiện $2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

Câu 19: Các giá trị m để tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m + 1$ đổi dấu 2 lần là

A. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 28$. B. $m < 0$ hoặc $m > 28$. C. $0 < m < 28$. D. $m > 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

để tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m+1$ đổi dấu 2 lần khi và chỉ khi

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 - 4(8m+1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 28m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 28 \\ m < 0 \end{cases}$$

Câu 20: Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{2x^2 - 7x - 15}$ là

- A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (5; +\infty)$ B. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$
C. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup [5; +\infty)$ D. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$2x^2 - 7x - 15 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Điều kiện

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số là } \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$$

Câu 21: Dấu của tam thức bậc 2: $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ được xác định như sau

- A. $f(x) < 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) > 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.
B. $f(x) < 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) > 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$.
C. $f(x) > 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) < 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.
D. $f(x) > 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) < 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

Vậy $f(x) > 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) < 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.

Câu 22: Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases}$ là

- A. $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ B. $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$ C. $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$ D. $(1; 4)$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có:
$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < 1 \\ x > 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ x > 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 4 \end{cases}$$

Câu 23: Hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$$
 có nghiệm là

- A. $-1 \leq x < 1$ hoặc $\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}$. B. $-2 \leq x < 1$.
- C. $-4 \leq x < -3$ hoặc $-1 \leq x < 3$. D. $-1 \leq x \leq 1$ hoặc $\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có:
$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 1 \end{cases} \\ -2 \leq x \leq \frac{5}{2} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 1 \\ \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

Câu 24: Xác định m để với mọi x ta có $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$.

- A. $-\frac{5}{3} \leq m < 1$. B. $1 < m \leq \frac{5}{3}$. C. $m \leq -\frac{5}{3}$. D. $m < 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$ có tập nghiệm là $\square$ khi hệ sau có tập nghiệm là $\square$ (do $2x^2 - 3x + 2 > 0 \forall x \in \square$)

$$\begin{cases} -1(2x^2 - 3x + 2) \leq x^2 + 5x + m \\ x^2 + 5x + m < 7(2x^2 - 3x + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x^2 - 26x + 14 - m > 0 & (1) \\ 3x^2 + 2x + m + 2 \geq 0 & (2) \end{cases} \text{ có tập nghiệm là } \square$$

Ta có ⁽¹⁾ có tập nghiệm là $\square$ khi $\Delta' < 0 \Leftrightarrow -13 + 13m < 0 \Leftrightarrow m < 1$ (3)

⁽²⁾ có tập nghiệm là $\square$ khi $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow -5 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{3}$ (4)

Từ (2) và (4), ta có $-\frac{5}{3} \leq m < 1$.

Câu 25: Khi xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - 1}$ ta có

- A. $f(x) > 0$ khi $-7 < x < -1$ hoặc $1 < x < 3$.
 B. $f(x) > 0$ khi $x < -7$ hoặc $-1 < x < 1$ hoặc $x > 3$.
 C. $f(x) > 0$ khi $-1 < x < 0$ hoặc $x > 1$.
 D. $f(x) > 0$ khi $x > -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $x^2 + 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow x = -7; x = 3$ và $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Lập bảng xét dấu ta có

$f(x) > 0$ khi $x < -7$ hoặc $-1 < x < 1$ hoặc $x > 3$.

Câu 26: Tìm m để $(m+1)x^2 + mx + m < 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

- A. $m < -1$. B. $m > -1$. C. $m < -\frac{4}{3}$. D. $m > \frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Với $m = -1$ không thỏa mãn.

Với $m \neq -1$, $(m+1)x^2 + mx + m < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 0 \\ -3m^2 - 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ \begin{cases} m < -\frac{4}{3} \\ m > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{4}{3}.$$

Câu 27: Tìm m để $f(x) = x^2 - 2(2m-3)x + 4m-3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

- A. $m > \frac{3}{2}$. B. $m > \frac{3}{4}$. C. $\frac{3}{4} < m < \frac{3}{2}$. D. $1 < m < 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$f(x) = x^2 - 2(2m-3)x + 4m-3 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 16m + 12 < 0$
 $\Leftrightarrow 1 < m < 3$.

Câu 28: Với giá trị nào của a thì bất phương trình $ax^2 - x + a \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

- A. $a = 0$. B. $a < 0$. C. $0 < a \leq \frac{1}{2}$. D. $a \geq \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Để bất phương trình } ax^2 - x + a \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4a^2 \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{1}{2} \\ a \leq -\frac{1}{2} \\ a > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{2}.$$

Câu 29: Với giá trị nào của m thì bất phương trình $x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm?

- A. $m < 1$. B. $m > 1$. C. $m < \frac{1}{4}$. D. $m > \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Bất phương trình $x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình

$$x^2 - x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}.$$

Câu 30: Cho $f(x) = -2x^2 + (m+2)x + m - 4$. Tìm m để $f(x)$ âm với mọi x .

- A. $-14 < m < 2$. B. $-14 \leq m \leq 2$.
C. $-2 < m < 14$. D. $m < -14$ hoặc $m > 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m+2)^2 + 8(m-4) < 0 \Leftrightarrow m^2 + 12m - 28 < 0 \\ \Leftrightarrow -14 < m < 2.$$

Câu 31: Bất phương trình $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x+2}$ có nghiệm là

- A. $\left(-2, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup (0, 2) \cup \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right)$. B. $x \notin \{-2, 0, 2\}$.
C. $-2 < x < 0$. D. $0 < x < 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}.$$

$$\text{Với điều kiện trên ta có } \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x(x+2) - (x-2)(x+2) - 2x(x-2)}{(x-2)x(x+2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 6x + 4}{(x-2)x(x+2)} \leq 0$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$	0	2	$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $\left(-2, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup (0, 2) \cup \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right)$.

Câu 32: Tập nghiệm của bất phương trình $\left|\frac{3x}{x^2-4}\right| < 1$ là

A. $S = (-\infty, -4) \cup (-1, 1) \cup (4, +\infty)$.

B. $S = (-\infty, -4)$.

C. $S = (-1, 1)$.

D. $S = (4, +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Điều kiện $x \neq \pm 2$

$$\left|\frac{3x}{x^2-4}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{3x}{x^2-4} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{x^2-4} > -1 \\ \frac{3x}{x^2-4} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{x^2-4} + 1 > 0 \\ \frac{3x}{x^2-4} - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+3x-4}{x^2-4} > 0 \\ \frac{-x^2+3x+4}{x^2-4} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -4 \\ -1 < x < 1 \\ x > 4 \end{cases}$$

Lập bảng xét dấu ta được nghiệm của bất phương trình là

$$S = (-\infty, -4) \cup (-1, 1) \cup (4, +\infty).$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là:

Câu 33: Tìm giá trị nguyên của k để bất phương trình $x^2 - 2(4k-1)x + 15k^2 - 2k - 7 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ là

A. $k = 2$.

B. $k = 3$.

C. $k = 4$.

D. $k = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow (4k-1)^2 - 15k^2 + 2k + 7 < 0 \Leftrightarrow 2 < k < 4$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 3$.

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị m nguyên âm để mọi $x > 0$ đều thỏa bất phương trình $(x^2 + x + m)^2 \geq (x^2 - 3x - m)^2$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$(x^2 + x + m)^2 \geq (x^2 - 3x - m)^2 \Leftrightarrow (x^2 + x + m)^2 - (x^2 - 3x - m)^2 \geq 0$$

Ta có

$$\Leftrightarrow 4x(2x+m)(x-1) \geq 0$$

Với $m < 0$ ta có bảng xét dấu

TH1: $-\frac{m}{2} \geq 1$

x	$-\infty$	0		1		$-\frac{m}{2}$	$+\infty$
$4x$	-	0	+		+		+
$x-1$	-		-	0	+		+
$2x+m$	-		-		-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Từ Bảng xét dấu ta thấy để BPT nghiệm đúng với $x > 0$ thì $-\frac{m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = -2$

TH 2: $-\frac{m}{2} < 1$

x	$-\infty$	0		$-\frac{m}{2}$		1	$+\infty$
$4x$	-	0	+		+		+
$2x+m$	-		-	0	+		+
$x-1$	-		-		-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Từ Bảng xét dấu ta thấy để BPT nghiệm đúng với $x > 0$ thì $-\frac{m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = -2$

Vậy có 1 giá trị

Câu 35: Bất phương trình $(|x-1|-3)(|x+2|-5) < 0$ có nghiệm là

A. $\begin{cases} -7 < x < -2 \\ 3 < x < 4 \end{cases}$. B. $\begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} 0 < x < 3 \\ 4 < x < 5 \end{cases}$. D.

$\begin{cases} -3 < x \leq -2 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Lập bảng phá dấu giá trị tuyệt đối giải BPT trong từng khoảng ta được nghiệm là A.

Cách khác:

Trường hợp 1: $\begin{cases} |x-1|-3 > 0 \\ |x+2|-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 3 \\ x-1 < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < -2 \end{cases}$
 $\begin{cases} |x-1|-3 < 0 \\ |x+2|-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x+2 < 5 \\ -7 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -7 < x < -2$

Trường hợp 2: $\begin{cases} |x-1|-3 < 0 \\ |x+2|-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x-1 < 3 \\ x+2 > 5 \\ x+2 < -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 4 \\ x > 3 \\ x < -7 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 4$

Câu 36: Bất phương trình: $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$ có nghiệm là:

- A. $3 < x \leq 5$. B. $2 < x \leq 3$. C. $-5 < x \leq -3$. D. $-3 < x \leq -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 \geq 0 \\ 8 - 2x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 8 - 2x \geq 0 \\ -x^2 + 6x - 5 > (8 - 2x)^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ x > 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 4 \\ -5x^2 + 38x - 69 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ x > 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 4 \\ 3 < x < \frac{25}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3 < x \leq 5.$$

Câu 37: Bất phương trình: $\sqrt{2x+1} < 3-x$ có nghiệm là:

- A. $\left[-\frac{1}{2}; 4 - 2\sqrt{2}\right)$. B. $(3; 4 + 2\sqrt{2})$. C. $(4 - 2\sqrt{2}; 3)$. D. $(4 + 2\sqrt{2}; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\sqrt{2x+1} < 3-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \\ 2x+1 < (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x < 3 \end{cases} \\ -x^2 + 8x - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x < 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 4 + 2\sqrt{2} \\ x < 4 - 2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 4 - 2\sqrt{2}.$$

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 6 \leq 0 \\ x^3 + x^2 - x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Câu 38: Nghiệm của hệ bất phương trình: là:

- A. $-2 \leq x \leq 3$. B. $-1 \leq x \leq 3$. C. $1 \leq x \leq 2$ hoặc $x = -1$. D. $1 \leq x \leq 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $2x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq 2, (I)$

$$x^3 + x^2 - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-1) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x \geq 1 \end{cases}. (II)$$

Từ (I) và (II) suy ra nghiệm của hệ là $S = [1; 2] \cup \{-1\}$.

- Câu 39:** Bất phương trình: $|x^4 - 2x^2 - 3| \leq x^2 - 5$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?
 A. 0. B. 1.
 C. 2. D. Nhiều hơn 2 nhưng hữu hạn.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $t = x^2 \geq 0$

Ta có $|t^2 - 2t - 3| \leq t - 5$.

Nếu $t^2 - 2t - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ t \geq 3 \end{cases}$ thì ta có $t^2 - 3t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 2$ loại

$$-t^2 + t + 8 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \frac{1 - \sqrt{33}}{2} \\ t \geq \frac{1 + \sqrt{33}}{2} \end{cases} \text{ loại.}$$

Nếu $t^2 - 2t - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 3$ thì ta có

- Câu 40:** Cho bất phương trình: $x^2 - 2x \leq |x - 2| + ax - 6$. Giá trị dương nhỏ nhất của a để bất phương trình có nghiệm gần nhất với số nào sau đây:
 A. 0,5. B. 1,6. C. 2,2. D. 2,6.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Trường hợp 1: $x \in [2; +\infty)$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành $x^2 - (a + 3)x + 8 \leq 0 \Leftrightarrow a \geq x + \frac{8}{x} - 3 \geq 4\sqrt{2} - 3 \approx 2,65 \forall x \in [2; +\infty)$, dấu "=" xảy ra khi $x = 2\sqrt{2}$.

Trường hợp 2: $x \in (-\infty; 2)$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành $x^2 - (a + 1)x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq x + \frac{4}{x} - 1 \text{ khi } x \in (0; 2) & (1) \\ a \leq x + \frac{4}{x} - 1 \text{ khi } x \in (-\infty; 0) & (2) \end{cases}$. Giải (1) ta được $a > 3$ (theo bất đẳng thức cauchy).

Giải (2): $a \leq x + \frac{4}{x} - 1 \Leftrightarrow a \leq -2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} - 1 = -5$.

Vậy giá trị dương nhỏ nhất của a gần với số 2,6.

- Câu 41:** Số nghiệm của phương trình: $\sqrt{x+8-2\sqrt{x+7}} = 2 - \sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}$ là:
 A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện $x \geq -7$.

Đặt $t = \sqrt{x+7}$, điều kiện $t \geq 0$.

Ta có $\sqrt{t^2+1-2t} = 2 - \sqrt{t^2-6-t} \Leftrightarrow |t-1| = 2 - \sqrt{t^2-t-6}$

Nếu $t \geq 1$ thì ta có $3-t = \sqrt{t^2-t-6} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-t-6 = 9-6t+t^2 \\ t \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow t=3 \Leftrightarrow \sqrt{x+7} = 3 \Leftrightarrow x=2$

Nếu $t < 1$ thì ta có $1+t = \sqrt{t^2-t-6} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-t-6 = 1+2t+t^2 \\ t \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow t = -\frac{7}{3} \text{ (l)}$

Câu 42: Nghiệm của bất phương trình: $(x^2+x-2)\sqrt{2x^2-1} < 0$ là:

A. $\left(1; \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right) \cup (2; +\infty)$

B. $\left\{-4; -5; -\frac{9}{2}\right\}$

C. $\left(-2; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$

D. $(-\infty; -5] \cup \left[5; \frac{17}{5}\right] \cup \{3\}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$(x^2+x-2)\sqrt{2x^2-1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-1 > 0 \\ x^2+x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -2 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-2; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$$

Câu 43: Bất phương trình $\frac{2x^2-x-1}{|x+1|-2x} \leq -2x^2+x+1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Nhiều hơn 3 nhưng hữu hạn.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Nếu } x \geq -1 \text{ thì } \frac{2x^2-x-1}{|x+1|-2x} \leq -2x^2+x+1 &\Leftrightarrow \frac{2x^2-x-1}{1-x} \leq -2x^2+x+1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x^2-x-1-(1-x)(-2x^2+x+1)}{1-x} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x^2-x-1-(-2x^2+x+1+2x^3-x^2-x)}{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^3+5x^2-x}{1-x} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x(-2x^2+5x-1)}{1-x} \leq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{5-\sqrt{17}}{4} \end{cases}; x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

Cho $x=0$; $-2x^2+5x-1=0$

$$0 \leq x \leq \frac{5-\sqrt{17}}{4} \vee 1 < x \leq \frac{5+\sqrt{17}}{4}$$

Lập bảng xét dấu ta có:

Vì là nghiệm nguyên nên có nghiệm là $0; 2$

• Nếu $x < -1$ thì $\frac{2x^2-x-1}{|x+1|-2x} \leq -2x^2+x+1 \Leftrightarrow \frac{2x^2-x-1}{-1-3x} \leq -2x^2+x+1$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-x-1-(-1-3x)(-2x^2+x+1)}{-1-3x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-x-1-(2x^2-x-1+6x^3-3x^2-3x)}{-1-3x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-6x^3+x^2+3x}{-1-3x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(-6x^2+x+3)}{-1-3x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{73}}{12} \\ x = \frac{1-\sqrt{73}}{12} \end{cases}; -3x-1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$$

Cho $x=0$; $-6x^2+x+3=0$

$$\frac{1-\sqrt{73}}{12} \leq x < -\frac{1}{3} \vee 0 \leq x \leq \frac{1+\sqrt{73}}{12}$$

Lập bảng xét dấu ta có:

Vì là nghiệm nguyên nên có nghiệm là 0 (loại)

Vậy bất phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên.

- Câu 44:** Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-1 \leq 0 \\ x-m > 0 \end{cases}$ có nghiệm khi
- A. $m > 1$. B. $m = 1$. C. $m < 1$. D. $m \neq 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases} x^2-1 \leq 0 \\ x-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x > m \end{cases}$

Do đó hệ có nghiệm khi $m < 1$.

- Câu 45:** Xác định m để phương trình $(x-1)[x^2+2(m+3)x+4m+12]=0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1 .

- A. $m < -\frac{7}{2}$. B. $-2 < m < 1$ và $m \neq -\frac{16}{9}$.
- C. $-\frac{7}{2} < m < -1$ và $m \neq -\frac{16}{9}$. D. $-\frac{7}{2} < m < -3$ và $m \neq -\frac{19}{6}$.

Chọn D

Ta có $(x-1)[x^2 + 2(m+3)x + 4m+12] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 + 2(m+3)x + 4m+12 = 0 \quad (*) \end{cases}$

Giải sử phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , theo Vi-et ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+3) \\ x_1 \cdot x_2 = 4m+12 \end{cases}$$

Để phương trình $(x-1)[x^2 + 2(m+3)x + 4m+12] = 0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1 , thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 và đều lớn hơn -1 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1 + 2(m+3) + 4m+12 \neq 0 \\ x_2 > x_1 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 - (4m+12) > 0 \\ 6m+19 \neq 0 \\ (x_1+1) + (x_2+1) > 0 \\ (x_1+1)(x_2+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ m \neq -\frac{19}{6} \\ -2(m+3) + 2 > 0 \\ 4m+12 - 2(m+3) + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -3 \\ m \neq -\frac{19}{6} \\ m < -2 \\ m > -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{2} < m < -3 \\ m \neq -\frac{19}{6} \end{cases}$$

Câu 46: Phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m^2 + 4m - 5 = 0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $2 < x_1 < x_2$. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau

A. $-2 < m < -1$. B. $m > 1$. C. $-5 < m < -3$. D. $-2 < m < 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Để phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m^2 + 4m - 5 = 0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $2 < x_1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ m+1 \neq 0 \\ x_2 > x_1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - (m+1)(m^2 + 4m - 5) > 0 \\ m \neq -1 \\ (x_1-2) + (x_2-2) > 0 \\ (x_1-2)(x_2-2) > 0 \end{cases}$$

.Theo Vi-et ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2 + 4m - 5}{m+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m-1)(-m^2-5m-6) > 0 \\ m \neq -1 \\ \frac{2(m-1)}{m+1} - 4 > 0 \\ \frac{m^2+4m-5}{m+1} - 2 \cdot \frac{2(m-1)}{m+1} + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -2 < m < 1 \\ m < -3 \end{cases} \\ m \neq -1 \\ \begin{cases} -3 < m < -1 \\ m > -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < -1.$$

Câu 47: Nghiệm dương nhỏ nhất của bất phương trình $\left| x^2 - 4x - 5 \right| + 2x + 9 \leq \left| x^2 - x + 5 \right|$ gần nhất với số nào sau đây

- A. 2,8. B. 3. C. 3,5. D. 4,5.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Lập bảng phá dấu giá trị tuyệt đối giải BPT trên ta được tập nghiệm là

$$\begin{cases} x = -1 \\ x \geq \frac{9}{2} \end{cases} \text{ vậy nghiệm dương nhỏ nhất là } x = 4,5, \text{ đáp án D}$$

Câu 48: Tìm m để $\left| 4x - 2m - \frac{1}{2} \right| > -x^2 + 2x + \frac{1}{2} - m$ với mọi x ?

- A. $m > 3$. B. $m < \frac{3}{2}$.
C. $m > \frac{3}{2}$. D. $-2 < m < 3$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta thấy để $\left| 4x - 2m - \frac{1}{2} \right| > -x^2 + 2x + \frac{1}{2} - m$ đúng với mọi x thì $-x^2 + 2x + \frac{1}{2} - m < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Hay } -x^2 + 2x + \frac{1}{2} < m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} - m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}.$$

Cho bất phương trình: $\left| x^2 + x + a \right| + \left| x^2 - x + a \right| \leq 2x$ (1). Khi đó khẳng định nào sau đây đúng nhất?

- A. (1) có nghiệm khi $a \leq \frac{1}{4}$. B. Mọi nghiệm của (1) đều không âm.
C. (1) có nghiệm lớn hơn 1 khi $a < 0$. D. Tất cả A, B, C đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \left| x^2 + x + a \right| + \left| x^2 - x + a \right| \leq 2x \Leftrightarrow \left| \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(a - \frac{1}{4} \right) \right| + \left| \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(a - \frac{1}{4} \right) \right| \leq 2x$$

Do vế trái luôn lớn hơn hoặc bằng 0 nên để BPT có nghiệm thì $2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ nên B đúng.

Với $a > \frac{1}{4}$ BPT $\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 2a \leq 0$ vô nghiệm hay BPT có nghiệm khi $a \leq \frac{1}{4}$ nên A đúng.

Khi $a < 0$ ta có $x^2 + x + a = 0, x^2 - x + a = 0$ có 4 nghiệm xếp thứ tự $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

Với $x > x_4$ hoặc $x < x_1$ ta có BPT: $2x^2 - 2x + 2a \leq 0$

Có nghiệm $x_1 < x < x_2$ và $x_1 + x_2 = 1; x_1 x_2 < 0$

Nên tồn tại nghiệm lớn hơn 1 vậy C đúng

Câu 49: Cho bất phương trình: $x^2 + 2|x+m| + 2mx + 3m^2 - 3m + 1 < 0$. Để bất phương trình có nghiệm, các giá trị thích hợp của tham số m là:

- A. $-1 < m < -\frac{1}{2}$. B. $-1 < m < \frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{2} < m < 1$. D. $\frac{1}{2} < m < 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $x^2 + 2|x+m| + 2mx + 3m^2 - 3m + 1 < 0 \Leftrightarrow (x+m)^2 + 2|x+m| + 2m^2 - 3m + 1 < 0$

$\Leftrightarrow (|x+m|+1)^2 < -2m^2 + 3m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-2m^2 + 3m > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 1$

Câu 50: Tìm a để bất phương trình $x^2 + 4x \leq a(|x+2|+1)$ có nghiệm?

- A. Với mọi a . B. Không có a . C. $a \geq -4$. D. $a \leq -4$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $a+1$

$x^2 + 4x \leq a(|x+2|+1) \Leftrightarrow (x+2)^2 - a|x+2| - a - 4 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 - a|x+2| + \frac{a^2}{4} \leq \frac{a^2}{4} + a + 4 \Leftrightarrow \left(|x+2| - \frac{a}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2}{4} + a + 4$

Bất phương trình đã cho có nghiệm khi $\frac{a^2}{4} + a + 4 \geq 0$ luôn đúng với $\forall a$.

Câu 51: Để bất phương trình $\sqrt{(x+5)(3-x)} \leq x^2 + 2x + a$ nghiệm đúng $\forall x \in [-5; 3]$, tham số a phải thỏa điều kiện:

- A. $a \geq 3$. B. $a \geq 4$. C. $a \geq 5$. D. $a \geq 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$\sqrt{(x+5)(3-x)} \leq x^2 + 2x + a \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 - 2x + 15} - x^2 - 2x \leq a$

Đặt $t = \sqrt{-x^2 - 2x + 15}$, ta có bảng biến thiên

x	-5	-1	3
-----	------	------	-----

$-x^2 - 2x + 15$	16
0	0

Suy ra $t \in [0; 4]$. Bất phương trình đã cho thành $t^2 + t - 15 \leq a$.

Xét hàm $f(t) = t^2 + t - 15$ với $t \in [0; 4]$.

Ta có bảng biến thiên

t	0	4
$f(t)$	-15	5

Bất phương trình $t^2 + t - 15 \leq a$ nghiệm đúng $\forall t \in [0; 4]$ khi và chỉ khi $a \geq 5$.

Câu 52: Với giá trị nào của m thì phương trình $\sqrt{x^2 - 2m} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$ vô nghiệm?

- A. $m \leq \frac{2}{3}$. B. $m < 0$ hoặc $m > \frac{2}{3}$. C. $0 \leq m \leq \frac{2}{3}$. D. $m = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 2m \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2m \geq 0 \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \end{cases}$. Phương trình trở thành $\sqrt{x^2 - 2m} = x - 2\sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow x^2 - 2m = -3x^2 + 4 \Leftrightarrow 2(x^2 - 1) = m \quad (1)$ với

$x \in \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -1\right] \cup \left[1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$. Phương trình đã cho vô nghiệm khi phương trình (1) vô nghiệm khi $m < 0$ hoặc $m > \frac{2}{3}$.

Câu 53: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ x^3 - 3|x|x - m^2 + 6m \geq 0 \end{cases}$

Để hệ có nghiệm, các giá trị thích hợp của tham số m là:

- A. $2 \leq m \leq 8$. B. $-8 \leq m \leq 2$. C. $-2 \leq m \leq 8$. D. $-8 \leq m \leq -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $x^2 - 3x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$.

Trường hợp 1: $x \in [0; 4]$, bất phương trình hai trở thành $x^3 - 3x^2 - m^2 + 6m \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m \leq x^3 - 3x^2$, mà $x^3 - 3x^2 \leq 16 \quad \forall x \in [0; 4]$ suy ra $\Leftrightarrow m^2 - 6m \leq 16 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 8$.

Trường hợp 2: $x \in [-1; 0)$, bất phương trình hai trở thành $x^3 + 3x^2 - m^2 + 6m \geq 0$
 $\Leftrightarrow m^2 - 6m \leq x^3 + 3x^2$, mà $x^3 - 3x^2 \leq 2 \forall x \in [-1; 0)$ suy ra $\Leftrightarrow m^2 - 6m \leq 2$
 $\Leftrightarrow 3 - \sqrt{11} \leq m \leq 3 + \sqrt{11}$.

Vậy $-2 \leq m \leq 8$ thì hệ bất phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 54: Hệ bất phương trình: $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - (m^2 + 3)x + 2(m^2 + 1) \leq 0 \end{cases}$ có tập nghiệm biểu diễn trên trục số có độ dài bằng 1, với giá trị của m là:

A. $m = 0$.

B. $m = \sqrt{2}$.

C. $m = -\sqrt{2}$.

D. Cả A, B, C đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Thay $m = 0$ vào ta có $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$. A đúng

Thay $m = \sqrt{2}$ vào ta có $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$. B đúng

Tương tự C đúng.

Câu 55: Đề phương trình: $|x+3|(x-2) + m - 1 = 0$ có đúng một nghiệm, các giá trị của tham số m là:

A. $m < 1$ hoặc $m > \frac{29}{4}$.

B. $m < -\frac{21}{4}$ hoặc $m > 1$.

C. $m < -1$ hoặc $m > \frac{21}{4}$.

D. $m < -\frac{29}{4}$ hoặc $m > 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$|x+3|(x-2) + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1 - |x+3|(x-2)$$

Ta có

Xét hàm số $y = 1 - |x+3|(x-2)$

$$y = \begin{cases} -x^2 - x + 7 & \text{khi } x \geq -3 \\ x^2 + x - 5 & \text{khi } x < -3 \end{cases}$$

Ta có

Bảng biến thiên của $y = 1 - |x+3|(x-2)$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$			
			$\frac{29}{4}$	
			1	

	$-\infty$
--	-----------

$$\begin{cases} m < 1 \\ m > \frac{29}{4} \end{cases}$$

Dựa vào bảng trên phương trình có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi

Câu 56: Phương trình $|x-2|(x+1)+m=0$ có ba nghiệm phân biệt, giá trị thích hợp của tham số m là:

- A. $0 < m < \frac{9}{4}$. B. $1 < m < 2$. C. $-\frac{9}{4} < m < 0$. D. $-2 < m < 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Xét $|x-2|(x+1)+m=0 \quad (1)$

Với $x \geq 2$, ta có: $(1) \Leftrightarrow (x-2)(x+1)+m=0 \Leftrightarrow m=-x^2+x+2$

Với $x < 2$, ta có: $(1) \Leftrightarrow -(x-2)(x+1)+m=0 \Leftrightarrow m=x^2-x-2$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+x+2 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2-x-2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

Đặt

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{9}{4}$	0	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $-\frac{9}{4} < m < 0$.

Câu 57: Để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt: $|10x-2x^2-8|=x^2-5x+a$. Giá trị của tham số a là:

- A. $a=1$. B. $a \in (1; 10)$. C. $a \in \left[4; \frac{45}{4}\right]$. D. $4 < a < \frac{43}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét phương trình: $|10x-2x^2-8|=x^2-5x+a \quad (1)$

$$\Leftrightarrow a = |10x-2x^2-8| - x^2 + 5x$$

Xét $f(x) = |10x-2x^2-8| - x^2 + 5x$

$$= \begin{cases} (10x - 2x^2 - 8) - x^2 + 5x & \text{khi } 10x - 2x^2 - 8 \geq 0 \\ -(10x - 2x^2 - 8) - x^2 + 5x & \text{khi } 10x - 2x^2 - 8 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -3x^2 + 15x - 8 & \text{khi } 1 \leq x \leq 4 \\ x^2 - 5x + 8 & \text{khi } x \leq 1 \vee x \geq 4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{43}{4}$		$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		4		4	

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 4 < a < \frac{43}{4}$.

Câu 58: Để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $|2x^2 - 3x - 2| = 5a - 8x - x^2$, Giá trị của tham số a là:

- A. $a = 15$. B. $a = -12$. C. $a = -\frac{56}{79}$. D. $a = -\frac{49}{60}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét phương trình: $|2x^2 - 3x - 2| = 5a - 8x - x^2$ (1)

$$\Leftrightarrow 5a = f(x) = \begin{cases} (2x^2 - 3x - 2) + 8x + x^2 & \text{khi } 2x^2 - 3x - 2 \geq 0 \\ -(2x^2 - 3x - 2) + 8x + x^2 & \text{khi } 2x^2 - 3x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x^2 + 5x - 2 & \text{khi } 2x^2 - 3x - 2 \geq 0 \\ -x^2 + 11x + 2 & \text{khi } 2x^2 - 3x - 2 < 0 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$-\frac{49}{12}$		$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$		

Dựa vào bảng biến thiên ta có: phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$$5a = -\frac{49}{12} \Leftrightarrow a = -\frac{49}{60}$$

Câu 62: Để bất phương trình $5x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm thì m thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

A. $m \leq \frac{1}{5}$.

B. $m > \frac{1}{20}$.

C. $m \leq \frac{1}{20}$.

D. $m > \frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $5x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow 5x^2 - x + m > 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 20m < 0 \\ 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{20}$$

Câu 63: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2mx - 2m + 3}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2mx - 2m + 3}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi $x^2 - 2mx - 2m + 3 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 \leq 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 64: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m+1)x^2 + mx + m < 0$ đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

A. $m > \frac{4}{3}$.

B. $m > -1$.

C. $m < -\frac{4}{3}$.

D. $m < -1$.

Lời giải

Chọn C.

- Với $m = -1$ ta có: $x > -1$ không thỏa mãn.
- Với $m \neq -1$ ta có:

$$(m+1)x^2 + mx + m < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 0 \\ m^2 - 4(m+1)m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m < -\frac{4}{3} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{4}{3}.$$

Câu 65: Tìm m để $(m+1)x^2 + mx + m < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m < -\frac{4}{3}$.

B. $m > -1$.

C. $m > -\frac{4}{3}$.

D. $m < -1$.

Lời giải

Chọn A.

$$(m+1)x^2 + mx + m < 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \text{ (do } (m+1)^2 + m^2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m(-3m-4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 0 \\ m < -\frac{4}{3} \Leftrightarrow m < -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Câu 66: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ có hai nghiệm x_1 ,

$$x_2 \text{ thỏa mãn: } \frac{x_1^2 - 3x_1 + m}{x_2} + \frac{x_2^2 - 3x_2 + m}{x_1} \leq 2$$

- A.** $1 < m < 2$. **B.** $m \geq -2$. **C.** $0 < m \leq 1$. **D.** $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình có nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$ (1).

Theo định lý Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$.

Mặt khác x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ nên $x_1^2 - 2x_1 + m = 0$ và $x_2^2 - 2x_2 + m = 0$.

$$\text{Khi đó } \frac{x_1^2 - 3x_1 + m}{x_2} + \frac{x_2^2 - 3x_2 + m}{x_1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{-x_1}{x_2} + \frac{-x_2}{x_1} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} \geq -2 \Leftrightarrow \frac{4 - 2m}{m} \geq -2 \Leftrightarrow \frac{4}{m} \geq 0 \Leftrightarrow m > 0.$$

Kiểm tra điều kiện (1), ta được $0 < m \leq 1$.

Câu 67: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 \leq 16$.

- A.** Không có giá trị của m . **B.** $m \geq 2$.
C. $m \leq -1$. **D.** $m \leq -1$ hoặc $m = 2$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình có nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{cases}$ (1).

Theo định lý Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m + 2 \end{cases}$.

$$x_1^3 + x_2^3 \leq 16 \Leftrightarrow 8m^3 - 6m(m+2) \leq 16 \Leftrightarrow 8m^3 - 6m^2 - 12m - 16 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (m-2)(8m^2 + 10m + 8) \leq 0 \Leftrightarrow m-2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 2.$$

Kiểm tra điều kiện (1), ta được $m \leq -1$ hoặc $m = 2$.

Câu 68: Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 đôla. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x đôla thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120-x)$ đôi. Hỏi cửa hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

- A. 80 USD. B. 160 USD. C. 40 USD. D. 240 USD.

Lời giải

Chọn A.

Gọi y là số tiền lãi của cửa hàng bán giày.

Ta có $y = (120-x)(x-40) = -x^2 + 160x - 4800 = -(x-80)^2 + 1600 \leq 1600$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 80$.

Vậy cửa hàng lãi nhiều nhất khi bán đôi giày với giá 80 USD.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN.

TỔNG HỢP LẦN 1.

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + 4x + 4 > 0$ là:

- A. $(2; +\infty)$. B. $\emptyset$. C. $\emptyset \setminus \{-2\}$. D. $\emptyset \setminus \{2\}$.

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 6x + 9 > 0$ là:

- A. $(3; +\infty)$. B. $\emptyset$. C. $\emptyset \setminus \{-3\}$. D. $\emptyset \setminus \{3\}$.

Câu 3. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + 6x + 9 > 0$ là:

- A. $(3; +\infty)$. B. $\emptyset$. C. $\emptyset \setminus \{-3\}$. D. $\emptyset \setminus \{3\}$.

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + 2x + 1 > 0$ là:

- A. $(1; +\infty)$. B. $\emptyset$. C. $\emptyset \setminus \{-1\}$. D. $\emptyset \setminus \{1\}$.

Câu 5. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 2x + 1 > 0$ là:

- A. $(1; +\infty)$. B. $\emptyset$. C. $\emptyset \setminus \{-1\}$. D. $\emptyset \setminus \{1\}$.

Câu 6. Tam thức $y = x^2 - 2x - 3$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

- A. $x < -3$ hoặc $x > -1$. B. $x < -1$ hoặc $x > 3$. C. $x < -2$ hoặc $x > 6$. D. $-1 < x < 3$.

Câu 7. Tam thức $y = x^2 - 12x - 13$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi

- A. $x < -13$ hoặc $x > 1$. B. $x < -1$ hoặc $x > 13$. C. $-13 < x < 1$. D. $-1 < x < 13$.

Câu 8. Tam thức $y = -x^2 - 3x - 4$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi

- A. $x < -4$ hoặc $x > -1$. B. $x < 1$ hoặc $x > 4$. C. $-4 < x < -1$. D. $x \in \emptyset$.

Câu 9. Tam thức nào sau đây nhận giá trị âm với mọi $x < 2$?

- A. $y = x^2 - 5x + 6$. B. $y = 16 - x^2$.
C. $y = x^2 - 2x + 3$. D. $y = -x^2 + 5x - 6$.

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 1 > 0$ là:

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-1; +\infty)$.
C. $(-1; 1)$. D. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Câu 11. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + x - 1 > 0$ là:

- A. $\emptyset$. B. $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.
C. $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$. D. $(-\infty; -1-\sqrt{5}) \cup (-1+\sqrt{5}; +\infty)$.

Câu 12. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 4x + 4 > 0$ là:

- A. $(2; +\infty)$. B. $\emptyset$. C. $\emptyset \setminus \{-2\}$. D. $\emptyset \setminus \{2\}$.

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 < 0$ là:

- A. $(-\infty; 2\sqrt{2})$. B. $\emptyset \setminus \{2\sqrt{2}\}$. C. $\emptyset$. D. $\emptyset$.

Câu 14. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - x - 6 < 0$ là:

- A. $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$. B. $(-3; 2)$.
C. $(-2; 3)$. D. $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Câu 15. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 < 9$ là:

- A. $(-3; 3)$. B. $(-\infty; -3)$.
C. $(-\infty; 3)$. D. $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 6\sqrt{2}x + 18 \geq 0$ là:

- A. $(3\sqrt{2}; +\infty)$. B. $[3\sqrt{2}; +\infty)$. C. $\emptyset$. D. $\emptyset$.

Câu 17. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} \leq 0$ là:

- A. $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$. B. $[\sqrt{2}; \sqrt{3}]$. C. $(-\sqrt{3}; \sqrt{2})$. D. $[-\sqrt{3}; -\sqrt{2}]$.

Câu 18. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng ?

- A. Nếu $a^2 > 0$ thì $a > 0$. B. Nếu $a^2 > a$ thì $a > 0$.
C. Nếu $a^2 > a$ thì $a < 0$. D. Nếu $a < 0$ thì $a^2 > a$.

Câu 19. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2 + 2x - 8}{|x+1|} < 0$ là:

- A. $(-4; -1) \cup (-1; 2)$. B. $(-4; -1)$.
C. $(-1; 2)$. D. $(-2; -1) \cup (-1; 1)$.

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{|4x - 3|} < 0$$

Câu 20. Tập nghiệm của bất phương trình là

A. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right) \cap \left(\frac{3}{4}; 1\right)$

B. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; 1\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

D. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$

Câu 21. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{8 - x^2}$ là

A. $(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$

B. $[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$

C. $(-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$

D. $(-\infty; -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}; +\infty)$

Câu 22. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$ là

A. $[-5; 1]$

B. $\left[-\frac{1}{5}; 1\right]$

C. $(-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$

D. $\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right] \cup [1; +\infty)$

Câu 23. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{5x^2 - 4x - 1}$ là

A. $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right] \cup [1; +\infty)$

B. $\left[-\frac{1}{5}; 1\right]$

C. $\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right] \cup [1; +\infty)$

D. $\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right] \cup [1; +\infty)$

Câu 24. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{2}{x^2 + 5x - 6}}$ là:

A. $(-\infty; -6] \cup [1; +\infty)$

B. $(-6; 1)$

C. $(-\infty; -6) \cup (1; +\infty)$

D. $(-\infty; -1) \cup (6; +\infty)$

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình $|x^2 + x + 12| > x^2 + x + 12$ là

A. $\emptyset$

B. $\square$

C. $(-4; -3)$

D. $(-\infty; -4) \cup (-3; +\infty)$

Câu 26. Tập nghiệm của bất phương trình $|x^2 - x - 12| > x + 12 - x^2$ là

A. $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$

B. $(-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$

C. $(-6; -2) \cup (-3; 4)$

D. $(-4; 3)$

Câu 27. Biểu thức $(m^2 + 2)x^2 - 2(m - 2)x + 2$ luôn nhận giá trị dương khi và chỉ khi:

A. $m \leq -4$ hoặc $m \geq 0$

B. $m < -4$ hoặc $m > 0$

C. $-4 < m < 0$

D. $m < 0$ hoặc $m > 4$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} + \frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

Câu 28. Tập xác định của hàm số

- A. $(3; +\infty)$. B. $[3; +\infty)$.
C. $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. D. $(1; 2) \cup (3; +\infty)$.

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{x+3}}$$

Câu 29. Tập xác định của hàm số

- A. $(-3; +\infty)$. B. $(-3; 1] \cup [2; +\infty)$.
C. $(-3; 1] \cup (2; +\infty)$. D. $(-3; 1) \cup (2; +\infty)$.

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x} - 2x < 0$ là

- A. $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$. B. $\left(0; \frac{1}{4}\right)$.
C. $\left[0; \frac{1}{4}\right)$. D. $\{0\} \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Câu 31. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{x} < 2$ là

- A. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.
C. $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $(-\infty; 0)$.

Câu 32. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2}{m} > -1$ là

A. $(-2; 0)$

B. $(-\infty; -2)$

C. $(-2; +\infty)$

D. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$

Câu 33. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2 + x - 1}{1 - x} > -x$ là

A. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

C. $(1; +\infty)$

D. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$

Câu 34. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x} - 3x \leq 0$ là

A. $\left[\frac{1}{9}; +\infty\right)$

B. $\left[0; \frac{1}{9}\right]$

C. $\{0\} \cup \left[\frac{1}{9}; +\infty\right)$

D. $\{0\} \cup \left[\frac{1}{9}; +\infty\right)$

Câu 35. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{4}$ là

A. $(0; 16]$

B. $[0; 16]$

C. $(0; 4]$

D. $[16; +\infty)$

Câu 36. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \geq 3$ là

A. $[1; +\infty)$

B. $[0; +\infty)$

C. $(0; +\infty)$

D. $(0; 1]$

Câu 37. Phương trình $(m + 2)x^2 - 3x + 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A. $m < -2$

B. $-2 < m < \frac{3}{2}$

C. $m > \frac{3}{2}$

D. $m < -2$ hoặc $m > \frac{3}{2}$

Câu 38. Tập nghiệm của phương trình $|x^2 - 5x + 6| = x^2 - 5x + 6$ là

A. $\{2; 3\}$

B. $(2; 3)$

C. $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$

D. $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$

Câu 39. Tập nghiệm của phương trình $|x^2 - 7x + 12| = 7x - x^2 - 12$ là

A. $\{3; 4\}$

B. $(3; 4)$

C. $[3; 4]$

D.

$(-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$

Câu 40. Tập nghiệm của phương trình $\frac{|x^2 - 7x + 10|}{\sqrt{x-3}} = \frac{x^2 - 7x + 10}{\sqrt{x-3}}$ là

A. $[5; +\infty)$

B. $(3; 5]$

C. $[2; 5]$

D. $(5; +\infty)$

Câu 41. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|x^2 - 8x + 12|}{\sqrt{5-x}} > \frac{x^2 - 8x + 12}{\sqrt{5-x}}$ là

A. $(2; 6)$

B. $(2; 5)$

C. $(-6; -2)$

D. $(5; 6)$

Câu 42. Nếu $2 < m < 8$ thì số nghiệm của phương trình $x^2 - mx + 2m - 3 = 0$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Chưa xác

định được.

Câu 43. Phương trình $(m+1)x^2 - x - 3m + 4 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A. $m < -1$ hoặc $m > \frac{4}{3}$

B. $m < -1$ hoặc $m > \frac{3}{4}$

C. $m > \frac{4}{3}$

D. $-1 < m < \frac{4}{3}$

Câu 44. Phương trình $x^2 - mx - 2m = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m \leq -2$ hoặc $m \geq 0$

B. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 8$

C. $-8 \leq m \leq 0$

D. $m \leq -8$ hoặc $m \geq 0$

Câu 45. Phương trình $x^2 - mx + m^2 + m = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$

B. $-\frac{4}{3} \leq m \leq 0$

C. $-\frac{1}{3} \leq m \leq 0$

D. $0 \leq m \leq \frac{1}{3}$

Câu 46. Số nào sau đây là nghiệm của phương trình $\frac{|2-x|}{\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{2x+2}{\sqrt{x^2-x+1}}$

A. 0.

B. -4.

C. 4.

D. $\frac{4}{3}$

Câu 47. Phương trình $mx^2 - 2mx + 1 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m < 0$ hoặc $m \geq 1$

B. $m < 0$ hoặc $m \geq 4$

C. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$

D. $0 < m \leq 1$

Câu 48. Phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m^2 - m - 6 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

- A. $m < -2$. B. $-3 < m < 2$. C. $m > -2$. D. $-2 < m < 3$.

Câu 49. Phương trình $x^2 - 4mx + m + 3 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m < 1$. B. $-\frac{3}{4} < m < 1$. C. $m \leq \frac{-3}{4}$ hoặc $m \geq 1$. D. $-\frac{3}{4} \leq m \leq 1$.

Câu 50. Phương trình $x^2 - (m+1)x + 1 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m > 1$. B. $-3 < m < 1$. C. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$. D. $-3 \leq m \leq 1$.

Câu 51. Phương trình $x^2 - mx - m = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $-1 < m < 0$. B. $-4 \leq m \leq 0$. C. $-4 < m < 0$. D. $m < -4$ hoặc $m > 0$.

Câu 52. Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + m \leq 0 & (1) \\ x^2 - x + 4 < x^2 - 1 & (2) \end{cases}$$
 Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m < -5$. B. $m > -5$. C. $m > 5$. D. $m < 5$.

Câu 53. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{1}{x+4}$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. C. $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$. D. $(-4; +\infty)$.

Câu 54. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{4x-3} + \sqrt{x^2+5x-6}$ là

- A. $[1; +\infty)$. B. $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$. C. $\left[\frac{3}{4}; 1\right]$. D. $\left[-\frac{6}{5}; \frac{3}{4}\right]$.

Câu 55. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{2x - 3}$ là

- A. $[1; +\infty)$. B. $[-2; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. C. $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. D. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Câu 56. Phương trình $x^2 - 2(m-2)x + m^2 - m - 6 = 0$ có hai nghiệm đối nhau khi và chỉ khi

- A. $m = 2$. B. $-3 < m < 2$. C. $m < -2$ hoặc $m > 3$. D. $-2 < m < 3$.

Câu 57. Hai phương trình $x^2 + x + m + 1 = 0$ và $x^2 + (m+1)x + 1 = 0$ cùng vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $0 < m < 1$. B. $\frac{-3}{4} < m < 1$.

C. $m < \frac{-3}{4}$ hoặc $m > 1$.

D. $\frac{-5}{4} < m < 1$

Câu 58. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{x-3} \geq \frac{1}{x+3}$ là

A. $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$

B. $\emptyset$

C. $(3; +\infty)$

D. $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

Câu 59. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2 + x + 2} + \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$ là

A. $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

B. $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$

C. $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$

D. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

Câu 60. Các giá trị của m để phương trình $3x^2 + (3m-1)x + m^2 - 4 = 0$ có hai nghiệm trái dấu là

A. $m < 4$.

B. $-2 < m < 2$.

C. $m < 2$.

D. $m < -2$ hoặc $m > 2$.

Câu 61. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{x^2-1}{1-x}}$ là

A. $(-\infty; -1]$

B. $[-1; \infty) \setminus \{1\}$

C. $(-\infty; -1] \cup (1; \infty)$

D. $(-\infty; 1)$

Câu 62. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2x^2-3x+4}{x^2+2} > 1$ là:

A. $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

B. $(-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$

C. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

D. $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$

Câu 63. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $\frac{(m-1)x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{(m+2)x-2m+1}{\sqrt{4-x^2}}$ có nghiệm là

A. $\left(\frac{-7}{2}; \frac{3}{2}\right)$

B. $\left(\frac{-5}{2}; \frac{7}{2}\right)$

C. $\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$

D. $\emptyset$

Câu 64. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $\sqrt{x-1} + \frac{x-m}{\sqrt{x-1}} = \frac{2m}{\sqrt{x-1}}$ có nghiệm là

A. $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

B. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$

C. $(1; +\infty)$

D. $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$

Câu 65. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{x^2+3}{1-|x|}}$ là

A. $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

B. $(-1; 1)$.

C. $\emptyset \setminus \{1; -1\}$

D. $[-1; 1]$

Câu 66. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $m^2(x-1) = -2x-5m+6$ có nghiệm dương là

- A. $(-\infty; -1) \cup (-6; \infty)$. B. $(-1; 6)$. C. $(-\infty; 2) \cup (3; \infty)$. D. $(2; 3)$.

Câu 67. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{5-2m}{\sqrt{1-x^2}}$ có nghiệm là
A. $(2; 3)$. B. $\square$. C. $[2; 3]$. D. $(-1; 1)$.

Câu 68. Cho biểu thức $M = x^2 + 3x + 2$, trong đó x là nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3x + 2 < 0$. Khi đó
A. $M < 0$. B. $6 < M < 12$.
C. $M > 12$. D. M nhận giá trị bất kì.

Câu 69. Số dương x thỏa mãn bất phương trình $\sqrt{x} < 3x$ khi và chỉ khi
A. $x > 9$. B. $x > \frac{1}{3}$. C. $x < \frac{1}{9}$. D. $x > \frac{1}{9}$.

Câu 70. Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình bậc hai $x^2 + 2(m+1)x + 3m = 0$ có nghiệm là
A. $\{0\}$. B. $\square \setminus \{0\}$. C. $\square$. D. $\emptyset$.

Câu 71. Phương trình $mx^2 - mx + 2 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi
A. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 8$. B. $m < 0$ hoặc $m \geq 8$.
C. $0 < m \leq 8$. D. $0 \leq m \leq 8$.

Câu 72. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x+1} < 2x - 1$ là.
A. $[\frac{1}{2}; 0] \cup [\frac{5}{4}; +\infty)$. B. $[\frac{1}{4}; +\infty)$. C. $[\frac{1}{2}; \frac{5}{4}]$. D. $[\frac{1}{4}; +\infty)$.

Câu 73. Nếu $1 < m < 3$ thì số nghiệm của phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 3 = 0$ là bao nhiêu.
A. 0 B. 1 C. 2 D. Chưa xác định được

Câu 74. Nếu $1 < m < 2$ thì số nghiệm của phương trình $x^2 - 2mx + 5m - 6 = 0$ là bao nhiêu.
A. 0 B. 1 C. 2 D. Chưa xác định được

Câu 75. Bất phương trình: $mx^2 - mx + 3 > 0$ với mọi x khi và chỉ khi.
A. $m \notin 0$ hoặc $m > 12$ B. $m < 0$ hoặc $m > 12$
C. $0 \notin m < 12$ D. $0 < m < 12$

Câu 76. Tam thức $f(x) = 2mx^2 - 2mx - 1$ nhận giá trị âm với mọi x khi và chỉ khi.
A. $m \notin 2$ hoặc $m > 0$ B. $m < -2$ hoặc $m^3 \cdot 0$
C. $-2 < m < 0$ D. $-2 < m \notin 0$

Câu 77. Bất phương trình $x^2 - x + \frac{1}{4} \notin 0$ có tập nghiệm là.

A. $b \in \left[-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right]$

B. $b \in \left(-\infty; -2\sqrt{3}\right] \cup \left[2\sqrt{3}; +\infty\right)$

C. $b \in \left(-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$

D. $b \in \left(-\infty; -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}; +\infty\right)$

TỔNG HỢP LẦN 2.

Câu 1. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - bx + 3$. Với giá trị nào của b thì tam thức $f(x)$ có hai nghiệm?

A. $b \in \left[-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right]$

B. $b \in \left(-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$

C. $b \in \left(-\infty; -2\sqrt{3}\right] \cup \left[2\sqrt{3}; +\infty\right)$

D. $b \in \left(-\infty; -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}; +\infty\right)$

Câu 2. Giá trị nào của m thì phương trình $x^2 - mx + 1 - 3m = 0$ có 2 nghiệm trái dấu?

A. $m > \frac{1}{3}$

B. $m < \frac{1}{3}$

C. $m > 2$

D. $m < 2$

Câu 3. Giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu?

A. $m < 1$

B. $m > 2$

C. $m > 3$

D. $1 < m < 3$

Câu 4. Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

A. $m \in \left(-\infty; \frac{-3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$

B. $m \in \left(\frac{-3}{5}; 1\right)$

C. $m \in \left(\frac{-3}{5}; +\infty\right)$

D. $m \in \left(\frac{-3}{5}; +\infty\right) \setminus \{3\}$

Câu 5. Tìm m để $(m+1)x^2 + mx + m < 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

A. $m < -1$

B. $m > -1$

C. $m < \frac{-4}{3}$

D. $m > \frac{4}{3}$

Câu 6. Tìm m để $f(x) = x^2 - 2(2m-3)x + 4m-3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

A. $m > \frac{3}{2}$

B. $m > \frac{3}{4}$

C. $\frac{3}{4} < m < \frac{3}{2}$

D. $1 < m < 3$

Câu 7. Với giá trị nào của a thì bất phương trình ?

A. $a = 0$

B. $a < 0$

C. $0 < a \leq \frac{1}{2}$

D. $a \geq \frac{1}{2}$

Câu 8. Với giá trị nào của m thì bất phương trình $x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm?

A. $m < 1$

B. $m > 1$

C. $m < \frac{1}{4}$

D. $m > \frac{1}{4}$

Câu 9. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$

A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$

B. $[2; +\infty)$

C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$

D. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$

Câu 10. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 + x_2 + x_1x_2 < 1$?

- A. $1 < m < 2$. B. $1 < m < 3$. C. $m > 2$. D. $m > 3$.

Câu 11. Gọi x_1, x_2 là nghiệm phân biệt của phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$. Khẳng định nào sau đúng?

- A. $x_1 + x_2 = -5$. B. $x_1^2 + x_2^2 = 37$. C. $x_1x_2 = 6$. D.

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{13}{6} = 0$$

Câu 12. Các giá trị m làm cho biểu thức $x^2 + 4x + m - 5$ luôn luôn dương là:

- A. $m < 9$. B. $m^3 > 9$. C. $m > 9$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 13. Các giá trị m để tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m+1$ đổi dấu 2 lần là

- A. $m \leq 0$ hoặc $m^3 \geq 28$. B. $m < 0$ hoặc $m > 28$. C. $0 < m < 28$. D. $m > 0$.

Câu 14. Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{2x^2 - 7x - 15}$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}; -\frac{5}{2} \right\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}; -\frac{5}{2} \right\}$. C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}; -\frac{5}{2} \right\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}; -\frac{5}{2} \right\}$.

Câu 15. Dấu của tam thức bậc 2: $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ được xác định như sau

- A. $f(x) < 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) > 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$. B. $f(x) < 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) > 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$. C. $f(x) > 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) < 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$. D. $f(x) > 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) < 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$.

Câu 16. Giá trị của m làm cho phương trình $(m-2)x^2 - 2mx + m+3 = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt là:

- A. $m < 6$ và $m^1 \geq 2$. B. $m < 0$ hoặc $2 < m < 6$. C. $2 < m < 6$. D. $m > 6$.

Câu 17. Cho $f(x) = mx^2 - 2x - 1$. Xác định m để $f(x) < 0$ với $x \in \mathbb{R}$.

- A. $m < -1$. B. $m < 0$. C. $-1 < m < 0$. D. $m < 1$ và $m^1 \geq 0$.

Câu 18. Xác định m để phương trình $(m-3)x^3 + (4m-5)x^2 + (5m+4)x + 2m+4 = 0$ có ba nghiệm phân biệt bé hơn 1.

- A. $-\frac{25}{8} < m < 0$ hoặc $m > 3$ và $m^1 \neq 12$. B. $-\frac{25}{8} < m < 0$ hoặc $m > 3$ và $m^1 \neq 4$.
- C. $m \in \mathbb{R}$. D. $0 < m < \frac{5}{4}$.

Câu 19. Cho phương trình $(m-5)x^2 + (m-1)x + m = 0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 2 < x_2$.

- A. $m < \frac{22}{7}$. B. $\frac{22}{7} < m < 5$. C. $m^3 \neq 5$. D. $\frac{22}{7} \neq m \neq 5$.

Câu 20. Cho phương trình $x^2 - 2x - m = 0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm $x_1 < x_2 < 2$.

- A. $m > 0$. B. $m < -1$. C. $-1 < m < 0$. D. $m > -\frac{1}{4}$.

Câu 21. Cho $f(x) = -2x^2 + (m-2)x - m + 4$. Tìm m để $f(x)$ không dương với mọi x .

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \in \{6\}$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m = 6$.

Câu 22. Xác định m để phương trình $(x-1)^2 + 2(m+3)x + 4m + 12 = 0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1 .

- A. $m < -\frac{7}{2}$. B. $-2 < m < 1$ và $m^1 \neq \frac{16}{9}$. C. $-\frac{7}{2} < m < -1$ và $m^1 \neq \frac{16}{9}$. D. $-\frac{7}{2} < m < -3$ và $m^1 \neq \frac{19}{6}$.

Câu 23. Phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m^2 + 4m - 5 = 0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $2 < x_1 < x_2$. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau

- A. $-2 < m < -1$. B. $m > 1$. C. $-5 < m < -3$. D. $-2 < m < 1$.

Câu 24. Cho bất phương trình $(2m+1)x^2 + 3(m+1)x + m+1 > 0$ (1). Với giá trị nào của m thì bất phương trình trên vô nghiệm.

- A. $m^1 \neq \frac{1}{2}$. B. $-5 < m < -1$. C. $-5 \neq m \neq -1$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 25. Cho phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + m+5 = 0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 0 < x_2 < 2$.

- A. $-5 < m < -1$. B. $-1 < m < 5$. C. $m < -5$ hoặc $m > 1$. D. $m > -1$ và $m^1 \neq 0$.

Câu 26. Cho $f(x) = -2x^2 + (m+2)x + m - 4$. Tìm m để $f(x)$ âm với mọi x .

A. $-14 < m < 2$.

B. $-14 \leq m \leq 2$.

C. $-2 < m < 14$.

D. $m < -14$ hoặc $m > 2$.

Câu 27. Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m + 2 = 0$ có một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$ và nghiệm kia nhỏ hơn 1.

A. $m = 0$.

B. $m < -1$ hoặc $m > -\frac{2}{3}$.

C. $m > -\frac{2}{3}$.

D. $-1 < m < -\frac{2}{3}$.

Câu 28. Cho $f(x) = 3x^2 + 2(2m-1)x + m + 4$. Tìm m để $f(x)$ âm với mọi x .

A. $m < -1$ hoặc $m > \frac{11}{4}$.

B. $-1 < m < \frac{11}{4}$.

C. $-\frac{11}{4} < m < 1$.

D. $-1 \leq m \leq \frac{11}{4}$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	A	D	A	C	D	C	D	C	B	C	C	B	B	C	C	A	A	B	C

21	22	23	24	25	26	27	28												
D	D	A	C	A	A	D	B												