CÁC DẠNG TOÁN BÀI HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Dạng 1: Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số lượng giác

Phương pháp: Cần chú ý một số điều kiện sau:

- $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ xác định khi và chỉ khi $g(x)\neq 0$
- $y=\sqrt[2n]{f(x)}$ xác định khi và chỉ khi $f(x)\geq 0$ với $n\in\mathbb{N}^*$
- $\tan[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x)\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$
- $\cot[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x)\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

a) $y=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ b) $y=\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2-\cos x}}$ c) $y=\tan x$

d) $y=\cot x+\sin 5x+\cos x$ e) $y=\dfrac{\cot x}{\cos x-1}$ f) $y=\cot x$

g) $y=\dfrac{1-\cos x}{\sin x-1}$ h) $y=\tan x+\cot x.$ i) $y=\dfrac{\cos x}{\sin x+1}$

k) $y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ l) $y=\sin\left(\dfrac{5x}{x^2-1}\right)$ m) $y=\sqrt{2-\sin x}$

Lời giải

a) Biểu thức $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ có nghĩa khi $\sin x\neq 0$, tức là $x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ là $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$

b) Biểu thức $\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2-\cos x}}$ có nghĩa khi $\begin{cases}\dfrac{1+\cos x}{2-\cos x}\geq 0\\ 2-\cos x\neq 0\end{cases}$.

Vì $-1\leq\cos x\leq 1$ nên $1+\cos x\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $2-\cos x\geq 1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó, $2-\cos x\neq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $\dfrac{1+\cos x}{2-\cos x}\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2-\cos x}}$ là $D=\mathbb{R}$.

c) Điều kiện xác định: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$. Vậy tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d) Hàm số xác định khi: $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi$. Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$

e) Điều kiện xác định của hàm số là $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq k\pi\\ x \neq l2\pi\end{cases}(k,l \in \mathbf{Z}) \Rightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\cot x}{\cos x - 1}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

f) Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

g) Điều kiện xác định của hàm số là $\sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{R})$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$.

h) Điều kiện: $\sin x.\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbf{Z})$.

i) Điều kiện $\sin x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{R})$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{R}\right\}$.

k) Hàm số $y = \tan\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ xác định khi và chỉ khi

$\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x + \dfrac{\pi}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2} (k \in \mathbb{R})$.

l) Hàm số $y = \sin\left(\dfrac{5x}{x^2 - 1}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

m) Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 2 - \sin x > 0$. Do đó, hàm số luôn luôn xác định hay $D = \mathbb{R}$.

Bài tập 2: Tìm tập giá trị của các hàm số sau đây:

a) $y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1$

b) $y = \sqrt{1 + \cos x} - 2$

Lời giải

a) Ta có: $-1 \leq \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -2 \leq 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -2-1\le 2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\le 2-1\ \forall\ x\in \mathrm{R} \Leftrightarrow -3\le 2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\le 1\ \forall\ x\in \mathrm{R}$

$\Leftrightarrow -3\le y\le 1\ \forall\ x\in \mathrm{R}.$

$y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ $[-3;1]$

Vậy tập giá trị của hàm số là .

b) Vì $-1\le \cos x\le 1$ với mọi $x\in \mathrm{R}$ nên $0\le 1+\cos x\le 2$ với mọi $x\in \mathrm{R}$.

Do đó $0\le \sqrt{1+\cos x}\le \sqrt{2}$ với mọi $x\in \mathrm{R}$ suy ra $-2\le \sqrt{1+\cos x}-2\le \sqrt{2}-2$ với mọi $x\in \mathrm{R}$.

Hay $-2\le y\le \sqrt{2}-2$ với mọi $x\in \mathrm{R}$.

$y=\sqrt{1+\cos x}-2$ $\left[-2;\sqrt{2}-2\right]$

Vậy tập giá trị của hàm số là .

Bài tập 3: Tìm giá trị của tham số m để các hàm số sau đây xác định trên $\mathbb{R}$

a) $y=\sqrt{2m-3\cos x}$ b) $y=\sqrt{5-m\sin x-(m+1)\cos x}$

Lời giải

a) Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $2m-3\cos x\ge 0\Leftrightarrow \cos x\le \frac{2m}{3}$

Bất đẳng thức trên đúng với mọi x khi $1\le \frac{2m}{3}\Leftrightarrow m\ge \frac{3}{2}$

b) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow 5-m\sin x-(m+1)\cos x\ge 0\forall x\in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m\sin x+(m+1)\cos x\le 5\forall x\in \mathbb{R} \Leftrightarrow \max_{x\in\mathbb{R}}\left(m\sin x+(m+1)\cos x\right)\le 5$.

$\Leftrightarrow m^2+(m+1)^2\le 25\Leftrightarrow m^2+m-12\le 0\Leftrightarrow -4\le m\le 3$.

Bài tập 4: Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t)=90\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

a) Tìm chu kì của sóng.

b) Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Lời giải

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} = 20$$

a) Chu kì của sóng là (giây).

b) Chiều cao của sóng tức là chiều cao của nước đạt được trong một chu kì dao động.

$$h(20) = 90\cos\left(\frac{\pi}{10}\cdot 20\right) = 90(\text{ cm})$$

Ta có: .

Vậy chiều cao của sóng là 90 cm.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \dfrac{1-\sin x}{\cos x - 1}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R}\setminus\{k2\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Điều kiện xác định : $\cos x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k2\pi$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\{k2\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \dfrac{2025}{\sin x}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

C. $D = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

Lời giải

$$\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Điều kiện xác định của hàm số là:

$$D = \mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$$

Vậy tập xác định của hàm số là:

Câu 3: Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số $y = \tan x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y = \cos x$ có tập giá trị là $[-1;1]$.

C. Hàm số $y = \sin x$ có tập giá trị là $[-1;1]$.

D. Hàm số $y = \cot x$ có tập giá trị là $[0;\pi]$.

Lời giải

Hàm số $y = \cot x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$ nên D sai.

Câu 4: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\sin x}}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.
B. $D=\mathbb{R}\setminus\{-\pi+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.
C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.
D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Ta có điều kiện xác định của hàm số là $\frac{1-\cos x}{1+\sin x}\geq 0$.

Do $1-\cos x\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $1+\sin x\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $\frac{1-\cos x}{1+\sin x}\geq 0$ khi và chỉ khi $1+\sin x\neq 0$

$\Leftrightarrow \sin x\neq -1\Leftrightarrow x\neq -\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Câu 5: Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y=\cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
B. Hàm số $y=\tan x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
C. Hàm số $y=\cot x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
D. Các hàm số lượng giác có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số $y=\cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Câu 6: Tập xác định của hàm số $y=\cot x$ là

A. $D=\mathbb{R}$.
B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.
C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pi+k\frac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.
D. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Điều kiện: $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Do đó, tập xác định của hàm số $y=\cot x$ là $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

Câu 7: Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.
B. $\cos x\neq 1\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.
C. $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k2\pi$.
D. $\cos x\neq -1\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k2\pi$.

Lời giải

Ta có: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.

Câu 8: Tập xác định của hàm số $y=\tan\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{R}\right\}$.

B. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\,|\,k\in\mathbb{R}\}$.

C. $D=\mathbb{R}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}|k\in\mathbb{R}\right\}$.

Lời giải

$$\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\Leftrightarrow 3x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3},k\in\mathbb{R}$$

Hàm số xác định khi:

$$D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}|k\in\mathbb{R}\right\}$$

Vậy tập xác định của hàm số là

Câu 9: Tập xác định của hàm số $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}$ là

A. $D=\mathbb{R}$.

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{R}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi;\frac{\pi}{2}+h2\pi,k,h\in\mathbb{R}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k2\pi;\frac{\pi}{2}+h\pi,k,h\in\mathbb{R}\right\}$.

Lời giải

Hàm số $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}$ xác định khi và chỉ khi: $\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow 2x\neq k\pi,k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{R}$.

$$D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{R}\right\}.$$

Vậy tập xác định của hàm số trên là

Câu 10: Tập xác định của hàm số $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{R}\right\}$.

B. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{R}\right\}$.

C. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{R}\right\}$.

D. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{R}\right\}$.

Lời giải

Hàm số $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ xác định khi $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq 0\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{6}+k\pi\ (k\in\mathbb{R})$.

$y=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Vậy tập xác định của hàm số là .

Câu 11: Điều kiện xác định của hàm số $y=\frac{2\sin^2 x+1}{1+\cos x}$ là:

A. $x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x\neq\pi-k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. **C.** $x\neq k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x\neq\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

$1+\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pi-k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

Hàm số xác định khi .

Câu 12: Hàm số $y=\sqrt{\sin x-1}+1-3\cos^2 x$ xác định khi và chỉ khi:

A. $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x\neq-\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. **C.** $x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

$\sin x-1\geq 0\Leftrightarrow\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

Hàm số xác định khi .

Câu 13: Tập xác định của hàm số $y=\frac{\sin x}{1-\cos x}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

$1-\cos x\neq 0\Leftrightarrow\cos x\neq 1\Leftrightarrow x\neq k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

Hàm số xác định khi và chỉ khi .

Câu 14: Cho hàm số $y=\frac{3}{\sin 2x}+\frac{5}{\cos 2x}$. Điều kiện xác định hàm số là

A. $x\neq k\pi$. **B.** $x\neq\frac{k\pi}{2}$. **C.** $x\neq\frac{k\pi}{4}$. **D.** $x\neq k2\pi$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases}\sin 2x\neq 0\\ \cos 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\sin 4x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Câu 15: Tìm tập xác định của hàm số $y=\frac{3\sin x}{\cos 2x-1}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi,k\in\mathbb{Z}\}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos 2x-1\neq 0\Leftrightarrow\cos 2x\neq 1\Leftrightarrow 2x\neq k2\pi\Leftrightarrow x\neq k\pi$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

Câu 16: Tìm tập xác định của hàm số $y=\frac{2\sin x+1}{2\cos x-1}+\frac{2\cos x+1}{2\sin x-1}$

Lời giải

$$\begin{cases}2\cos x-1\neq 0\\ 2\sin x-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq\frac{1}{2}\\ \sin x\neq\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x\neq-\frac{\pi}{3}+l2\pi\\ x\neq\frac{\pi}{6}+m2\pi\\ x\neq\frac{5\pi}{6}+n2\pi\end{cases}(k,l,m,n\in\mathbb{Z}).$$

Hàm số đã cho xác định khi

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi,-\frac{\pi}{3}+l2\pi;\ \frac{\pi}{6}+m2\pi;\ \frac{5\pi}{6}+n2\pi\,|\,k,l,m,n\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Câu 17: Điều kiện xác định của hàm số $y=\frac{1}{\sin x-\cos x}$ là

A. $x\neq k\pi$. **B.** $x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi$. **C.** $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$. **D.** $x\neq k2\pi$.

Lời giải

$$\sin x-\cos x\neq 0\Leftrightarrow\tan x\neq 1\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi$$

Điều kiện xác định:

Câu 18: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\frac{1-\sin x}{\cos x-1}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Lời giải

$$\cos x-1\neq 0\Leftrightarrow\cos x\neq 1\Leftrightarrow x\neq k2\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Hàm số xác định khi và chỉ khi

$D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

Vậy tập xác định .

Câu 19: Điều kiện xác định của hàm số $y = \dfrac{\cot x}{\cos x}$ là:

A. $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. **B.** $x \neq k2\pi$. **C.** $x \neq k\pi$. **D.** $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$

Câu 20: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{3 + \sin x} - \dfrac{1}{\tan^2 x - 1}$ là:

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

$\begin{cases} 3 + \sin x \geq 0 (\text{luon dung}) \\ \tan^2 x - 1 \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \neq 1 \\ \tan x \neq -1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

Điều kiện xác định: .

Câu 21: Tìm tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$.

A. $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. **B.** $x \neq k2\pi$. **C.** $x \neq k\pi$. **D.** $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$.

Lời giải

Điều kiện: $\sin^2 x - \cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow -\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

.

$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Vậy tập xác định của hàm số là: .

Câu 22: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{\sin 2x-2}{\cos 2x+4}}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$. **B.** $D=[-1;1]$. **C.** $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=\varnothing$.

Lời giải

Vì $\begin{cases}\sin 2x-2<0\\ \cos 2x+4>0\end{cases}\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\dfrac{\sin 2x-2}{\cos 2x+4}<0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên tập xác định của hàm số là $\varnothing$.

Câu 23: Tìm m để hàm số $y=\sqrt{3\sin x+4\cos x+2m-1}$ xác định với mọi x

A. $m>0$. **B.** $m>1$. **C.** $m\ge\dfrac{-1}{2}$. **D.** $m\ge 3$.

Lời giải

Ta có y xác định khi $3\sin x+4\cos x+2m-1\ge 0$

$$\Leftrightarrow 3\sin x+4\cos x\ge 1-2m\Leftrightarrow\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x\ge\frac{1-2m}{5}(*)$$

Đặt $\dfrac{3}{5}=\cos\alpha\Rightarrow\dfrac{4}{5}=\sin\alpha$. Khi đó $(*)\Leftrightarrow\sin(x+\alpha)\ge\dfrac{1-2m}{5}$. Mà $-1\le\sin(x+\alpha)\le 1$.

Để hàm số y xác định với mọi x thì $-1\ge\dfrac{1-2m}{5}\Leftrightarrow -5\ge 1-2m\Leftrightarrow m\ge 3$.

Câu 24: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{2\cos x+3}{\sin^2 x-1}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow\sin^2 x-1\ne 0\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\ne 1\\ \sin x\ne -1\end{cases}\Leftrightarrow x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

Câu 25: Hàm số $y=\dfrac{\cot 2x}{1-2\cos 2x}$ xác định trong khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\dfrac{3\pi}{4};-\dfrac{\pi}{4}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$. **D.** $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Lời giải

$$\begin{cases}\sin 2x \neq 0 \\ 1-2\cos 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \dfrac{k\pi}{2} \\ \cos 2x \neq \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \dfrac{k\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{\pi}{6}+l\pi \\ x \neq -\dfrac{\pi}{6}+m\pi\end{cases}$$

Hàm số $y=\dfrac{\cot 2x}{1-2\cos 2x}$ xác định khi $(k;l;n\in\mathbb{Z})$

Do các phương án A, B, C chứa các giá trị làm cho hàm số không xác định. Chỉ có phương án D không chứa các giá trị làm cho hàm số không xác định.

Vậy hàm số $y=\dfrac{\cot 2x}{1-2\cos 2x}$ xác định trên khoảng là $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{4}\right)$

Câu 26: Tập xác định của hàm số $y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\neq 0 \Leftrightarrow 2x+\dfrac{\pi}{3}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 27: Hàm số $y=\cot x$ có tập xác định là

A. $\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

B. $\mathbb{R}\setminus\{k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

C. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

Câu 28: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\cos x}{\sin x+1}$ là:

A. $D=\mathbb{R}$.

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{\pi}{2}+k2\pi\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k2\pi\}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{2}+k2\pi\right\}$.

Lời giải

Điều kiện: $\sin x+1\neq 0\Leftrightarrow \sin x\neq -1\Leftrightarrow \sin x\neq \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x\neq -\frac{\pi}{2}+k2\pi$. Vậy tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{2}+k2\pi\right\}$.

Câu 29: Tập xác định của hàm số $y=\frac{\tan x+2025}{\sin^2 x+1}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

D. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

Lời giải

Ta có $\sin^2 x+1\neq 0\forall x\in\mathbb{R}$. Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

Câu 30: Tập xác định của hàm số $y=\frac{\cot\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{1+\tan x}$

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{R}\right\}$.

B. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2};-\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{R}\right\}$.

C. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2};-\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{R}\right\}$.

D. $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{R}\right\}$.

Lời giải

$$\begin{cases}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\neq 0\\ 1+\tan x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-\frac{\pi}{3}\neq k\pi\\ \tan x\neq -1\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\\ x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{R}\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}$$

Điều kiện

$$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2};-\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{R}\right\}$$

Vậy tập xác định là .

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\tan 2x-1$. Khi đó:

a) Giá trị của hàm số tại $x=\frac{\pi}{8}$ bằng 0

b) Giá trị của hàm số tại $x=\frac{\pi}{3}$ bằng $-\sqrt{3}-1$

c) Có ba giá trị x thuộc $[0;\pi]$ khi hàm số đạt giá trị bằng -2.

d) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,(k\in\mathbb{Z})\right\}$

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\tan\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)-1=1-1=0$

b) Đúng: Ta có: $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right)-1=-\sqrt{3}-1$

c) Sai: Ta có: $f(x)=-2\Leftrightarrow\tan 2x-1=-2\Leftrightarrow\tan 2x=-1$

$\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$

Vì $x\in[0;\pi]$ nên $x\in\left\{\frac{3\pi}{8};\frac{7\pi}{8}\right\}$ khi đó $k=1;k=2$

d) Sai: Tập xác định hàm số là: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 2: Tìm được tập giá trị các hàm số sau trên tập xác định của chúng. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y=3\sin x$ có tập giá trị là $T=[-3;3]$.

b) Hàm số $y=2\cos x-1$ có tập giá trị là $T=[-3;1]$.

c) Hàm số $y=2030-4\cos x$ có tập giá trị là $T=[2026;2034]$.

d) Hàm số $y=\sin^2 x+4\sin x-1$ có tập giá trị là $T=[-3;3]$.

Lời giải

a) Đúng: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -3 \le 3\sin x \le 3 \Rightarrow -3 \le y \le 3$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $T = [-3;3]$.

b) Đúng: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -2 \le 2\cos x \le 2$

$\Rightarrow -2-1 \le 2\cos x - 1 \le 2-1 \Rightarrow -3 \le y \le 1$. Vậy tập giá trị của hàm số là $T = [-3;1]$.

c) Đúng: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow 4 \ge -4\cos x \ge -4$

$\Rightarrow 4 + 2030 \ge -4\cos x + 2030 \ge -4 + 2030 \Rightarrow 2034 \ge y \ge 2026$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $T = [2026;2034]$.

d) Sai: Ta có: $y = \sin^2 x + 4\sin x - 1 = \sin^2 x + 4\sin x + 4 - 5 = (\sin x + 2)^2 - 5$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow 1 \le \sin x + 2 \le 3$

$\Rightarrow 1^2 \le (\sin x + 2)^2 \le 3^2 \Rightarrow 1^2 - 5 \le (\sin x + 2)^2 - 5 \le 3^2 - 5 \Rightarrow -4 \le y \le 4$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $T = [-4;4]$.

Câu 3: Tìm được tập xác định của các hàm số dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = \tan x + \cot 2x$ xác định khi $\begin{cases} \cos x \ne 0 \\ \sin 2x \ne 0 \end{cases}$.

b) Hàm số $y = \sqrt{\pi - \cos x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

c) Hàm số $y = \sqrt{4 - \sin^2 x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

d) Hàm số $y = \sqrt{\sin x - 1} + \sqrt{\cos x - 1}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Lời giải

a) Đúng: $y = \tan x + \cot 2x$

$$\begin{cases} \cos x \ne 0 \\ \sin 2x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x \ne k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \ne k\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \ne k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

Hàm số xác định khi .

$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$

Vậy tập xác định của hàm số là .

$y = \sqrt{\pi - \cos x}$

b) Đúng:

Hàm số xác định khi $\pi - \cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq \pi \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

$y = \sqrt{4 - \sin^2 x}$

c) Đúng:

Hàm số xác định khi $4 - \sin^2 x \geq 0 \Leftrightarrow \sin^2 x < 4 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ (vì ta có $0 \leq \sin^2 x \leq 1 < 4, \forall x \in \mathbb{R}$).

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

$y = \sqrt{\sin x - 1} + \sqrt{\cos x - 1}$

d) Sai:

Hàm số xác định khi $\begin{cases} \sin x - 1 \geq 0 \\ \cos x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 1 \\ \cos x \geq 1 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases}$

Từ (1) và (2), ta có $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$ vô lý (vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nên $\sin x, \cos x$ không thể đồng thời bằng 1).

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \varnothing$.

Câu 4: Tìm được tập xác định của các hàm số dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ xác định khi: $x \neq \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

b) Hàm số $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ xác định khi: $\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$

c) Hàm số $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

d) Hàm số $y=\dfrac{\tan 3x}{\cos x}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{3}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$

Lời giải

$$\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{6}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow 2x\neq\frac{2\pi}{3}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}$$

a) Đúng: Hàm số xác định

$$\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}\neq k\pi(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow x\neq-\frac{\pi}{3}+k\pi$$

b) Đúng: Hàm số xác định .

$$D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{3}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Vậy .

$$\Leftrightarrow \sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$$

c) Sai: Hàm số xác định .

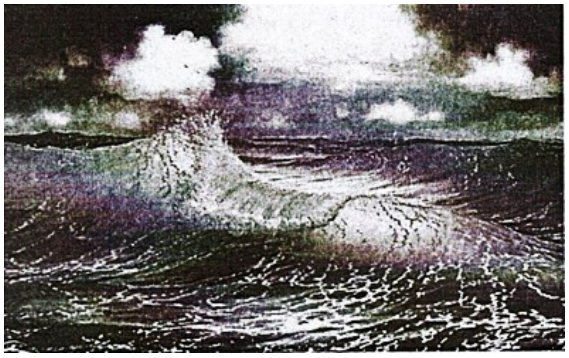
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq 0\\ 3x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}$$

d) Sai: Hàm số xác định

$$D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Vậy .

Câu 5: Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm t (giây) của mỗi cơn sóng được cho bởi hàm số $h(t)=75\sin\left(\dfrac{\pi t}{8}\right)$, trong đó $h(t)$ được tính bằng centimét.



a) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây bằng $69,3$ cm.

b) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 20 giây bằng 75 cm

c) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t=0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 6 giây

d) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t=0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 18 giây *(Tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)*

Lời giải

a) Đúng: Khi $t=5$ ta có: $h(5)=75\sin\left(\frac{\pi.5}{8}\right)\approx 69,3$ cm.

b) Đúng: Khi $t=20$ ta có: $h(20)=75\sin\left(\frac{\pi.20}{8}\right)=75$ cm.

c) Sai:

d) Sai: Ta có: $\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)\le 1\Rightarrow 75\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)\le 75$ hay $h(t)\le 75$.

Giá trị lớn nhất của $h(t)$ là 75 khi đó $\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)=1\Rightarrow\frac{\pi t}{8}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\Rightarrow t=4+16k\left(k\in\mathbb{Z}\right)$. Vì $t\in[0;30]\Rightarrow t\in\{4;20\}$ (ứng với k bằng 0 và 1).

Vậy tại các thời điểm 4 giây hoặc 20 giây (trong 30 giây đầu tiên) thì cơn sóng đạt chiều cao cực đại là 75 cm.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Hàm số $y=5+4\sin 2x\cos 2x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

Lời giải

Ta có $y=5+4\sin 2x\cos 2x=5+2\sin 4x$.

Mà $-1\le\sin 4x\le 1\longrightarrow -2\le 2\sin 4x\le 2\longrightarrow 3\le 5+2\sin 4x\le 7$

$\longrightarrow 3\le y\le 7\xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} y\in\{3;4;5;6;7\}$ nên y có 5 giá trị nguyên.

Câu 2: Hàm số $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

Lời giải

Áp dụng công thức $\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$, ta có

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

$$-1\le\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 1\longrightarrow -1\le y\le 1\xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} y\in\{-1;0;1\}.$$

Ta có

Câu 3: Hàm số $y=\cos^2 x-\cos x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

Lời giải

$$y=\cos^2 x-\cos x=\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}.$$

Ta có

$$-1\le\cos x\le 1\longrightarrow -\frac{3}{2}\le\cos x-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\longrightarrow 0\le\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{9}{4}$$

Mà

$$\longrightarrow -\frac{1}{4}\le\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\le 2\longrightarrow -\frac{1}{4}\le y\le 2\xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} y\in\{0;1;2\}$$

nên có 3 giá trị thỏa mãn.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\sqrt{\frac{m-1}{m}-2\cos 4x}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Để hàm số $y=\sqrt{\frac{m-1}{m}-2\cos 4x}$ xác định trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \frac{m-1}{m}-2\cos 4x\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\frac{m-1}{2m}\ge\cos 4x\ge 1\Leftrightarrow\frac{m-1}{2m}\ge 1\Leftrightarrow -1\le m\le 0.$$

Câu 5: Biết rằng tập giá trị của hàm số $y=5+4\sin 2x\cos 2x$ là $T=[a;b]$. Tính giá trị biểu thức $P=a+2b$?

Lời giải

Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y=5+4\sin 2x\cos 2x=5+2\sin 4x$.

Do $-1\le\sin 4x\le 1\Leftrightarrow -2\le 2\sin 4x\le 2\Leftrightarrow 3\le 5+2\sin 4x\le 7\Leftrightarrow 3\le y\le 7$.

Vậy giá trị của hàm số là $T=[3;7]$ nên $\begin{cases}a=3\\b=7\end{cases}\Rightarrow P=a+2b=3+2.7=17$

Câu 6: Biết rằng tập giá trị của hàm số $y=\sin^6 x+\cos^6 x$ là $T=[a;b]$. Tính giá trị biểu thức $P=4a+b$

Lời giải

Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$.

Do $0\le \sin^2 2x\le 1\Leftrightarrow 0\ge -\frac{3}{4}\sin^2 2x\ge -\frac{3}{4}\Leftrightarrow 1\ge 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\ge \frac{1}{4}\Leftrightarrow 1\ge y\ge \frac{1}{4}$.

Vậy giá trị của hàm số là $T=\left[\frac{1}{4};1\right]$ nên $\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b=1\end{cases}\Rightarrow P=4a+b=4.\frac{1}{4}+1=2$

Câu 7: Biết rằng tập giá trị của hàm số $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x+3$ là $T=[a;b]$. Tính giá trị biểu thức $P=5a+2b$?

Lời giải

Ta có $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x+3=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)+3=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+3$.

Do $-1\le \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1\Leftrightarrow -2\le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 2\Leftrightarrow 1\le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+3\le 5\Leftrightarrow 1\le y\le 5$

Vậy giá trị của hàm số là $T=[1;5]$ nên $\begin{cases}a=1\\ b=5\end{cases}\Rightarrow P=5a+2b=5.1+2.5=15$.

Câu 8: Biết rằng tập giá trị của hàm số $y=\cos^2 x+2\sin x+2$ là $T=[a;b]$. Tính giá trị biểu thức $P=10a-2b$?

Lời giải

Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=\cos^2 x+2\sin x+2=\left(1-\sin^2 x\right)+2\sin x+2=-\sin^2 x+2\sin x+3=-\left(\sin x-1\right)^2+4$

Do $-1\le \sin x\le 1\Leftrightarrow -2\le \sin x-1\le 0\Leftrightarrow 4\ge \left(\sin x-1\right)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow 4\le -\left(\sin x-1\right)^2\le 0\Leftrightarrow 0\le -\left(\sin x-1\right)^2+4\le 4\Leftrightarrow 0\le y\le 4.$

Vậy giá trị của hàm số là $T=[0;4]$ nên $\begin{cases}a=0\\ b=4\end{cases}\Rightarrow P=10a-2b=10.0-2.4=-8$.

Câu 9: Biết rằng tập giá trị của hàm số $y=\dfrac{2\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x+4}$ là $T=[a;b]$. Tính giá trị biểu thức $P=11(a+b)$?

Lời giải

Tập xác định hàm số $D=\mathbb{R}$.

Ta có:

$$y=\frac{2\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x+4}\Leftrightarrow y(\sin x+2\cos x+4)=2\sin x+\cos x$$

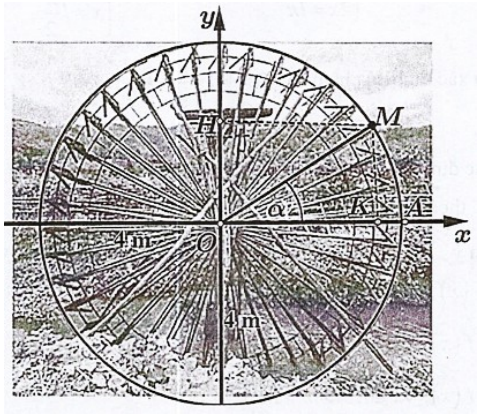
$$\Leftrightarrow (y-2)\sin x+(2y-1)\cos x=-4y.$$

Điều kiện để tồn tại cặp $(x;y)$ là $(y-2)^2+(2y-1)^2\geq(-4y)^2$

$$\Leftrightarrow -11y^2-8y+5\geq 0\Leftrightarrow \frac{-4-\sqrt{71}}{11}\leq y\leq\frac{-4+\sqrt{71}}{11}.$$

Vậy miền giá trị hàm số là $T=\left[\dfrac{-4-\sqrt{71}}{11};\dfrac{-4+\sqrt{71}}{11}\right]$ nên $P=11(a+b)=-8$

Câu 10: Một cái guồng nước có vành kim loại ngoài cùng là một đường tròn tâm O, bán kính là $4m$. Xét chất điểm M thuộc đường tròn đó và góc $\alpha=(OA,OM)$. Giả sử mực nước lúc đang xét là tiếp xúc với đường tròn $(O;4)$ và guồng nước quay theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ). Biết rằng guồng nước quay hết một vòng sau 40 giây ($t=0$ giây khi điểm M trùng A). Hỏi thời điểm nào (trong 1 vòng quay đầu tiên) thì điểm M ở vị trí cao nhất so với mặt nước?



Lời giải

Ta có: $h(x)=4+4\sin\alpha$.

Khi M ở vị trí cao nhất so với mặt nước tức là $h(x)=8$ thì $\sin\alpha=1\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}$ (vì chỉ xét 1 vòng quay đầu tiên). Thời gian thực hiện của guồng nước là: $t=\frac{\frac{\pi}{2}\cdot 40}{2\pi}=10$ (giây).

Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ và tuần hoàn của hàm số lượng giác

Phương pháp: Ta cần thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định D của hàm số - Tập D phải đối xứng
- **Bước 2:** Tính $f(-x)$ *(chỗ nào có biến x, ta thay bởi $-x$)* và thu gọn kết quả đó. Khi đó:
  - ♣ Nếu $f(-x)=f(x)$ thì hàm số đã cho là hàm số chẵn
  - ♣ Nếu $f(-x)=-f(x)$ thì hàm số đã cho là hàm số lẻ
  - ♣ Nếu không rơi vào hai trường hợp trên thì ta kết luận hàm số không chẵn, không lẻ
- Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $T\neq 0$ sao cho với mọi $x\in D$ ta có:
  - ♣ $x+T\in D$ và $x-T\in D$
  - ♣ $f(x+T)=f(x)$

Số T dương nhỏ nhất thoả mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn đó.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau đây:

a) $y=\sin 2x$ b) $y=\tan|x|$ c) $y=\sin^4 x$

d) $y=\tan x+\cot x$ e) $y=\sin x.\cos x$ f) $y=2\sin x+3$

g) $y=\sin x+\cos x$ h) $y=\frac{\sin x-\tan x}{\sin x+\cot x}$ i) $y=\frac{\cos^3 x+1}{\sin^3 x}$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Ta có: $f(-x)=\sin(-2x)=-\sin 2x=-f(x)$. Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) Tạp xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Ta có: $f(-x)=\tan|-x|=\tan|x|=f(x)$. Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Ta có: $f(-x)=\sin^4(-x)=\sin^4 x=f(x)$. Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

d) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$ suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $f(-x)=\tan(-x)+\cot(-x)=-\tan x-\cot x=-(\tan x+\cot x)=-f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

e) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $f(-x)=\sin(-x).\cos(-x)=-\sin x\cos x=-f(x)$. Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

f) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)+3=1$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+3=5$;

Nhận thấy $\begin{cases}f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\neq -f\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$. Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

g) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=0;\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

Nhận thấy $\begin{cases}f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\neq f\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\neq -f\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}$. Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

h) Hàm số xác định khi $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\\ \sin x+\cot x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\\ \sin^2 x+\cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$ suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)-\tan(-x)}{\sin(-x)+\cot(-x)}=\frac{-\sin x+\tan x}{-\sin x-\cot x}=\frac{\sin x-\tan x}{\sin x+\cot x}=f(x)$$

Ta có:

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

$$\cot x=\pm 1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$$

i) Tập xác định: suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

$$f(-x)=\frac{\cos^3(-x)+1}{\sin^3(-x)}=\frac{\cos^3 x+1}{-\sin^3 x}=-\frac{\cos^3 x+1}{\sin^3 x}=-f(x)$$

Ta có:

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Bài tập 2: Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau đây:

a) $y=f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ b) $y=\frac{\sin 2x}{2\cos x-3}$

Lời giải

a) Ta có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Hàm số không thỏa mãn tính chất của hàm số chẵn, và cũng không thỏa mãn tính chất của hàm số lẻ nên đây là hàm số không chẵn không lẻ.

b) Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

$$f(-x)=\frac{\sin(-2x)}{2\cos(-x)-3}=\frac{-\sin 2x}{2\cos x-3}=-f(x)$$

nên hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Bài tập 3: Xác định tham số m để hàm số $y=f(x)=3m.\sin 4x+\cos 2x$ là hàm số chẵn.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $f(-x)=3m.\sin(-4x)+\cos(-2x)=-3m.\sin 4x+\cos 2x$

Để hàm số đã cho là hàm số chẵn thì:

$$f(-x)=f(x),\forall x\in D\Leftrightarrow 3m.\sin 4x+\cos 2x=-3m\sin 4x+\cos 2x\Leftrightarrow 6m.\sin 4x=0\Leftrightarrow m=0$$

Bài tập 4: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ cơ sở (nếu có) của các hàm số sau:

a) $f(x)=\sin(x^2)$ b) $y=\tan\sqrt{x}$

Lời giải

a) Hàm số $f(x)=\sin(x^2)$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới 0 và $\sqrt{(k+1)\pi}-\sqrt{k\pi}=\dfrac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi}+\sqrt{k\pi}}\to 0$ khi $k\to\infty$.

b) Hàm số $f(x)=\tan\sqrt{x}$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới $+\infty$ và $(k+1)^2\pi^2-k^2\pi\to\infty$ khi $k\to\infty$.

Bài tập 5: Tìm chu kì T của hàm số sau:

a) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+2\cos\dfrac{3x}{2}$

b) $y=\sin\left(5x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

c) $y=-\dfrac{1}{2}\sin(100\pi x+50\pi)$

d) $y=\cos 3x+\cos 5x$

Lời giải

a) Chu kỳ của $\sin\dfrac{x}{2}$ là $T_1=\dfrac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=4\pi$ và Chu kỳ của $\cos\dfrac{3x}{2}$ là $T_2=\dfrac{2\pi}{\left|\frac{3}{2}\right|}=\dfrac{4\pi}{3}$

Chu kì của hàm ban đầu là bội chung nhỏ nhất của hai chu kì T_1 và T_2 vừa tìm được ở trên.

Chu kì của hàm ban đầu $T=4\pi$

b) Hàm số $y=\sin(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y=\sin\left(5x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{2\pi}{5}$.

c) Hàm số $y=-\dfrac{1}{2}\sin(100\pi x+50\pi)$ tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{2\pi}{100\pi}=\dfrac{1}{50}$.

d) Hàm số $y=\cos 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\dfrac{2\pi}{3}$.

Hàm số $y=\cos 5x$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\dfrac{2\pi}{5}$.

Suy ra hàm số $y=\cos 3x+\cos 5x$ tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đồ thị của hàm số nào sau đây không đối xứng qua trục tung:

A. $y=1-\sin x$. **B.** $y=2+\sin^2 x$.

C. $y=\sin\left(3|x|-1\right)$. **D.** $y=\sin\left(1+2x\right)+\sin\left(1-2x\right)$.

Lời giải

Đồ thị của hàm số không đối xứng qua trục tung thì hàm số đó là hàm số không chẵn. Mặt khác hàm số $y=1-\sin x$ là hàm không chẵn không lẻ nên đồ thị hàm số $y=1-\sin x$ không đối xứng qua trục tung.

Câu 2: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y=\sin x$. **B.** $y=\sin x+\cos x$. **C.** $y=-\cos x$. **D.** $y=\cos x$.

Lời giải

Xét hàm số $y=\sin x$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $\sin\left(-x\right)=-\sin x,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $y=\sin x$ là hàm số lẻ.

Xét hàm số $y=\sin x+\cos x=f\left(x\right)$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1+\sqrt{3}}{2};\ f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $f\left(\frac{\pi}{3}\right)\neq\pm f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ nên hàm số $y=\sin x+\cos x$ không là hàm số chẵn và không là hàm số lẻ.

Xét hàm số $y=-\cos x$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $-\cos\left(-x\right)=-\cos x,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $y=-\cos x$ là hàm số chẵn.

Xét hàm số $y=\cos x$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $\cos\left(-x\right)=\cos x,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $y=\cos x$ là hàm số chẵn.

Câu 3: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=\cos 3x$. **B.** $y=-\sin x$. **C.** $y=\sin 3x$. **D.** $y=\sin 2x+\cos 2x$.

Lời giải

Xét các đáp án ta thấy ở phương án A hàm số $y=\cos 3x$ có

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ thỏa mãn $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

$f(-x)=\cos(-3x)=\cos 3x=f(x),\forall x\in D$ do đó $y=\cos 3x$ là hàm số chẵn.

Các hàm số ở các đáp án còn lại không thỏa mãn định nghĩa hàm số chẵn.

Câu 4: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=-\sin x$. **B.** $y=\cos x$. **C.** $y=\cos x\sin x$. **D.** $y=\sin x$.

Lời giải

Xét hàm số $y=\cos x$ có tập xác định $\mathbb{R}\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}$ ta có $-x\in\mathbb{R}$

Đặt $f(x)=\cos x$. Khi đó $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$.

Do đó $y=\cos x$ là hàm số chẵn.

Câu 5: Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y=\tan x-\sin 2x$. **B.** $y=\sin 2x$.

C. $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. **D.** $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Xét hàm: $y=\tan x-\sin 2x\Rightarrow y(-x)=\tan(-x)-\sin(-2x)=-y(x)\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ nên hàm số là hàm lẻ.

Xét hàm: $y=\sin 2x\Rightarrow y(-x)=\sin(-2x)=-y(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số là hàm lẻ.

Xét hàm: $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\Rightarrow y(-x)=\cos(-x)=\cos x=y(x),\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số là hàm chẵn.

Xét hàm:

$$y=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right)=\sin(-x)=-\sin x\Rightarrow y(-x)=-\sin(-x)=\sin x=-y(x),\forall x\in\mathbb{R}$$

nên hàm số là hàm lẻ.

Câu 6: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y=\frac{\tan x}{\sin x}$. **B.** $y=\frac{\cot x}{\cos x}$. **C.** $y=\cos x$. **D.** $y=\sin^2 x$.

Lời giải

Ta có tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\cot x}{\cos x}$ là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$ và $f(-x)=\dfrac{\cot(-x)}{\cos(-x)}=-\dfrac{\cot x}{\cos x}=-f(-x)$.

Vậy hàm số $y=\dfrac{\cot x}{\cos x}$ là hàm số lẻ.

Câu 7: Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=\sin^2 x+x$ là hàm số lẻ.

B. Hàm số $y=\sin x.\cos x$ là hàm số lẻ.

C. Hàm số $y=\cos x+\sin x$ là hàm số chẵn.

D. Hàm số $y=\sin x+1$ là hàm số lẻ.

Lời giải

Xét hàm số $y=f(x)=\sin x.\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ và $f(-x)=\sin(-x).\cos(-x)=-\sin x.\cos x=-f(x)$

Vậy $f(x)$ là hàm số lẻ.

Câu 8: Hàm số nào dưới đây là hàm số chẵn?

A. $y=\sin x$. **B.** $y=\cos x$. **C.** $y=\cot x$. **D.** $y=\tan x$.

Lời giải

Xét hàm số $y=\cos x$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\Rightarrow\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Ta có $\cos(-x)=\cos x,\ \forall x\in D$ nên hàm số $y=\cos x$ là hàm chẵn.

Câu 9: Hàm số nào dưới đây là hàm số lẻ?

A. $y=\tan x$. **B.** $y=\cos(-x)$.

C. $y=\sin^2 x$. **D.** $y=\cot^2 x$.

Lời giải

Hàm số $y=\tan x$ là hàm số lẻ theo tính chất hàm số lượng giác.

Các hàm số $y=\sin^2 x$; $y=\cot^2 x$; $y=\cos(-x)$ là hàm số chẵn.

Câu 10: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x$.

B. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

C. $y=3\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+4\sin(\pi+2x)$.

D. $y=\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{\cos 2x}$.

Lời giải

Ta có $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)-\sin x=\cos x$

Mà hàm số $y=\cos x$ là hàm số chẵn suy ra hàm số chẵn.

Câu 11: Cho các hàm số $y=\cos x, y=\sin x, y=\tan x, y=\cot x$. Trong các hàm số trên có bao nhiêu hàm số **chẵn**?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Ta có $y=\cos x$ là hàm số chẵn.

Câu 12: Hàm số nào dưới đây là hàm số chẵn?

A. $y=x^2.\tan x$.

B. $y=\cos 2x-x$.

C. $y=\sqrt{x}\cos x$.

D. $y=x.\sin 2x$.

Lời giải

Hàm số $y=f(x)=x^2.\tan x$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$; $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

$f(-x)=(-x)^2.\tan(-x)=-x^2.\tan x=-f(x)$ nên $y=x^2.\tan x$ là hàm số lẻ.

Hàm số $y=f(x)=\cos 2x-x$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$; $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

có $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1+\frac{\pi}{2}\neq\pm f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $y=\cos 2x-x$ không chẵn, không lẻ.

Hàm số $y=f(x)=\sqrt{x}\cos x$ có tập xác định $D=[0;+\infty)$; có $x=1\in D$ nhưng $-1\notin D$ nên hàm số $y=\sqrt{x}\cos x$ không chẵn, không lẻ.

Hàm số $y=f(x)=x.\sin 2x$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$;

$f(-x)=(-x).\sin 2(-x)=x.\sin 2x=f(x)$ nên chọn.

Câu 13: Tìm chu kì T của hàm số $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

A. $T=\pi$. **B.** $T=4\pi$. **C.** $T=2\pi$. **D.** $T=6\pi$

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R};\ x+2\pi\in D;\ x-2\pi\in D;\forall x\in D$

Ta có: $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ do đó $T=2\pi$

Câu 14: Chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y=\sin 2x$ là

A. π. **B.** 2π. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** 4π.

Lời giải

Ta có: $y=\sin 2(x+\pi)=\sin(2x+2\pi)=\sin 2x$. Do π là số dương nhỏ nhất thỏa mãn tính chất trên nên hàm $y=\sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ π

Câu 15: Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số $y=\tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π.

B. Hàm số $y=\sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.

C. Hàm số $y=\cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.

D. Hàm số $y=\cot x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.

Lời giải

Hàm số $y=\cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π.

Câu 16: Trong các hàm số $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$ có bao nhiêu hàm số có chu kì là 2π?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chỉ có $y=\sin x, y=\cos x$ là hai hàm số có chu kì bằng 2π.

Câu 17: Hàm số $y=\sin 2x$ có chu kì tuần hoàn là

A. $T=\pi$. **B.** $T=\frac{\pi}{2}$. **C.** $T=4\pi$. **D.** $T=2\pi$.

Lời giải

Chu kì tuần hoàn của hàm số $y=\sin 2x$ là $T=\dfrac{2\pi}{|2|}=\pi$.

Câu 18: Tìm chu kì T của hàm số $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}+2025\right)$.

A. $T=\pi$. **B.** $T=-2\pi$. **C.** $T=4\pi$. **D.** $T=2\pi$.

Lời giải

Lý thuyết : hàm số $y=\cos(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}+2025\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=4\pi$.

Câu 19: Tìm chu kì T của hàm số $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

A. $k2\pi, k\in\square$. **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** π. **D.** 2π.

Lời giải

Áp dụng: Hàm số $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 20: Hàm số $y=\sin 2x+\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ có chu kì là:

A. 3π. **B.** 2π. **C.** $\dfrac{\pi}{6}$. **D.** 6π.

Lời giải

Ta thấy $\sin 2x$ có chu kì $T_1=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$, $\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ có chu kì $T_2=\dfrac{2\pi}{3}$

Vì hàm số y là tổng của hai hàm trên nên chu kì của y là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2

Vậy hàm số có chu kì $T=2\pi$.

Câu 21: Hàm số $y=\tan\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ bằng

A. 4π. **B.** 3π. **C.** 2π. **D.** 6π.

Lời giải

$$D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{4}+k3\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Cách 1: Tập xác định .

Vì hàm số $y=\tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π nên với mọi $x\in D$, ta có

$$f\left(x\right)=\tan\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}+\pi\right)=\tan\left(\frac{x+3\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=f\left(x+3\pi\right)$$

.

Ngoài ra, giả sử $f\left(x\right)=f\left(x+\alpha\right),\forall x\in D$ thì

$\tan\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{x+\alpha}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{3}\right),\forall x\in D$. Khi đó $\frac{\alpha}{3}$ là bội của π hay α là bội của 3π. Vậy hàm số $y=\tan\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ bằng 3π.

Cách 2: Hàm số $y=\tan\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{4}+k3\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Giả sử hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T>0$. Khi đó

$$f\left(x+T\right)=f\left(x\right),\forall x\in D\Leftrightarrow\tan\left(\frac{x+T}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right),\forall x\in D$$

.

Chọn $x=-\frac{3\pi}{4}$, ta được $\tan\left(\frac{T}{3}\right)=0\Leftrightarrow T=k3\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Thử lại ta được $\forall x\in D,\ f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$ và $x+3\pi,\ x-3\pi\in D$.

Với $k=1$, ta được $T=3\pi$ là số dương bé nhất thỏa mãn nên hàm số tuần hoàn chu kì $T=3\pi$

Câu 22: Chu kỳ của hàm số $y=3\tan\left(mx+n\right)$ với m, n là những số nguyên dương là

A. $\frac{\pi}{m}$.

B. $\frac{\pi}{c}$, c là bội chung nhỏ nhất của m, n.

C. $\frac{\pi}{m.n}$.

D. $\frac{\pi}{d}$, d là ước chung lớn nhất của m, n.

Lời giải

Ta có chu kỳ của hàm số $y=3\tan\left(mx+n\right)$ là $\frac{\pi}{\left|m\right|}=\frac{\pi}{m}$.

Câu 23: Chu kì của hàm số $y = 3 + 2\sin^2 2x$ là:

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** π. **D.** 2π.

Lời giải

Ta có: $y = 3 + 2\sin^2 2x = 3 + 1 - \cos 4x = 4 - \cos 4x$.

Suy ra chu kì tuần hoàn của hàm số là $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = \cos x$ xác định với mọi số thực

b) Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì π.

c) Hàm số $y = \sin\left(x^2\right)$ là hàm số lẻ.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 5\sin x + 2$ bằng 2

Lời giải

a) Đúng: Hàm số $y = \cos x$ xác định với mọi số thực

b) Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì π

c) Xét hàm số $y = \sin\left(x^2\right)$.

Tập xác định $\mathbb{R}$ và $f(-x) = \sin(-x)^2 = \sin x^2 = f(x)$ nên đây là hàm số chẵn.

d) Ta có $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -3 \le 5\sin x + 2 \le 7$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -3.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$

b) $f(-\pi) = -f(\pi)$

c) $f(-x) = f(x)$

d) Hàm số đã cho là hàm số chẵn

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

$f(-\pi)=-2\neq -f(\pi)=2$

b) Sai: Ta có

c) Đúng: Với mọi $x\in D$ ta có:

$-x\in D$ và $f(-x)=\sin^2(-x)+\cos(-x)-1=\sin^2 x+\cos x-1=f(x)$.

d) Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\tan x-x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{R}\right\}$.

b) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

c) $f(-x)=-f(x)$

d) Hàm số đối xứng với nhau qua trục Oy

Lời giải

$\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{R}\right)$

a) Đúng: Hàm số xác định .

b) Sai: Ta có: $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{3}$ $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\pi}{3}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right)\neq f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

$D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{R}\right\}$

c) Đúng: Tập xác định của hàm số: .

Với mọi $x\in D$ ta có: $-x\in D$ và $f(-x)=\tan(-x)-(-x)=-\tan x+x=-(\tan x-x)=-f(x)$.

d) Sai: Hàm số đã cho là hàm số lẻ nên đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=|x|\sin x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

b) $f(-\pi)=-f(\pi)$

c) $f(-x)=-f(x)$

d) Hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ $O(0;0)$

Lời giải

a) Sai: Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}$.

b) Đúng: Ta có: $f(-\pi)=0\ -f(\pi)=0\Rightarrow f(-\pi)=-f(\pi)$;

c) Đúng: Với mọi $x\in D$ ta có: $-x\in D$ và $f(-x)=|-x|\sin(-x)=-|x|\sin x=-f(x)$.

d) Đúng: Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ nên đối xứng qua gốc tọa độ

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=|\tan x|+|x^3-3x|$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) $f(-\pi)=-f(\pi)$

c) Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

d) Hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ $O(0;0)$

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Sai: $f(-\pi)\neq-f(\pi)$

c) Đúng: Với mọi $x\in D$ ta có:

$-x\in D$ và $f(-x)=|\tan(-x)|+|(-x)^3-3(-x)|=|\tan x|+|x^3-3x|=f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

d) Sai: Hàm số đã cho đối xứng qua gốc qua trục Oy

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=2\cos x+1$ và $g(x)=\sin x+\tan x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$: $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ là hàm tuần hoàn.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d) Hàm số $g(x)$ là hàm không tuần hoàn.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định hàm số $f(x)$ là $D=\mathbb{R}$.

b) Đúng: Với mọi $x\in D$ thì $x\pm2\pi\in D$ và $f(x+2\pi)=2\cos(x+2\pi)+1=2\cos x+1=f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

$$D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$$

c) Sai: Tập xác định hàm số: .

Với mọi $x\in D$ thì $x\pm 2\pi\in D$ và $f\left(x+2\pi\right)=\sin\left(x+2\pi\right)+\tan\left(x+2\pi\right)=\sin x+\tan x=f\left(x\right)$.

d) Sai: Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

Câu 7: Cho hàm số $f\left(x\right)=\tan x$ và $g\left(x\right)=\cot^2 x-\frac{\sin 2x}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f\left(x\right)$: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số $f\left(x\right)$ là hàm không tuần hoàn.

c) Tập xác định hàm số $g\left(x\right)$: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d) Hàm số $g\left(x\right)$ là hàm tuần hoàn.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định hàm số $f\left(x\right)$: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Sai: Với mọi $x\in D$ thì $x\pm\pi\in D$ và $f\left(x+\pi\right)=\tan\left(x+\pi\right)=\tan x=f\left(x\right)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

c) Đúng: Tập xác định hàm số: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Với mọi $x\in D$ thì $x\pm\pi\in D$ và

$$f\left(x+\pi\right)=\cot^2\left(x+\pi\right)-\frac{\sin 2\left(x+\pi\right)}{2}=\cot^2 x-\frac{\sin 2x}{2}=f\left(x\right).$$

d) Đúng: Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

Câu 8: Cho các hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{3-2\sin x}$; và $g\left(x\right)=\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $f\left(x\right)$ có tập xác định là: $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số $f\left(x\right)$ đã cho là hàm tuần hoàn.

c) Hàm số $g(x)$ xác định khi $x \neq k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm không tuần hoàn.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số xác định $\Leftrightarrow 3-2\sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq \frac{3}{2}$ (đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$).

Vì vậy tập xác định hàm số là: $D = \mathbb{R}$.

b) Đúng: Với mọi $x \in D$ thì $x \pm 2\pi \in D$ và

$$f(x+2\pi) = \sqrt{3-2\sin(x+2\pi)} = \sqrt{3-2\sin x} = f(x)$$

.

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

c) Sai: Hàm số xác định $\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vì vậy tập xác định hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Sai: Với mọi $x \in D$ thì $x \pm 2\pi \in D$ và

$$f(x+2\pi) = \tan\frac{x+2\pi}{2} - \frac{1}{3}\cos(x+2\pi) = \tan\left(\frac{x}{2}+\pi\right) - \frac{1}{3}\cos x = \tan\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\cos x = f(x)$$

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

Câu 9: Cho các hàm số sau: $f(x) = \sqrt{5-3\sin^2 x}$; $g(x) = \tan x - x\cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định hàm số là: $D = \mathbb{R}$.

b) Sai: Với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = \sqrt{5-3\sin^2(-x)} = \sqrt{5-3\sin^2 x} = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

$$D = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$$

c) Đúng: Tập xác định hàm số là: .

d) Sai: Với mọi $x\in D$ thì $-x\in D$ và

$$f(-x)=\tan(-x)-(-x)\cos(-x)=-\tan x+x\cos x=-f(x)$$

.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Câu 10: Cho các hàm số sau: $f(x)=2\cos 3x-1$; $g(x)=|2\sin x+2|+|2\sin x-2|$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D=\mathbb{R}$.

d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D=\mathbb{R}$.

b) Xét $y=f(x)=2\cos 3x-1$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ suy ra $\forall x\in D$ thì $-x\in D$.

Ta có: $f(-x)=2\cos(-3x)-1=2\cos 3x-1=f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) d) Xét $y=f(x)=|2\sin x+2|+|2\sin x-2|$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ suy ra $\forall x\in D$ thì $-x\in D$.

Ta có: $f(-x)=|2\sin(-x)+2|+|2\sin(-x)-2|=|-2\sin x+2|+|-2\sin x-2|$

$=|-2\sin x+2|+|-2\sin x-2|=|2\sin x-2|+|2\sin x+2|=f(x)$

.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 11: Cho các hàm số sau: $f(x)=3\sin^3 x$; $g(x)=-5\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D=\mathbb{R}$.

d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D=\mathbb{R}$.

b) Sai: Xét $y=f(x)=3\sin^3 x$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ suy ra $\forall x\in D$ thì $-x\in D$.

Ta có: $f(-x)=3\sin^3(-x)=-3\sin^3 x=-f(x)$ do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

c) Đúng: Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D=\mathbb{R}$.

d) Sai: Xét $y=f(x)=-5\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ suy ra $\forall x\in D$ thì $-x\in D$.

Ta có $\begin{cases} f\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=-5\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right)=-5\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{-5\sqrt{3}}{2} \\ f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=-5\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right)=-5\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\neq f\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \\ f\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\neq -f\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \end{cases}$.

Do đó hàm số đã cho không chẵn, không lẻ.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tìm chu kì T của hàm số $y=-\dfrac{1}{2}\sin(100\pi x+50\pi)$.

Lời giải

Hàm số $y=-\dfrac{1}{2}\sin(100\pi x+50\pi)$ tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{2\pi}{100\pi}=\dfrac{1}{50}=0{,}02$

Câu 2: Tìm chu kì T của hàm số $y=3\cos(2x+1)-2\sin\left(\frac{x}{2}-3\right)$.

Lời giải

Hàm số $y=3\cos(2x+1)$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\frac{2\pi}{2}=\pi.$

Hàm số $y=-2\sin\left(\frac{x}{2}-3\right)$. tuần hoàn với chu kì $T_2=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi.$

Suy ra hàm số $y=3\cos(2x+1)-2\sin\left(\frac{x}{2}-3\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=4\pi\approx 12,56$

Câu 3: Tìm chu kì T của hàm số $y=\sin\frac{x}{2}-\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right).$

Lời giải

Hàm số $y=\sin\frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T_1=4\pi.$

Hàm số $y=-\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\frac{\pi}{2}.$

Suy ra hàm số $y=\sin\frac{x}{2}-\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=4\pi\approx 12,56$

Câu 4: Tìm chu kì T của hàm số $y=2\sin^2 x+3\cos^2 3x.$

Lời giải

Ta có $y=2.\frac{1-\cos 2x}{2}+3.\frac{1+\cos 6x}{2}=\frac{1}{2}(3\cos 6x-2\cos 2x+5).$

Hàm số $y=3\cos 6x$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}.$

Hàm số $y=-2\cos 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\pi.$

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T=\pi.$

Câu 5: Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t)=90\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước

biển trung bình tại thời điểm t giây. Tìm chiều cao (đơn vị:cm) của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Lời giải

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} = 20$$

Chu kì của sóng là (giây).

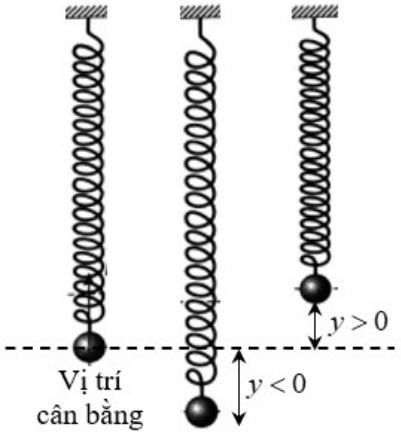
Chiều cao của sóng tức là chiều cao của nước đạt được trong một chu kì dao động.

$$h(20) = 90\cos\left(\frac{\pi}{10}\cdot 20\right) = 90\,(\text{cm})$$

Ta có: .

Vậy chiều cao của sóng là 90 cm.

Câu 6: Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình $y = 25\sin 4\pi t$ ở đó y được được tính bằng centimét còn thời gian t được tính bằng giây. Gọi a là chu kì dao động của con lắc lò xo; b (Hz) là tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây và c (cm) là khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc. Tính $a+b+c$



Lời giải

$$T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

Hàm số $y = 25\sin 4\pi t$ tuần hoàn với chu kì suy ra chu kì dao động của con lắc lò xo $T = \frac{1}{2}$ (tức là khoảng thời gian để con lắc thực hiện được một dao động toàn phần) là giây nên $a = 0,5$

.

$$T = \frac{1}{2}$$

Vì chu kì dao động của con lắc là giây nên trong 1 giây con lắc thực hiện được 2 dao

$$b = f = \frac{1}{T} = 2 \text{ Hz}$$

động, tức là tần số dao động của con lắc là .

$$y = 25\sin 4\pi t$$

Vì phương trình dao động của con lắc là nên biên độ dao động của nó là $A = 25$ cm

$$c = 2A = 50 \text{ cm}$$

Từ đó khoảng cách giữa điểm cao nhất và điểm thấp nhất của con lắc là .

$$a + b + c = 0,5 + 2 + 50 = 52,5$$

Vậy .

Dạng 3: Max – min của hàm số lượng giác

Phương pháp: Ta thường sử dụng ba cách làm sau đây

- Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản:
  - $-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$
  - $-1 \le \cos x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$
  - $0 \le \sin^2 x.\cos^2 x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$
  - $0 \le |\sin x|.|\cos x| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- Sử dụng điều diện có nghiệm
  - $\sin x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \le f(m) \le 1$
  - $\cos x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \le f(m) \le 1$
  - $a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \ge c^2$
- Sử dụng bảng biến thiên: Lập bảng biến thiên của hàm số từ đó đưa ra kết luận.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau đây:

a) $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

b) $y = 2\sqrt{\cos x + 1} - 3$

c) $y = \sin x + \cos x$

d) $y = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$

e) $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$

f) $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1$

Lời giải

$$-1 \le \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1 \Rightarrow -2 \le 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 2 \Rightarrow -1 \le 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \le 3$$

a) Ta có:

Hay $-1 \le y \le 3$.

$\square$ $\max y = 3$ khi $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\square$.

$\square$ $\min y = -1$ khi $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\square$.

b) Ta có: $-1\le \cos x\le 1 \Rightarrow 0\le \cos x+1\le 2 \Rightarrow 0\le \sqrt{\cos x+1}\le \sqrt{2}$

$\Rightarrow 0\le 2\sqrt{\cos x+1}\le 2\sqrt{2} \Rightarrow -3\le 2\sqrt{\cos x+1}-3\le 2\sqrt{2}-3$ hay $-3\le y\le 2\sqrt{2}-3$

$\square$ $\max y = 2\sqrt{2}-3$ khi $\cos x=1 \Leftrightarrow x=k2\pi, k\in\square$.

$\square$ $\min y = -3$ khi $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\square$.

c) Ta có: $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow -\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2}$.

$\square$ $\max y = \sqrt{2}$ khi $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\square$.

$\square$ $\min y = -\sqrt{2}$ khi $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\square$.

d) Ta có: $y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow -2\le y\le 2$.

$\square$ $\max y = 2$ khi $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1 \Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\square$.

$\square$ $\min y = -2$ khi $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-1 \Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\square$.

e) Ta có:

$y=\cos^2 x+2\sin x+2=\left(1-\sin^2 x\right)+2\sin x+2=-\sin^2 x+2\sin x+3=-\left(\sin x-1\right)^2+4$

Vì $-1\le \sin x\le 1 \Rightarrow -2\le \sin x-1\le 0 \Rightarrow 4\ge \left(\sin x-1\right)^2\ge 0$

$\Rightarrow -4\le -\left(\sin x-1\right)^2\le 0 \Rightarrow 0\le -\left(\sin x-1\right)^2+4\le 4$ hay $0\le y\le 4$

$\max y = 4$ khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\min y = 0$ khi $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

f) Ta có

$$y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \left(1 - \cos^2 x\right)^2 - 2\cos^2 x + 1 = \cos^4 x - 4\cos^2 x + 2 = \left(\cos^2 x - 2\right)^2 - 2$$

Vì $0 \le \cos^2 x \le 1 \Leftrightarrow -2 \le \cos^2 x - 2 \le -1 \Leftrightarrow 4 \ge \left(\cos^2 x - 2\right)^2 \ge 1$

$$\Leftrightarrow 2 \ge \left(\cos^2 x - 2\right)^2 - 2 \ge -1 \Leftrightarrow 2 \ge y \ge -1$$

$\max y = 2$ khi $\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\min y = -1$ khi $\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số sau:

a) $y = \frac{2\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 2}$ b) $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$

Lời giải

a) Ta có: $\sin x + \cos x - 2 = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$. Vì $-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ nên:

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \le \sqrt{2} - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin x + \cos x - 2 = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \ne 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R}$

Biến đổi: $y = \frac{2\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 2} \Leftrightarrow y\sin x + y\cos x - 2y = 2\sin x - \cos x + 1$

$$\Leftrightarrow (y - 2)\sin x + (y + 1)\cos x = 2y + 1 \qquad (*)$$

Điều kiện để phương trình (*) có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ là $a^2 + b^2 \ge c^2$

$$\Leftrightarrow (y - 2)^2 + (y + 1)^2 \ge (2y + 1)^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 6y - 4 \le 0 \Leftrightarrow \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \le y \le \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$$

Kết luận: $\max y = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}; \min y = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$.

b) Ta có $y=\dfrac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}\Leftrightarrow (y-1)\sin x+(y-2)\cos x=1-2y\ (*)$

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow (y-1)^2+(y-2)^2\ge (1-2y)^2\Leftrightarrow y^2+y-2\le 0\Leftrightarrow -2\le y\le 1$.

Vậy $m=-2$; $M=1$.

Bài tập 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{m\sin x+1}{\cos x+2}$ nhỏ hơn 2.

Lời giải

$$y=\frac{m\sin x+1}{\cos x+2}\Leftrightarrow y\cos x+2y=m\sin x+1\Leftrightarrow m\sin x-y\cos x=2y-1\ (*)$$

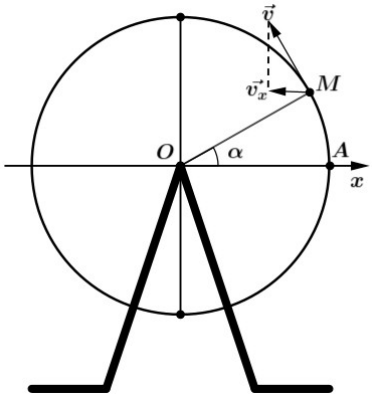
Ta có:

Phương trình $(*)$ có nghiệm khi $m^2+y^2\ge (2y-1)^2\Leftrightarrow 3y^2-4y+1-m^2\le 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3}\le y\le \frac{2+\sqrt{1+3m^2}}{3}\Rightarrow y_{\max}=\frac{2+\sqrt{1+3m^2}}{3}<2\Leftrightarrow \sqrt{1+3m^2}<4\Leftrightarrow m^2<5$$

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0;2;1\}$. Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 4: Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha=(Ox,OM)$ theo hàm số $v_x=0,3\sin\alpha\,(\mathrm{m/s})$.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x.

b) Dựa vào đồ thị của hàm số $\sin$, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên $(0\le\alpha\le 2\pi)$, góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.

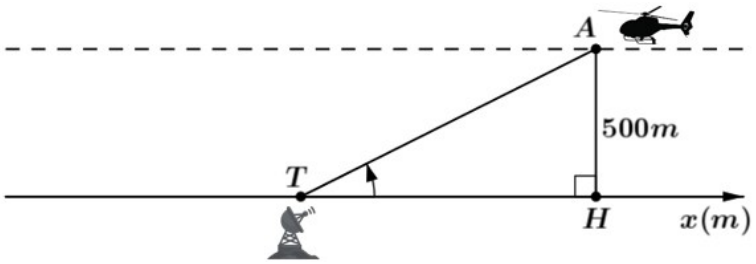
Lời giải

a) Do $-1\le\sin\alpha\le 1$ nên $-0,3\le\sin\alpha\le 0,3$

Vậy giá trị lớn nhất của v_x là $0,3\,(\mathrm{m})$ và giá trị nhỏ nhất của v_x là $-0,3\,(\mathrm{m})$.

b) Dựa vào đồ thị hàm số $\sin$, ta thấy vòng quay đầu tiên $(0\le\alpha\le 2\alpha)$; v_x tăng khi $\pi\le\alpha\le 2\pi$

Bài tập 5: Trong hình dưới đây, một chiếc máy bay A bay ở độ cao 500 m theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H và α là góc lượng giác $(Tx, TA)(0 < \alpha < \pi)$.



Hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) $x_H = 500.\cot\alpha$

b) Với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì $\frac{-\sqrt{3}}{3} < \cot\alpha < \sqrt{3}$. Vậy $x_H \in \{-288,7;866\}$.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sin 3x - 4$ lần lượt là

A. $7;1$. **B.** $1;-4$. **C.** $3;-4$. **D.** $-1;-7$.

Lời giải

Ta có $-1 \le \sin 3x \le 1 \Leftrightarrow -3 \le 3\sin 3x \le 3 \Leftrightarrow -7 \le 3\sin 3x - 4 \le -1.$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là -1 khi $\sin 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z}).$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là -7 khi $\sin 3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 2: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin 2x - 5$ lần lượt là:

A. -8 và -2 **B.** 2 và 8. **C.** -5 và 2. **D.** -5 và 3.

Lời giải

Ta có: $-1 \le \sin 2x \le 1 \Rightarrow -3 \le 3\sin 2x \le 3 \Rightarrow -8 \le 3\sin 2x - 5 \le -2$.

Câu 3: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4\sin x - 3$ là

A. -7. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $-1 \le \sin x \le 1 \Leftrightarrow -7 \le 4\sin x - 3 \le 1$.

Do đó giá trị lớn nhất của y bằng 1, dấu "=" xảy ra khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 4: Giá trị bé nhất của hàm số $y = -3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Ta có $-1 \le \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \le 1 \Leftrightarrow -3 \le 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \le 3 \Leftrightarrow -3 \le -3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \le 3$

$\Leftrightarrow -1 \le 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \le 5$.

Vậy giá trị bé nhất của hàm số $y = -3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ là -1.

Câu 5: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Tính $P = M - m$.

A. $P = 2\sqrt{2}$. **B.** $P = 4$. **C.** $P = \sqrt{2}$. **D.** $P = 2$.

Lời giải

Vì $-1 \le \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \le 1$, $\forall x$ nên $-2 \le y \le 2$.

Vậy $P = M - m = 2 - (-2) = 4$.

Câu 6: Biết hàm số $y = 4\sin x - 3\cos x + 2$ đạt giá trị lớn nhất là M, giá trị nhỏ nhất là m. Tổng $M + m$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Để tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số thì phải tồn tại giá trị của x sao cho $y = 4\sin x - 3\cos x + 2$ hay phương trình $4\sin x - 3\cos x = y - 2$ có nghiệm

$\Leftrightarrow 4^2 + (-3)^2 \ge (y-2)^2 \Leftrightarrow 25 \ge (y-2)^2 \Leftrightarrow -5 \le y - 2 \le 5 \Leftrightarrow -3 \le y \le 7$.

Vậy $M = y_{\max} = 7, m = y_{\min} = -3 \Rightarrow M + m = 4$.

Câu 7: Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sqrt{3}\cos x - \sin x - 3$ là

A. $M = 1$ và $m = -5$. **B.** $M = 1$ và $m = -7$.

C. $M=-1$ và $m=-6$. **D.** $M=-1$ và $m=-5$.

Lời giải

Ta có $y=\sqrt{3}\cos x-\sin x-3\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x-\sin x=y+3$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2\geq (y+3)^2\Leftrightarrow (y+3)^2\leq 4$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -2\leq y+3\leq 2\Leftrightarrow -5\leq y\leq -1$. Vậy $M=-1$, $m=-5$.

Câu 8: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x+2020$ là:

A. 2024. **B.** 2018. **C.** 2022. **D.** 2016.

Lời giải

Ta có $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x+2020=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)+2020=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2020$.

Ta có: $-1\leq \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\leq 1\Rightarrow -2\leq 2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\leq 2$.

Suy ra $2018\leq 2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2020\leq 2022\Leftrightarrow 2018\leq y\leq 2022$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là 2018 khi $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1\Leftrightarrow x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Câu 9: Gía trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ trên $\left[\frac{-2\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ là

A. 1 và -1. **B.** 1 và $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$ và 1. **D.** $\frac{1}{2}$ và $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Vì $x\in\left[\frac{-2\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow 2x+\frac{\pi}{3}\in[-\pi;\pi]\Rightarrow -1\leq\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leq 1\Rightarrow -1\leq y\leq 1$.

Với $x=\frac{-2\pi}{3}\Rightarrow\cos(2x+\frac{\pi}{3})=-1\Rightarrow y=1$ suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là 1.

Với $x=\frac{-\pi}{6}\Rightarrow\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1\Rightarrow y=-1$ suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1.

Câu 10: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=7-2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ lần lượt là

A. -2 và 2. **B.** 5 và 9. **C.** -2 và 7. **D.** 4 và 7.

Lời giải

Ta có $-1\le \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le 1 \Leftrightarrow -2\le -2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le 2 \Leftrightarrow 5\le 7-2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le 9$

Nên $\min y=5$ và $\max y=9$.

Câu 11: Hàm số $y=-2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-5$ đạt giá trị lớn nhất tại

A. $x=\dfrac{4\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

Ta có: $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\ge -1, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow -2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\le 2, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow -2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-5\le -3, \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $\max y=-3$ khi $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-1 \Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{3}=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\dfrac{4\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 12: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)-\sqrt{3}\cos x+1$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** -1. **D.** -2.

Lời giải

Ta có $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)-\sqrt{3}\cos x+1=\sin x-\sqrt{3}\cos x+1=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1\le 3$.

Vậy giá trị lớn nhất của y là 3.

Câu 13: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin^2 x+2\cos x+4$.

A. 5. **B.** 6. **C.** $\dfrac{\pi}{8}$. **D.** $-\dfrac{\pi}{4}$.

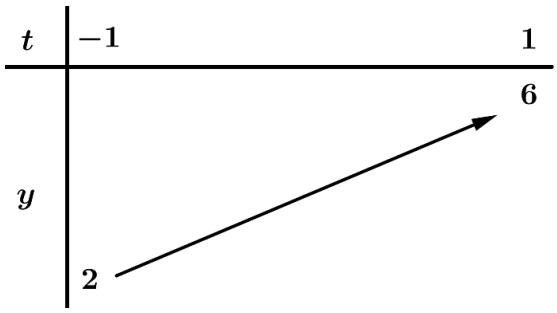
Lời giải

Ta có: $y=\sin^2 x+2\cos x+4=-\cos^2 x+2\cos x+5$.

Đặt $t=\cos x$; vì $-1\le \cos x\le 1$ nên $t\in[-1;1]$.

Khi đó: $y=-t^2+2t+5$ là hàm số bậc hai có $a=-1<0$ và tọa độ đỉnh parabol là $I(1;6)$.

Bảng biến thiên:



Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 6.

Câu 14: Hàm số $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ khi x bằng:

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** 0. **C.** $\frac{\pi}{8}$. **D.** $-\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Ta có: $0\le \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\le 1\ \ \forall x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$, suy ra: $\frac{1}{2}\le y\le\frac{3}{2}$.

Vậy hàm số $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ bằng $\frac{3}{2}$ khi $2x+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=0$.

Câu 15: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x+2$

A. -20. **B.** 0. **C.** 9. **D.** -1.

Lời giải

Ta có: $y=\sin^2 x-4\sin x+2=\sin^2 x-4\sin x+4-4+2=(\sin x-2)^2-2$

Do $\sin x\le 1\Rightarrow(\sin x-2)^2\le(-1)^2\Rightarrow(\sin x-2)^2-2\le -1$.

Câu 16: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=7-2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ lần lượt là

A. -2 và 7. **B.** 5 và 9. **C.** 4 và 7. **D.** -2 và 2.

Lời giải

Ta có $-1 \le \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \le 1 \Leftrightarrow -2 \le -2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \le 2 \Leftrightarrow 5 \le 7-2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \le 9$.

Vậy giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số là 5 và 9.

Câu 17: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin x+2\cos x-3$ là:

A. $\sqrt{5}+3$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 0 **D.** $\sqrt{5}-3$.

Lời giải

Ta có: $y=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x+\frac{2}{\sqrt{5}}.\cos x\right)-3=\sqrt{5}\sin(x+\alpha)-3$ $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}};\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, với

$\max y=\sqrt{5}-3 \Leftrightarrow \sin(x+\alpha)=1 \Leftrightarrow x+\alpha=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}-\alpha+k2\pi$

Câu 18: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{2\cos x}{\cos x+3}$ bằng

A. -6. **B.** -1. **C.** -3. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $y=\frac{2\cos x}{\cos x+3} \Leftrightarrow (y-2)\cos x=3y(*)$.

Trường hợp 1: $y=2$. Khi đó: $(*)$ trở thành: $0=6$ (vô lý).

Trường hợp 2: $y\ne 2$. Khi đó: $(*)$ trở thành: $\cos x=\frac{3y}{2-y}$.

Để hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất thì: $\begin{cases}-1\le\frac{3y}{2-y}\le 1\\ 2-y>0\end{cases} \Leftrightarrow -1\le y\le\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\frac{1}{2}$ khi $x=k2\pi$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1 khi $x=\pi+k2\pi$.

Câu 19: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\sin 3x$ bằng

A. -6. **B.** -1. **C.** -3. **D.** -2.

Lời giải

Ta có $-1 \le \sin 3x \le 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -2 \le 2\sin 3x \le 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin 3x$ là -2, xảy ra khi $\sin 3x = -1$

$\sin 3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 20: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2 - 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là:

A. -5. **B.** 1. **C.** 5. **D.** -1.

Lời giải

Ta có: $-1 \le \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \le 1 \Leftrightarrow 3 \ge -3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \ge -3 \Leftrightarrow 5 \ge 2 - 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \ge -1$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2 - 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ bằng 5.

Câu 21: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{1 - \sin 2x}$ là

A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\sin 2x \ge -1 \Rightarrow \sqrt{1 - \sin 2x} \le \sqrt{2}$.

Câu 22: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 2018$ bằng

A. 2019. **B.** 2021. **C.** 2020. **D.** 2022.

Lời giải

Ta có: $y = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 2018 \Leftrightarrow y = 1 + \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x + 2018$

$\Leftrightarrow y = 2.\left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) + 2019 \Leftrightarrow y = 2.\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) + 2019 \le 2.1 + 2019 = 2021$.

$\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow -2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

Dấu "=" xảy ra khi

$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2021 khi $x = \frac{-\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 23: Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4\sin x + 3\cos x - 2$.

A. -2. **B.** 2. **C.** 3 **D.** -4.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = 5\sin(x+\alpha) - 2$, trong đó: $\sin\alpha = \frac{3}{5},\ \cos\alpha = \frac{4}{5}$.

$\forall x \in D$ ta có: $-1 \le \sin(x+\alpha) \le 1 \Leftrightarrow -7 \le 5\sin(x+\alpha) - 2 \le 3 \Leftrightarrow -7 \le y \le 3$

$y = -7 \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} - \alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$y = 3 \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = 4\sin x + 3\cos x - 2$ trên $D = \mathbb{R}$ lần lượt là -7 và 3.

Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -4.

Câu 24: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $y = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x$ là

A. $0,2$. **B.** $0,25$. **C.** $0,16$. **D.** $0,125$.

Lời giải

Ta có $y = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 3(\sin x\cos x)^2 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$

Lại có $0 \le \sin^2 2x \le 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \le -\frac{3}{4}\sin^2 2x \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x \le 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là $\frac{1}{4} = 0,25$.

Câu 25: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x} + \frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sin^2 x}$

A. $M = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{2}$. **B.** $M = \frac{\sqrt{22}}{2}$. **C.** $M = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $M = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Ta có $y = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x} + \frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sin^2 x} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}.\frac{1 + \cos 2x}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{5 + 2.\frac{1 - \cos 2x}{2}}$

$y = \frac{1}{2}\sqrt{5 + \cos 2x} + \frac{1}{2}\sqrt{6 - \cos 2x} = \frac{1}{2}\left(1.\sqrt{5 + \cos 2x} + 1.\sqrt{6 - \cos 2x}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$y=\frac{1}{2}\left(1.\sqrt{5+\cos 2x}+1.\sqrt{6-\cos 2x}\right)\le \frac{1}{2}.\sqrt{(1^2+1^2).(5+\cos 2x+6-\cos 2x)}\le \frac{\sqrt{22}}{2}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{5+\cos 2x}}=\frac{1}{\sqrt{6-\cos 2x}}\Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Dấu "=" xảy ra khi .

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=2+3\cos x$ và $g(x)=\sin x+\cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng 5

b) Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x=\pi+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ bằng $-\sqrt{2}$

d) Hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi(k\in\mathbb{Z}).$

Lời giải

a) Đúng: Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có: $-1\le\cos x\le 1\Rightarrow -3\le 3\cos x\le 3\Rightarrow -1\le 2+3\cos x\le 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 5, khi đó $\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

b) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1, khi đó $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

c) Sai: Ta có: $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có: $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1\Leftrightarrow -\sqrt{2}\le\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\sqrt{2}$, khi đó $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi(k\in\mathbb{Z}).$

d) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\sqrt{2}$, khi đó $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow x=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi(k\in\mathbb{Z}).$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{2-\sin x}$ và $g(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x+2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng $\sqrt{3}$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng 1

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ bằng 4

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ bằng 0

Lời giải

a) Đúng: Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có: $-1\le\sin x\le 1\Rightarrow 1\ge-\sin x\ge-1\Rightarrow 3\ge 2-\sin x\ge 1$

$\Rightarrow\sqrt{3}\ge\sqrt{2-\sin x}\ge 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\sqrt{3}$, khi đó $\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

b) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 1, khi đó $\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

c) Sai: Ta có: $\sqrt{3}\sin x-\cos x+2=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)+2=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2$.

Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có: $-1\le\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\le 1\Leftrightarrow-2\le 2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\le 2$

$\Leftrightarrow 0\le 2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2\le 4.$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4, khi đó $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi(k\in\mathbb{Z}).$

d) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0, khi đó $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1$

$$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi(k\in\mathbb{Z}).$$

Câu 3: Cho hàm số $y=3-\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2

c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4

d) Tập giá trị của hàm số là $T=[2;4]$

Lời giải

a) Đúng: Ta có: hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

b) Đúng:

$$-1\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1\Leftrightarrow 1\ge-\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\ge-1\Leftrightarrow 4\ge 3-\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\ge 2\Leftrightarrow 4\ge y\ge 2$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2

c) Đúng: Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4

d) Đúng: Vậy giá trị của hàm số là $T=[2;4]$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)=\cos 2x+\cos x$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) Tập xác định của hàm số trên là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số trên là hàm số chẵn.

c) Đặt $t=\cos x$ thì hàm số trở thành $y=f(x)=2t^2+t-1$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên là 0.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định của hàm số trên là $\mathbb{R}$.

b) Đúng: Hàm số trên là hàm số chẵn. Vì $\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}\\ f(-x)=\cos(-2x)+\cos(-x)=f(x)\end{cases}$.

c) Đúng: Đặt $t=\cos x$ thì hàm số trở thành $y=f(x)=2t^2+t-1$.

Ta có $y=\cos 2x+\cos x$; $y=\cos 2x+\cos x=2\cos^2+\cos x-1$.

Đặt: $t=\cos x$, $t\in[-1;1]$ khi đó $f(t)=2t^2+t-1$.

d) Sai: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên là 0. Với hàm số $f(t)=2t^2+t-1$ ở câu c:

Đồ thị của hàm số f là parabol có đỉnh $I\left(-\frac{1}{4};-\frac{9}{8}\right)$.

Bảng biến thiên:

t	-1		$-\frac{1}{4}$		1
$f(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	2

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $m=\min\limits_{[-1;1]}f(t)=-\frac{9}{8}$.

Câu 5: Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) Hàm số $y=\sin x$ là hàm số chẵn.

b) Tập xác định của hàm số $y=\frac{2\cos x}{\sin^2 x-1}$ là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{2\sin x+3}$ là $\sqrt{5}$.

d) Cho hàm số $h(x)=\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x-2m\sin x\cos x}$. Để hàm số đã cho xác định với giá trị $x\in\mathbb{R}$ thì $-\frac{1}{2}\le m\le\frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Sai: Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Hơn nữa $y(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-y(x)$ suy ra hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) Đúng: Tập xác định của hàm số $y=\frac{2\cos x}{\sin^2 x-1}$ là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

$$\sin^2 x-1\neq 0\Leftrightarrow \cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,k\in \square$$

Điều kiện xác định .

$$D=\square \setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in \square\right\}$$

Tập xác định là .

c) Đúng: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{2\sin x+3}$ là $\sqrt{5}$

Ta có: $-1\leq \sin x\leq 1\Leftrightarrow -2\leq 2\sin x\leq 2\Leftrightarrow 1\leq 2\sin x+3\leq 5\Leftrightarrow 1\leq \sqrt{2\sin x+3}\leq \sqrt{5}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là $\sqrt{5}$ khi $\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in \square$.

d) Đúng: Cho hàm số $h(x)=\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x-2m\sin x\cos x}$. Để hàm số đã cho xác định với giá trị $x\in \square$ thì $-\frac{1}{2}\leq m\leq \frac{1}{2}$

$$g(x)=\sin^4 x+\cos^4 x-2m\sin x\cos x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x-m\sin 2x$$

Xét hàm số: .

Đặt $t=\sin 2x,t\in[-1;1]$.

Hàm số đã cho xác định với mọi giá trị $x\in \square$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}t^2-mt+1\geq 0,\ \forall t\in[-1;1]\Leftrightarrow t^2+2mt-2\leq 0,\ \forall t\in[-1;1]$$

.

Xét hàm số $f(t)=t^2+2mt-2,\ \forall t\in[-1;1]$.

Ta có $\max\limits_{[-1;1]} f(t)=f(-1)$ hoặc $\max\limits_{[-1;1]} f(t)=f(1)$.

$$f(t)=t^2+2mt-2\leq 0,\ \forall t\in[-1;1]\Leftrightarrow \max_{[-1;1]} f(t)\leq 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)\leq 0\\ f(-1)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1+2m\leq 0\\ -1-2m\leq 0\end{cases}$$

Suy ra

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq m\leq \frac{1}{2}$

.

Câu 6: Cho hàm số $y=\cos x-\sin x$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T=\pi$.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là $\min y=-2$.

d) Phương trình $y+1=0$ có tất cả 4 nghiệm trên đoạn $[-2\pi;2\pi]$.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định của hàm số $y=\sin x,\ y=\cos x$ đều là $D=\mathbb{R}$ nên tập xác định của hàm số $y=\cos x-\sin x$ là $D=\mathbb{R}$.

$$y=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

b) Sai: Ta có

$$T=\frac{2\pi}{|1|}=2\pi$$

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

c) Sai: Vì tập giá trị của hàm số là đoạn $[-1;1]$, suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ là $\text{Min } y=-\sqrt{2}$.

$$y+1=0\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{3\pi}{4}+k2\pi\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\x=-\pi+k2\pi\end{array}\right.$$

d) Đúng:

Trên đoạn $[-2\pi;2\pi]$ ta tìm được 4 nghiệm là $\left\{-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2};-\pi;\pi\right\}$.

Câu 7: Cho hàm số $y=2\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi x}{6}\right)+11$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) Hàm số có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số tuần hoàn với chu kì $T=12\pi$.

c) Hàm số là hàm số lẻ.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số là 13.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số $y=2\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi x}{6}\right)+11$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$

$$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12.$$

b) Sai: Hàm số tuần hoàn với chu kì Nên mệnh đề b sai.

$$y=2\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi x}{6}\right)+11=2\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{6}\right)+11=2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)+11$$

c) Sai: Ta có

Tập xác định $D=\square$ với $\forall x\in D$ thì $-x\in D$.

$y(x)=2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)+11$ $y(-x)=2\cos\left(\frac{\pi(-x)}{6}\right)+11=2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)+11.$

Ta có và

Vậy $y(x)=y(-x)$ nên hàm số $y=2\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi x}{6}\right)+11$ là hàm số chẵn.

$$y=2\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi x}{6}\right)+11=2\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{6}\right)+11=2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)+11$$

d) Đúng: Ta có

$$-2\le 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)\le 2\Leftrightarrow 9\le 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)+11\le 13\Leftrightarrow 9\le y\le 13$$

Nên .

Vậy hàm số có giá trị lớn nhất bằng 13.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Với giá trị nào của m thì hàm số $y=\sin 3x-\cos 3x+m$ có giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải

$$y=\sin 3x-\cos 3x+m=\sqrt{2}.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x\right)+m=\sqrt{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+m\le\sqrt{2}+m$$

Ta có:

Do đó giá trị lớn nhất của y bằng $\sqrt{2}$ khi $\sqrt{2}+m=\sqrt{2}\Leftrightarrow m=0.$

Câu 2: Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=3\sin x+4\cos x+m$ bằng 10

Lời giải

Gọi y_0 thuộc tập giá trị Y của hàm số.

Khi đó, phương trình $3\sin x+4\cos x+m=y_0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow$ phương trình $3\sin x+4\cos x=y_0-m$ $\Leftrightarrow 3^2+4^2\ge(y_0-m)^2$ có nghiệm

$\Leftrightarrow -5\le y_0-m\le 5\Leftrightarrow -5+m\le y_0\le 5+m$

Ta có, tập giá trị của hàm số: $Y=[-5+m;5+m]$ nên $\max y=5+m \Leftrightarrow 10=5+m \Leftrightarrow m=5$.

Câu 3: Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin^4 x+\cos^4 x+\sin x\cos x$ đạt được bằng $\frac{a}{b}$ với $a,b\in \mathbf{N}$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tổng $a+b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$y=\sin^4 x+\cos^4 x+\sin x\cos x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\left(\sin x.\cos x\right)^2+\sin x\cos x$$

$$=1-2.\frac{1}{4}\sin^2 2x+\frac{1}{2}\sin 2x \quad \text{suy ra} \quad y=-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+1=-\frac{1}{2}.t^2+\frac{1}{2}t+1, t\in[-1;1]$$

Ta có hoành độ đỉnh $t_0=\frac{1}{2}$ mà $y(-1)=0; y(1)=1; y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{8}$.

Giá trị lớn nhất của $y=\frac{9}{8}$ đạt được khi $\sin 2x=\frac{1}{2}$ suy ra $\frac{a}{b}=\frac{9}{8}\Rightarrow a+b=17$.

Câu 4: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố X ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t)=3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]+12$, $t\in\mathbb{Z}$, $0<t\le 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Lời giải

Vì $-1\le \sin\alpha\le 1 \ \forall\alpha$, nên ta có: $d(t)=3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]+12\le 3.1+12=15$.

Suy ra $d(t)_{\max}=15$ đạt được khi $\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]=1\Leftrightarrow\frac{\pi}{182}(t-80)=\frac{\pi}{2}+k2\pi$

$\Leftrightarrow t=171+364k \quad k\in\mathbb{Z}$.

Vì $0<t\le 365$ nên ta có: $0<171+364k\le 365\Rightarrow\frac{-171}{364}<k\le\frac{194}{364}$ do $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=0$.

Vậy vào ngày thứ 171 trong năm thì thành phố X có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất.

Câu 5: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố X ở vĩ độ 40^0 bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t)=3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]+12$, $t\in\mathbb{Z}$, $0<t\le 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Lời giải

Ta có: $\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]\geq -1 \ \forall t \Rightarrow d(t)\geq 3.(-1)+12=9$. Dấu "=" xảy ra khi:

$$\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]=-1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80)=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow t-80=-91+364k \Leftrightarrow t=-11+364k$$

Mà $0<t\leq 365 \Rightarrow 0<-11+364k\leq 365 \Leftrightarrow \frac{11}{364}<k\leq\frac{376}{364} \Leftrightarrow k=1\left(k\in\mathbb{Z}\right) \Rightarrow t=353$.

Vậy thành phố X có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất vào ngày 353 trong năm.

Câu 6: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h=3\cos\left(\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}\right)+12$. Mực nước của kênh cao nhất khi t bằng bao nhiêu?

Lời giải

Mực nước của kênh cao nhất khi độ sâu của mực nước trong kênh lớn nhất.

Ta có $-1\leq\cos\left(\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}\right)\leq 1 \Leftrightarrow 9\leq 3\cos\left(\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}\right)+12\leq 15$.

$\max h=15$ khi $\cos\left(\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow t=-2+16k$.

Trong 1 ngày có 24 giờ nên $0\leq -2+4k\leq 24 \Leftrightarrow \frac{1}{8}\leq k\leq\frac{26}{16}$.

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=1\Rightarrow t=14$ giờ.