

Câu 1:

$$M = \frac{x^4 + 2}{x^6 + 1} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{x^4 + 4x^2 + 3}$$

1) Cho biểu thức

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị lớn nhất của M

2) Tìm số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2040$ cho $x^2 + 12x + 30$ **Câu 2:**

$$\frac{x-1}{2024} + \frac{x-2}{2023} + \frac{x-3}{2022} + \dots + \frac{x-2024}{1} = 2024$$

1) Giải phương trình:

2) Giải phương trình: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8) = -16$ **Câu 3:**1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $5x^2 + y^2 = 17 - 2xy$ 2) Cho biểu thức: $P = (a+b)(b+c)(c+a) - abc$ với a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $a + b + c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.**Câu 4:**1) Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao, AD là tia phân giác của góc BAC và $\sin B = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{2 \sin B - 3 \cos B}{2 \sin B + 3 \cos B}$ 2) Cho hình chữ nhật ABCD, có $AD = k \cdot AB$ ($k > 0$). Trên cạnh BC lấy điểm M, đường thẳng AM cắt CD tại N.a) Chứng minh rằng: Khi M chuyển động trên cạnh BC thì $\frac{1}{k^2 \cdot AM^2} + \frac{1}{AN^2}$ không đổi.b) Tìm vị trí của M trên cạnh BC để $k \cdot AM + AN$ đạt giá trị nhỏ nhất.**Câu 5:** Chứng minh rằng: Với mọi a, b > 0 thỏa mãn: $a + b = 1$ thì:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \geq 6$$

ĐÁP ÁN**Câu 1:**

$$1.1.a) \quad M = \frac{x^4 + 2}{x^6 + 1} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{x^4 + 4x^2 + 3}$$

$$M = \frac{x^4 + 2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)}$$

$$M = \frac{x^4 + 2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$M = \frac{x^4 + 2 + (x^2 - 1)(x^4 - x^2 + 1) - (x^4 - x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^4 + 2 + x^4 - 1 - x^2 + x^2 - 1}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)}$$

$$M = \frac{x^4 + x^2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^2 \cdot (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$$

Vậy $M = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ với mọi x.

1.1.b)

Ta có: $M = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ với mọi x

+) Nếu x = 0 ta có M = 0

$$M = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1}$$

+) Nếu $x \neq 0$, chia cả tử và mẫu của M cho x^2 ta có:

$$\text{Ta có: } x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) + 1 = \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 + 1 \geq 1$$

$$M = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} \leq 1$$

Nên ta có:

Dấu “=” xảy ra khi x = 1.

Vậy M lớn nhất là M = 1 khi x = 1.

1.2.

Ta có:

$$(x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2040 = \dots = (x^2 + 12x + 27)(x^2 + 12x + 35) + 2040 \text{ Đặt}$$

$$x^2 + 12x + 30 = t \text{ ta có:}$$

$$(x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2040$$

$$= (t-3)(t+5) + 2033$$

$$= t^2 + 2t - 15 + 2040 = t(t+2) + 2025$$

Vậy ta có:

$$(x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2033 = (x^2 + 12x + 30)(x^2 + 12x + 32) + 2025$$

Vậy số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2040$ cho $x^2 + 12x + 30$ là 2025.

Câu 2:

$$\begin{aligned}
 2.1. \quad & \frac{x-1}{2024} + \frac{x-2}{2023} + \frac{x-3}{2022} + \dots + \frac{x-2024}{1} = 2024 \\
 & \frac{x-1}{2024} - 1 + \frac{x-2}{2023} - 1 + \frac{x-3}{2022} - 1 + \dots + \frac{x-2024}{1} - 1 + 2024 = 2024 \\
 & \frac{x-2025}{2024} + \frac{x-2025}{2023} + \frac{x-2025}{2022} + \dots + \frac{x-2025}{1} = 0 \\
 & (x-2025) \left(\frac{1}{2024} + \frac{1}{2023} + \frac{1}{2022} + \dots + \frac{1}{1} \right) = 0 \\
 & x = 2025 \quad \left(\text{vì } \frac{1}{2024} + \frac{1}{2023} + \frac{1}{2022} + \dots + \frac{1}{1} \neq 0 \right)
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2025$.

$$\begin{aligned}
 2.2. \text{ Ta có: } & (3x-2)(x+1)^2(3x+8) = -16 \\
 & (3x-2)(3x+3)^2(3x+8) = -144
 \end{aligned}$$

Đặt $3x+3 = t$ nên $3x-2 = t-5$ và $3x+8 = t+5$

Ta có phương trình:

$$\begin{aligned}
 & (t-5)t^2(t+5) = -144 \\
 & t^4 - 25t^2 + 144 = 0 \\
 & (t^2 - 9)(t^2 - 16) = 0 \\
 & t^2 = 9 \text{ hoặc } t^2 = 16 \\
 & t = \pm 3 \text{ hoặc } t = \pm 5
 \end{aligned}$$

Xét các trường hợp ta tìm được $x = 0; x = -2; x = \frac{2}{3}; x = -\frac{8}{3}$

Câu 3:

$$3.1. \quad 5x^2 + y^2 = 17 - 2xy$$

$$\text{Nên } 4x^2 + (x+y)^2 = 17$$

Suy ra $4x^2 \leq 17$ suy ra $x^2 \leq \frac{17}{4}$ vì x^2 là số chính phương nên $x^2 \in \{0; 1; 4\}$

+) Nếu $x^2 = 0$ suy ra $(x+y)^2 = 17$ (loại)

+) Nếu $x^2 = 1$ suy ra $(x+y)^2 = 13$ (loại)

+) Nếu $x^2 = 4$ suy ra $x = 2$ hoặc $x = -2$

Với $x = 2$ thì $(2+y)^2 = 1$ suy ra $y = -3$ hoặc $y = -1$

Với $x = -2$ thì $(-2+y)^2 = 1$ suy ra $y = 3$ hoặc $y = 1$

Vậy phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; -3), (2; -1), (-2; 3), (-2; 1)$

$$3.2. \quad a+b+c \leq 4 \quad (a, b, c \in \mathbb{Z})$$

Đặt $a + b + c = 4k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Suy ra $a + b = 4k - c; b + c = 4k - a; a + c = 4k - b$

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= (a+b)(b+c)(c+a) - abc = (4k-c)(4k-b)(4k-a) - abc \\ &= (16k^2 - 4ak - ack + ac)(4k-b) - abc \\ &= 64k^3 - 16bk^2 - 16ak^2 + 4abc - 16ck^2 + 4bck + 4ack - abc - abc \\ &= 4(16k^3 - 4bk^2 - 4ak^2 + abk - 4ck^2 + bck + ack) - 2abc(*) \end{aligned}$$

Giả sử a, b, c đều chia 2 dư 1 suy ra $a + b + c$ chia 2 dư 1 (1)

Mà $a + b + c \vdots 4$ suy ra $a + b + c \vdots 2$ (theo giả thiết) (2)

Do đó (1) và (2) mâu thuẫn suy ra điều giả sử là sai

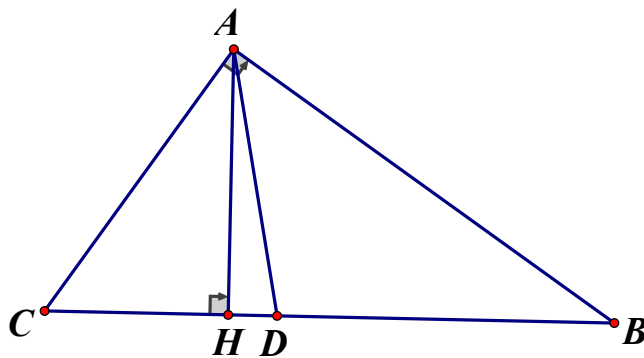
Suy ra trong ba số a, b, c ít nhất có một số chia hết cho 2.

Suy ra $2abc \vdots 4$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $P \vdots 4$

Câu 4:

4.1.



Xét tam giác ABC vuông tại A

$$\sin B = \frac{AC}{BC} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{1}{3} \quad \text{suy ra} \quad \begin{cases} AC = a (a > 0) \\ BC = 3a \end{cases}$$

+ Theo định lý Py-ta-go ta có:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

$$AB^2 = BC^2 - AC^2$$

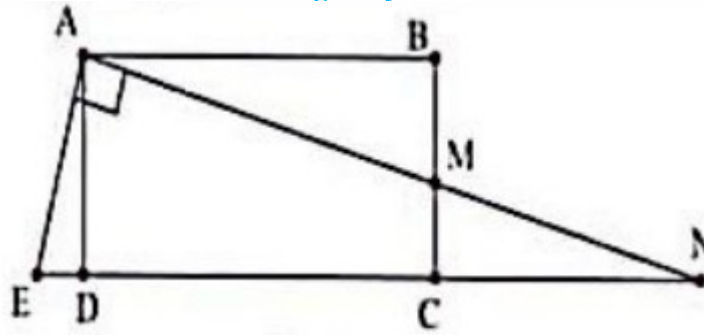
$$AB = 2a\sqrt{2}$$

$$\text{+ Ta có: } \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{2a\sqrt{2}}{3a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$A = \frac{2\sin B - 3\cos B}{2\sin B + 3\cos B} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}}{2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{2 - 6\sqrt{2}}{2 + 6\sqrt{2}} = \frac{-19 + 6\sqrt{2}}{17}$$

Khi đó:

4.2.a



Ta có: $\angle EAD = \angle BAM$ (vì cùng phụ với $\angle DAM$)

$\angle EDA = \angle MBA$ (cùng bằng 90°)

Nên $\triangle DAE \sim \triangle BAM$ (g.g)

$$\frac{AE}{AM} = \frac{AD}{AB} = k$$

Suy ra: $AE = k \cdot AM$ (1)

Chúng minh được :

Tam giác AEN vuông tại A, đường cao AD có $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{k^2 \cdot AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2}$ không đổi

4.2.b

+) Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$k \cdot AM + AN \geq 2 \cdot \sqrt{k \cdot AM \cdot AN}$$

Dấu “=” xảy ra khi $AN = k \cdot AM$ (1)

+) Theo bất đẳng thức Cô si ta lại có:

$$\frac{1}{k^2 \cdot AM^2} + \frac{1}{AN^2} \geq 2 \cdot \frac{1}{k \cdot AM \cdot AN}$$

Dấu “=” xảy ra khi $AN = k \cdot AM$

Mà theo câu a thì $\frac{1}{k^2 \cdot AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2}$

$$\text{Suy ra } 2 \cdot \frac{1}{k \cdot AM \cdot AN} \leq \frac{1}{AD^2}$$

$$\text{Suy ra } k \cdot AM \cdot AN \geq 2 \cdot AD^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $k \cdot AM + AN \geq 2 \cdot \sqrt{k \cdot AM \cdot AN} \geq 2\sqrt{2} \cdot AD$

Dấu “=” xảy ra khi $AN = k \cdot AM$ khi $\frac{AN}{AM} = k$

Do $AB \parallel CD$ suy ra tam giác ABM đồng dạng với tam giác NCM

$$\text{Suy ra } \frac{MB}{MC} = \frac{AM}{MN}$$

$$\frac{MB}{MB+MC} = \frac{AM}{AM+MN}$$

$$\frac{MB}{BC} = \frac{AM}{AN} = \frac{1}{4}$$

$$MB = \frac{BC}{4}$$

$$MB = \frac{BC}{4}$$

Vậy để $kAM + AN$ đạt giá trị nhỏ nhất thì trên cạnh BC xác định điểm M sao cho:

Khi đó giá trị của $k \cdot AM + AN = 2\sqrt{2}AD$

Câu 5:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \quad (x, y > 0)$$

Chứng minh:

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2} \geq \frac{4}{(a+b)^2} = 4 \quad (1)$$

Mà $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ suy ra $1 \geq 4ab$ suy ra $\frac{1}{2ab} \geq 2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} = \frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{2ab} \geq 4 + 2 = 6$$

$$a = b = \frac{1}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

**PHÒNG GD&ĐT
HUYỆN BA VÌ**

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN

Năm học: 2024 - 2025

Môn: Toán 9; Ngày thi: 16/10/2024

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

(Đề thi gồm 01 trang)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài I: (4 điểm)

Cho biểu thức: $M = \frac{x^2+2}{x^3+1} + \frac{x-1}{x^2-x+1} - \frac{x+3}{x^2+4x+3}$ với $x \neq -1; x \neq -3$

1) Rút gọn M

2) Tìm số nguyên dương x để $\frac{1}{M}$ đạt giá trị nguyên.

Bài II: (4 điểm)

Câu 1. Gia đình bác Minh thực hiện nhiều biện pháp tiết kiệm điện nên trong tháng 3, gia đình bác chỉ dùng hết 95 kWh và phải trả 161 930 đồng. Biết mức 1 sử dụng điện từ 0-50 kWh đầu

tiền, mức 2 sử dụng điện từ 51-100 kWh và giá 1 kWh ở mức 2 nhiều hơn giá 1 kWh ở mức 1 là 56 đồng. Tính giá tiền 1 kWh điện sinh hoạt ở mức 1 và mức 2.

Câu 2. Giải các phương trình

a) $\frac{x}{1-x} + \frac{1+x}{x} = \frac{-1}{2}$

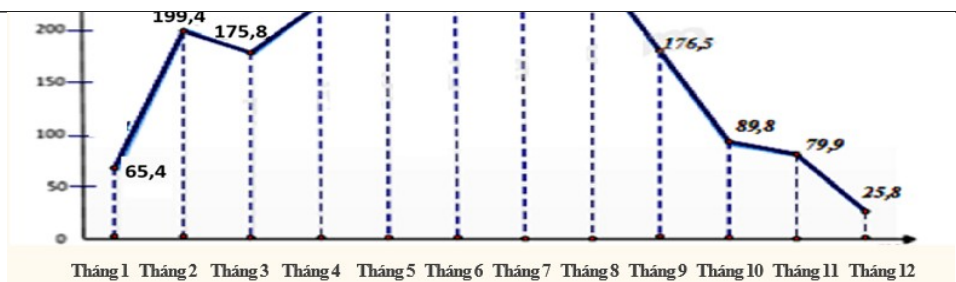
b) $(x-24)^3 + (x-25)^3 = (2x-49)^3$

Bài III: (3 điểm)

Câu 1.

Biểu đồ hình bên biểu diễn số giờ nắng của các tháng trong năm 2022 của thành phố Huế.

Tính số giờ nắng trung bình của các tháng trong năm 2022 của thành phố Huế.



Câu 2. Trong hộp có chứa 2024 viên bi màu (mỗi viên bi chỉ có đúng 1 màu) trong đó có 800 viên bi màu đỏ, 700 viên bi màu xanh, 507 viên bi màu tím và 17 viên bi còn lại là các viên bi màu vàng hoặc màu trắng (mỗi màu có ít nhất 1 viên).

a) Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Tính xác suất để lấy được viên bi màu đỏ.

b) Người ta lấy ra từ hộp 123 viên bi bất kì. Chứng minh rằng trong số các viên bi vừa lấy ra có ít nhất 36 viên bi cùng màu.

Bài IV: (6 điểm)

Câu 1. Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ BH vuông góc với AC (H thuộc AC). Gọi M là trung điểm của AH, K trung điểm của CD, N là trung điểm của BH.

a) Chứng minh tứ giác MNCK là hình bình hành

b) Tính số đo góc BMK.

c) Chứng minh rằng tồn tại điểm I sao cho khoảng cách từ điểm I đến các điểm B, M, K, C là bằng nhau.

Câu 2. Một mảnh vườn hình thang, đáy nhỏ có độ dài 4m và đáy lớn có độ dài 12m, hai góc kề đáy lớn lần lượt bằng 60° và 30° . Tính diện tích của mảnh vườn.

Bài V: (3 điểm)

Câu 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình.

$$2x^2 + y^2 - 2xy + 10x + 15 = 0$$

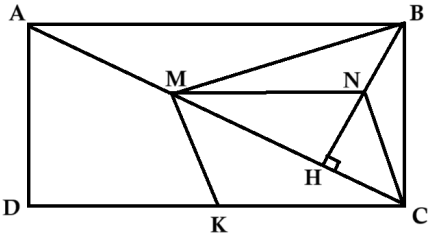
Câu 2. Cho n là số nguyên dương có chữ số tận cùng bằng 3. Chứng minh rằng có một số nguyên dương m chia hết cho n sao cho trong biểu diễn thập phân của số m chỉ xuất hiện chữ số 1.

-----Hết-----

Họ tên thí sinh.....SBD.....

(Lưu ý: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
Bài I: (4 điểm)	1. Rút gọn được $M = \frac{x}{x^2 - x + 1}$	3 đ
	2. Biểu diễn được $\frac{1}{M} = \frac{x^2 - x + 1}{x} = x - 1 + \frac{1}{x}$ Tìm được $x = 1$ (Thỏa mãn điều kiện)	0,5 0,5
Bài II: (4 điểm)	Câu 1. Gọi giá tiền 1 kWh điện sinh hoạt ở mức 1 và mức 2 lần lượt là: x, y ($x > 0, y > 0$; đơn vị: đồng) $\begin{cases} 50x + 45y = 161930 \\ y = x + 56 \end{cases}$ Lập được hệ phương trình Giải hệ phương trình trên có $x = 1678$ và $y = 1734$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy giá tiền 1 kWh điện sinh hoạt ở mức 1 và mức 2 lần lượt là 1678 đồng và 1734 đồng.	1 đ 1 đ
	Câu 2. a) Tìm đúng điều kiện $x \neq 1; x \neq 0$ Tìm được $x = -1; x = 2$ So sánh với điều kiện và kết luận b. Đặt $x - 24 = a$ và $x - 25 = b$. Ta có $a^3 + b^3 = (a + b)^3$ hay $3ab(a + b) = 0$ (*). Từ (*) ta có $a = 0; b = 0$ hoặc $a = -b$ Tìm được nghiệm $x = 24; x = 25$ và $x = \frac{49}{2}$	0,25 đ 0,5 đ 0,25 đ 0,5 đ 0,5 đ
Bài III: (3 điểm)	Câu 1. Tổng số giờ nắng của 12 tháng trong năm 2022 ở thành phố Huế là: $65,4 + 199,4 + 175,8 + 224,8 + 284,9 + 259,1 + 251,7 + 263,3 + 176,5 + 89,8 + 79,9 + 25,8 = 2096,4$. Số giờ nắng trung bình của các tháng trong năm 2022 của thành phố Huế là: $2096,4 : 12 = 174,7$ giờ.	1,0

	<p>Câu 2.</p> <p>a) Xác suất của biến cố lấy được viên bi màu đỏ là: $\frac{800}{2024} = \frac{100}{253}$</p>	1,0
	<p>b) Khi lấy 123 viên bi bất kì ta có thể lấy ít nhất $123 - 17 = 106$ viên bi gồm 3 màu: đỏ, xanh, tím.</p> <p>Ta có $106:3 = 35$ dư 1</p> <p>Vậy trong số các viên bi vừa lấy ra có ít nhất $35+1= 36$ viên bi cùng màu.</p>	1,0
<p>Bài IV: Câu 1 (6 điểm)</p>	 <p>a) Có $MN \parallel AB$ và $MN = \frac{1}{2}AB$. Lại có $AB \parallel KC$ suy ra $MN \parallel KC$ (1)</p> <p>Mặt khác, $MN = KC = \frac{1}{2}AB$ (2).</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra tứ giác MNCK là hình bình hành.</p>	0,25 0,75 0,5
	<p>b) Vì tứ giác MNCK là hình bình hành.</p> <p>Do đó MN vuông góc với BC. Suy ra N là trực tâm tam giác BNC (do $BH \perp AC$ và $MN \perp BC$).</p> <p>Từ đó ta có $CN \perp MB$. Mặt khác $CN \parallel MK$, suy ra $KM \perp MB$.</p> <p>Vậy số đo góc BMK bằng 90°.</p>	0,5 1,0

c)

Gọi I là trung điểm của BK. Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ta có:

$$MI = CI = IB = IK = \frac{BK}{2}$$

Vậy khoảng cách từ I đến các điểm B,M,K,C bằng nhau.

1,0

Câu 2.

Mô hình hóa được bài toán qua hình vẽ

Gọi O là giao điểm của DA và CB

Ta có $\triangle ODC$ vuông tại O

Ta có $S_{OCD} = \frac{1}{2} OC \cdot OD$ mà $OC = DC \cdot \sin 30^\circ$; $OD = CD \cdot \sin 60^\circ$

$$\text{Nên } S_{OCD} = \frac{CD^2 \sqrt{3}}{8} = 18\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

$$\text{Tương tự } S_{OAB} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{8} = 2\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

$$\text{Suy ra } S_{ABCD} = 16\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

Kết luận...

0,5

0,5

0,5

0,5

Bài V: (3 điểm)

Câu 1)

-Biến đổi được phương trình về dạng $(x+5)^2 + (x-y)^2 = 10$

- Từ đó suy ra các trường hợp

$x+5$	1	1	-1	-1	3	-3	3	-3
-------	---	---	----	----	---	----	---	----

1,0

	$x-y$	3	-3	3	-3	1	1	-1	-1	
	x	-4	-4	-6	-6	-2	-8	-2	-8	0,75
	y	-7	-1	-9	-3	-3	-9	-1	-7	
	Kết luận:									0,25
	Câu 2) Xét $n+1$ số: $m_1=1; m_2=11; m_3=111; \dots m_n=\overline{11\dots1}$ gồm n chữ số 1). +) Nếu có một số m_k trong n số trên mà chia hết cho n thì ta có ĐPCM. +) Giả sử không có số nào trong n số trên là chia hết cho n . Khi đó tồn tại hai số $m_k, m_q (1 \leq k < q \leq n)$ có cùng số dư khi chia cho n . Suy ra: $m_q - m_k = m_{q-k} \cdot 10^k$ chia hết cho n . Do $UCLN(n, 10) = 1$ nên m_{q-k} chia hết cho n . Ta có ĐPCM.									1,0

Lưu ý: Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa!

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO
TẠO
HẢI PHÒNG**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI
CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ CẤP
THCS**

NĂM HỌC 2024 – 2025

ĐỀ THI MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian phát đề).

(Đề thi gồm 22 câu; 0127 trang)

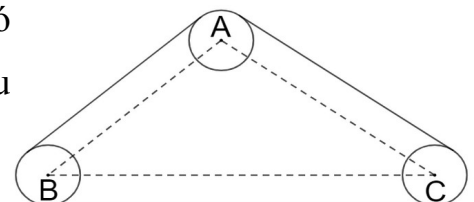
Ngày thi: 15/01/2025

Họ và tên thí sinh:..... Số báo
danh:.....

Mã đề thi 101

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho ba bánh xe hình tròn có tâm lần lượt là A, B, C có cùng bán kính bằng $1dm$. Ba bánh xe đó được nối với nhau



bởi một dây cua – roa không giãn, quay không trượt, được căng như hình vẽ. Biết $AB = 7dm; AC = 8dm; BC = 12dm$.

Chiều dài của dây cua – roa xấp xỉ là: (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười, lấy $P = 3,14$).

- A. $30,1dm$. B. $31,1dm$. C. $33,3dm$. D. $34,3dm$.

Câu 2: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ mx - y = 4 \end{cases}$$
 (m là tham số). Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $x_0 = |y_0|$ thì giá trị của m là:

- A. $m = \frac{4}{5}$. B. $m = \frac{7}{5}$. C. $m = \frac{5}{7}$. D. $m = \frac{1}{5}$.

Câu 3: Cho $\triangle ABC$ nhọn, có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Nếu $HD = \frac{1}{4}AD$ thì giá trị của biểu thức $\tan \angle ABC \cdot \tan \angle ACB$ là:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. 4. C. $\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 4: Tổng các nghiệm của phương trình $x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - (x + 1)\sqrt{3x + 1}$ là:

- A. 1. B. 0. C. 2. D. - 1.

Câu 5: Cho các số thực dương a, b và c thỏa mãn $(a + c)(2b + c) = 4c^2$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a}{2b + 3c} + \frac{2b}{a + 3c} + \frac{2ab}{2bc + ca}$ là:

- A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{41}{30}$.

Câu 6: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3AD = 9a (a > 0)$. Đường thẳng vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng AB tại E . Lấy điểm M trên cạnh $AB (M \neq A, M \neq B)$. Các đường thẳng CM và

AD cắt nhau tại N . Gọi S_1 là diện tích của $\triangle CME$ và S_2 là diện tích của $\triangle DAMN$. Nếu $\frac{S_1}{S_2} = \frac{15}{8}$ thì độ dài đoạn thẳng AM là:

- A. a . B. $2a$. C. $4a$. D. $\frac{3}{2}a$.

Câu 7: Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $x^2 + xy - 2y - x - 7 = 0$. Tổng tất cả các giá trị của x là:

A. 4.

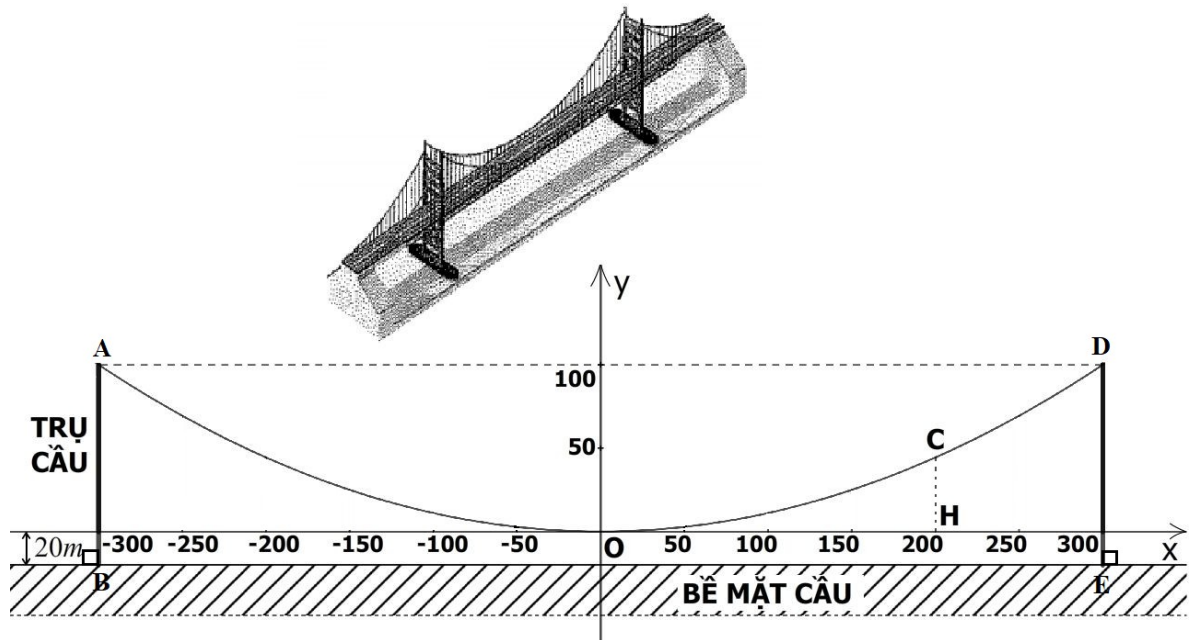
B. 0.

C. 8.

D. 6.

Câu 8: Giả sử một dây cáp của một cây cầu treo có dạng Parabol $(P): y = ax^2 (a < 0)$ trong hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Ở đó Ox song song với bề mặt của cây cầu. Biết rằng, hai điểm cao nhất của dây cáp cách nhau $600m$ và đều cách bề mặt của cây cầu $120m$. Điểm thấp nhất O của dây cáp cách bề mặt của cây cầu $20m$. Nếu C là một điểm nằm trên dây cáp, H là hình chiếu của C trên trục Ox , $OH = 200m$ thì độ dài CH xấp xỉ là:

(Giả sử bề mặt của cây cầu là bằng phẳng, kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



A. 44,4m.

B. 64,9m.

C. 44,5m.

D. 69,4m.

Câu 9: Cho biểu thức $A = n^{2026} + n^{2024} + 1$ có bao nhiêu số tự nhiên n để giá trị của A là số nguyên tố?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Câu 10: Gieo một đồng xu cân đối, đồng chất ba lần liên tiếp và quan sát sự xuất hiện của mặt sấp và mặt ngửa. Xác suất của biến cố: “Mặt ngửa xuất hiện ít nhất hai lần” là:

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{7}{8}$.

Câu 11: Trên một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích $250m^2$, người chủ dùng một phần đất hình chữ nhật $AEHK$ ($E \in AB; H \in BD; K \in AD$) để trồng hoa. Nếu phần đất trồng hoa

$AEHK$ có diện tích lớn nhất thì số tiền cần chi trả cho việc trồng hoa là bao nhiêu? Biết chi phí trồng hoa là $50000 \text{ đồng}/m^2$.

- A. 5000000 đồng. B. 3125000 đồng. C. 2500000 đồng. D. 3750000 đồng.

Câu 12: Cho phương trình $x^2 - 6mx - 2m = 0$, (x là ẩn, m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Biểu thức

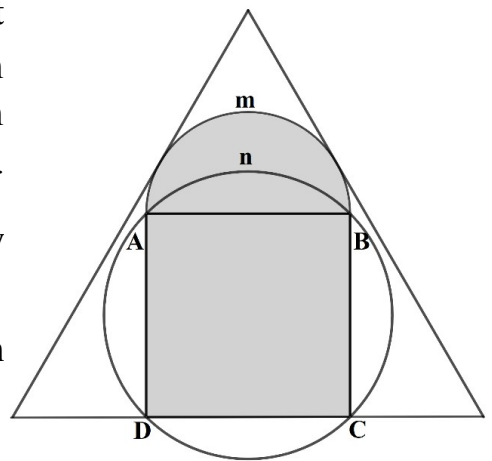
$A = \frac{m^2}{x_1^2 + 6mx_1 + 6m} + \frac{x_1^2 + 6mx_2 + 6m}{4m^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = \frac{a}{b}$ với $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*, (|a|, b) = 1$. Tổng $a + b$ là:

- A. $a + b = 1$. B. $a + b = 13$. C. $a + b = 3$. D. $a + b = 21$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình vuông $ABCD$, trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB không chứa CD , vẽ nửa hình tròn đường kính AB . Dựng tam giác đều có hai cạnh tiếp xúc với nửa hình tròn trên, cạnh còn lại chứa đoạn thẳng CD (như hình vẽ).

Cho độ dài mỗi cạnh của tam giác đều là $4\sqrt{5} \text{ cm}$, lấy $p = 3,14$.



a) Vẽ đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Diện tích hình được giới hạn bởi cung $\widehat{AMB}$ và cung $\widehat{ANB}$ là $3,75 \text{ cm}^2$.

b) Độ dài mỗi cạnh của hình vuông $ABCD$ là $2\sqrt{5} \text{ cm}$.

c) Diện tích của tam giác đều là $20\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

d) Diện tích phần được tô đậm trên hình vẽ xấp xỉ là $20,9 \text{ cm}^2$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 2: Trong một hộp kín có 6 viên bi màu đỏ, 4 viên bi màu xanh và 8 viên bi màu vàng có kích thước và khối lượng như nhau.

a) Chọn ngẫu nhiên 1 viên bi trong hộp đó. Xác suất chọn được 1 viên bi màu xanh là $\frac{2}{9}$.

b) Thêm vào hộp đó a viên bi màu đỏ, b viên bi màu xanh và c viên bi màu vàng (có cùng kích thước và khối lượng với các viên bi đã có trong hộp; $a, b, c \in \mathbb{N}^*$) sao cho xác suất chọn được trong hộp lúc này một viên bi mỗi màu: đỏ, xanh và vàng đều không đổi so với ban đầu. Giá trị nhỏ nhất của tổng $a + b + c$ là 18.

c) Chọn ngẫu nhiên 7 viên bi trong hộp đó. Có 2 kết quả thuận lợi cho biến cố: “Trong 7 viên bi được chọn có số lượng viên bi màu đỏ bằng số lượng viên bi màu vàng”.

d) Thêm vào hộp đó x viên bi màu trắng ($x \in \mathbb{N}^*$) có cùng kích thước và khối lượng với các viên bi trong hộp, sau đó chọn ngẫu nhiên 1 viên bi trong hộp. Nếu xác suất chọn được 1 viên bi màu trắng là $\frac{1}{3}$ thì x là số lẻ.

Câu 3: Cho A, B là hai điểm cố định và $AB = 8\text{cm}$, M là một điểm di động trên đoạn thẳng AB ($M \neq A, M \neq B$). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ hai hình vuông $AMCD$ và $BMEF$.

Gọi N và P lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AE và BC ; AC và BE .

a) Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Nếu CO là tia phân giác của $\angle ACM$ thì $MB = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(\text{cm})$.

b) Các điểm A, N, P, B cùng thuộc một đường tròn.

c) $MN^2 = ND \cdot DF$.

d) Độ dài lớn nhất của đoạn thẳng MN là 4cm .

Câu 4: Cho $m \in \mathbb{N}^*; p, q$ là hai số nguyên tố thỏa mãn: $2^m \cdot p^2 + 1 = q^5$ (1).

a) Có hai bộ số (m, p, q) thỏa mãn (1).

b) Ta luôn có $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 \mid p$.

c) Khi $p = 2$ có duy nhất cặp số $(m_0; q_0)$ thỏa mãn (1).

d) q luôn là số lẻ.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Chú ý: Trong các bài tính toán, chỉ làm tròn ở phép tính cuối cùng.

Câu 1: Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = (10 - 4m)x - m - 7$ (m là tham số) và parabol $(P): y = 3x^2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là các số dương?

Câu 2: Có bao nhiêu cặp số nguyên (x, y) là nghiệm của phương trình $(y - 1)^4 + y^4 = (x - 1)^2 + x^2$?

Câu 3: Có bao nhiêu bộ 3 số hữu tỉ dương (a, b, c) sao cho $a + \frac{1}{b}, b + \frac{1}{c}, c + \frac{1}{a}$ đều là các số nguyên?

Câu 4: Cho đường tròn $(O; R)$ nội tiếp hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi G là tiếp điểm của đường tròn $(O; R)$ với cạnh CD . Biết $\frac{AB}{3} = \frac{4R}{3}$ và $\frac{BC}{2} = \frac{5R}{2}$. Tỉ số $\frac{GD}{3GC}$ bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 5: Cho hai đường tròn $(O; 12\text{cm})$ và $(O'; 9\text{cm})$ cắt nhau tại A, B sao cho OA là tiếp tuyến của $(O'; 9\text{cm})$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng bao nhiêu? (Đơn vị tính: cm ; Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 6: Chọn ra 56 ô vuông bất kỳ trong một bàn cờ vua (cờ quốc tế) gồm 64 ô vuông đen, trắng. Gọi A là biến cố: “Trong 56 ô vuông được chọn chứa đúng 32 ô vuông màu đen sao

cho mỗi hàng và mỗi cột đều có đúng 7 ô vuông”. Xác suất của biến cố A có dạng $P(A) = \frac{a}{b}$

với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $\frac{b}{2010a}$ là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

----- **HẾT** -----

(Thí sinh không sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm).

Cán bộ coi thi số 1:..... Cán bộ coi thi số 2:
.....

**PHÒNG GD&ĐT QUỲNH ĐỀ THI CHỌN ĐỘI SƠ TUYỂN HỌC SINH GIỎI
LƯU LỚP 9 NĂM HỌC 2024 – 2025**

THÀNH PHỐ CẦN THƠ

Môn thi: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

Thời gian thi: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1: (2,0 điểm)

a. Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} = \frac{1}{3c}$ Chứng minh $a^2 + 4b^2 + 9c^2$ là số chính phương.

b. Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $3(x^2 + y^2) - 5(x + y) = 0$

Câu 2: (6,0 điểm)

a. Giải phương trình: $(x^2 + 1)^2 + (3x + 2)x^2 + 3x = 0$

b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 20 - 2xy \\ (x - y)(4x^2 + 5y^2 - 20) = 1 \end{cases}$$

Câu 3: (2,0 điểm)

Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng: $\frac{3a+b}{2a+c} + \frac{3b+c}{2b+a} + \frac{3c+a}{2c+b} \geq 4$

Câu 4: (7,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD, O$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi M là điểm trên cạnh

BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $\angle MAN = 45^\circ$ (M không trùng B và C). AM cắt DC tại I. BD cắt AM tại E.

$$\cos^2 \angle MAN + \frac{AB^2}{AI^2} = 1$$

a. Chứng minh

b. Chứng minh

$$AB^2 + DN^2 = 2AE^2$$

c. Gọi P là giao điểm của OM và BI . Chứng minh các đường thẳng AB, DM và CP đồng quy.

Câu 5: (2,0 điểm)

Trong một chiếc hộp có 100 tấm thẻ giống nhau, được đánh số tự nhiên liên tiếp từ 10 đến 109. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ trong hộp. Tính xác suất của các biến cố sau:

a. A: Rút được tấm thẻ mà tổng các chữ số trên thẻ đó là một số chính phương.

b. B: Rút được tấm thẻ mà ghi số lớn hơn hoặc bằng hai chữ số tận cùng của số 7^{2026} .

Câu 6: (1,0 điểm)

Mỗi điểm trong mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác nửa đều (tam giác vuông có một góc 60°) có cạnh huyền bằng 2025 và 3 đỉnh được tô cùng màu.

HƯỚNG DẪN

Câu		Nội dung cần đạt	Điểm
Câu 1: 2.0 điểm	1.a 1.0 điểm	Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} = \frac{1}{3c}$ Chứng minh $a^2 + 4b^2 + 9c^2$ là số chính phương	
		<p>Vì $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} = \frac{1}{3c}$, nên $\frac{2b+a}{2ab} = \frac{1}{3c}$</p> <p>$6bc + 3ac = 2ab$</p> <p>$2ab - 6bc - 3ac = 0$</p> <p>$2(2ab - 6bc - 3ac) = 0$</p> <p>$a^2 + 4b^2 + 9c^2 = a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 2(2ab - 6bc - 3ac)$</p> <p>$= (a + 2b - 3c)^2$</p> <p>Vậy $a^2 + 4b^2 + 9c^2$ là số chính phương</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>

	1 điểm	Giải phương trình nghiệm nguyên dương $3(x^2 + y^2) - 5(x + y) = 0$	
		$3(x^2 + y^2) - 5(x + y) = 0$ $x(3x - 5) = y(5 - 3y)$ - Nếu $3x - 5 > 0$, thì $5 - 3y > 0$, suy ra $y = 1$ (vì y là số nguyên dương) với $y = 1$ thì $x = 2$ - Nếu $3x - 5 \leq 0$, suy ra $x = 1$ vì x nguyên dương với $x = 1$ thì $y = 2$ Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là (1;2),(2;1)	0.25 0.25 0.25 0.25
Câu 2: 6.0 điểm	3.0 2.a điểm	Giải phương trình $(x^2 + 1)^2 + (3x + 2)x^2 + 3x = 0$	
		$(x^2 + 1)^2 + (3x + 2)x^2 + 3x = 0$ $(x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) + 2x^2 = 0$ $(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 + 2x) = 0$ Nếu $x^2 + 1 + x = 0$ (phương trình vô nghiệm) Nếu $x^2 + 2x + 1 = 0, x = 1$ Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$	0.5 1.0 0.5 1.0
	3.0 điểm	Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 20 - 2xy \\ (x - y)(4x^2 + 5y^2 - 20) = 1 \end{cases}$	
		$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 20 - 2xy \\ (x - y)(4x^2 + 5y^2 - 20) = 1 \end{cases} \quad \#(2)$ Từ phương trình (1), ta được $3x^2 + 4y^2 + 2xy = 20$ Thay vào phương trình (2), $(x - y)(4x^2 + 5y^2 - 3x^2 - 4y^2 - 2xy) = 1$	0.5

		$(x - y)^3 = 1, \text{ suy ra } x = y + 1$ Thay vào (1), $3(y + 1)^2 + 4y^2 + 2(y + 1)y - 20 = 0$ $9y^2 + 8y - 17 = 0$ $y = 1 \text{ hoặc } y = -\frac{17}{9}$ $y = 1 \text{ thì } x = 2$ $y = -\frac{17}{9} \text{ thì } x = -\frac{8}{9}$ $(2; 1), \left(-\frac{8}{9}; -\frac{17}{9}\right)$ <p>Vậy hệ phương trình có hai nghiệm</p>	<hr/> 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5
Câu 3: 2.0 điểm	2.0 điểm	<p>Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:</p> $\frac{3a+b}{2a+c} + \frac{3b+c}{2b+a} + \frac{3c+a}{2c+b} \geq 4$	
		<p>Đặt $P = \frac{3a+b}{2a+c} + \frac{3b+c}{2b+a} + \frac{3c+a}{2c+b}$</p> $P - 3 = \frac{3a+b}{2a+c} - 1 + \frac{3b+c}{2b+a} - 1 + \frac{3c+a}{2c+b} - 1$ $P - 3 = \frac{a+b-c}{2a+c} + \frac{b+c-a}{2b+a} + \frac{c+a-b}{2c+b}$ $P - 3 = \frac{(a+b-c)^2}{(2a+c)(a+b-c)} + \frac{(b+c-a)^2}{(2b+a)(b+c-a)}$ $+ \frac{(c+a-b)^2}{(2c+b)(c+a-b)}$ $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ <p>Áp dụng bất đẳng thức</p> $P - 3 = \frac{(a+b-c)^2}{(2a+c)(a+b-c)} + \frac{(b+c-a)^2}{(2b+a)(b+c-a)}$ $+ \frac{(c+a-b)^2}{(2c+b)(c+a-b)}$ $P - 3 \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1$ <p>Suy ra $P \geq 4$.</p> <p>Dấu = xảy ra khi $a = b = c$</p>	

4.a 2,5đ	Chúng minh $\cos^2 \angle CAN + \frac{AB^2}{AI^2} = 1$	
	Ta có $\angle CAN + \angle CAM = 45^\circ, \angle MAB + \angle CAM = 45^\circ,$ $\angle CAN = \angle MAB, \angle MAB = \angle AID$ (so le trong)	0.5
	$\cos \angle CAN = \cos \angle AID = \frac{DI}{AI}$	0.5
	$\cos^2 \angle CAN = \frac{DI^2}{AI^2}$	
	$\cos^2 \angle CAN + \frac{AB^2}{AI^2} = \frac{DI^2}{AI^2} + \frac{AB^2}{AI^2}$ $= \frac{DI^2 + AB^2}{AI^2} = \frac{DI^2 + AD^2}{AI^2} = 1$	0.5
4.2 2,5đ	Chúng minh $AB^2 + DN^2 = 2AE^2$	
	Chúng minh được: $\angle ANC \sim \angle AEB$ (g – g)	1.0
	$\frac{AN}{AE} = \frac{AC}{AB}$	0.5
	Chúng minh được: $\angle ANE \sim \angle ACB$ (c – g – c)	
	$\angle AEN = \angle ABC = 90^\circ$	
4.c 2,5đ	Tam giác AEN vuông cân tại E	0.5
	$2AE^2 = AN^2 = AD^2 + DN^2 = AB^2 + DN^2$	0.5
4.c 2,5đ	Gọi P là giao điểm của OM và BI. Chúng minh các đường thẳng AB, DM và CP đồng quy.	
	Gọi giao điểm của AB và DM là K	

		<p>Cần chứng minh C, P, K thẳng hàng</p> <p>Kẻ CP' vuông góc với BI tại P'. Cần chứng minh O, M, P' thẳng hàng</p> <p>Ta có $\triangle BCP' \sim \triangle BIC (g - g)$, suy ra $BC^2 = BP' \cdot BI$</p> <p>Lại có : $\triangle BOC \sim \triangle BCD (g - g)$, suy ra $r^2 C^2 = BO \cdot BD$</p> <p>$BO \cdot BD = BP' \cdot BI$</p> <p>$\triangle BOP' \sim \triangle BID (c - g - c) \Rightarrow \angle BP'O = \angle BDI = 45^\circ$ $AB // CI$ suy ra</p> $\frac{AB}{CI} = \frac{BM}{MC} \text{ hay } \frac{BC}{CI} = \frac{BM}{MC}$ <p>Mà $\triangle BCP' \sim \triangle BIC (g - g)$, suy ra $\frac{BC}{CI} = \frac{BP'}{CP'} = \frac{BM}{MC}$</p> $\frac{BP'}{CP'} = \frac{BM}{MC}$ <p>$P'M$ là tia phân giác của $\angle BP'C$</p> <p>$\angle BP'M = 45^\circ$ mà $\angle BP'O = 45^\circ$ suy ra O, M, P' thẳng hàng P' trùng P suy ra CP vuông góc BI (1)</p>	<p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p>
--	--	--	----------------------------------

		<p>$BK // CD$, suy ra $\frac{BK}{CD} = \frac{BM}{MC}$</p> <p>$AB // CI$, suy ra $\frac{AB}{CI} = \frac{BM}{MC}$</p> $\frac{BK}{CD} = \frac{AB}{CI} = \frac{BC}{CI} = \frac{BK}{BC}$ <p>$\Rightarrow \triangle BKC \sim \triangle CBI (c - g - c)$, suy ra $\angle BCK = \angle CIB$</p> <p>Suy ra CK vuông góc Với BI (2)</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra : C, P, K thẳng hàng suy ra đpcm</p>	0.5
Câu 5: 2.0	5.a 1 điểm	<p>Tính xác suất của biến cố:</p> <p>Rút được tám thẻ mà tổng các chữ số trên thẻ đó là một số chính phương</p>	

điểm		<p>Trong hộp có tất cả $(109 - 10) : 1 + 1 = 100$ thẻ mà 100 thẻ này giống nhau nên có 100 kết quả có thể xảy ra và chúng đồng khả năng.</p> <p>Có 20 thẻ mà tổng các chữ số trên thẻ đó là số chính phương gồm 10 ; 13 ; 18 ; 22 ; 27 ; 31 ; 36 ; 40 ; 45 ; 54 ; 63 ; 72 ; 79 ; 81 ; 88;90;97;100;103;108.</p> <p>Xác suất để rút được thẻ có tổng các chữ số trên thẻ là số chính phương là :</p> $P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$	0.25 0.25 0.5
5.b 1.0 điểm		<p>Tính xác suất của biến cố:</p> <p>Rút được tám thẻ mà ghi số lớn hơn hoặc bằng hai chữ số tận cùng của số 7^{2026}</p>	
		<p>Ta có $7^4 = 2401$, các số có hai chữ số cuối 01 nâng lên lũy thừa nào cũng có 2 chữ số tận cùng 01</p> $7^{2026} = 7^{4 \cdot 506 + 2} = 7^{4 \cdot 506} \cdot 7^2$ $= 7^{4 \cdot 506} \cdot 49 \text{ có hai chữ số tận cùng là } 49$ <p>Suy ra số thẻ có số lớn hơn hoặc bằng 49 là $(109 - 49) : 1 + 1 = 61$</p> <p>Suy ra có 61 kết quả thuận lợi cho biến cố B</p> <p>Xác suất để lấy được thẻ có số lớn hơn hoặc bằng hai chữ số tận cùng của 7^{2026} là:</p> $P(B) = \frac{61}{100}$	0.25 0.25 0.25
Câu 6: 1.0 điểm		<p>Mỗi điểm trong mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác nửa đều (tam giác vuông có một góc 60°) có cạnh huyền bằng 2025 và 3 đỉnh được tô cùng màu.</p>	

ĐỀ CHÍNH THỨC**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS THÀNH PHỐ LÀO CAI
NĂM HỌC 2024-2025****Môn: Toán****Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)****Ngày thi 03 tháng 12 năm 2024****(Đề thi gồm 06 câu, in trong 01 trang)**

Câu 1 (5,0 điểm)

1.1. Cho biểu thức:

$$A = \left(2 - \frac{2\sqrt{xy} + 1}{1 + \sqrt{xy}} + \frac{1 + \sqrt{xy} + 2\sqrt{x}}{1 - xy} \right) : \left(\frac{\sqrt{xy} - \sqrt{x}}{\sqrt{xy} + 1} - \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}{\sqrt{xy} - 1} \right)$$

với

 $x > 0, y > 0, xy \neq 1$, (2)

a) Rút gọn biểu thức A .

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 12$$

b) Cho , tìm giá trị lớn nhất của A .

1.2. Xét ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{c^2 + 1}}{b} - \frac{ac}{c + \sqrt{c^2 + 1}}$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{ab} + a\sqrt{bc} + 1} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{b} + 1} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{c} + 1}$$

Câu 2 (2,0 điểm). Khởi động một giờ học, cô An cho lớp chơi trò chơi "Quay số nhận quà". Vòng quay số gồm 6 ô gắn các số tự nhiên từ 1 đến 6 (mỗi số gắn trên một ô). Người chơi được quay số 3 lần. Sau 3 lần quay, nếu kết quả nhận được có đủ các chữ số 3, 1, 2 thì sẽ được nhận quà. Hãy tính xác suất để người chơi được nhận quà.

Câu 3 (2,0 điểm). Bình khởi hành từ thành phố Lào Cai về huyện Bảo Thắng. Sau đó 5 phút, Minh và An khởi hành từ huyện Bảo Thắng về thành phố Lào Cai. Trên đường đi Bình gặp Minh rồi gặp An ở hai địa điểm cách nhau 6 km . Tính vận tốc mỗi người? Biết rằng thành phố Lào Cai cách huyện Bảo Thắng 33 km ; vận tốc của Bình gấp rưỡi vận tốc của An và

bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc của Minh.

Câu 4 (2,0 điểm)4.1. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a + b + ab = 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^2 + b^2.$$

4.2. Với $a, b, c > 0$, $3bc - ac - ab = 1$, chứng minh rằng $a^3b^3c^3 + b^3 + c^3 \geq 3b^3c^3$.**Câu 5 (3,0 điểm)**5.1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 3$ thì $A = n^3 - n^2 - n - 2$ không phải là số nguyên tố.5.2. Cho X, Y là các số nguyên thỏa mãn $xy(x-y)+1$ chia hết cho 3 . Chứng minh $x+y$ chia hết cho 3 .5.3. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình: $6x^2 - xy - 2y^2 + 4x + 2y - 7 = 0$.**Câu 6 (6,0 điểm)**

Cho tam giác ABC nhọn ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AH . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ

hai là M . Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Đường thẳng MK cắt các đường thẳng AH và BC thứ tự tại P và Q . Gọi F là giao điểm của AM và BC .

a) Chứng minh: $FA.FM = FH.FQ$.

b) Chứng minh: $\square AKP$ cân;

c) Chứng minh: $MB^2 = MK.MQ$ và tứ giác QIHP nội tiếp.

d) Đường thẳng KI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D . Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại R . Gọi E là trung điểm của AR . Chứng minh ba điểm Q, I, E thẳng hàng.

-----Hết-----

GIẢI ĐỀ CHÍNH THỨC
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ LÀO CAI
NĂM HỌC 2024 - 2025

Môn: Toán

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Ngày thi 03 tháng 12 năm 2024

(Đề thi gồm 06 câu, in trong 01 trang)

Câu 1 (5,0 điểm)

$$A = \left(2 - \frac{2\sqrt{xy} + 1}{1 + \sqrt{xy}} + \frac{1 + \sqrt{xy} + 2\sqrt{x}}{1 - xy} \right) : \left(\frac{\sqrt{xy} - \sqrt{x}}{\sqrt{xy} + 1} - \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}{\sqrt{xy} - 1} \right) \quad \text{với}$$

1.1. Cho biểu thức:
 $x > 0, y > 0, xy \neq 1$, (2)

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 12$, tìm giá trị lớn nhất của A.

1.2. Xét ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{c^2 + 1}}{b} - \frac{ac}{c + \sqrt{c^2 + 1}}$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{ab} + a\sqrt{bc} + 1} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{b} + 1} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{c} + 1}$$

Giải

1.1

a) Rút gọn A ;

$$A = \left(\frac{2(1 - xy) - (2\sqrt{xy} + 1)(1 - \sqrt{xy}) + (1 + \sqrt{xy} + 2\sqrt{x})}{1 - xy} \right) : \left(\frac{(\sqrt{xy} - \sqrt{x})(\sqrt{xy} - 1) - (\sqrt{xy} + \sqrt{x})(\sqrt{xy} - 1)}{xy - 1} \right)$$

$$= \frac{2(1 + \sqrt{x})}{1 - xy} : \frac{2\sqrt{xy}(1 + \sqrt{x})}{1 - xy} = \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

b) Ta có

$$12 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \dots \frac{2}{\sqrt[4]{xy}} = 2 \cdot \sqrt{A}$$

$$\Rightarrow 6 \dots \sqrt{A} \Rightarrow 36 \dots A$$

$$\text{GTLN} = 36 \text{ khi } x = y = \frac{1}{36}$$

A đạt

1.2

$$\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{c^2 + 1}}{b} - \frac{ac}{c + \sqrt{c^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\sqrt{c^2+1}-c}{b} - \frac{ac(-c+\sqrt{c^2+1})}{1}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{c^2+1}-c\right)\left(\frac{1}{b}-ac\right) = 0$$

Do $\left(\sqrt{c^2+1}-c\right) > |c| - c \geq 0$ nên $\frac{1}{b}-ac = 0$ hay $abc = 1$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\sqrt{ab}+a\sqrt{bc}+1} + \frac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{b}+1} + \frac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{c}+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{a}\sqrt{abc}+1} + \frac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{b}+1} + \frac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{c}+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{a}+1} + \frac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{b}+1} + \frac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{c}+1} \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{a} = x; \sqrt{b} = y; \sqrt{c} = z$. Ta có $xyz = 1$. Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1} \\ &= \frac{1}{xy+x+1} + \frac{x}{xyz+xy+x} + \frac{xy}{x^2yz+xyz+xy} = \frac{1}{xy+x+1} + \frac{x}{1+xy+x} + \frac{xy}{x+1+xy} = 1 \end{aligned}$$

Vậy $P=1$

Câu 2 (2,0 điểm). Khởi động một giờ học, cô An cho lớp chơi trò chơi "Quay số nhận quả". Vòng quay số gồm 6 ô gắn các số tự nhiên từ 1 đến 6 (mỗi số gắn trên một ô). Người chơi được quay số 3 lần. Sau 3 lần quay, nếu kết quả nhận được có đủ các chữ số 3,1,2 thì sẽ được nhận quả. Hãy tính xác suất để người chơi được nhận quả.

Giải:

Không gian mẫu có $6.6.6 = 216$ phần tử

Khả năng thuận lợi: Ta cần xác suất để kết quả 3 lần quay có chứa các chữ số 3,1 và 12 (có thể xuất hiện theo bất kỳ thứ tự nào). Tức là, ta cần 3 lần quay cho ra chính xác ba số 3,1, và 2.

Số kết quả có thể có các số 3,1, và 2 (các số này xuất hiện 3 lần trong các ô quay, và mỗi lần quay có thể là 3,1, hoặc 2).

Các kết quả có thể xảy ra theo các thứ tự khác nhau của ba số này.

Vậy số kết quả mong muốn là số cách sắp xếp ba số 3,1 số khác nhau: và 2 trong 3 lần quay, tức là số hoán vị của 3 số khác nhau :

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 12$$

$$P = \frac{12}{216} = \frac{1}{18}$$

Do đó xác suất

Câu 3(2, 0 điểm). Bình khởi hành từ thành phố Lào Cai về huyện Bảo Thắng. Sau đó 5 phút, Minh và An khởi hành từ huyện Bảo Thắng về thành phố Lào Cai. Trên đường đi Bình gặp Minh rồi gặp An ở hai địa điểm cách nhau 6 km . Tính vận tốc mỗi người? Biết rằng thành

phố Lào Cai cách huyện Bảo Thắng 33 km ; vận tốc của Bình gấp rưỡi vận tốc của An và bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc của Minh.
Giải:



Gọi Lào Cai là B , Bảo Thắng là D, vị trí gặp nhau của Minh và Bình là M, của Bình và An là A

Gọi vận tốc của Bình là x km/ h , vận tốc của An là $\frac{2}{3}x$ km/ h , vận tốc của Minh là $\frac{3x}{2}$ km/ h ,

Thời gian Bình đến M gặp Minh là $y(h)(y > 0)$

$$DM = \frac{3}{2}x \left(y - \frac{1}{12} \right); BM = xy; BM + DM = 33$$

Ta có nên $20xy - x = 264$

$$DA = \frac{2}{3}x \left(y - \frac{1}{12} + \frac{6}{x} \right) = \frac{2}{3}xy - \frac{1}{18}x + 4$$

$$DM = \frac{3}{2}xy - \frac{1}{8}x$$

$$DA + 6 = DM \rightarrow \frac{2}{3}xy - \frac{1}{18}x + 4 + 6 = \frac{3}{2}xy - \frac{1}{8}x \rightarrow \frac{5}{6}xy - \frac{5}{72}x = 10$$

Từ (1) và (2) suy ra $xy = 15; x = 36$

Do đó vận tốc của Bình là 36 km/ h ; vận tốc của An là 24 km/ h , vận tốc của Minh là 54 km/ h

Câu 4 (2,0 điểm)

4.1. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a + b + ab = 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

4.2. Với $a, b, c > 0, 3bc - ac - ab = 1$. Chứng minh rằng $a^3b^3c^3 + b^3 + c^3 \geq 3b^3c^3$.

Giải

4.1

$$\left. \begin{array}{l} 2(a^2 + b^2) \\ a^2 + 4 \cdot 4a \\ b^2 + 4 \cdot 4b \end{array} \right\} \Rightarrow 3P + 8 \cdot 4(ab + a + b) = 4 \cdot 8 \rightarrow P \geq 8$$

Cách 1:

Dấu bằng khi $a = b = 2$

Cách 2:

$$\text{Giả thiết} \Rightarrow P + 2\sqrt{2}\sqrt{P} - 16 \cdot 0 \Rightarrow (\sqrt{P} - \sqrt{8})(\sqrt{P} + 4\sqrt{2}) \cdot 0 \Rightarrow P \geq 8$$

Dấu bằng khi $a = b = 2$

$$4.2 \text{ Giả thiết cho } 3bc - ac - ab = 1 \Leftrightarrow ac + ab + 1 = 3bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{1}{bc} = 3$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{b} = x, \frac{1}{c} = y, \text{ ta có } ax + ay + xy = 3$$

$$\Rightarrow (a + x + y)^2 - 3(ax + ay + xy) = 9 \Rightarrow a + x + y \geq 3$$

$$\text{Lại có } a^3 + x^3 + y^3 = (a^3 + 2) + (x^3 + 2) + (y^3 + 2) - 6 \geq 3(a + x + y) - 6 \geq 3$$

$$\Rightarrow a^3 + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq 3 \text{ hay } a^3b^3c^3 + b^3 + c^3 \geq 3b^3c^3$$

Cách 2:

$$\text{Có } 3bc = ac - ab - 1 \Leftrightarrow 3 = ad + ae + de, d = \frac{1}{b}, e = \frac{1}{c}$$

$$\text{Cần chứng minh: } a^3 + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq 3$$

$$\text{Tương đương với } a^3 + d^3 + e^3 \geq 3$$

$$\text{Ta có } 3 \leq \frac{a^3 + d^3 + 1}{3} + \frac{a^3 + e^3 + 1}{3} + \frac{d^3 + e^3 + 1}{3} \rightarrow a^3 + d^3 + e^3 \geq 3$$

Suy ra điều phải chứng minh

Câu 5(3, 0 điểm)

5.1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 3$ thì $A = n^3 - n^2 - n - 2$ không phải là số nguyên tố.

5.2. Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $xy(x - y) + 1$ chia hết cho 3. Chứng minh $x + y$ chia hết cho 3.

5.3. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình: $6x^2 - xy - 2y^2 + 4x + 2y - 7 = 0$.
Giải

$$5.1 \text{ Ta có } A = n^3 - n^2 - n - 2 = (n - 2)(n^2 + n + 1)$$

Mà $n > 3$ nên $n - 2 > 1$ và $n^2 + n + 1 > 1 \Rightarrow A$ là hợp số

$$xy(x-y) \div 3 \Rightarrow \begin{cases} x \not\equiv 0 \pmod{3} \\ y \not\equiv 0 \pmod{3} \\ x \not\equiv y \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ y \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ y \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

5.2 Do $xy(x-y) + 1 \div 3$ nên
 $\Rightarrow x+y \div 3$

5.3 Tácó

$$6x^2 - xy - 2y^2 + 4x + 2y - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+y)(3x-2y) + 2(2x+y) - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+y)(3x-2y+2) = 7$$

$2x+y$	1	y	-1	-7
$3x-2y+2$	y	1	-7	-1
x	1	13/7	-11/7	-17/7
y	-1	23/7	15/7	-15/7
	Tm	(loại)	(loại)	(loại)

Vậy $(x,y) = (1;-1)$ là nghiệm duy nhất

Cách 2:

$$6x^2 + (-y+4)x - 2y^2 + 2y - 7 = 0$$

$$\Delta = (-y+4)^2 - 24(-2y^2 + 2y - 7) = 49y^2 - 56y + 184 = (7y-4)^2 + 168$$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương tồn tại số tự nhiên Z mà :

$$\Delta = Z^2 \Rightarrow Z^2 - (7y-4)^2 = 168 \Leftrightarrow (Z+7y-4)(Z-7y+4) = 168, Z > |7y-4|$$

Do $Z+7y-4$ và $Z-7y+4$ cùng tính chẵn lẻ.

Nên ta xét các trường hợp $2 \times 84; 4 \times 42$

ta có $x = 1, y = -1$ là nghiệm duy nhất

Câu 6 (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AH. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M.

Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Đường thẳng MK cắt các đường thẳng AH và BC thứ tự tại P và Q. Gọi F là giao điểm của AM và BC.

a) Chứng minh: $FA \cdot FM = FH \cdot FQ$.

b) Chứng minh: $\square AKP$ cân;

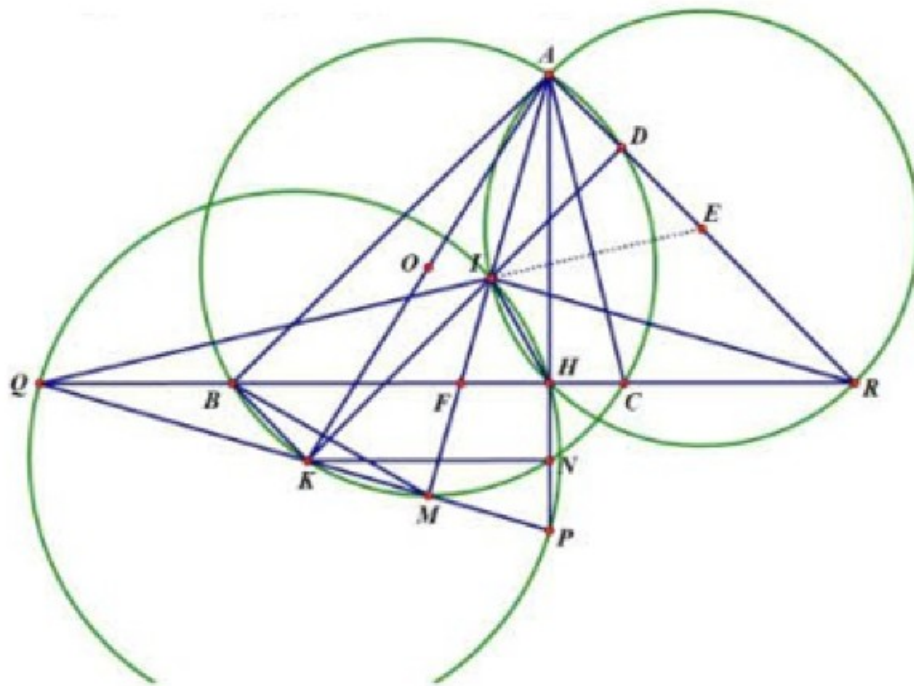
c) Chứng minh: $MB^2 = MK \cdot MQ$ và tứ giác QIHP nội tiếp.

d) Đường thẳng KI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại R. Gọi E là trung điểm của AR. Chứng minh ba điểm Q, I, E thẳng hàng.

Giải

a) Do $\angle AHQ = \angle AMQ$ nên $AHMQ$ nội tiếp $\Rightarrow \angle FAH = \angle FQM \Rightarrow \angle FAH = \angle FQM$
 $\Rightarrow \frac{FA}{FH} = \frac{FQ}{FM} \Rightarrow FA \cdot FM = FH \cdot FQ$

b) Gọi: $N = AH \cap (O) \Rightarrow KN \parallel BC$ (vì KN, BC cùng $\perp AH$)
 $\Rightarrow BK = CN$ mà M là điểm chính giữa cung BC nên $MB = MC$
 $\Rightarrow MK = MN \Rightarrow \angle MAP = \angle MKN = \angle MNK = \angle MAK$
 mà $AM \perp KP \Rightarrow \triangle AKP$ cân tại A .



c) $\angle KBM = \frac{1}{2} \text{sđ} \angle KM = \frac{1}{2} \text{sđ} \angle MN = \angle MAN = \angle QMB$

$\Rightarrow MB$ là tiếp tuyến của đường tròn $(QBK) \Rightarrow MB^2 = MK \cdot MQ$

*Ta có tính chất quen thuộc: $MI = MB$

Theo trên: $MI^2 = MP^2 = MK \cdot MQ = MP \cdot MQ$

$\Rightarrow \angle QIP = 90^\circ$ mà $\angle QHP = 90^\circ \Rightarrow QIHP$ nội tiếp

d) Ta có $\angle AR = 90^\circ - \angle AID = 90^\circ - \angle KIM = 90^\circ - \angle PIM$
 $= \angle IPQ = \angle IHQ$

$\Rightarrow AIHR$ nội tiếp $\Rightarrow \angle AIR = \angle AHR = 90^\circ$

Ta có $\widehat{AIE} = \widehat{DAI} = \widehat{IKM} = \widehat{IPQ} = \widehat{QIM}$
 $\Rightarrow Q, I, E$ thẳng hàng

PHÒNG GD & ĐT THỌ XUÂN

ĐỀ GIAO LƯU ĐỘI TUYỂN HSG CẢ TỈNH

NĂM HỌC 2024 – 2025

Môn thi: TOÁN LỚP 9 THCS

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề thi này có 01 trang, gồm 05 câu

$$A = \frac{x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} + 6}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \frac{x - 7\sqrt{x} - 8}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{2x + 10\sqrt{x} + 12}{x - \sqrt{x} - 6} \quad x \geq 0, x \neq 9$$

Câu 1 (2,0 điểm): Cho biểu thức

với . Rút

gọn A, và tìm tất cả các giá trị của để nhận giá trị nguyên.
 a, b, c $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7; a + b + c = 23; \sqrt{abc} = 3$

Câu 2 (2,0 điểm): Cho thỏa mãn

$$H = \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{b} - 6}$$

Tính giá trị biểu thức

$$9x^2 = (x^2 + x - 5)(\sqrt{3x+1} - 1)^2$$

Câu 3 (2,0 điểm): Giải phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{3x^2 + 33} + 3\sqrt{2x+y-1} = 3x+y+6 \end{cases}$$

Câu 4 (2,0 điểm): Giải hệ phương trình

$$3^x - 32 = y^2$$

Câu 5 (2,0 điểm): Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$n(n+1)+7$$

Câu 6 (2,0 điểm): Giả sử là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện không chia hết cho 7.

$$4n^3 - 5n - 1$$

Chúng minh rằng không là số chính phương.
 $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$

Câu 7 (2,0 điểm): Cho 1 hộp gồm các thẻ đánh số . Mỗi thẻ khác nhau đánh các số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 2 thẻ trong hộp. Tính xác suất của biến cố " Tích của 2 thẻ được lấy ra là một số chẵn".

(O; R)

AB, CD

Câu 8 (5,0 điểm): Cho đường tròn và hai đường kính sao cho tiếp tuyến tại A của

đường tròn (O; R) cắt đường thẳng BC, BD tại hai điểm tương ứng là E và F. Gọi P, Q lần lượt tại trung điểm AE, AF.

1. Chứng minh rằng trục tâm H của $\triangle BPQ$ là trung điểm của AO.
2. Các đường thẳng AB và CD thỏa mãn điều kiện gì thì diện tích tam giác BPQ nhỏ nhất.
3. Biết $\triangle BEF$ có hình vuông BMKN nội tiếp ($K \in EF$; $M \in BE, N \in BF$) sao cho tỉ số giữa các

cạnh hình vuông và bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle BEF$ là $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. Tính các góc nhọn của $\triangle BEF$.

Câu 9 (1,0 điểm): Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc \geq 1$. Tìm giá trị lớn

nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^2 + 1 + bc} + \frac{1}{b^2 + 1 + ac} + \frac{1}{ab(c^3 + 1) + 1}$.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THỌ XUÂN

HƯỚNG DẪN CHẤM GIAO LƯU ĐỘI TUYỂN HSG CẤP TỈNH NĂM HỌC 2024 - 2025 MÔN THI: TOÁN - LỚP 9 (Hướng dẫn chấm gồm có 09 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
1	Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} + 6}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \frac{x - 7\sqrt{x} - 8}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{2x + 10\sqrt{x} + 12}{x - \sqrt{x} - 6}$ với $x \geq 0, x \neq 9$. Rút gọn A, và tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{4}{A}$ nhận giá trị nguyên.	2.0
	$A = \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 6)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 8)}{(\sqrt{x} + 1)^2} - \frac{2(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2)}$ $= \frac{x - \sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x} + 1} - \frac{2(\sqrt{x} + 3)}{\sqrt{x} - 3}$	0,5

	$= \frac{x-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+1} = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$	0,5
	Theo BĐT Côsi, ta có $A = \sqrt{x}+1 + \frac{9}{\sqrt{x}+1} - 2 \geq 2\sqrt{9} - 2 = 4$	0,5
	Để $\frac{4}{A} \in \mathbb{Z}$ thì $A = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = \frac{9}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn). Vậy $x = 4$.	0,5
2	Cho a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7; a+b+c = 23; \sqrt{abc} = 3$. Tính giá trị biểu thức $H = \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{b} - 6}$	2.0
	Ta có $(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = a+b+c + 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$ mà $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7; a+b+c = 23$ nên $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 13$	0,5
	Ta có $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7 \Rightarrow \sqrt{c} - 6 = -\sqrt{a} - \sqrt{b} + 1$ nên $\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6 = \sqrt{ab} - \sqrt{a} - \sqrt{b} + 1 = (\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)$ Tương tự $\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6 = (\sqrt{b}-1)(\sqrt{c}-1); \sqrt{ac} + \sqrt{b} - 6 = (\sqrt{a}-1)(\sqrt{c}-1)$	0,5

	Vậy $H = \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{b} - 6}$ $= \frac{1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)} + \frac{1}{(\sqrt{b}-1)(\sqrt{c}-1)} + \frac{1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{c}-1)} = \frac{\sqrt{c}-1 + \sqrt{a}-1 + \sqrt{b}-1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)(\sqrt{c}-1)}$	0,5
	$= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) - 3}{\sqrt{abc} + (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) - (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) - 1} = \frac{7-3}{3+7-13-1} = -1$ Vậy $H = -1$.	0,5
3	Giải phương trình: $9x^2 = (x^2 + x - 5)(\sqrt{3x+1} - 1)^2$	2.0

	Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{3}$. Phương trình tương đương: $9x^2(\sqrt{3x+1}+1)^2 = (x^2+x-5)(\sqrt{3x+1}-1)^2(\sqrt{3x+1}+1)^2$	0,5
	$\Leftrightarrow 9x^2(\sqrt{3x+1}+1)^2 = (x^2+x-5) \cdot 9x^2$	0,5
	$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 = 2\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 14 = 4\sqrt{3x+1}$ $\Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 15 + \sqrt{3x+1}(\sqrt{3x+1} - 4) = 0$ $\Leftrightarrow (x-5)(2x+3) + \frac{3(x-5)\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4} = 0$ $\Leftrightarrow (x-5)\left(2x+3 + \frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4}\right) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 2x+3 + \frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4} = 0 \end{cases}$	0,5

	<p>Do $x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow 2x+3 > 0 \Rightarrow 2x+3 + \frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4} = 0$ vô nghiệm.</p> <p>Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x = 0, x = 5$.</p>	
4	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{3x^2+33} + 3\sqrt{2x+y-1} = 3x+y+6 \end{cases}$	2.0
	ĐKXD: $\begin{cases} 2x+y-1 \geq 0 \\ x+y \neq 0 \end{cases}$	0,25
	$(1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy + \frac{2xy}{x+y} = 1$ $\Leftrightarrow (x+y)^3 - 2xy(x+y) + 2xy = (x+y)$	0,25
	<p>Đặt $S = x+y, P = xy (S^2 \geq 4P)$ ta có:</p> $S^3 - 2SP + 2P = S \Leftrightarrow S(S+1)(S-1) - 2P(S-1) = 0$ $\Leftrightarrow (S-1)(S^2 + S - 2P) = 0$	0,25

	$\Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ S^2+S-2P=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2+x+y=0 \end{cases}$	0,25
	<p>TH1: Với $x+y=1 \Rightarrow y=1-x$, thay vào (2) ta được:</p> $\sqrt{3x^2+33}+3\sqrt{2x+1-x-1}=3x+1-x+6$ $\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+33}+3\sqrt{x}=2x+7$ $\Rightarrow 3x^2+33+2\sqrt{3x^2+33} \cdot 3\sqrt{x}+9x=4x^2+28x+49$ $\Rightarrow 6\sqrt{3x^2+33} \cdot \sqrt{x}=x^2+19x+16$	0,25
	$\Rightarrow 36(3x^2+33)x=x^4+361x^2+256+38x^3+32x^2+608x$ $\Leftrightarrow x^4-70x^3+393x^2-580x+256=0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2(x-4)(x-64)=0$	0,25

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=0 & (TM) \\ x=4 \Rightarrow y=-3 & (TM) \\ x=64 \Rightarrow y=-63 & (TM) \end{cases}$	
	<p>TH2: Với $x^2+y^2+x+y=0$. Ta coi đây là phương trình bậc hai ẩn x.</p> <p>Để tồn tại x thì $\Delta=1-4(y^2+y) \geq 0 \Leftrightarrow 4y^2+4y-1 \leq 0$</p> $\Leftrightarrow 4\left(y+\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\left(y+\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) \leq 0$ $\Leftrightarrow -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ <p>Tương tự ta cũng có $-\frac{1+\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$.</p>	0,25
	<p>Suy ra $2x+y-1 \leq 2 \cdot \frac{-1+\sqrt{2}}{2} + \frac{-1+\sqrt{2}}{2} - 1 < 0$, không thỏa mãn điều kiện $2x+y-1 \geq 0$ nên trường hợp này hệ vô nghiệm.</p> <p>Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $\{(1;0), (4;-3), (64;-63)\}$.</p>	0,25
5	Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $3^x - 32 = y^2$.	2.0
	<p>*) Nếu x lẻ, đặt $x=2k+1 (k \in \mathbb{N})$. Thay vào PT ta có: $3^{2k+1} - 32 = y^2 \Leftrightarrow 3 \cdot 9^k - 32 = y^2$</p>	0,25

	<p>Ta có: $9 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 9^k \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 3 \cdot 9^k \equiv 3 \pmod{8} \Rightarrow 3 \cdot 9^k - 32 \equiv 3 \pmod{8}$</p> <p>Do đó $y^2 \equiv 3 \pmod{8}$ (vô lý vì số chính phương chia cho 8 dư 0 hoặc 1)</p>	0,25
	<p>*) Nếu x chẵn, đặt $x = 2k (k \in \mathbb{N}^*)$. Thay vào PT ta có:</p> $3^{2k} - 32 = y^2 \Leftrightarrow (3^k - y)(3^k + y) = 32 \quad (1)$	0,25
	<p>Do $3^k + y > 3^k - y > 0$ và $3^k + y; 3^k - y$ là các số chẵn nên từ (1) xảy ra các trường hợp sau:</p> $\begin{cases} 3^k - y = 2 \\ 3^k + y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^k = 9 \\ y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} 3^k - y = 4 \\ 3^k + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^k = 6 \\ y = 2 \end{cases}$	0,25

	Vậy PT đã cho có nghiệm nguyên dương (x; y) duy nhất (4;7).	0,25
6	<p>Giả sử n là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7. Chứng minh rằng $4n^3 - 5n - 1$ không là số chính phương.</p>	2.0
	<p>Giả sử tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7 và $4n^3 - 5n - 1$ là số chính phương.</p> <p>Ta có $4n^3 - 5n - 1 = (n+1)(4n^2 - 4n - 1)$</p> <p>Đặt $\text{UCLN}(n+1; 4n^2 - 4n - 1) = d (d \in \mathbb{N}^*)$</p> <p>Suy ra $\begin{cases} n+1 : d \\ 4n^2 - 4n - 1 : d \end{cases}$</p>	0,5
	<p>Có $4n^2 - 4n - 1 = 4n(n+1) - 8(n+1) + 7 : d \Rightarrow 7 : d$</p> <p>Vì $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7 nên $n(n+1)$ không chia hết cho 7, suy ra $n+1$ không chia hết cho 7, suy ra $d \neq 7 \Rightarrow d = 1$.</p>	0,5
	<p>Do đó, $n+1$ và $4n^2 - 4n - 1$ là hai số nguyên tố cùng nhau, mà tích của chúng là số chính phương suy ra $n+1$ và $4n^2 - 4n - 1$ là các số chính phương. Suy ra</p> $4n^2 - 4n - 1 = a^2 (a \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (2n-1)^2 - a^2 = 2 \Leftrightarrow (2n-a-1)(2n+a-1) = 2$ <p>Vì $2n-a-1 \leq 2n+a-1$</p>	0,5

	$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 2n - a - 1 = 1 \\ 2n + a - 1 = 2 \\ 2n - a - 1 = -2 \\ 2n + a - 1 = -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{5}{4} \\ a = \frac{1}{2} \\ n = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{array} \right. \end{array} \right. , \text{ không thỏa mãn } n, a \text{ là các số tự nhiên.}$ <p>Vậy giả sử là sai, ta có điều phải chứng minh.</p>	0,5
7	Cho 1 hộp gồm các thẻ đánh số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Mỗi thẻ khác nhau đánh các số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 2 thẻ trong hộp. Tính xác suất của biến cố " Tích của 2 thẻ được lấy ra là một số chẵn "	2,0

	<p>Trong hộp có 4 thẻ ghi số lẻ, 4 thẻ ghi số chẵn</p> <p>Lấy ngẫu nhiên hai thẻ ở trong hộp, sau đó tính tích hai số được đánh ở hai tấm thẻ đó nên ta có các khả năng sau:</p> <p>Trường hợp 1: Thẻ số ban đầu lấy ra ghi số lẻ, như vậy thẻ ban đầu có 4 khả năng là 1; 3; 5; 7</p> <p>Khi đó thẻ sau có thể 7 khả năng xảy ra, trong đó có 4 khả năng sẽ là số chẵn, như vậy có 4 tích là số chẵn</p> <p>Vậy trường hợp này có số biến cố xảy ra là $4 \cdot 7 = 28$ (biến cố)</p> <p>Số biến cố mà tích là số chẵn là $4 \cdot 4 = 16$ (biến cố)</p>	0,75
	<p>Trường hợp 2: Thẻ số ban đầu lấy ra ghi số chẵn, như vậy thẻ ban đầu có 4 khả năng là 2; 4; 6; 8</p> <p>Khi đó thẻ sau có thể 7 khả năng xảy ra, và tích đều là số chẵn</p> <p>Vậy trường hợp này có số biến cố xảy ra là $4 \cdot 7 = 28$ (biến cố)</p> <p>Số biến cố mà tích là số chẵn là $4 \cdot 7 = 28$ (biến cố)</p>	0,75
	<p>Như vậy:</p> <p>Tổng số biến cố xảy ra là $28 + 28 = 56$ (biến cố)</p> <p>Số biến cố mà tích là số chẵn là $16 + 28 = 44$ (biến cố)</p> <p>Xác suất của biến cố " Tích của 2 thẻ được lấy ra là một số chẵn" là $\frac{44}{56} = \frac{11}{14}$</p>	0,5

8	<p>Cho đường tròn $(O; R)$ và hai đường kính AB, CD sao cho tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O; R)$ cắt đường thẳng BC, BD tại hai điểm tương ứng là E và F. Gọi P, Q lần lượt tại trung điểm AE, AF.</p> <p>a) Chứng minh rằng trục tâm H của $\triangle BPQ$ là trung điểm của AO.</p> <p>b) Các đường thẳng AB và CD thỏa mãn điều kiện gì thì diện tích tam giác BPQ nhỏ nhất.</p>	6.0
---	---	-----

	<p>c. Biết $\square BEF$ có hình vuông BMKN nội tiếp ($K \in EF; M \in BE, N \in BF$) sao cho tỉ số giữa các cạnh hình vuông và bán kính đường tròn nội tiếp $\square BEF$ là $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. Tính các góc nhọn của $\square BEF$.</p>	1,0
	<p>Gọi O' là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BEF.</p> <p>Do tứ giác BMKN là hình vuông $\Rightarrow BK$ là đường phân giác của $\angle EBF \Rightarrow O' \in BK$</p>	0,25
	$K \square O'J \perp BE; O'S \perp BF \Rightarrow O'S \parallel KN \Rightarrow \frac{BK}{BO'} = \frac{KN}{O'S} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\text{Mà } \frac{BK}{BO'} = \frac{BO' + O'K}{BO'} = 1 + \frac{O'K}{BO'} \Rightarrow \frac{O'K}{BO'} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,25
	<p>Lại có FO' là phân giác $\angle BFE \Rightarrow \frac{FK}{FB} = \frac{O'K}{O'B} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow FB = \sqrt{2} \cdot FK \Rightarrow FB^2 = 2FK^2$</p> <p>Tương tự: $EB^2 = 2EK^2$</p>	0,25
	$\Rightarrow EF^2 = EB^2 + FB^2 = 2(EK^2 + FK^2)$ <p>Hay $(EK + KF)^2 = 2(EK^2 + FK^2) \Leftrightarrow (EK - KF)^2 = 0 \Leftrightarrow EK = KF$</p> <p>$\Rightarrow \triangle EBF$ vuông cân tại B $\Rightarrow \angle BEF = \angle BFE = 45^\circ$</p>	0,25
9	<p>Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức</p> $P = \frac{1}{a^2 + 1 + bc} + \frac{1}{b^2 + 1 + ac} + \frac{1}{ab(c^3 + 1) + 1}$	1.0

	$P = \frac{a}{a^3 + a + abc} + \frac{b}{b^3 + b + abc} + \frac{c}{abc(c^3 + 1) + c}$ $\leq \frac{a}{a^3 + a + 1} + \frac{b}{b^3 + b + 1} + \frac{c}{c^3 + c + 1}$	0,25
	<p>$\forall x > 0$, ta luôn có $(x-1)^2(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x + 1 \geq 0$</p> <p>$\Leftrightarrow x^3 + x + 1 \geq x^2 + 2x \Leftrightarrow \frac{x}{x^3 + x + 1} \leq \frac{1}{x+2}$, đẳng thức xảy ra khi $x=1$. Suy ra</p> $\frac{a}{a^3 + a + 1} + \frac{b}{b^3 + b + 1} + \frac{c}{c^3 + c + 1} \leq \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2}$	0,25
	<p>Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \leq 1$</p> <p>Thật vậy, (6) $\Leftrightarrow (a+2)(b+2) + (b+2)(c+2) + (a+2)(c+2) \leq (a+2)(b+2)(c+2)$</p> <p>$\Leftrightarrow ab + bc + ca + abc \geq 4$</p>	0,25
	<p>Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = 3$ Mặt khác</p> <p>$abc \geq 1 \Rightarrow ab + bc + ca + abc \geq 4$ nên (6) đúng, suy ra $P \leq 1$. Vậy $\max P = \frac{\sqrt{3}}{3}$ khi $a = b = c = 1$</p>	0,25

PHÒNG GD & ĐT HUYỆN AN THI

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

NĂM HỌC 2024 – 2025

Môn thi: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 150 phút

(Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay)

Câu 1 (6,0 điểm).

a) Cho a, b, c là các số hữu tỉ thỏa mãn $ab + bc + ca = 2024$.Chứng minh rằng $\sqrt{(a^2 + 2024)(b^2 + 2024)(c^2 + 2024)}$ là một số hữu tỉ.b) Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$. Xác định a, b để đồ thị hàm số đi qua điểm $M(2; -3)$ và $N(-1; -2)$.

c) Câu lạc bộ bóng rổ của một trường THCS tổ chức chọn đội tuyển bóng rổ. Mỗi học sinh dự tuyển thực hiện ném 15 quả bóng. Mỗi quả bóng ném vào rổ được cộng 5 điểm. Mỗi quả bóng ném ra ngoài bị trừ 2 điểm. Học sinh dự tuyển được tối thiểu 55 điểm sẽ được chọn vào đội tuyển. Hỏi một học sinh dự tuyển muốn được chọn vào đội tuyển thì phải ném vào rổ ít nhất bao nhiêu quả bóng?

Câu 2 (3,0 điểm).

$$\frac{3}{x^2 + 3x} + \frac{2}{x^2 + 8x + 15} = \frac{1}{30}$$

- a) Giải phương trình: $\frac{3}{x^2 + 3x} + \frac{2}{x^2 + 8x + 15} = \frac{1}{30}$
 b) Tìm tất cả các điểm có tọa độ là các số nguyên dương nằm trên đường thẳng $3x + 17y = 159$.

Câu 3 (3,0 điểm).

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5(2x - y) = 0 \\ x^2 - 2xy - 3y^2 + 15 = 0 \end{cases}$$

- a) Giải hệ phương trình:
 b) Lớp $9A$ có 50 học sinh gồm cả nam và nữ. Cô giáo chọn ngẫu nhiên 2 học sinh gồm một học sinh nam và một học sinh nữ trong số các học sinh của lớp. Biết xác suất của biến cố trên là $\frac{24}{49}$ và số học sinh nữ nhiều hơn số học sinh nam. Tính số học sinh nữ của lớp $9A$.

Câu 4 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt đường thẳng CF tại I , qua C kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt đường thẳng BE tại K .

- a) Chứng minh: $BE \cdot BK = CF \cdot CI$.

$$\sin \angle BAC = \frac{AD \cdot BC}{AB \cdot AC}$$

- b) Chứng minh:

- c) Gọi M là trung điểm của AH , N là trung điểm của BC . Chứng minh: $MN \perp EF$.

Câu 5 (3,0 điểm).

- a) Cho $a, b > 0$ và $(a + b - 1)^2 = ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{2}{a+b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
 b) Cho $\alpha < 45^\circ$. Chứng minh: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$.

----- **Hết** -----

Họ và tên thí sinh:.....

Chữ kí giám thị 1:.....

Số báo danh:.....

Chữ kí giám thị 2:.....

**PHÒNG GD & ĐT
HUYỆN AN THỊ**

**HƯỚNG DẪN CHẤM
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2024 – 2025
Môn thi: Toán lớp 9**

I. HƯỚNG DẪN CHUNG:

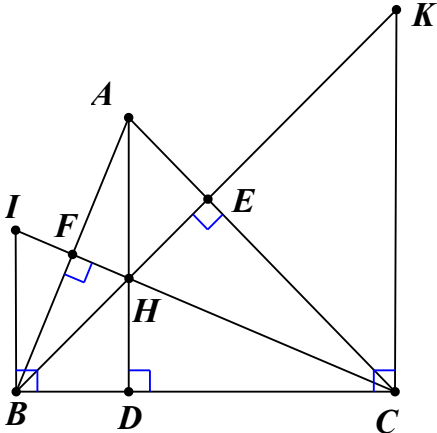
1) Hướng dẫn chấm này chỉ nêu các bước chính của lời giải hoặc nêu kết quả. Trong bài làm, thí sinh phải trình bày, lập luận đầy đủ.

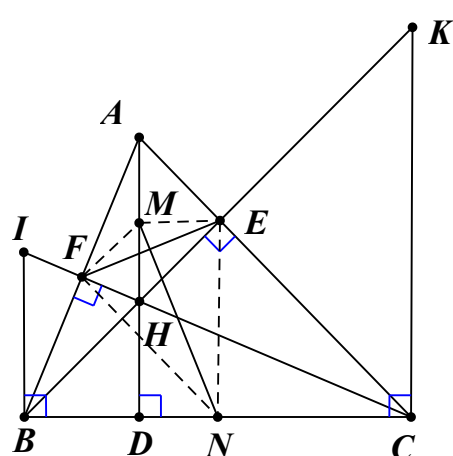
2) Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng, giám khảo cho đủ điểm từng phần theo thang điểm.

II. ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM

Câu	Đáp án	Điểm
1 (6,0đ)	<p>a) Cho a, b, c là các số hữu tỉ thỏa mãn $ab + bc + ca = 2024$. Chứng minh rằng $\sqrt{(a^2 + 2024)(b^2 + 2024)(c^2 + 2024)}$ là một số hữu tỉ.</p> <p>Ta có $a^2 + 2024 = a^2 + ab + bc + ca = (a + b)(a + c)$ $b^2 + 2024 = b^2 + ab + bc + ca = (b + c)(b + a)$ $c^2 + 2024 = c^2 + ab + bc + ca = (c + a)(c + b)$</p> <p>Khi đó $\sqrt{(a^2 + 2024)(b^2 + 2024)(c^2 + 2024)} = \sqrt{[(a + b)(b + c)(c + a)]^2}$ $= (a + b)(b + c)(c + a)$</p> <p>Vì a, b, c là các số hữu tỉ nên $(a + b)(b + c)(c + a)$ là số hữu tỉ.</p> <p>Do đó $\sqrt{(a^2 + 2024)(b^2 + 2024)(c^2 + 2024)}$ là số hữu tỉ.</p>	1.0 0.5 0.5
	<p>b) Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$. Xác định a, b để đồ thị hàm số đi qua điểm $M(2; -3)$ và $N(-1; -2)$.</p> <p>Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(2; -3)$ nên ta có phương trình: $2a + b = -3$ Đồ thị hàm số đi qua điểm $N(-1; -2)$ nên ta có phương trình: $-a + b = -2$</p> <p>Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2a + b = -3 \\ -a + b = -2 \end{cases}$ được $a = -\frac{1}{3}; b = -\frac{7}{3}$</p>	1.0 1.0
	<p>c) Câu lạc bộ bóng rổ của một trường THCS tổ chức chọn đội tuyển bóng rổ. Mỗi học sinh dự tuyển thực hiện ném 15 quả bóng. Mỗi quả bóng ném vào rổ được cộng 5 điểm. Mỗi quả bóng ném ra ngoài bị trừ 2 điểm. Học sinh dự tuyển được tối thiểu 55 điểm sẽ được chọn vào đội tuyển. Hỏi một học sinh dự tuyển muốn được chọn vào đội tuyển thì phải ném vào rổ ít nhất bao nhiêu quả bóng?</p> <p>Gọi số quả bóng ném vào rổ là x (quả), $x \in \mathbb{N}^*$. Suy ra số quả bóng ném ra ngoài là: $15 - x$ (quả). Số điểm nhận được sau khi ném 15 quả là: $5x + (15 - x)(-2) = 7x - 30$ (điểm).</p> <p>Để học sinh đó được chọn vào đội tuyển thì $7x - 30 \geq 55 \Rightarrow x \geq \frac{85}{7} = 12 \frac{1}{7}$</p> <p>Do đó số quả bóng ném vào rổ ít nhất là 13 quả.</p>	1.0 1.0
2 (3,0đ)	<p>a) Giải phương trình: $\frac{3}{x^2 + 3x} + \frac{2}{x^2 + 8x + 15} = \frac{1}{30}$</p> <p>Ta có $x^2 + 3x = x(x + 3)$ $x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$</p>	

	<p>ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq -3; x \neq -5$.</p> $\frac{3}{x^2 + 3x} + \frac{2}{x^2 + 8x + 15} = \frac{1}{30}$ $\frac{3}{x(x+3)} + \frac{2}{(x+3)(x+5)} = \frac{1}{30}$ $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{30}$ $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{30}$ $30(x+5) - 30x = x^2 + 5x$ $x^2 + 5x - 150 = 0$ $(x-10)(x+15) = 0$ <p>Suy ra $x = -15$ hoặc $x = 10$ Các giá trị tìm được đều thỏa mãn ĐKXĐ Vậy $x \in \{-15; 10\}$</p>	0.75
	<p>b) Tìm tất cả các điểm có tọa độ là các số nguyên dương nằm trên đường thẳng $3x + 17y = 159$</p> $3x + 17y = 159 \Rightarrow x = \frac{-18y + 159 + y}{3} = -6y + 53 + \frac{y}{3}$ <p>Ta có</p> $\text{Do } x, y \in \mathbb{N}^* \text{ nên } -6y + 53 + \frac{y}{3} \in \mathbb{N}^*; -6y + 53 \in \mathbb{N}^*$ $\text{Đặt } \frac{y}{3} = k \ (k \in \mathbb{N}^*)$ <p>Khi đó $\begin{cases} y = 3k \\ x = -17k + 53 \end{cases} \ (k \in \mathbb{N}^*)$</p> $\text{Do } x, y > 0 \text{ nên } \begin{cases} y = 3k > 0 \\ x = -17k + 53 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k < \frac{53}{17} = 3\frac{2}{17} \end{cases}$ <p>Vì $k \in \mathbb{N}^*$ nên $k \in \{1; 2; 3\}$</p> <p>Khi đó ta được các điểm cần tìm là: $(36; 3); (19; 6); (2; 9)$</p>	0.75
3 (3.0đ)	<p>a) Giải hệ phương trình:</p> $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5(2x - y) = 0 & (1) \\ x^2 - 2xy - 3y^2 + 15 = 0 & (2) \end{cases}$ <p>Từ phương trình (1) $\Rightarrow (2x - y)(x + 2y - 5) = 0$ $y = 2x$ hoặc $x = 5 - 2y$</p> <p>+) Với $y = 2x$ thay vào (2) ta được</p> $-15x^2 + 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$	0.5
		0.5

	<p>Với $x = 1 \Rightarrow y = 2$, với $x = -1 \Rightarrow y = -2$.</p> <p>+) Với $x = 5 - 2y$ thay vào (2) ta được</p> <p>Với $y = 2 \Rightarrow x = 1$, với $y = 4 \Rightarrow x = -3$.</p> <p>Vậy nghiệm của hệ là $(1; 2), (-3; 4), (-1; -2)$.</p>	0.5
	<p>b) b) Lớp $9A$ có 50 học sinh gồm cả nam và nữ. Cô giáo chọn ngẫu nhiên 2 học sinh gồm một học sinh nam và một học sinh nữ trong số các học sinh của lớp. Biết</p> <p>xác suất của biến cố trên là $\frac{24}{49}$ và số học sinh nữ nhiều hơn số học sinh nam. Tính số học sinh nữ của lớp $9A$.</p> <p>Gọi số học sinh nữ của lớp $9A$ là x (học sinh), ($x \in \mathbb{N}, x > 25; x < 50$)</p> <p>Số học sinh nam là $50 - x$ (học sinh)</p> <p>- Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh:</p> <p>HS thứ nhất có 50 cách chọn, HS thứ hai có 49 cách chọn.</p> <p>Nhưng tính như thế mỗi cặp học sinh đã tính hai lần nên số cách chọn hai học sinh</p> <p>bất kì trong số 50 học sinh là: $\frac{50 \cdot 49}{2} = 1225$ (cách)</p> <p>- Chọn một HS nam và một HS nữ:</p> <p>HS nữ có x cách chọn, HS nam có $50 - x$ cách chọn</p> <p>Số cách chọn một HS nam và một HS nữ là: $x(50 - x)$ (cách chọn)</p> <p>Do đó xác suất của biến cố “ Chọn ngẫu nhiên một HS nam và một HS nữ” là:</p> <p>$P = \frac{x(50 - x)}{1225} = \frac{24}{49} \Rightarrow x^2 - 50x + 600 = 0$</p> <p>Từ đó suy ra $x = 20$ hoặc $x = 30$</p> <p>Do số học sinh nữ nhiều hơn số học sinh nam nên số học sinh nữ là 30 học sinh.</p>	0.5 0.5 0.5
4 (5.0đ)	<p>Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt đường thẳng CF tại I, qua C kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt đường thẳng BE tại K.</p> 	

<p>a) Chứng minh: $BE.BK = CF.CI$.</p> <p>Xét $\triangle BCK$ vuông tại C, đường cao CE có: $BC^2 = BE.BK$</p> <p>Xét $\triangle BCI$ vuông tại B, đường cao BF có: $BC^2 = CF.CI$</p> <p>$BE.BK = CF.CI (= BC^2)$</p> <p>Suy ra</p>	<p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p>
<p>b) Chứng minh: $\sin \angle BAC = \frac{AD.BC}{AB.AC}$.</p> <p>Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD.BC = \frac{1}{2} CF.AB$</p> <p>Xét $\triangle ACF$ vuông tại F có $CF = AC.\sin A$</p> <p>Do đó $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD.BC = \frac{1}{2} AB.AC.\sin A$</p> <p>Suy ra $AD.BC = AB.AC.\sin \angle BAC$</p> <p>Hay $\sin \angle BAC = \frac{AD.BC}{AB.AC}$</p>	<p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p>
<p>c) Gọi M là trung điểm của AH, N là trung điểm của BC. Chứng minh: $MN \perp EF$.</p> <div></div> <p>Xét $\triangle BEC$ vuông tại E có đường trung tuyến EN ứng với cạnh huyền</p> <p>Nên $EN = \frac{1}{2} BC$</p> <p>Chứng minh tương tự được: $FN = \frac{1}{2} BC; FM = \frac{1}{2} AH; EM = \frac{1}{2} AH$</p> <p>Suy ra $ME = MF; NE = NF$</p> <p>Do đó MN là đường trung trực của EF</p> <p>$\Rightarrow MN \perp EF$.</p>	<p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p>

5
(3.0đ)

a) Cho $a, b > 0$ và $(a+b-1)^2 = ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2}{a+b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$(a+b-1)^2 = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Ta có

$$3(a+b)^2 - 8(a+b) + 4 \leq 0$$

$$\frac{2}{3} \leq a+b \leq 2$$

Suy ra được

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$P = \frac{2}{a+b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{a+b} + \frac{a+b}{ab} - \frac{2}{a+b} \geq 2\sqrt{\frac{4}{a+b} \cdot \frac{a+b}{ab}} - \frac{2}{a+b}$$

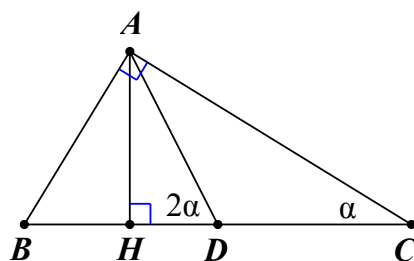
$$P \geq \frac{4}{\frac{a+b}{2}} - \frac{2}{a+b} = \frac{6}{a+b} \geq 3$$

$$= \frac{6}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1$

Vậy Min $P = 3$ khi $a = b = 1$.

b) Cho $\alpha < 45^\circ$. Chứng minh: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$.



$$\sin 2\alpha = \sin \angle ADH = \frac{AH}{AD} = \frac{2AH}{BC}$$

Ta có

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin C \cdot \cos C = \frac{AH}{AC} \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{BC}$$

$$\text{Suy ra } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha$$

$$= 1 - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

$$= (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2$$

$$\text{Suy ra } \cos 2\alpha = |\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha| = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (\text{Do } \alpha < 45^\circ \text{ nên } \sin^2 \alpha < \cos^2 \alpha)$$

$$\text{Vậy } \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

0.5

0.5

0.5

0.5

0.5

0.5

Câu 1 (3 điểm)

a) Tìm các số nguyên dương x và y sao cho $x^4 + 4y^4$ là số nguyên tố

b) Cho 2 số nguyên a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b)$

Chứng minh a và b là 2 số chính phương liên tiếp

Câu 2 (3 điểm)

a) Rút gọn biểu thức:
$$A = \frac{x^4 - (x-1)^2}{(x^2+1)^2 - x^2} + \frac{x^2 - (x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2 - 1} + \frac{x^2(x-1)^2 - 1}{x^4 - (x+1)^2}$$

b) Cho đa thức: $Q(x) = P(x) - 14x$ với $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

Biết $Q(1) = Q(2) = 0$. Tính $P(4) - P(-1)$

Câu 3 (4 điểm)

a) Tìm GTNN của $A = (x - ay)^2 + 6(x - ay) + x^2 + 16y^2 - 8xy + 2x - 8y + 10$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 y^2 + xy = 12 - xy(x + y) \end{cases}$$

Câu 4 (3 điểm)

Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của mỗi biến cố sau: A: "Tổng số chấm thu được từ hai con xúc xắc bằng 6"

B: "Hiệu số chấm thu được từ hai con xúc xắc bằng 2"

C: "Tích số chấm trên hai con xúc xắc là một số chính phương"

Câu 5 (7 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Kẻ AH vuông góc với BC tại H. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC

a) Biết $AB = 6$ cm, $HC = 6,4$ cm. Tính BC, AC

b) Chứng minh rằng: $DE^3 = EH \cdot BC \cdot DH$

c) Đường thẳng kẻ qua B vuông góc với BC cắt HD tại M. Đường thẳng kẻ qua C vuông góc với BC cắt HE tại N. Chứng minh rằng: M, A, N thẳng hàng và BN, CM, DE đồng quy.

PHÒNG GD & ĐT ĐÔ LƯƠNG
HƯỚNG DẪN CHẤM
THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN NĂM HỌC 2024-2025

Môn thi Toán; Lớp: 9

Thời gian làm bài: 120 phút (Không kể thời gian giao, nhận đề thi)

Câu	Nội Dung	Điểm
1	<p>a) (1,5điểm)</p> <p>Ta có $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2xy + 2y^2) \cdot (x^2 - 2xy + 2y^2)$</p> <p>Do $x, y \in \mathbb{Z}^+$ nên $0 < (x^2 - 2xy + 2y^2) < (x^2 + 2xy + 2y^2)$ Vì $x^4 + 4y^4$ là số nguyên tố, suy ra $x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$ hay $(x - y)^2 + y^2 = 1$. Do $x, y \in \mathbb{Z}^+$ nên $x = y = 1$.</p> <p>Kiểm tra ta được c: $x^4 + 4y^4 = 5$ là số nguyên tố</p>	<p>0,25 đ</p> <p>0,25 đ</p> <p>0,25 đ</p> <p>0,5 đ</p> <p>0,25 đ</p>
	<p>b) (1,5điểm)</p> <p>Từ giả thiết, ta có: $a^2 + b^2 + 1 - 2ab + 2a - 2b = 4a$ hay $(a - b + 1)^2 = 4a(1)$</p> <p>Do đó a là số chính phương. Đặt $a = x^2 (x \in \mathbb{N})$</p> <p>Từ (1) ta có $(x^2 - b + 1)^2 = 4x^2$ suy ra $x^2 - b + 1 = \pm 2x$</p> <p>hay $b = (x - 1)^2$ hoặc $b = (x + 1)^2$</p> <p>Vậy a và b là 2 số chính phương liên tiếp</p>	<p>0,5 đ</p> <p>0,25 đ</p> <p>0,5 đ</p> <p>0,25 đ</p>
	<p>a) 1,5 điểm</p> $A = \frac{(x^2 + x - 1)}{(x^2 + 1 + x)} + \frac{(x - x^2 + 1)}{(x^2 + x + 1)} + \frac{(x^2 - x + 1)}{(x^2 + x + 1)} = \frac{(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)} = 1$	<p>0,75 đ</p> <p>0,75 đ</p>

2	<p>Vì $Q(1) = Q(2) = 0$</p> <p>Nên $x = 1, x = 2$ là nghiệm của đa thức $Q(x^3)$</p> <p>$Q(x)$ là đa thức có hạng tử cao nhất là x^3 nên $Q(x) = (x-1)(x-2)(x-k)$</p> <p>Ta có $P(x) = Q(x) + 14x = (x-1)(x-2)(x-k) + 14x$ với $\forall x$</p> <p>Khi đó $P(4) = 3 \cdot 2 \cdot (4-k) + 56 = 80 - 6k$</p> <p>$P(-1) = (-2) \cdot (-3) \cdot (-1-k) - 14 = -6k - 20$</p> <p>Suy ra $P(4) - P(-1) = 100$</p>	<p>0,25 d</p> <p>0,25 d</p> <p>0,25 d</p> <p>0,25 d</p> <p>0,25 d</p> <p>0,25 d</p>

	<p>a) (2điểm)</p> $A = [(x-ay)^2 + 6(x-ay) + 9] + (x^2 + 16y^2 - 8xy) + 2(x-4y) + 1$ $= (x-ay+3)^2 + (x-4y)^2 + 2(x-4y) + 1$ <p>Ta có $-(x-ay+3)^2 + (x-4y+1)^2 \geq 0$</p> $\begin{cases} x-ay+3=0(1) \\ x-4y+1=0(2) \end{cases}$ <p>Suy ra $\text{Min} A = 0$ Khi</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra: $ay - 4y = 2$ hay $(a-4) \cdot y = 2$</p> <p>Vì $x, y, a \in \mathbb{Z}$ nên $y; a-4 \in U'(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$</p> <p>Gaãi ra ta tìm được: $(x; y; a) = (3; 1; 6)(7; 2; 5)(-5; -1; 2)(-9; -2; 3)$</p>	<p>0,25 d</p> <p>0,25 d</p> <p>0,25 d</p> <p>0,25 d</p> <p>1,0 d</p>
--	---	--

	<p>b) (2điểm)</p> <p>Biến đổi hệ về dạng $\begin{cases} x(x+1) + y(y+1) = 8 \\ x(x+1)y(y+1) = 12 \end{cases}$</p> <p>Do đó $x(x+1)$ và $y(y+1)$ là 2 nghiệm của phương trình $t^2 - 8t + 12 = 0$ Giải ra được $t_1 = 2; t_2 = 6$</p> <p>Ta có các trường hợp sau:</p> <p>TH1: $\begin{cases} x(x+1) = 2 \\ y(y+1) = 6 \end{cases}$ TH2: $\begin{cases} x(x+1) = 6 \\ y(y+1) = 2 \end{cases}$</p> <p>Giai TH1 ta được các kết quả: $(x, y) = (1; 2); (1; -3); (-2; 2); (-2; -3)$</p> <p>Giai TH2 ta được các kết quả: $(x, y) = (2; 1); (2; -2); (-3; 1); (-3; -2)$</p> <p>Vậy hệ đã cho có 8 nghiệm: $(x, y) = (1; 2); (1; -3); (-2; 2); (-2; -3); (2; 1); (2; -2); (-3; 1); (-3; -2)$</p>	<p>0,25 d</p> <p>0,25 d</p> <p>0,25 d</p> <p>0,5 d</p> <p>0,5 d</p> <p>0,25 d</p>
4	<p>Các kết quả có thể của hành động là 36 kết quả</p> <p>a) (1điểm) Có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố A . Do đó $P(A) = \frac{5}{36}$</p> <p>b) (1điểm) Có 8 kết quả thuận lợi cho biến cố B . Do đó $P(B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$</p> <p>c) (1 điểm) Có 8 kết quả thuận lợi cho biến cố C . Do đó $P(C) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$</p>	<p>1,0 d</p> <p>1,0 d</p> <p>1,0 d</p>
	<p>a) (2điểm) Đặt $BH = x (0 < x < 6) \Rightarrow BC = x + 6,4$</p> <p>Ta có $AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow 6^2 = x(x + 6,4)$</p> <p>Giải ra ta được $x = 3,6$</p> <p>Suy ra $BC = 10 \text{ cm}; AC = 8 \text{ cm}$</p>	<p>0,5 d</p> <p>0,5 d</p> <p>0,5 d</p> <p>0,5 d</p>

<p>b) (3điểm) +) Ta chứng minh được: $\square BDH \sim \square HEC$ $\Rightarrow BD.CE = BH.DH$ + Cm được ADHE là hình chữ nhật nên $DE = AH$ CM được $BH^2 = BD.BA, CH^2 = CE.CA, AH^2 = BH.CH$ Suy ra $AH^2 = CH^2 = BH^2 = BD.BA.CE.CA$ $= BD.CE.BC.AH$ (vì $BACA = BC.AH$) Suy ra $AH^3 = BD.CE.BC = EH.DH.BC$ Vậy $DE^3 = EH.DH.BC$</p>	<p>0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ</p>
--	--

Chú ý:

1. Thí sinh có thể làm bài bằng cách khác, nếu đúng vẫn được điểm tối đa.
2. Nếu thí sinh chứng minh bài hình mà không vẽ hình thì không chấm điểm bài hình.

PHÒNG GD&ĐT YÊN THÀNH**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN VÒNG II
NĂM HỌC 2024-2025****ĐỀ CHÍNH THỨC****(Đề gồm 01 trang)****MÔN THI: TOÁN – LỚP 9**

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Cho hai số nguyên a và b thỏa mãn $24a^2 + 1 = b^2$. Chứng minh rằng chỉ có một số a hoặc b chia hết cho 5.

b) Cho số nguyên tố $p (p > 3)$ và hai số nguyên dương a, b sao cho $p^2 + a^2 = b^2$.

Chứng minh a chia hết cho 12 và $2(p + a + 1)$ là số chính phương.

Câu 2. (6,0 điểm) a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -1 \\ 2x^3 - y^3 = 2y - x \end{cases}$$

b) Giải phương trình: $(x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) + 2x^2 = 0$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{(a^2 - bc)(b^2 - ca)}{(a + b)} + \frac{(b^2 - ca)(c^2 - ab)}{(b + c)} + \frac{(c^2 - ab)(a^2 - bc)}{(c + a)} \leq 0$$

b) Cho đa thức $P(x)$. Tính $P(\frac{5}{7})$, biết $P(x)$ thỏa mãn:

$$P(1) = 1; P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} P(x), \forall x \neq 0; P(x_1 + x_2) = P(x_1) + P(x_2), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Câu 4. (7,0 điểm)

Cho hình thang vuông ABCD có $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $AB < CD$. Điểm I nằm trong hình thang sao cho $BI = BA$, $CI = CD$. Kẻ IH vuông góc với BC tại H, đường thẳng IH cắt AD tại M.

a) Chứng minh: $MA^2 = MI \cdot (MH + HI)$.

b) Gọi E là điểm đối xứng với D qua C. Gọi K là giao điểm của IE và BC.

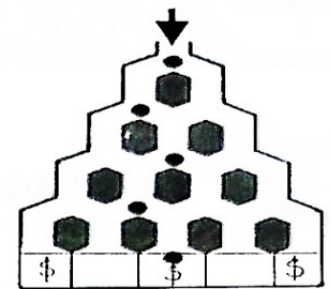
Chứng minh : $KC \cdot AD = IM \cdot DE$.

c) Gọi N là giao điểm của AI và DK.

Chứng minh : $IN^2 \cdot DE^2 \cdot \sin^2 KIC = (EK^2 + IE^2 - 4KE \cdot CE \cdot \cos KIC)(ID^2 - IN^2)$

Câu 5. (2,0 điểm)

a) Một máy chơi trò chơi minh họa như hình dưới, trong đó các hình lục giác màu sẫm là những vật cản. Người chơi thả bóng vào vị trí có mũi tên, bóng rơi xuống và sẽ lọt vào 1 trong số 5 vị trí, nếu bóng rơi vào vị trí \$ thì người chơi được nhận phần thưởng. Giả sử bóng luôn di chuyển từ trên xuống theo các lối đi màu trắng tạo bởi các vật cản và thành của máy.



Nếu bóng rơi vào ô có biểu tượng \$, người chơi thắng cuộc và có phần thưởng, ngược lại là thua. Giả sử các con đường đi có thể có của bóng là đồng khả năng. Tính xác suất trúng thưởng?

b) Để chơi trò chơi này, người chơi phải mua 3 nghìn đồng một quả bóng và nếu trúng thưởng thì nhận được 4 nghìn đồng. Có 200 người chơi, có thể ước lượng số người thắng là bao nhiêu? Ước lượng số tiền mà người chủ chiếc máy thu được là bao nhiêu?

Hết.

Họ và tên thí sinh..... Số báo danh.....

PHÒNG GD&ĐT YÊN THÀNH

**ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM ĐỀ THI HỌC SINH
GIỎI CẤP HUYỆN VÒNG II NĂM HỌC**

2024-2025

MÔN THI: TOÁN – LỚP 9

TT	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1 (3,0 điểm)		Câu 1. (3,0 điểm) a) Cho hai số nguyên a và b thỏa $24a^2 + 1 = b^2$. Chứng minh rằng chỉ có một số a hoặc b chia hết cho 5. b) Cho số nguyên tố $p (p > 3)$ và hai số nguyên dương a, b sao cho $p^2 + a^2 = b^2$. Chứng minh a chia hết cho 12 và $2(p + a + 1)$ là số chính phương.	
	a (1,5 điểm)	a) Cho hai số nguyên a và b thỏa $24a^2 + 1 = b^2$. Chứng minh rằng chỉ có một số a hoặc b chia hết cho 5.	
		$24a^2 + 1 = b^2 \hat{=} 25a^2 + 1 = a^2 + b^2 \text{ P } a^2 + b^2 \equiv 1 \pmod{5} \quad (1)$ <p>Ta có : $\begin{cases} a \equiv 0, \pm 1, \pm 2 \pmod{5} \\ b \equiv 0, \pm 1, \pm 2 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5} \\ b^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5} \end{cases} \quad (2)$</p>	0,5 0,5
		<p>Từ (1) và (2) suy ra:</p> $\begin{cases} a^2 \equiv 0 \pmod{5} \\ b^2 \equiv 1 \pmod{5} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 \equiv 1 \pmod{5} \\ b^2 \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$ <p>Suy ra chỉ một số a hoặc b chia hết cho 5.</p>	0,5
	b(1,5 điểm)	<p>b) Cho số nguyên tố $p (p > 3)$ và hai số nguyên dương a, b sao cho $p^2 + a^2 = b^2$. Chứng minh a chia hết cho 12 và $2(p + a + 1)$ là số chính phương</p> <p>Ta có: $p^2 + a^2 = b^2 \hat{=} p^2 = (b - a)(b + a)$</p> <p>Các ước của p^2 là 1, p và p^2 ;</p> <p>Không xảy ra trường hợp $b + a = b - a = p$</p> <p>Do đó chỉ xảy ra trường hợp $b + a = p^2$; và $b - a = 1$</p> <p>Khi đó $b = \frac{p^2 + 1}{2}$ và $a = \frac{p^2 - 1}{2}$</p>	

		<p>$\vdash 2a = (p-1)(p+1)$</p> <p>Từ p lẻ suy ra $(p+1), (p-1)$ là hai số chẵn liên tiếp</p> <p>$\vdash (p-1)(p+1) \equiv 0 \pmod{8}$</p> <p>$\vdash 2a \equiv 0 \pmod{8} \quad (1)$</p>	0,5
		<p>Từ p nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Do đó p có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$</p> <p>Suy ra một trong hai số $(p+1), (p-1)$ chia hết cho 3. Suy ra $2a$ chia hết cho 3 (2)</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra $2a \vdots 24$ hay $a \vdots 12$ (đpcm).</p> <p>Xét $2(p+a+1) = 2(p + \frac{p^2-1}{2} + 1) = 2p + p^2 + 1 = (p+1)^2$ là số chính phương</p>	0,5 0.5
Câu 2 (6.0 điểm)		<p>Câu 2 (6,0 điểm)</p> <p>a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -1 \\ 2x^3 - y^3 = 2y - x \end{cases}$</p> <p>b) Giải phương trình: $(x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) + 2x^2 = 0$</p>	
	a(3,0 điểm)	<p>a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -1 \\ 2x^3 - y^3 = 2y - x \end{cases}$</p>	
		<p>Đề ý rằng nếu nhân chéo 2 phương trình của hệ ta có: $2x^3 - y^3 = (x^2 - 2y^2)(x - 2y)$ đây là phương trình đẳng cấp bậc 3: Từ đó ta có lời giải như sau:</p> $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -1 & (1) \\ 2x^3 - y^3 = 2y - x & (2) \end{cases}$ $\Rightarrow 2x^3 - y^3 = (x^2 - 2y^2)(x - 2y) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2y + 2xy^2 - 5y^3 = 0$	1,0

		$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+3xy+5y^2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2+3xy+5y^2=0 \end{cases}$	1,0
		<p>TH1: $x=y$ (1) $x=y=\pm 1$, thay vào phương trình ta được .</p> <p>TH2:</p> $x^2+3xy+5y^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}y\right)^2+\frac{11}{4}y^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{3}{2}y=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$ <p>Thử lại, ta thấy $x=y=0$ không phải là nghiệm của hệ phương trình đã cho.</p> <p>Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(1;1), (-1;-1)$</p>	1,0
	b(3,0 điểm)	<p>b) Giải phương trình: $(x^2+1)^2+3x(x^2+1)+2x^2=0$</p>	
		<p>Đặt $x^2+1=t, (t \geq 1)$, Khi đó phương trình trở thành :</p> $t^2+3xt+2x^2=0 \Leftrightarrow (t+x)(t+2x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-x \\ t=-2x \end{cases}$	1,0
		<p>Với $t=-x \Rightarrow -x=x^2+1 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$ (Vô nghiệm)</p>	1,0
		<p>Với $t=-2x \Leftrightarrow -2x=x^2+1 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$ Vậy $x=-1$</p>	1,0

		<p>Câu 3 (2,0 điểm)</p> <p>a) Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:</p> $\frac{(a^2-bc)(b^2-ca)}{(a+b)} + \frac{(b^2-ca)(c^2-ab)}{(b+c)} + \frac{(c^2-ab)(a^2-bc)}{(c+a)} \leq 0$	
--	--	--	--

Câu 3 (2.0 điểm)		<p>b) Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn:</p> $P(1) = 1; P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} P(x), \forall x \neq 0; P(x_1 + x_2) = P(x_1) + P(x_2), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ <p>Tính $P\left(\frac{5}{7}\right)$</p>	
	a.(1,0 điểm)	<p>a) Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:</p> $\frac{(a^2 - bc)(b^2 - ca)}{(a + b)} + \frac{(b^2 - ca)(c^2 - ab)}{(b + c)} + \frac{(c^2 - ab)(a^2 - bc)}{(c + a)} \leq 0$	
		<p>Sử dụng BĐT $(a + b)^2 \geq 4ab \Rightarrow ab \leq \frac{(a + b)^2}{4}$ ta có:</p> $\frac{(a^2 - bc)(b^2 - ca)}{(a + b)} = \frac{ab(ab + c^2) - c(a^3 + b^3)}{(a + b)} = \frac{ab(ab + c^2)}{(a + b)} - c(a^2 - ab + b^2)$	0,25
		$\leq \frac{(a + b)(ab + c^2)}{4} - c(a^2 - ab + b^2)$	0,25
		<p>Ta cần chứng minh</p> $\frac{(a + b)(ab + c^2)}{4} - c(a^2 - ab + b^2) + \frac{(b + c)(bc + a^2)}{4} - a(b^2 - bc + c^2) + \frac{(c + a)(ca + b^2)}{4} - b(c^2 - ac + a^2) \leq 0$	0,25
		$a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 \geq 0$ <p>Tương đương với</p> <p>Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên ta có điều phải chứng minh</p> <p>Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$</p>	0,25
		<p>b) Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn:</p> $P(1) = 1; P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} P(x), \forall x \neq 0; P(x_1 + x_2) = P(x_1) + P(x_2), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ <p>Tính $P\left(\frac{5}{7}\right)$</p>	

b (1,0 điểm)	<p>Ta có $P(2) = P(1+1) = P(1) + P(1) = 1 + 1 = 2$</p> <p>Tương tự $P(3) = 3; P(5) = 5; P(7) = 7$</p>	0,5
	<p>Từ đó $P\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7^2} P(7) = \frac{1}{7}; P\left(\frac{2}{7}\right) = P\left(\frac{1}{7}\right) + P\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{2}{7}$</p> <p>Tương tự $P\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{3}{7}; P\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{5}{7}$</p> <p>Vậy $P\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{5}{7}$</p>	0,5

Câu 4 (7.0 điểm)	<p>Câu 4 (7,0 điểm)</p> <p>Cho hình thang vuông ABCD có $\angle A = \angle D = 90^\circ, AB < CD$. Điểm I nằm trong hình thang sao cho $BI = BA, CI = CD$.</p> <p>Kẻ IH vuông góc với BC tại H, đường thẳng IH cắt AD tại M</p> <p>a) Chứng minh $MA^2 = MI(HI + MH)$</p> <p>b) Gọi E là điểm đối xứng với D qua C. Gọi K là giao điểm của IE và BC. Chứng minh : $KC \cdot AD = IM \cdot DE$</p> <p>c) Gọi N là giao điểm của AI và DK.</p> <p>Chứng minh : $IN^2 \cdot DE^2 \cdot \sin^2 KIC = (EK^2 + IE^2 - 4KE \cdot CE \cdot \cos KIC)(ID^2 - IN^2)$</p>	

	a(3,0 điểm)	a) Chứng minh $MA^2 = MI(HI + MH)$	
		<p>Ta có:</p> $MA^2 = MB^2 - AB^2 = MB^2 - IB^2$ $= (MH^2 + BH^2) - (IH^2 + BH^2) = MH^2 - IH^2$ $= (MH + IH)(MH - IH) = MI(MH + IH)$ <p>Do đó: $MA^2 = MI(MH + IH)$</p>	<p>1,0</p> <p>1,0</p> <p>1,0</p>
	b(2,0 điểm)	b) Gọi E là điểm đối xứng với D qua C. Gọi K là giao điểm của IE và BC. Chứng minh : $KC.AD = IM.DE$	
		<p>Ta có : $MA^2 = MH^2 - IH^2$</p> <p>Chứng minh tương tự : $MD^2 = MH^2 - IH^2$</p> <p>Suy ra $MD = MA$</p> <p>Vì $DC = CI = CE$ nên $\widehat{DIE} = 90^\circ$</p> <p>$\widehat{MID} + \widehat{HIK} = 90^\circ$, $\widehat{CKE} + \widehat{HIK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MID} = \widehat{CKE}$</p> <p>$\widehat{MDI} + \widehat{IDE} = 90^\circ$, $\widehat{CEK} + \widehat{IDE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MDI} = \widehat{CEK}$</p> <p>Suy ra $\triangle CKE \sim \triangle MID \Rightarrow \frac{CK}{IM} = \frac{CE}{MD} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow KC.AD = IM.DE$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
	c(2,0 điểm)	c) Chứng minh : $IN^2.DE^2.\sin^2 KIC = (EK^2 + IE^2 - 4KE.CE.\cos KIC)(ID^2 - IN^2)$	
		<p>Ta có:</p> $IN^2.DE^2.\sin^2 KIC = (EK^2 + IE^2 - 4KE.CE.\cos KIC)(ID^2 - IN^2)$ $\Rightarrow IN^2.DE^2.\sin^2 IED = (EK^2 + IE^2 - 4KE.CE.\cos IED)(ID^2 - IN^2)$	

		$\Rightarrow (IN.ID)^2 = (ID^2 - IN^2)(IE^2 + EK^2 - 2KE.DE \cdot \frac{IE}{DE})$ $\Rightarrow (IN.ID)^2 = (ID^2 - IN^2)(IE^2 + EK^2 - 2KE.IE)$ $\Rightarrow (IN.ID)^2 = (ID^2 - IN^2)(IE - EK)^2$ $\Rightarrow IN^2.ID^2 = (ID^2 - IN^2)IK^2$ $\Rightarrow \frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IN^2} - \frac{1}{ID^2} \Rightarrow \frac{1}{IN^2} = \frac{1}{ID^2} + \frac{1}{IK^2}$	1,0
		<p>Thật vậy: $\triangle CKE \square \triangle MID \Rightarrow \frac{EK}{ID} = \frac{CE}{MD} = \frac{DE}{AD}$ và $\angle ADI = \angle E$ $\Rightarrow \triangle EKD \square \triangle DIA(c.g.c)$ $\Rightarrow \angle A_1 = \angle D_2$, $\angle D_2 + \angle ADN = 90^\circ \Rightarrow \angle A_1 + \angle ADN = 90^\circ$ suy ra $\triangle ADN$ vuông tại N Ta có $\triangle DIK$ vuông tại I, đường cao IN $\Rightarrow \frac{1}{IN^2} = \frac{1}{ID^2} + \frac{1}{IK^2}$ (ĐPCM)</p>	1,0

Câu 5 (2.0 điểm)	<p>Câu 5. (2,0 điểm)</p> <p>a) Một máy chơi trò chơi minh họa như hình dưới, trong đó các hình lục giác màu sẫm là những vật cản. Người chơi thả bóng vào vị trí có mũi tên, bóng rơi xuống và sẽ lọt vào 1 trong số 5 vị trí, nếu bóng rơi vào vị trí \$ thì người chơi được nhận phần thưởng. Giả sử bóng luôn di chuyển từ trên xuống theo các lối đi màu trắng tạo bởi các vật cản và thành của máy.</p> <p>Nếu bóng rơi vào ô có biểu tượng \$, người chơi thắng cuộc và có phần thưởng, ngược lại là thua. Giả sử các con đường đi có thể có của bóng là đồng khả năng. Tính xác suất trúng thưởng.</p> <p>b) Để chơi trò chơi này, người chơi phải mua 3 nghìn đồng một quả bóng và nếu trúng thưởng thì nhận được 4 nghìn đồng. Có 200 người chơi, có thể ước lượng số người thắng là bao nhiêu? Có thể ước lượng số tiền mà người chủ chiếc máy thu được là bao nhiêu?</p>	
---------------------	--	--

	a.(1,0 điểm)	<p>Ta mô tả đường đi của quả bóng là một dãy những lần rẽ trái (T), rẽ phải (P) và tổng số lần rẽ là 4. Chẳng hạn đường đi của quả bóng trong hình minh họa là: $PTPT$</p> <p>Số kết quả có thể được liệt kê như sơ đồ hình cây sau:</p>	0,5
		<p>Có tất cả 16 kết quả.</p> <p>Ta nhận thấy để đến được ô có biểu tượng \$, quả bóng rẽ phải đúng hai lần và rẽ trái đúng hai lần.</p> <p>Số kết quả thuận lợi là: 8. Vậy xác suất trúng thưởng là $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.</p>	0,5
	b.(1,0 điểm)	<p>Nếu có 200 người chơi thì số tiền thu được là: $200 \cdot 3 = 600$ (nghìn đồng).</p> <p>Ta có thể ước tính số người thắng là: $200 \cdot \frac{1}{2} = 100$ người, số tiền thưởng của họ là: $4 \cdot 100 = 400$ (nghìn đồng).</p> <p>Vậy người chủ chiếc máy thu được số tiền ước tính là: $600 - 400 = 200$ (nghìn đồng).</p>	0,5

Mọi cách giải khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

HSG TOÁN 9 NĂM 2024-2025 HUYỆN TÂN KỲ

Câu 1. (4,0 điểm)

- Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{2x - x^2}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} \right) \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1 - x}{x} \right)$ với $x \neq 0; x \neq 2$.
- Viết tập hợp A các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ các số 1, 2, 7, 8, 9.

Tính xác suất của biến cố "Số tự nhiên được viết ra là số chẵn" của tập hợp A.
Câu 2: (5,0 điểm)

$$(x+2)^3 + (3x-1)^2 = 5x(3x+1) + 11$$

a) Giải phương trình

$$\begin{cases} \frac{4x+5y}{xy} = 2 \\ 20x+xy = 30y \end{cases}$$

b) Giải hệ phương trình sau

Câu 3. (3,0 điểm)

1. Tìm số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $p^2 + q^2 + r^2 = 302$.
2. Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0$.
3. Cho m, n, p, q là các số nguyên thỏa mãn $m^2 + n^2 + p^2 = q^2$.

Chứng minh $mnpq + 2025$ viết được dưới dạng hiệu của 2 số chính phương.
Câu 4. (7,0 điểm)

(AB < AC)

AD, BE, CF

I

Cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao cắt nhau tại H. Gọi M, lần lượt AB, AC

là trung điểm của BC và AH. Đường thẳng qua M vuông góc BC cắt các đường thẳng lần

Q, P

lượt

tại

$$AM = AB$$

a)

Biết

Tính

$$\frac{1}{AH^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{EF^2}$$

APQ

b) Chứng minh và trực tâm của tam giác thuộc đường thẳng MH.

c) Tia phân giác của góc BHD cắt DB tại V. Tia phân giác của góc HBD cắt DH tại U. HV cắt BU tại O. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$$T = \frac{BU^2}{BO^2} + \frac{HV^2}{HO^2}$$

Câu

5.

(1,0

điểm)

x, y, z

$$x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 30$$

$$P = x + y + z$$

Cho

thực thỏa mãn

và

. Tìm GTNN của

....Hết...

HƯỚNG DẪN CHÂM VÀ ĐÁP ÁN ĐỀ THI HSG CẤP HUYỆN
MÔN TOÁN 9 - NĂM HỌC 2024 -2025

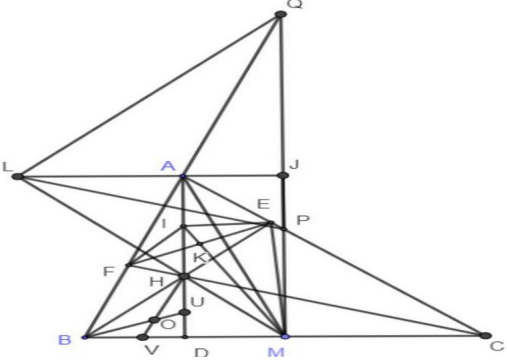
Câu	Nội dung	Điểm
1 (4,0 điểm)	a) Với $x \neq 0; x \neq 2$ ta có	
	$A = \left(\frac{2x - x^2}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} \right) \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1-x}{x} \right)$	
		0,5
	$A = \left(\frac{2x - x^2}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(x-2)(x^2 + 4)} \right) \left(\frac{2 + x(1-x)}{x^2} \right)$	0,5
	$A = \left(\frac{(2x - x^2)(x-2) - 2 \cdot 2x^2}{2(x-2)(x^2 + 4)} \right) \cdot \frac{2 + x(1-x)}{x^2}$	0,5
	$A = \left(\frac{-x(x^2 + 4)}{2(x-2)(x^2 + 4)} \right) \cdot \frac{-(x+1)(x-2)}{x^2}$	
	$A = \frac{x+1}{2x}$	0,5
	Vậy với $x \neq 0; x \neq 2$ thì $A = \frac{x+1}{2x}$	
	Tập hợp A các số có 3 chữ số đôi một khác nhau gồm có $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ số	
		0,5
	Số các số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau là số chẵn là $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ số	0,5
	Vậy xác suất để biến cố xảy ra số chẵn có 3 chữ số là $24: 60 = 0,4$.	
2 (5,0 điểm)	Ta có $(x+2)^3 + (3x-1)^2 = 5x(3x+1) + 11$	

	Biến đổi phương trình trên ta được	
	$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + 9x^2 - 6x + 1 = 15x^2 + 5x + 11$. Thu gọn phương trình ta	0,5
	được $x^3 + x - 2 = 0$ dẫn tới $(x-1)(x^2 + x + 2) = 0$. Từ đó ta có	0,5
		0,5
	$x - 1 = 0; x^2 + x + 2 = 0 (vn)$	0,5
	$x = 1 (tm)$	
	Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$,	

		<p>ĐK $x \neq 0; y \neq 0$ Hệ Phương trình đã cho trở thành</p> $\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 2 \\ \frac{30}{x} - \frac{20}{y} = 1 \end{cases}$ <p>đặt</p> $\begin{cases} a = \frac{1}{x} \\ b = \frac{1}{y} \end{cases} (a \neq 0, b \neq 0)$ <p>Ta được hệ phương trình ẩn a, b là</p> $\begin{cases} 5a + 4b = 2 \\ 30a - 20b = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 25a + 20b = 8 \\ 30a - 20b = 1 \end{cases}$ <p>suy ra $\begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện bài toán)</p> <p>Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (5; 4)$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
--	--	---	--

3 (3,0d)	a	<p>Không mất tính tổng quát, giả sử $p \geq q \geq r \geq 2$.</p> <p>Nếu trong 3 số p, q, r đều là 3 số nguyên tố lẻ thì $p^2 + q^2 + r^2$ không chia hết cho 2 nên $p^2 + q^2 + r^2$ khác 302. Do đó trong 3 số p, q, r có ít nhất 1 số chẵn suy ra $r = 2$ lúc đó $p^2 + q^2 = 298$.</p> <p>Trong trường hợp này nếu p, q đều ko có số nào chia hết cho 3 thì $p^2 + q^2$ chia 3 dư 2 mà 298 chia 3 dư 1 nên $p^2 + q^2$ khác 298 suy ra p và q có ít nhất 1 số chia hết cho 3 nên $q = 3$ từ đó suy ra $p = 17$. Vậy $(p; q; r) = (17; 3; 2)$ và các hoán vị.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
	b		
		<p>Ta có: $x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0$</p> <p>Từ đó, $x^2 + y^2 + 1 - 2x + 2xy - 2y - 4y^2 - 8y - 4 = -7$</p> <p>Dẫn tới $(x + y - 1)^2 - (2y + 2)^2 = -7$</p> <p>Hay $(x + 3y + 1)((x - y - 3) = -7 = (-1) \cdot 7 = 7 \cdot (-1) = -7 \cdot 1 = 1 \cdot (-7)$</p> <p>Ta có các trường hợp sau</p>	0,25
		<p>TH1 $\begin{cases} x + 3y + 1 = -1 \\ x - y - 3 = 7 \end{cases}$</p> <p>TH2. $\begin{cases} x + 3y + 1 = 7 \\ x - y - 3 = -1 \end{cases} \begin{cases} x = 7 \\ y = -3 \end{cases}$</p> <p>$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$</p>	0,25
		TH3 行	0,25

		<p>$\begin{cases} x + 3y + 1 = 1 \\ x - y - 3 = -7 \end{cases} \begin{cases} x + 3y + 1 = -7 \\ x - y - 3 = 1 \end{cases}$</p> <p>$\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$</p> <p>Vậy $(x; y) \in \{(1; -3); (-3; 1); (3; 1); (7; -3)\}$</p>	0,25
--	--	--	------

	C	<p>Nếu m, n, p, q đều là các số nguyên lẻ thì q^2, p^2, n^2, m^2 đều chia 4 dư 1 và $m^2 + n^2 + p^2$ chia 4 dư 3 suy ra $m^2 + n^2 + p^2$ khác q^2. Do đó trong 4 số m, n, p, q có ít nhất 1 số nguyên chẵn lúc đó $mnpq + 2025$ là 1 số nguyên lẻ ta đặt $mnpq + 2025 = 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = (k + 1)^2 - k^2$ với k là số nguyên</p>	<p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
4 (7,0d)			
	1(3d)	<p>Do $AB = AM$ nên tam giác ABM cân tại A dẫn tới đường cao AD đồng thời là đường trung tuyến nên $BD = DM = BM : 2 = CM : 2$ suy ra $CD = 3BD$. Tam giác ABD và tam giác ACD vuông tại D. ta có</p> $\tan B = \frac{AD}{DB} = \frac{AD}{DC : 3} = 3 \cdot \frac{AD}{DC} = 3 \tan C \text{ hay } \frac{\tan B}{\tan C} = 3.$	<p>1</p> <p>1 1</p>
	b(2+1) d	<p>Gọi giao điểm của IM và EF là K</p> <p>Áp dụng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông tam có</p> $EM = FM = BC : 2; AI = IE = IF = AH : 2$ <p>suy ra IM là đường trung trực của EF nên K là trung điểm của EF và EK vuông góc IM.</p> <p>$IA = IE$ nên tam giác AIE cân tại I suy ra $IAE = IEA$</p> <p>$EM = EC (= BC : 2)$ nên tam giác EMC cân tại M suy ra $MEC = MCE$</p> <p>Do đó $IEA + MEC = IAE + MCE = 90^\circ$. Suy ra $IEM = 90^\circ$.</p> <p>Xét tam giác IEM vuông tại E có đường cao EK ta chứng minh được</p> $\frac{1}{EI^2} + \frac{1}{EM^2} = \frac{1}{EK^2}$ <p>kết hợp $EF = 2EK; BC = 2EM; AH = 2EI$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>

Ta được 0,25
 Kẻ đường cao AJ của tam giác AQP cắt MH tại L . Ta có 0,25
 AJMD là hình chữ nhật suy ra và AJ song song DM 0,25
 Nên và suy ra (2). Từ (1) và (2) suy ra kết hợp 0,25
 Nên suy ra từ suy ra PL vuông góc AQ nên L là trực tâm của tam giác APQ (Dpcm)

c	Ta được $\frac{1}{AH^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{EF^2}$	
	Kẻ đường cao AJ của tam giác AQP cắt MH tại L . Ta có AJMD là hình chữ nhật suy ra $AJ = DM$ và AJ song song DM	
	Nên $\frac{JA}{DH} = \frac{DM}{DH} = \frac{LA}{AH} = \frac{LA+JA}{AH+DH} = \frac{LJ}{AD} (1)$	
	$BHD = AHE = JAP$ và $BDH = AJP = 90^\circ$ suy ra $\square DBH \square JAP (gg) \frac{AJ}{DH} = \frac{JP}{DB} (2)$. Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BD}{AD} = \frac{JP}{JL}$ kết hợp $BDA = LJP = 90^\circ$	
	Nên $\square DBA = \square JPL (cgc)$ suy ra $JLP = DAB$ từ suy ra PL vuông góc AQ nên L là trực tâm của tam giác APQ (Dpcm)	

		<p> $BH = a.DH = b.BD = c$ $a^2 = b^2 + c^2$ </p> <p> Đặt $\frac{DU}{UH} = \frac{BD}{BH} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{DU}{UH + DU} = \frac{c}{c + a} \Rightarrow \frac{DU}{b} = \frac{c}{c + a} \Rightarrow DU = \frac{bc}{c + a}$ </p> <p> $\frac{OU}{BO} = \frac{DU}{DB} = \frac{b}{a + c} \Rightarrow \frac{OU + BO}{BO} = \frac{b + a + c}{a + c} \Rightarrow \frac{BU}{BO} = \frac{a + b + c}{a + c}$ </p> <p> $\frac{HV}{HO} = \frac{a + c + b}{a + b}$ </p> <p> Chứng minh tương tự ta có: </p> <p> $T = \frac{BU^2}{BO^2} + \frac{HV^2}{HO^2} \geq 2 \cdot \frac{BU}{BO} \cdot \frac{HV}{HO} = 2 \cdot \frac{a + b + c}{a + c} \cdot \frac{a + b + c}{a + b}$ $= 2 \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}{a^2 + ab + ac + bc}$ $= 4 \frac{a^2 + ab + ac + bc}{a^2 + ab + ac + bc} = 4$ </p> <p> $\frac{BU}{BO} = \frac{HV}{HO}$ </p> <p> Dấu xảy ra khi $b = c$ hay khi tam giác BDH vuông cân tại D hay góc $ACB = 45^\circ$. </p> <p> $T = \frac{BU^2}{BO^2} + \frac{HV^2}{HO^2}$ </p> <p> Vậy GTNN của T là 4 . Khi $ACB = 45^\circ$ </p>	
--	--	---	--

5 (1,0 d)	<p>Ta có: $P^2 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$</p> $3(x^2 + y^2 + z^2) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2x^2 + y^2 = 30 + 2x^2 + y^2 \geq 30 + 2 + 1 = 33$ $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 11$ <p>Có:</p> $\left. \begin{aligned} (x-1)(y-1) &\geq 0 \Rightarrow xy \geq x+y-1 \\ (y-1)(z-1) &\geq 0 \Rightarrow yz \geq y+z-1 \\ (z-1)(x-1) &\geq 0 \Rightarrow zx \geq z+x-1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow xy + yz + zx \geq 2(x+y+z) - 3 = 2P - 3$ <p>Từ (1) và (2) ta có</p> $\Rightarrow P^2 \geq 11 + 2(2P - 3) \Rightarrow P^2 \geq 4P + 5 \Rightarrow P^2 - 4P - 5 \geq 0 \Leftrightarrow (P+1)(P-5) \geq 0$ $\Rightarrow P \geq 5$ <p>GTNN của $P = 5$ khi $x = y = 1, z = 3$.</p>
--------------	---

**UBND THỊ XÃ PHƯỚC LONG KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS LỚP 9
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO CẤP THỊ XÃ, NĂM HỌC 2024 - 2025**

ĐỀ CHÍNH

Môn: **Toán**

(Đề thi gồm 02 trang)

Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 16/12/2024

Câu 1: (5,0 điểm).

$$P = \frac{5 - \sqrt{x}}{x - 3\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 6}{1 - \sqrt{x}}$$

1. Cho biểu thức:

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

2. Tính giá trị của biểu thức: $T = 2023x^{2022} + 2024(x-2)^{2023} + 2025$.

biết $x = \sqrt{6 + 4\cos 45^\circ} \sqrt{3 - \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{18 - 16\sin 45^\circ}}} - \tan 60^\circ$

Câu 2: (5,0 điểm).

1. Giải phương trình: $\sqrt{x+3+3\sqrt{2x-3}} + \sqrt{x-1+\sqrt{2x-3}} = 2\sqrt{2}$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2y + 3 = y^2 + 4x & (1) \\ x^2 + y^2 = 5 & (2) \end{cases} (*)$$

3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m - 1$.
 . Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1 \cdot y_2 > 4$.

Câu 3: (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H .

a) Chứng minh: $FA \cdot AB = AE \cdot AC$.

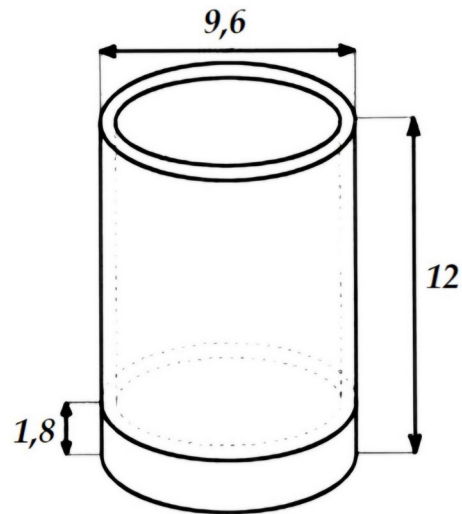
b) Chứng minh: DH là tia phân giác của $\angle EDF$.

c) Giả sử $\angle ACB = 60^\circ$. Chứng minh: $2EF + BF = \sqrt{3}CF$.

Câu 4: (2,0 điểm).

1. Mẹ bạn Huy bị ốm phải nằm bệnh viện điều trị. Ngoài giờ đến trường, bạn Huy phải vào bệnh viện để chăm sóc mẹ. Theo lời khuyên của bác sĩ, mẹ bạn Huy nên uống sữa nhưng mỗi ngày không được uống quá 900ml sữa. Khi chăm sóc mẹ, mỗi ngày Huy cho mẹ

uống sữa 2 lần, mỗi lần uống $\frac{2}{3}$ ly sữa làm bằng thủy tinh đặc có dạng hình trụ không có nắp, với chiều cao bằng 12cm, đường kính đáy bằng 9,6cm (tính từ mép ngoài cốc), đáy cốc dày đều 1,8cm, thành xung quanh cốc dày đều 0,24cm (hình vẽ). Hỏi bạn Huy cho mẹ uống sữa có đúng theo hướng dẫn của bác sĩ không? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai, $\pi = 3,14$).



2. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của biến cố: “Tổng số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc là số nguyên tố nhỏ hơn 10”.

Câu 5: (3,0 điểm).

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1)$.

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2025}{ab + bc + ca}$.

-----Hết-----

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

- Thí sinh không được sử dụng máy tính, tài liệu.

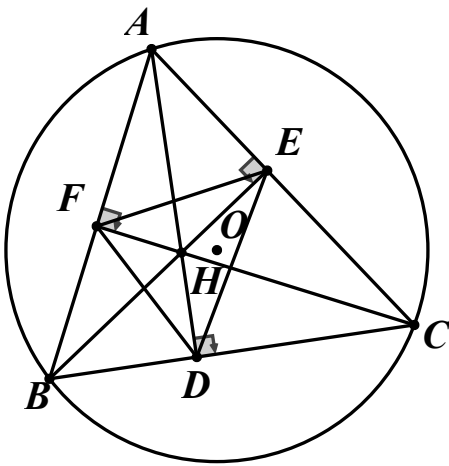
**UBND THỊ XÃ PHƯỚC LONG
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO
TẠO**

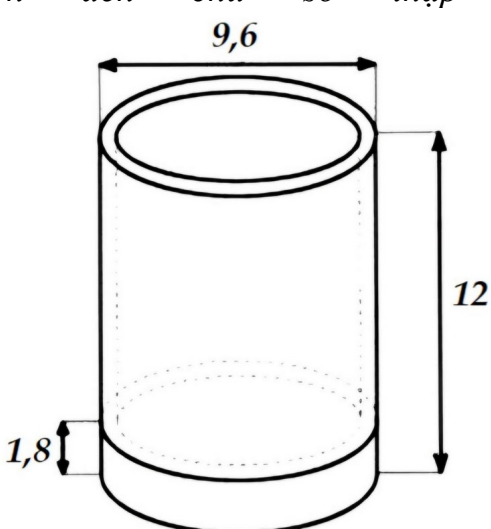
**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS
LỚP 9
NĂM HỌC 2024-2025
Môn: Toán**

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI HSG TOÁN: ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu	Nội Dung	Điểm
Câu 1 (5,0 điểm)	$P = \frac{5 - \sqrt{x}}{x - 3\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 6}{1 - \sqrt{x}}$ <p>1. Cho biểu thức:</p> <p>a) Rút gọn biểu thức P.</p> <p>b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.</p> <p>2. Tính giá trị của biểu thức: $T = 2023x^{2022} + 2024(x-2)^{2023} + 2025$.</p> <p>biết $x = \sqrt{6 + 4\cos 45^\circ} \sqrt{3 - \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{18 - 16\sin 45^\circ}} - \tan 60^\circ$</p>	
1a	Với ĐK: $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$ ta có:	0,5
	$P = \frac{5 - \sqrt{x}}{x - 3\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 6}{1 - \sqrt{x}} = \frac{(5 - \sqrt{x}) - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) + (2\sqrt{x} + 6)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)}$	0,5
	$= \frac{5 - \sqrt{x} - x + 1 + 2x - 4\sqrt{x} + 6\sqrt{x} - 12}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)}$	0,5
	$= \frac{x + \sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1}$	0,5
1b	$P = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} - 1 + 4}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{4}{\sqrt{x} - 1} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x} - 1}$ <p>Ta có</p>	0,75
	<p>Vậy biểu thức P nhận giá trị nguyên.</p> <p>khi $4 : \sqrt{x} - 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \in \{ -4; -2; -1; 1; 2; 4 \}$</p> $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = -4 \\ \sqrt{x} - 1 = -2 \\ \sqrt{x} - 1 = -1 \\ \sqrt{x} - 1 = 1 \\ \sqrt{x} - 1 = 2 \\ \sqrt{x} - 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{VN} \\ \text{VN} \\ x = 0 \\ x = 4 \\ x = 9 \\ x = 25 \end{cases}$	0,25
	Do $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$. Vậy $x = 0; x = 9; x = 25$ thì $P \in \mathbb{Z}$.	0,25

2	$x = \sqrt{6 + 4\cos 45^\circ \sqrt{3 - \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{18 - 16\sin 45^\circ} - \tan 60^\circ}}$ $= \sqrt{6 + 4\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3 - \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{18 - 16\frac{\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{3}}}}$ $= \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}} - \sqrt{3}}}}$ <p>Ta có $= \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{(4 - \sqrt{2})^2} - \sqrt{3}}}}$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
	$= \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}} = \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \sqrt{3 - \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{3}}}$ $= \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{3}} = \sqrt{6 + 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}$ $= \sqrt{6 + 2\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} - \sqrt{3}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 1$ $\Rightarrow T = 2023 \cdot 1^{2022} + 2024 \cdot (1 - 2)^{2023} + 2025 = 2023 + (-2024) + 2025 = 2024$ <p>Vậy $T = 2024$</p>	<p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
Câu 2 (5,0 điểm)	<p>1. Giải phương trình: $\sqrt{x+3} + 3\sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{2}$</p> <p>2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2y + 3 = y^2 + 4x & (1) \\ x^2 + y^2 = 5 & (2) \end{cases} (*)$</p> <p>3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m - 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1 \cdot y_2 > 4$.</p>	
1 (1,5)	<p>Điều kiện: $x \geq \frac{3}{2}$</p> <p>Phương trình (1) viết lại $\sqrt{2x+6} + 6\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x-2} + 2\sqrt{2x-3} = 4$</p>	<p>0,125</p> <p>0,125</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>

	$y_1, y_2 > 4 \Rightarrow x_1^2, x_2^2 > 4 \Rightarrow (x_1 x_2)^2 > 4 \Rightarrow (1-m)^2 > 4 \Rightarrow \begin{cases} 1-m < -2 \\ 1-m > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -1 \end{cases}$ <p>Kết hợp (2) ta có $m > 3$ là giá trị cần tìm.</p>	0,25
Câu 3 (5,0 điểm)	<p>Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H.</p> <p>a) Chứng minh: $FA \cdot AB = AE \cdot AC$.</p> <p>b) Chứng minh: DH là tia phân giác của $\angle EDF$.</p> <p>c) Giả sử $\angle ACB = 60^\circ$. Chứng minh: $2EF + BF = \sqrt{3}CF$.</p>	
		
3a	<p>Chứng minh $FA \cdot AB = AE \cdot AC$</p> <p>Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACF$ ta có: $\angle BAC$ chung, $\angle AEB = \angle AFC = 90^\circ$</p> <p>$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ACF (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow FA \cdot AB = AE \cdot AC$</p>	0,75 0,75
3b	<p>Chứng minh DH là tia phân giác của $\angle EDF$</p> <p>Ta có AD, BE, CF là các đường cao của $\triangle ABC$ nên: $\angle BFH = \angle BDH = \angle HEC = 90^\circ$</p> <p>Tứ giác $BFHD$ có $\angle BFH = \angle BDH = 90^\circ$ nên nó nội tiếp được đường tròn đường kính $BH \Rightarrow \angle HDF = \angle HBF$ (cùng chắn cung FH)(1)</p> <p>Tứ giác $CEHD$ có $\angle CEH = \angle CDH = 90^\circ$ nên nó nội tiếp được đường tròn đường kính $CH \Rightarrow \angle HDE = \angle HCE$ (cùng chắn EH)(2)</p> <p>Mà $\angle FBH = \angle HCE$ (vì $\triangle ABE \sim \triangle ACF$)(3)</p> <p>Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \angle FDH = \angle HDE \Rightarrow DH$ là tia phân giác của $\angle EDF$</p>	0,5 0,5 0,25 0,25 0,25 0,25
3c	<p>Giả sử $\angle ACB = 60^\circ$. Chứng minh $2EF + BF = \sqrt{3}CF$</p>	

điểm)	<p>uống sữa 2 lần, mỗi lần uống $\frac{2}{3}$ ly sữa làm bằng thủy tinh đặc có dạng hình trụ không có nắp, với chiều cao bằng 12cm, đường kính đáy bằng 9,6cm (tính từ mép ngoài cốc), đáy cốc dày đều 1,8cm, thành xung quanh cốc dày đều 0,24cm (hình vẽ). Hỏi bạn Huy cho mẹ uống sữa có đúng theo hướng dẫn của bác sĩ không? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai, $\pi = 3,14$).</p> <div></div>																																																									
	<p>Thể tích của ly uống sữa:</p> $V = \pi \cdot (12 - 1,8) \cdot \left(\frac{9,6 - 2 \cdot 0,24}{2} \right)^2 = 665,98 \text{ (cm}^3\text{)}$ <p>Lượng sữa bạn Huy cho mẹ uống mỗi ngày:</p> $2,2 \cdot \frac{665,98}{3} = 887,97 \text{ (cm}^3\text{)} = 0,88797 \text{ (l)} < 0,9 \text{ (l)}$ <p>Vậy mẹ bạn Huy uống sữa đúng theo quy định.</p>	<p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>																																																								
	<p>2. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của biến cố: “Tổng số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc là số nguyên tố nhỏ hơn 10”.</p> <table><tr><th>Xúc xắc II</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr><tr><th>Xúc xắc I</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>(1;1)</td><td>(1;2)</td><td>(1;3)</td><td>(1;4)</td><td>(1;5)</td><td>(1;6)</td></tr><tr><td>2</td><td>(2;1)</td><td>(2;2)</td><td>(2;3)</td><td>(2;4)</td><td>(2;5)</td><td>(2;6)</td></tr><tr><td>3</td><td>(3;1)</td><td>(3;2)</td><td>(3;3)</td><td>(3;4)</td><td>(3;5)</td><td>(3;6)</td></tr><tr><td>4</td><td>(4;1)</td><td>(4;2)</td><td>(4;3)</td><td>(4;4)</td><td>(4;5)</td><td>(4;6)</td></tr><tr><td>5</td><td>(5;1)</td><td>(5;2)</td><td>(5;3)</td><td>(5;4)</td><td>(5;5)</td><td>(5;6)</td></tr><tr><td>6</td><td>(6;1)</td><td>(6;2)</td><td>(6;3)</td><td>(6;4)</td><td>(6;5)</td><td>(6;6)</td></tr></table> <p>Số phần tử của không gian mẫu là 36</p> <p>Vì gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất nên các kết quả</p>	Xúc xắc II	1	2	3	4	5	6	Xúc xắc I							1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)	2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)	3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)	4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)	5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)	6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)	<p>0,5</p> <p>0,125</p>
Xúc xắc II	1	2	3	4	5	6																																																				
Xúc xắc I																																																										
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)																																																				
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)																																																				
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)																																																				
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)																																																				
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)																																																				
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)																																																				

	<p>có thể xảy ra ở trên đồng khả năng. Có 13 kết quả thuận lợi cho biến cố</p> <p>“Tổng số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc là số nguyên tố nhỏ hơn 10”. là:</p> <p>$(1;1), (1;2), (2;1), (1;4), (4;1), (2;3), (3;2), (1;6), (6;1), (2;5), (5;2), (3;4), (4;3)$ Xác suất của biến cố đã cho là: $P = \frac{13}{36}$</p>	<p>0,125</p> <p>0,25</p>
Câu 5 (3,0 điểm)	<p>1. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1)$.</p> <p>2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 1$. $P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2025}{ab + bc + ca}$.</p> <p>Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:</p>	
5.1 (1,5)	<p>Ta có $x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 2(y + 1)x + 2(y^2 - 1) = 0$ (1).</p> <p>Ta có $\Delta' = y^2 + 2y + 1 - 2y^2 + 2 = -y^2 + 2y + 3$.</p> <p>Để phương trình (1) có nghiệm x thì $\Delta' \geq 0 \Rightarrow -y^2 + 2y + 3 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq y \leq 3$</p> <p>Vì y nguyên nên ta có $\Rightarrow y = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$</p> <p>Với $y = -1$ thay vào phương trình (1), ta có: $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$</p> <p>Với $y = 0$ thay vào phương trình (1), ta có: $x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4.1.(-2) = 12 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} \notin Z \\ x = 1 + \sqrt{3} \notin Z \end{cases}$</p> <p>Với $y = 1$ thay vào phương trình (1), ta có: $x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$</p> <p>Với $y = 2$ thay vào phương trình (1), ta có: $x^2 - 6x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4.1.(6) = 12 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{3} \notin Z \\ x = 3 + \sqrt{3} \notin Z \end{cases}$</p> <p>Với $y = 3$ thay vào phương trình (1), ta có: $x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow (x - 4)^2 = 0 \Rightarrow x = 4$.</p> <p>Vậy phương trình có 4 nghiệm nguyên: $(x; y) = (0; 1), (4; 1), (4; 3), (0; -1)$.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,125</p> <p>0,125</p> <p>0,125</p> <p>0,125</p> <p>0,125</p> <p>0,125</p> <p>0,125</p>
5.2 (1,5)	<p>CM: $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$</p>	0,25

	$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$ $\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 \geq 0$ $\Rightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ <p>Bất đẳng thức luôn đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.</p> $CM: \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (a, b, x, y > 0)$ $\Rightarrow (x+y)(b^2x + a^2y) \geq xy(a+b)^2$ $\Rightarrow b^2x^2 + a^2xy + b^2xy + a^2y^2 \geq a^2xy + 2abxy + b^2xy$ $\Rightarrow b^2x^2 - 2abxy + a^2y^2 \geq 0$ $\Rightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi}$ $bx = ay \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$	0,25
	$* \text{ Ta có } P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{ab + bc + ca} + \frac{2023}{ab + bc + ca}$ $= \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{4}{2ab + 2bc + 2ca} \right) + \frac{2023}{ab + bc + ca}$	0,25
	<p>Áp dụng BĐT $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}, (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$</p> $\Rightarrow P \geq \frac{(1+2)^2}{(a+b+c)^2} + \frac{2023}{\frac{(a+b+c)^2}{3}} \geq 9 + \frac{2023}{\frac{1}{3}} = 6078$	0,25
	<p>Vậy $P_{\min} = 6078 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.</p>	0,25

...HẾT...

Học sinh giải cách khác đúng giám khảo thống nhất cho điểm.

**SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
TỈNH ĐỒNG THÁP**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI CHỌN HSG LỚP 9 CẤP TỈNH
NĂM HỌC: 2024-2025**

Ngày thi: 10/3/2025

**Thời gian làm bài: 150 phút
(Không kể thời gian giao đề)**

Câu 1:

1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}-2} + \frac{2}{x+\sqrt{x}} \right) \cdot (\sqrt{x}+1)$ với $x > 0$ và $x \neq 4$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả các số chính phương x để P là số nguyên.

2. Cho $n > 1$ là số nguyên dương, chứng minh rằng:

a) $\frac{n-1}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n+1}{2^n}.$

b) $\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots + \frac{n-1}{2^n} < 1.$

Câu 2:

1. Một xe máy xuất phát từ địa điểm A đến địa điểm B, sau đó 45 phút một xe ô tô cũng xuất phát từ địa điểm A đi đến địa điểm B với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe máy là 30km/h. Cả hai xe đến địa điểm B cùng một lúc. Biết hai địa điểm A và B cách nhau 100km và vận tốc của mỗi xe là không đổi. Tìm vận tốc của mỗi xe.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = \frac{1}{2}x - 3$ cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B.

a) Tìm tọa độ của A, B.

b) Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua M(2;-2) và cắt đoạn thẳng OA tại C sao cho diện tích tam giác AMC bằng 5.

Câu 3:

1. Chứng minh rằng $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ là số chính phương với mọi số nguyên n.

2. Giải phương trình $3\sqrt{x-1} = 4 - 2x + \sqrt{x+7}.$

3. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1.$

a) Chứng minh rằng $1 \leq \sqrt{8a+1} \leq 3.$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \sqrt{8a+1} + \sqrt{8b+1} + \sqrt{8c+1}.$

Câu 4:

1. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$ và $AB = 8\text{cm}$, $AD = 6\text{cm}$, $CD = 10\text{cm}$. Gọi M là trung điểm BC, H thuộc CD sao cho BH vuông góc với CD. Tính độ dài BC và chứng minh tam giác AHM vuông.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AC > AB$. Trên cạnh AC lấy điểm M (khác với A, C), vẽ tam giác MCP vuông tại C và $MP \parallel BC$. Gọi N là điểm sao cho MCPN là hình chữ nhật, Q là giao điểm của MP và BN.

a) Chứng minh rằng Q là trung điểm của BN.

b) Chứng minh rằng khi M thay đổi trên cạnh AC thì Q luôn thuộc đường trung tuyến AE của tam giác ABC.

Câu 5:

Cho tam giác ABC có góc B tù, $AC > AB$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC; D là chân đường phân giác trong của $\angle BAC (D \in BC)$.

a) Chứng minh rằng A, M, N, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi I là giao điểm của AD và MN, đường thẳng qua I vuông góc với AD cắt BC tại S. Chứng minh rằng tam giác ASD cân.

c) Chứng minh SA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) Gọi E là điểm đối xứng với M qua B, đường tròn ngoại tiếp tam giác CME cắt AC tại F. Đường thẳng SA cắt FE, FM lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng $AP = AQ$

ĐÁP ÁN

Câu 1:

1. a) Ta có:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) \cdot (\sqrt{x}+1)$$

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) \cdot (\sqrt{x}+1)$$

$$P = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

b) Vì x là số chính phương nên $x = n^2 (n \in \mathbb{N})$

Suy ra $P = n + \frac{2}{n}$

Để P nguyên thì $n \in \{1; 2\}$

So sánh điều kiện ta được $x = 1$.

2. a) Ta có: $\frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n+1}{2^n} = \frac{2n}{2^n} - \frac{n+1}{2^n} = \frac{n-1}{2^n}$

b) $\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots + \frac{n-1}{2^n} < 1$

Áp dụng ý a) ta có $\frac{1}{2^2} = \frac{2}{2^1} - \frac{3}{2^2}$

$$\frac{2}{2^3} = \frac{3}{2^2} - \frac{4}{2^3}$$

.....

$$\frac{n-1}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n+1}{2^n}$$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots + \frac{n-1}{2^n} = \frac{2}{2^1} - \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^2} - \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n+1}{2^n} = 1 - \frac{n+1}{2^n} < 1$$

Câu 2:

1. Gọi x (km/h) là vận tốc xe máy ($x > 0$)

Vận tốc của xe ô tô là $x + 30$ (km/h)

Thời gian xe máy đi từ A đến B là $\frac{100}{x}$ (h)

Thời gian xe ô tô đi từ A đến B là $\frac{100}{x+30}$ (h)

Ta có phương trình: $\frac{100}{x} - \frac{100}{x+30} = \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 90x - 12000 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 50 \text{ hoặc } x = -80 \text{ (loại)}$$

Vậy vận tốc xe máy là 50 (km/h) và vận tốc ô tô là 80 (km/h).

2. a) Xét $x = 0$ thì $y = -3$ nên $B(0; -3)$

Xét $y = 0$ thì $x = 6$ nên $A(6; 0)$

b) Gọi H là chân đường cao của M trong ΔAMC , suy ra $MH = 2$.

Ta có: $S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2} \cdot MH \cdot AC = 5$, suy ra $AC = 5$.

Vì C thuộc đoạn OA nên $C(1;0)$

Giả sử $(\Delta): y = ax + b$, khi đó $\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$

Suy ra $(\Delta): y = -2x + 2$.

Câu 3:

1. Ta có:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 \\ &= (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 \\ &= (n^2+3n+1)^2. \end{aligned}$$

2. Điều kiện: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$

Ta có: $3\sqrt{x-1} - \sqrt{x+7} = 4 - 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{(3\sqrt{x-1})^2 - (\sqrt{x+7})^2}{3\sqrt{x-1} + \sqrt{x+7}} = 4 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{8(x-2)}{3\sqrt{x-1} + \sqrt{x+7}} = -2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{8}{3\sqrt{x-1} + \sqrt{x+7}} + 2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad (\text{vì } \frac{8}{3\sqrt{x-1} + \sqrt{x+7}} + 2 > 0)$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.

3. a) Ta có: $0 \leq a, b, c \leq 1$

Suy ra $1 \leq 8a+1 \leq 9$ hay $1 \leq \sqrt{8a+1} \leq 3$

b) Theo kết quả a) ta có $(\sqrt{8a+1}-1)(3-\sqrt{8a+1}) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{8a+1} \geq 2a+1$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$ hoặc $a = 1$.

Tương tự ta có: $\sqrt{8b+1} \geq 2b+1$ và $\sqrt{8c+1} \geq 2c+1$

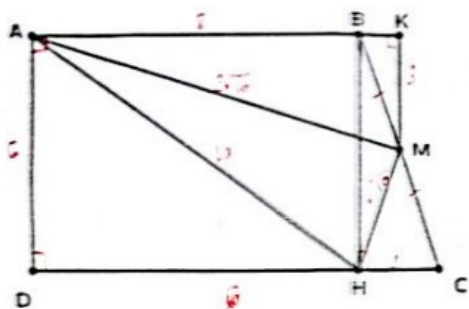
Cộng dồn các bất đẳng thức ta được:

$$M = \sqrt{8a+1} + \sqrt{8b+1} + \sqrt{8c+1} \geq 2(a+b+c) + 3 = 5$$

Vậy GTNN của M bằng 5 khi và chỉ khi $a = 1; b = c = 0$ hoặc $b = 1; a = c = 0$ hoặc $c = 1; a = b = 0$.

Câu 4:

1.



Ta có; ABHD là hình chữ nhật, suy ra $BH = AD = 6 \text{ cm}$

$HC = 2 \text{ cm}$

Khi đó: $BC = \sqrt{BH^2 + HC^2} = 2\sqrt{10} \text{ (cm)}$

Ta có: $AH = \sqrt{AD^2 + DH^2} = 10$ (cm), $MH = \frac{BC}{2} = \sqrt{10}$ (cm)

Gọi K thuộc đường thẳng AB sao cho MK vuông góc với AB, suy ra

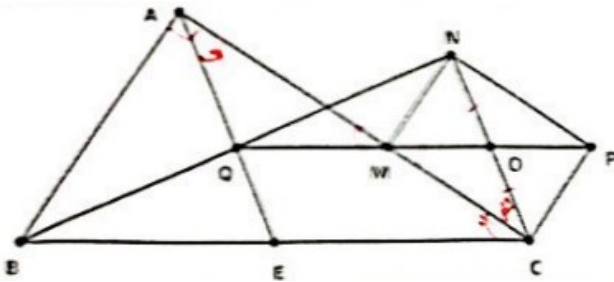
$$BK = \frac{HC}{2} = 1 \text{ cm}; \quad MK = \frac{AD}{2} = 3 \text{ (cm)} \Rightarrow AK = 9 \text{ (cm)}$$

Ta có: $AM = \sqrt{AK^2 + MK^2} = 3\sqrt{10}$ (cm)

Do đó: $AM^2 + MH^2 = (3\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 = 100 = AH^2$

Vậy tam giác AMH vuông tại M.

2.



a) Gọi O là giao điểm của NC và MP.

Khi đó O là trung điểm của NC.

Xét tam giác BNC có OQ // BC và O là trung điểm của NC
nên Q là trung điểm của BN.

b) Xét tam giác BNC ta có QE là đường trung bình suy ra EQ // NC (1)

Do MCPN là hình chữ nhật nên $\angle QMA = \angle CMO = \angle OCM$.

Mặt khác $\angle QMA = \angle ECA$ (đồng vị), suy ra $\angle OCM = \angle ECA$ (2)

Vì tam giác ABC vuông nên $\angle EAC = \angle ECA$.

Từ (2), (3) suy ra $\angle OCM = \angle EAC$, kéo theo AE // NC (4)

Từ (1), (4) suy ra Q thuộc AE.

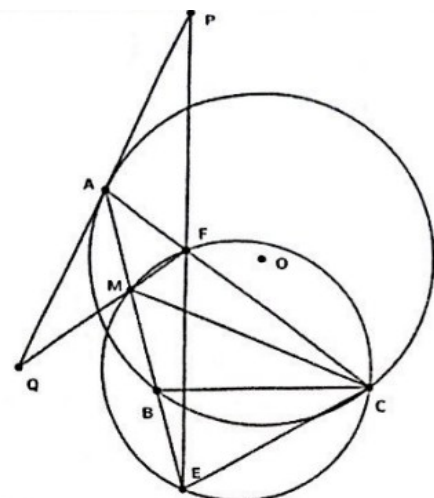
Câu 5:

Vậy A, M, N, O thuộc đường tròn đường kính AO.

Do $SI \perp AD$ và $IA = ID$ nên tam giác ASD cân tại S.

Suy ra SA là tiếp tuyến của (O).

d)



Xét (O), ta có AP là tiếp tuyến nên $\widehat{PAC} = \widehat{ABC}$.

Do đó: $\triangle PAF \sim \triangle CBM$ suy ra $\frac{PA}{CB} = \frac{AF}{BM}$ (1)

Xét (O), ta có AQ là tiếp tuyến nên $\angle QAC = \frac{1}{2} \text{sd} \angle ABC$

Mà $\angle EBC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2} \text{sd} \angle AC = \frac{1}{2} \text{sd} \angle ABC$

Suy ra $\angle QAC = \angle EBC$ (2)

Xét (CME), ta có $\angle AFQ = 180^\circ - \angle MFC = 180^\circ - \frac{1}{2} \text{sd} \angle MEC = \frac{1}{2} \text{sd} \angle MFC = \angle CEM$ (3)

Từ (2), (3) suy ra $\triangle QAF \sim \triangle CBE$ suy ra $\frac{QA}{CB} = \frac{AF}{BE}$

Từ (1), (4) và MB = BE suy ra AQ = AP.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẾ PHONG
TRƯỜNG THCS KIM SƠN

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG NĂM HỌC 2024 – 2025
MÔN TOÁN 9

Thời gian làm bài 150 phút

Bài 1. (3,5 điểm)

- Chứng minh rằng $n^5 + 2024n + 2022$ không thể là số chính phương.
- Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$
- Tìm tất cả các số nguyên p, q sao cho $2^p + p^2$ cùng luỹ thừa nguyên tố với $2^q + q^2$.

Bài 2. (4,0 điểm) Cho biểu thức
$$P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$$

- Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P.
- Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$.

Bài 3: (4,0 điểm)

a. Tìm số dư trong phép chia của biểu thức: $P(x) = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2025$ cho đa thức: $x^2 + 10x + 21$.

$$b. \text{ Cho } x, y > 0. \text{ Tìm GTNN của } G = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Bài 4. (5,5 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A, AC > AB, đường cao AH. Trong nửa mặt phẳng bờ AH có chứa C, vẽ hình vuông AHKE. Gọi P là giao điểm của AC và KE.

a) Chứng minh $\triangle ABP$ vuông cân

b) Gọi Q là đỉnh thứ tư của hình bình hành APQB, gọi I là giao điểm của BP và AQ. Chứng minh: H, I, E thẳng hàng.

Bài 5. (2,0 điểm) Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $\tan \alpha = 2$. Tính giá trị của các biểu thức:

$$A = \frac{\sin^3 + 2\cos^3 - \sin \cdot \cos^2 + 4\sin^2 \cdot \cos}{2\cos^3 - 3\sin^3 + 9\sin \cdot \cos^2 - 8\sin^2 \cdot \cos}$$

Bài 6. (1,0 điểm) Trên mặt phẳng cho 6 điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng và khoảng cách giữa các cặp điểm là các số khác nhau. Ta nối mỗi cặp điểm bởi một đoạn thẳng. Chứng minh rằng trong các đoạn thẳng thu được có một đoạn thẳng là cạnh bé nhất của tam giác có ba đỉnh là ba trong số 6 điểm đã cho, đồng thời là cạnh lớn nhất của một tam giác khác có ba đỉnh là 3 trong số 6 điểm đã cho. /.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Bài 1. (3,5 điểm)

a. Chứng minh rằng $n^5 + 2024n + 2022$ không thể là số chính phương.

Giải

$$\begin{aligned} a) \text{ Ta có } n^5 + 2024n + 2022 &= n^5 - n + 2025n + 2020 + 2 \quad (n \in \mathbb{N}) \\ &= n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) + 5n(n-1)(n+2) + 2025n + 2020 + 2 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

chia 5 dư 2.

Ta nhận xét rằng không có số chính phương nào chia 5 dư 2.

Vậy $n^5 + 2024n + 2022 \quad (n \in \mathbb{N})$ không phải là số chính phương.

b. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Giải:

$$\text{Ta có: } y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2 \left(x + \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{7}{8}. \text{ Nên: } y^3 - x^3 > 0 \Rightarrow y > x \quad (1)$$

$$\text{Mà: } (x+2)^3 - y^3 = (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) - (x^3 + 2x^2 + 3x + 2)$$

$$= 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4} \right)^2 + \frac{15}{16} > 0. \text{ Nên: } x+2 > y \quad (2)$$

Vì x, y là các số nguyên nên từ (1) và (2) suy ra: $y = x+1 \quad (3)$

Thay (3) vào phương trình đã cho ta tìm được: $x = -1$; $y = 0$ thỏa mãn.

c. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $2^p + p^2$ cũng là số nguyên tố

Giải:

Xét hai trường hợp:

$$+) \quad p = 3 \Leftrightarrow p = 2 \text{ hoặc } p = 3$$

$$* \text{ Nếu } p = 2 \Rightarrow 2^p + p^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \notin P$$

$$* \text{ Nếu } p = 3 \Rightarrow 2^p + p^2 = 2^3 + 3^2 = 17 \in P$$

$$+) \quad p > 3 \text{ ta có } 2^p + p^2 = (p^2 - 1) + (2^p + 1)$$

$$\forall p \text{ lẻ} \Rightarrow (2^p + 1) \vdots 3$$

$$\forall p \text{ chẵn } p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1) \vdots 3 \Rightarrow 2^p + p^2 \notin P$$

Vậy có duy nhất một giá trị $p = 3$ thỏa mãn bài ra

Bài 2. (4,0 điểm)

Cho biểu thức
$$P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P .

b) Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$.

Giải:

a) (1,0 điểm)

$$\text{ĐKXĐ : } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left(\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right)$$

$$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2 - 1 + x + 2 - x^2}{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} (TM) \\ x = -1 (L) \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{1}{2}$ thì $P = \frac{-1}{2}$

(Nếu không loại $x = -1$ trừ 0,25 điểm)

b) (1,0 điểm)

$$P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{(x^2-1)+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$$

Với $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+1 \in \mathbb{Q}$. Để P nguyên thì $\frac{1}{x-1}$ nguyên $\Rightarrow x-1$ là ước của 1.
 $\Rightarrow x-1 \in \{-1; 1\}$

*) $x-1=1 \Rightarrow x=2$ (TMĐK)

*) $x-1=-1 \Rightarrow x=0$ (Loại do) ĐKXD

Vậy $x=2$ thì P nhận giá trị nguyên.

c)
$$P = \frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1} = x-1 + \frac{1}{x-1} + 2$$

Vì $x > 1$ nên $x-1 > 0$ và $\frac{1}{x-1} > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương $x-1$ và $\frac{1}{x-1}$ ta có

$$x-1 + \frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} = 2$$

Đẳng thức xảy ra khi $x-1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow x-1=1$ (vì $x-1 > 0$) $\Leftrightarrow x=2$ (TMĐK)

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4 khi $x=2$

Bài 3: (4,0 điểm)

a. Tìm số dư trong phép chia của biểu thức: $P(x)=(x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2025$ cho đa thức: $x^2 + 10x + 21$.

Giải: Ta có:

$$P(x) = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2025 = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2025$$

$$\text{Đặt } x^2 + 10x + 21 = t \text{ ta có: } P(x) = (t-5)(t+3) + 2025 = t^2 - 2t + 2010$$

Do đó $P(x)$ chia cho $x^2 + 10x + 21$ dư 2010.

b. Cho $x, y > 0$. Tìm GTNN của $G = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

Giải :

Đặt : $P = G - 2$ ta có :

$$P = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2$$

$$P = \left(\frac{x^4}{y^4} - 2 \cdot \frac{x^2}{y^2} + 1 \right) + \left(\frac{y^4}{x^4} - 2 \cdot \frac{y^2}{x^2} + 1 \right) + \left(\frac{x^2}{y^2} - 2 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} \right) + \left(\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x} \right)$$

$$P = \left(\frac{x^2}{y^2} - 1 \right)^2 + \left(\frac{y^2}{x^2} - 1 \right)^2 + \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right)^2 + \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow P_{\min} = 0 \Leftrightarrow x = y > 0$$

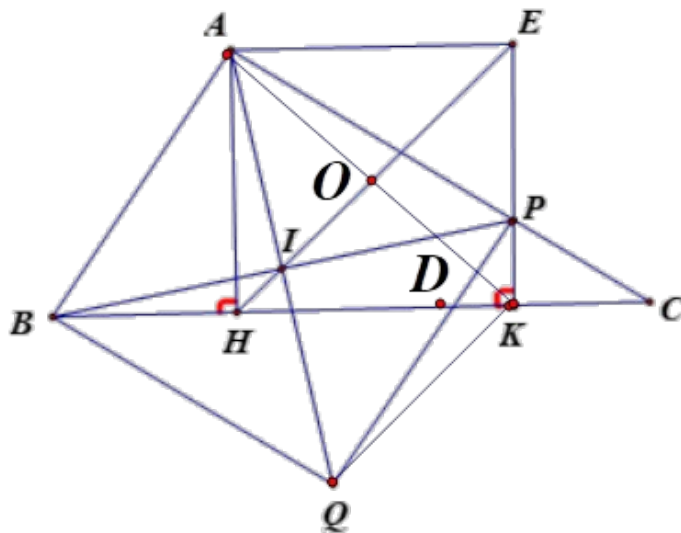
$$\text{Vậy } G_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = y > 0$$

Bài 4. (7,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, $AC > AB$, đường cao AH. Trong nửa mặt phẳng bờ AH có chứa C, vẽ hình vuông AHKE. Gọi P là giao điểm của AC và KE

a) Chứng minh $\triangle ABP$ vuông cân

b) Gọi Q là đỉnh thứ tư của hình bình hành APQB, gọi I là giao điểm của BP và AQ. Chứng minh: H, I, E thẳng hàng.



Giải:

thẳng. Chứng minh rằng trong các đoạn thẳng thu được có một đoạn thẳng là cạnh bé nhất của tam giác có ba đỉnh là ba trong số 6 điểm đã cho, đồng thời là cạnh lớn nhất của một tam giác khác có ba đỉnh là 3 trong số 6 điểm đã cho.

Giải :

Quy ước : gọi mỗi tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm trong số các điểm đã cho một cách vắn tắt là tam giác

Với mỗi tam giác, ta tô các cạnh lớn nhất của nó màu xanh, ta tô màu đỏ tất cả các đoạn thẳng không được tô màu xanh

Gọi một trong sáu điểm đã cho là A. Do đó theo nguyên lý Dirichle tại 3 đoạn trong số 5 đoạn nối với 5 điểm còn lại cùng màu. Gọi 3 đoạn đó là : AB, AC, AD. Xét :

+ Trường hợp 1 : AB, AC, AD có cùng màu xanh. Khi đó vì cạnh lớn nhất của $\triangle DBC$ có màu xanh nên một trong các tam giác ABC, ABD, ACD là tam giác có cả ba cạnh cùng được tô bởi màu xanh. Từ đó ta có điều phải chứng minh

+ Trường hợp 2 : AB, AC, AD có cùng màu đỏ. Khi đó, vì các đoạn thẳng có độ dài khác nhau đôi một nên BC, CD, DB tương ứng là cạnh lớn nhất của tam giác ABC, ACD, ADB.

Suy ra $\triangle BCD$ có cả 3 cạnh cùng màu xanh.

Từ đó ta có điều phải chứng minh

..... Hết.....

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ỨNG HÒA
ĐỀ CHÍNH THỨC
 (Đề thi gồm 01 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
CÁC MÔN VĂN HÓA LỚP 9 NĂM HỌC 2024 -
2025

ĐỀ THI MÔN: TOÁN 9

(Thời gian làm bài: 120 phút không kể thời gian giao đề)

Bài 1 (6,0 điểm).

$$P = \left(\frac{5-x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$$

1. Cho biểu thức

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức P là số nguyên.

2. Cho đa thức $f(x) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + x(x+1)$. Tìm x để $f(x) = 20$.

Bài 2 (4,0 điểm).

1. Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh $A(n) = n^3 - n$ chia hết cho 24.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x + y + z + xy + yz + zx = 6 \end{cases}$$

2. Tìm số nguyên dương x, y, z thỏa mãn

Bài 3 (3,0 điểm).

1. Một chiếc túi đựng đựng 117 đôi tất, trong đó có một số đôi màu trắng, một số đôi màu đen, còn lại là các màu khác. Lấy ngẫu nhiên một đôi tất trong túi. Biết rằng xác suất để chọn được

đôi tất màu trắng và màu đen lần lượt là $\frac{2}{9}$ và $\frac{3}{13}$. Tìm số đôi tất trong túi không phải màu đen hoặc màu trắng.

2. Cho a, b, c là các số bất kỳ. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 + 1 > a + b + c$.

Bài 4. (điểm). Cho $\square ABC$ nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của HC, N là trung điểm của AC, AM cắt HN tại G . Đường thẳng đi qua M vuông góc với HC và đường thẳng đi qua N vuông góc với AC cắt nhau tại K . Chứng minh rằng

a) $\square AEF \sim \square ABC$ từ đó suy ra $S_{AEF} = S_{ABC} \cdot \cos^2 \angle BAC$.

b) $BH \cdot KM = BA \cdot KN$.

c) $\sqrt{\frac{GA^3 + GB^3 + GH^3}{GM^3 + GK^3 + GN^3}} = 2\sqrt{2}$.

Bài 5. (điểm). Cho bảng ô vuông kích thước $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ gồm 100 ô vuông đơn vị. Điền vào mỗi ô vuông của bảng này một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho hai ô số ở hai ô vuông chung cạnh hoặc chung đỉnh là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong bảng ô vuông đã cho có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

LỜI GIẢI

Câu 1. (6,0 điểm)

$$P = \left(\frac{5-x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$$

1. Cho biểu thức

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức P là số nguyên.

2. Cho đa thức $f(x) = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + x(x+1)$. Tìm x để $f(x) = 20$.

Lời giải

1. a) ĐKXD: $x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}$

$$P = \left(\frac{5-x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$$

$$P = \frac{5-x+2(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{1-2x}$$

$$P = \frac{2}{1-2x}$$

Vậy

$$P = \frac{2}{1-2x}$$

với

$$x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}$$

b) Để $P \in \mathbb{Z}$ thì $1-2x \mid 2$ hay $1-2x \in U_{(2)} = \{\pm 1; \pm 2\}$

Xét các trường hợp, ta được $x \in \left\{ 0; 1; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\}$ mà $x \in \mathbb{Z}, x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}$ nên $x = 0$.
 Vậy $x = 0$ là giá trị nguyên của x để biểu thức P là số nguyên.

$$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

2) Ta chứng minh

$$3A = 3n(n+1) + 3(n-1)n + \dots + 2.3.3 + 1.2.3$$

$$3A = n(n+1)[(n+2) - (n-1)] + \dots + 2.3.(4-1) + 1.2.3$$

$$3A = n(n+1)(n+2) - (n-1) \cdot n \cdot (n+1) + \dots + 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1.2 \cdot 3 + 1.2 \cdot 3$$

$$3A = n(n+1)(n+2)$$

$$A = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Áp dụng $\binom{*}{}$, ta có

$$f(x) = 1.2 + 2.3 + \dots + x(x+1) = \frac{x(x+1)(x+2)}{3} = 20$$

$$\text{Suy ra } x^3 + 3x^2 + 2x = 60 \text{ hay } x^3 - 3x^2 + 6x^2 - 18x + 20x - 60 = 0$$

$$(x-3)(x^2 + 6x + 20) = 0$$

$$\text{Vì } x^2 + 6x + 20 = (x+3)^2 + 11 > 0 \text{ nên } x = 3.$$

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh $A(n) = n^3 - n$ chia hết cho 24.

2. Tìm số nguyên dương x, y, z thỏa mãn
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x + y + z + xy + yz + zx = 6 \end{cases}$$

Lời giải

1. Ta có $n^3 - n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp. Vì trong ba số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại một số chia hết cho 3 nên $3 \mid n^3 - n$

Vì n là số tự nhiên lẻ nên $n = 2k+1 (k \in \mathbb{N})$, ta có

$$n^3 - n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = 2k \cdot (2k+1) \cdot (2k+2) = 4k(k+1)(2k+1).$$

Vì $k(k+1)$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên luôn có một số chia hết cho 2, do đó $2 \mid k(k+1)$,
 dẫn đến $8 \mid 4k(k+1)(2k+1) = n^3 - n$

Từ (1) và (2) kết hợp $(3; 8) = 1$, ta có $24 \mid n^3 - n$.

2) Vì x, y, z là các số nguyên dương nên $x, y, z \geq 1$ suy ra $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$.

Mà $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ nên $x = y = z = 1$

Thử lại ta thấy $x + y + z + xy + yz + zx = 6$ thỏa mãn.

Vậy $(x; y; z) = (1; 1; 1)$.

Câu 3. (3,0 điểm)

1. Một chiếc túi đựng đựng 117 đôi tất, trong đó có một số đôi màu trắng, một số đôi màu đen, còn lại là các màu khác. Lấy ngẫu nhiên một đôi tất trong túi. Biết rằng xác suất để chọn được đôi tất màu trắng và màu đen lần lượt là $\frac{2}{9}$ và $\frac{3}{13}$. Tìm số đôi tất trong túi không phải màu đen hoặc màu trắng.
2. Cho a, b, c là các số bất kỳ. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 + 1 > a + b + c$.

Lời giải

1. Gọi x là số đôi tất màu trắng, y là số đôi tất màu đen.

Vì xác suất để chọn được đôi tất màu trắng là $\frac{x}{117} = \frac{2}{9}$ suy ra $x = 26$.

Vì xác suất để chọn được đôi tất màu đen là $\frac{y}{117} = \frac{3}{13}$ suy ra $y = 27$.

Số đôi tất có màu khác là: $117 - 26 - 27 = 64$.

2) Theo bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 > a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} = \left(a^2 + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{4}\right) + \left(c^2 + \frac{1}{4}\right) \geq a + b + c$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 + 1 > a + b + c$.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho $\square ABC$ nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của HC , N là trung điểm của AC , AM cắt HN tại G . Đường thẳng đi qua M vuông góc với HC và đường thẳng đi qua N vuông góc với AC cắt nhau tại K . Chứng minh rằng

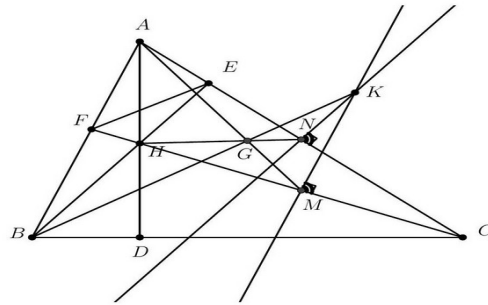
a) $\square AEF \sim \square ABC$ từ đó suy ra $S_{AEF} = S_{ABC} \cdot \cos^2 \angle BAC$.

$$BH \cdot KM = BA \cdot KN$$

b)

$$\sqrt{\frac{GA^3 + GB^3 + GH^3}{GM^3 + GK^3 + GN^3}} = 2\sqrt{2}$$

Lời giải



a) Ta có $\cos \angle BAC = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ suy ra $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$

Xét $\triangle AEF$ và $\triangle ABC$, ta có
 Cùng $\left. \begin{array}{l} \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \\ \angle A \text{ chung} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC$
 (cạnh - góc - cạnh)

Suy ra $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \cos^2 \angle BAC$, từ đó $S_{\triangle AEF} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos^2 \angle BAC$

b) Vì $KM \perp CF$ và $AB \perp CF$ nên $KM \parallel AB$, tương tự ta có $KN \parallel BH$ suy ra $\angle ABH = \angle NKM$

Lại có M là trung điểm HC , N là trung điểm AC nên NM là đường trung bình của $\triangle AHC$ suy ra $NM \parallel AH$ mà $KM \parallel AB$ nên $\angle BAH = \angle NMK$

Xét $\triangle BAH$ và $\triangle KMN$, ta có

$$\left. \begin{array}{l} \angle ABH = \angle NKM \\ \angle BAH = \angle NMK \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BAH \sim \triangle KMN \text{ (góc - góc)}$$

Suy ra $\frac{BA}{KM} = \frac{BH}{KN}$ hay $BH \cdot KM = BA \cdot KN$

c) Gọi G' là giao điểm của KB và HN .

Vì $BH \parallel KN$, theo định lý Thales ta có $\frac{G'N}{G'H} = \frac{NK}{BH} = \frac{MN}{AH} = \frac{1}{2}$ suy ra G' là trọng tâm $\triangle AHC$

Vì G là giao điểm của AM và HN nên G là trọng tâm $\triangle AHC$

Do đó $G \equiv G'$, ta có $GA = 2GM, GB = 2GK, GH = 2GN$

Như vậy, ta có

$$\sqrt{\frac{GA^3 + GB^3 + GH^3}{GM^3 + GK^3 + GN^3}} = \sqrt{\frac{8GM^3 + 8GK^3 + 8GN^3}{GM^3 + GK^3 + GN^3}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho bảng ô vuông kích thước $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ gồm 100 ô vuông đơn vị. Điền vào mỗi ô vuông của bảng này một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho hai ô số ở hai ô vuông chung cạnh hoặc chung đỉnh là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong bảng ô vuông đã cho có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

Lời giải

- Xét hình vuông cạnh 2×2 . Do các hình vuông nhỏ này luôn có chung đỉnh và cạnh nên tồn tại nhiều nhất 1 số chẵn, nhiều nhất 1 số chia hết cho 3, như vậy, có ít nhất 2 số lẻ không chia hết cho 3.
- Xét hình vuông 10×10 gồm 25 hình vuông 2×2 thì có ít nhất 50 số lẻ không chia hết cho 3. Từ 1 đến 10 các số lẻ không chia hết cho 3 là $1, 5, 7$. Theo nguyên lý Dirichlet ta được một

trong ba số trên xuất hiện ít nhất $\left\lceil \frac{50}{3} \right\rceil + 1 = 17$ lần.

**UBND THỊ XÃ KINH MÔN
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**ĐỀ KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN HSG
NĂM HỌC 2024 – 2025
Thời gian làm bài: 150 phút
(Không kể thời gian giao đề)**

Câu 1 (2, 0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức

$$P = \left(\frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{x + \sqrt{x}}{x - 1} \right) \cdot \frac{x - 1}{2x + \sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1}$$

với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq \frac{1}{4}$.

2) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 4 thỏa mãn $P(-2) = 0$ và

$$P(x) - P(x - 2) = x(x + 2)(3x + 1)$$

Xác định đa thức $P(x)$.

Câu 2 (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $x^2 + 5x + 1 = 4\sqrt{x}(x + 1)$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình:

$$3(x^2 + 2y^2 - 1) - 4(xy + 2y) = 0.$$

2) Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a - b$ là số nguyên tố và

$3c^2 = ab + bc + ca$. Chứng minh rằng $8c + 1$ là số chính phương.

Câu 4 (2,5 điểm)

1) Cho tam giác ABC không cân, có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. I là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác ABC. D là hình chiếu vuông góc của I lên BC. Chứng minh

$$ID = \frac{a}{\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}}$$

rằng:

$$\text{và} \quad (a-b)\cot \frac{C}{2} + (b-c)\cot \frac{A}{2} + (c-a)\cot \frac{B}{2} = 0.$$

2) Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Gọi M, N là các điểm thay đổi trên cạnh BC, CD sao cho $\angle MAN = \angle MAB + \angle NAD$, P và Q lần lượt là các giao điểm của AN và AM với BD, I là giao điểm của MP và QN.

a) Chứng minh $AI \perp MN$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN khi M, N thay đổi trên BC và CD.

Câu 5 (0,5 điểm) Trong hộp có chứa 2024 viên bi màu (mỗi viên bi chỉ có đúng một màu) trong đó có 675 viên bi màu đỏ, 657 viên bi màu xanh, 675 viên bi màu tím và 17 viên bi còn lại là các viên bi màu vàng hoặc màu trắng (mỗi màu có ít nhất một viên). Người ta lấy ra từ hộp 123 viên bất kì. Chứng minh rằng, trong số các viên bi vừa lấy ra luôn có ít nhất 36 viên bi cùng màu. Nếu người ta chỉ lấy ra từ hộp 122 viên bi bất kì thì kết luận trên của bài toán còn đúng không?

Câu 6 (1,0 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn thỏa mãn:

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab - 2bc - 2ca = 0.$$

Chứng minh:
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{(a+b-c)^2} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \geq 3.$$

ĐÁP ÁN**Câu 1:**

1) Ta có:

$$P = \left(\frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{x + \sqrt{x}}{x - 1} \right) \cdot \frac{x - 1}{2x + \sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1}$$

$$P = \left[\frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \right] \cdot \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{(2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1}$$

$$P = \left[\frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}.$$

$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}.$$

$$P = \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}.$$

Vậy $P = \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq \frac{1}{4}$.

2) Xét $x = 0$, ta có $P(0) - P(-2) = 0$ hay $P(0) = P(-2) = 0$.

Xét $x = -2$, ta có $P(-2) - P(-4) = 0$ hay $P(-4) = P(-2) = 0$.

Từ đó, ta thấy $P(x)$ nhận $x = 0$, $x = -2$ và $x = -4$ là nghiệm.

Vì $P(x)$ là đa thức bậc bốn, do đó, $P(x) = x(x+2)(x+4)(ax+b)$ (*).

Xét $x = 1$ thì $P(1) - P(-1) = 12$, thay vào (*), ta có:

$$15(a+b) + 3(-a+b) = 12 \text{ hay } 12a + 18b = 12 \text{ hay } 2a + 3b = 2 \quad (1)$$

Xét $x = 2$ thì $P(2) - P(0) = 56$, thay vào (*), ta có:

$$48(2a+b) = 56 \text{ hay } 2a+b = \frac{7}{6} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = \frac{3}{8}; b = \frac{5}{12}$

Vậy $P(x) = x(x+2)(x+4)\left(\frac{3}{8}a + \frac{5}{12}\right)$

Câu 2:

1) $x^2 + 5x + 1 = 4\sqrt{x}(x+1).$ (1)

ĐKXĐ: $x \geq 0$

Với điều kiện $x \geq 0$ thì hai vế của phương trình (1) không âm, do đó phương trình (1) tương đương

$$x^4 + 25x^2 + 1 + 10x^3 + 10x + 2x^2 = 16x^3 + 32x^2 + 16x$$

$$x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 6x + 1 = 0 \quad (2)$$

Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (2), chia cả hai vế của phương trình (2) cho x^2 , ta được

$$x^2 - 6x - 5 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 = 0$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ phương trình trên trở thành
 $t^2 - 2 - 6t - 5 = 0$ hay $t^2 - 6t - 7 = 0$

Suy ra $t = -1$ hoặc $t = 7$.

Xét $t = -1$, tức là $x + \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 (vn)$

Với $t = 7$, tức là $x + \frac{1}{x} = 7 \Rightarrow x^2 - 7x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2} (tm)$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

Cách 2:

Phương trình (1) tương đương với

$$(x+1)^2 + 3x = 4\sqrt{x}(x+1)$$

Đặt $x+1 = a, \sqrt{x} = b (a > 0, b \geq 0)$, phương trình trên trở thành

$$a^2 + 3b^2 = 4ab$$

$$(a-b)(a-3b) = 0$$

Suy ra $a = b$ hoặc $a = 3b$.

Với $a = b$, tức là $x+1 = \sqrt{x} \Rightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$ (vô nghiệm)

Với $a = 3b$, tức là $x+1 = 3\sqrt{x}$, bình phương hai vế, ta có

$$x^2 - 7x + 1 = 0 \text{ suy ra } x = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

$$2) \begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49(1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x(2) \end{cases}$$

Lấy (1) + 3.(2), ta được

$$\begin{aligned}x^3 + 3xy^2 + 3(x^2 - 8xy + y^2) &= -49 + 3(8y - 17x) \\(x+1)^3 + 3y^2(x+1) - 24y(x+1) + 48(x+1) &= 0 \\(x+1)[(x+1)^2 + 3y^2 - 24y + 48] &= 0 \\(x+1)[(x+1)^2 + 3(y-4)^2] &= 0 \\\begin{cases} x+1=0 \\ (x+1)^2 + 3(y-4)^2 = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Với $x+1=0$ thì $x=-1$, thay vào (1) ta được $y=\pm 4$ (thỏa mãn)

Với $(x+1)^2 + 3(y-4)^2 = 0$ thì $x=-1, y=4$ (thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) \in \{(-1; 4); (-1; -4)\}$.

Câu 3:

1)

$$\begin{aligned}3(x^2 + 2y^2 - 1) - 4(xy + 2y) &= 0 \\2x^2 + (x-2y)^2 + 2(y-2)^2 &= 11\end{aligned}$$

Vì $2x^2, (x-2y)^2, 2(y-2)^2 \geq 0$ nên $0 < 2x^2 < 11$ và $2x^2$ là số chẵn nên

$$2x^2 \in \{0; 2; 4; 6; 10\}$$

$$\Rightarrow x^2 \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

Vì x^2 là số chính phương nên $x^2 \in \{0; 1; 4\}$ nên $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

Xét các trường hợp của x , ta tìm được các cặp số thỏa mãn là $(1; 0), (1; 2), (-1; 0)$.

Vậy $(x; y) \in \{(1; 0), (1; 2), (-1; 0)\}$.

2) Ta có: $3c^2 = ab + bc + ca \Rightarrow (2c)^2 = (c+b)(c+a)$

$$\begin{aligned}\text{Đặt } (c+a; c+b) &= d(d \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow c+a \vdots d, c+b \vdots d \\&\Rightarrow a-b \vdots d\end{aligned}$$

Mà $a-b$ là số nguyên tố nên $d=1$ hoặc $d=a-b$.

• Trường hợp 1: $d=1$ thì $(c+a; c+b)=1$ và $(c+a)(c+b) = (2c)^2$ là số chính phương nên $c+a$ và $c+b$ đều là số chính phương.

$$\text{Đặt } c+a=m^2, c+b=n^2 (m, n \in \mathbb{N}) \text{ thì } (2c)^2 = (mn)^2 \Rightarrow 2c=mn \quad (1)$$

Lại có: $m^2 - n^2 = (m-n)(m+n) = a-b$ là số nguyên tố và $m-n < m+n$ nên $m-n=1$ hay $m=n+1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2c = n(n+1)$ hay $8c + 1 = 4n(n+1) + 1 = (2n+1)^2$ là số chính phương.

• Trường hợp 2: $d = a - b$, đặt $c + a = (a - b)x$, $c + b = (a - b)y$ ($x, y \in \mathbb{N}$) và giả sử $x > y$.

Ta có $a - b = (a - b)(x - y)$, suy ra $x - y = 1$ hay $x = y + 1$.

Lại có $(2c)^2 = (a - b)^2 \cdot xy$ suy ra xy là số chính phương.

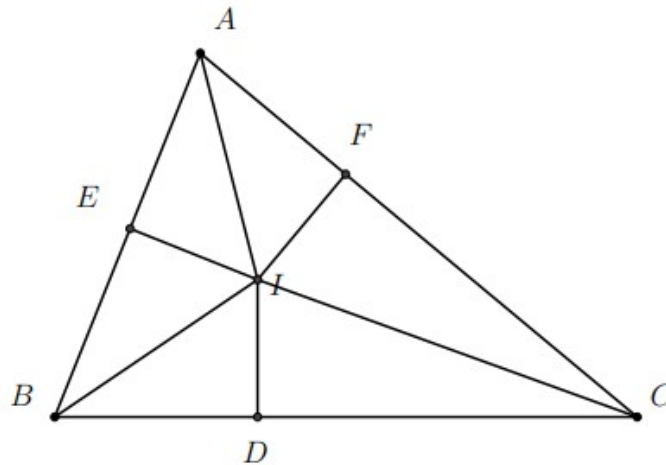
Ta có $xy = y(y + 1)$ là số chính phương

Với $y > 0$ thì $y^2 < y(y + 1) < (y + 1)^2 \Rightarrow xy = y(y + 1)$ không là số chính phương (mâu thuẫn), do đó $y = 0$.

Khi đó, $xy = 0$ thì $(2c)^2 = 0$ hay $c = 0$, kéo theo $8c + 1 = 1$ là số chính phương.

Câu 4:

1)



Ta có: $\cot \frac{B}{2} = \frac{BD}{ID}, \cot \frac{C}{2} = \frac{CD}{ID}$

$$\Rightarrow \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \frac{BC}{ID}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}} = \frac{BC}{\frac{BC}{ID}} = ID$$

Suy ra $a = ID \cdot \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) = r \cdot \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right)$

Chứng minh tương tự, $b = r \cdot \left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \right)$

$$\Rightarrow (a - b) \cdot \cot \frac{C}{2} = r \cdot \left(\cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2} - \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{C}{2} \right)$$

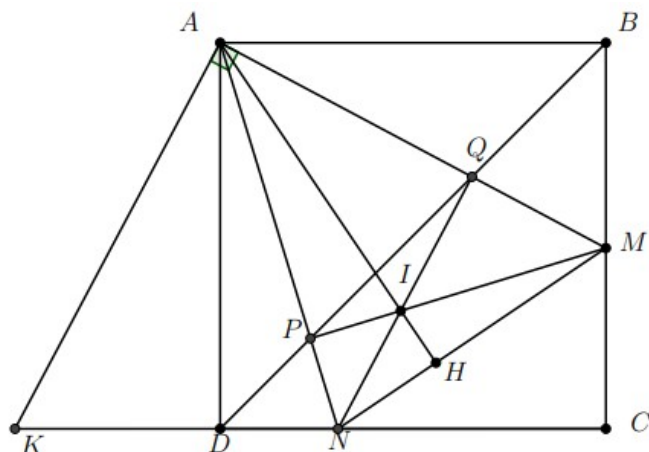
Chứng minh tương tự, ta có

$$(b-c) \cdot \cot \frac{A}{2} = r \cdot \left(\cot \frac{C}{2} \cdot \cot \frac{A}{2} - \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{A}{2} \right)$$

$$(c-a) \cdot \cot \frac{B}{2} = r \cdot \left(\cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} - \cot \frac{C}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \right)$$

Suy ra $(a-b) \cot \frac{C}{2} + (b-c) \cot \frac{A}{2} + (c-a) \cot \frac{B}{2} = 0.$

2)



a) Ta có: $\angle MAN = \angle MAB + \angle NAD$ và $\angle MAN + \angle MAB + \angle NAD = 90^\circ$ nên $\angle MAN = 45^\circ$

$$\Rightarrow \angle MAN = \angle QAN = \angle BDC = \angle QDN = 45^\circ.$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AQND nội tiếp

$$\Rightarrow \angle AQN + \angle ADN = 180^\circ.$$

$$\Rightarrow \angle AQN = 90^\circ \text{ hay } NI \perp AM$$

Chứng minh tương tự, $MI \perp AN$

$\Rightarrow$ I là trực tâm $\triangle AMN$.

$$\Rightarrow AI \perp MN$$

b) Kẻ $AK \perp AM (K \in DC)$

Ta có: $\angle BAK + \angle BAM = 90^\circ, \angle BAM + \angle MAB = 90^\circ \Rightarrow \angle BAK = \angle MAB$

Xét $\triangle DAK$ và $\triangle BAM$, ta có

$$DA = BA, \angle BAK = \angle MAB \text{ và } \angle ADK = \angle ABM = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle DAK = \triangle BAM$$

$$\Rightarrow AK = AM$$

Ta chứng minh được $\triangle AKN = \triangle AMN$

$$\Rightarrow MN = KN = KD + DN = MB + DN.$$

Ta chứng minh được $\triangle ADN = \triangle AHN$ và $\triangle ABM = \triangle AHM$
nên $ND = NH$ và $MB = MH$.

Ta có:
$$S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot a \cdot MN$$

Do đó, S_{AMN} min $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất

Đặt $MB = x$, $ND = y$, ta có $MN^2 = MC^2 + CN^2$

$$\Rightarrow (x + y)^2 = (a - x)^2 + (a - y)^2$$

$$\Rightarrow xy = a^2 - a(x + y) \leq \frac{(x + y)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 4a(x + y) \leq (x + y)^2$$

$$\Rightarrow 8a^2 \leq (x + y + 2a)^2$$

$$\Rightarrow x + y \geq 2a\sqrt{2} - 2a = 2a(\sqrt{2} - 1)$$

Vậy $S_{AMN \min} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a(\sqrt{2} - 1) = a^2(\sqrt{2} - 1)$ khi $x = y$ hay $\angle BAM = \angle DAN = 22^\circ 30'$

Câu 5:

• Khi lấy 123 viên bi bất kì: Ta có thể lấy ít nhất $123 - 17 = 106$ viên bi gồm 3 màu đỏ, xanh, tím.

• Với 106 viên bi gồm 3 màu đỏ, xanh, tím, theo nguyên lí dirichlet, tồn tại ít nhất $\left\lceil \frac{106}{3} \right\rceil + 1 = 36$ viên bi có cùng 1 màu. Nếu lấy 122 viên bi bất kì, ta lấy được ít nhất 105 viên bi gồm 3 màu đỏ xanh tím. Ta có 1 cách lấy sao cho không có 36 viên bi nào có cùng màu (35 viên bi đỏ, 35 viên bi xanh, 35 viên bi tím).

Câu 6:

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 + ab - 2bc - 2ca = 0$

$$\Rightarrow (a + b - c)^2 = ab \leq \frac{(a + b)^2}{4}$$

$$\Rightarrow (2a + 2b - 2c)^2 \leq (a + b)^2$$

$$\Rightarrow a + b \leq 2c$$

$$\Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \leq 2$$

Đặt $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c} (x, y > 0) \Rightarrow x + y \leq 2$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy} + \frac{\sqrt{xy}}{x + y} \geq 2$$

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy} + \frac{\sqrt{xy}}{x + y} &= \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} + \left(\frac{1}{2xy} + \frac{\sqrt{xy}}{x + y} \right) \\ &\geq \frac{4}{(x + y)^2} + 2\sqrt{\frac{1}{2xy} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{x + y}} \\ &\geq \frac{4}{2^2} + 2\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{x + y}} \geq 1 + 2\sqrt{\frac{1}{x + y} \cdot \frac{1}{x + y}} = 1 + \frac{2}{x + y} \geq 2 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 1 \Leftrightarrow a = b = c$

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
THÀNH PHỐ VINH**

NĂM HỌC 2024 – 2025

Môn thi: Toán

Thời gian: 150 phút

(Không kể thời gian giao đề)

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

$$K = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{x + 2025}{x}$$

Câu 1: (2,5 điểm) Cho biểu thức:

a, Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức K

b, Tìm x để biểu thức $A = \frac{K}{x} - \frac{2024}{x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2: (3,0 điểm)

a, Tìm số nguyên n thỏa mãn $2003^{2004} + 1$ chia hết cho $n^3 + 2024n$

b, Cho đa thức $P(x) = (1 + x + x^2)^{2024}$

Gọi m và n lần lượt là tổng các hệ số của lũy thừa bậc chẵn và bậc lẻ của x sau khi khai triển và thu gọn đa thức P(x). Hãy xét xem m, n chẵn hay lẻ? Vì sao?

Câu 3: (3,5 điểm)

a, Tìm x biết: $(x^2 + x + 1)^2 = 3(x^4 + x^2 + 1)$

b, Tìm các cặp số nguyên không âm x, y thỏa mãn: $(y+1)^4 + y^4 = (x+1)^2 + x^2$

c, Cho các số thực $x, y, z \geq -1$ thỏa mãn: $x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2 + y^2 + z^2$.

Chứng minh $x^5 + y^5 + z^5 \geq x^2 + y^2 + z^2$

Câu 4: (3,0 điểm)

1, Người ta đặt một vòi chảy vào từ trên xuống và một vòi tháo nước ra tại lưng chừng của một bể nước. Khi bể không chứa nước nếu mở cả 2 vòi thì sau 2 giờ 42 phút bể đầy nước, còn nếu đóng vòi chảy ra và chỉ mở vòi chảy vào thì sau 1 giờ 30 phút bể đầy nước. Biết trong cùng một thời gian vòi chảy vào chảy được lượng nước nhiều gấp hai lần lượng nước của vòi chảy ra. Hỏi khi bể không có nước nếu mở cả hai vòi thì sau thời gian bao lâu mực trong bể nước ngang đến chỗ lắp vòi chảy ra.

2, Trong một hộp kin có 5 tấm thẻ (có kích thước và hình dạng giống nhau) được đánh số -1; 0; 1; 2; 3

a, Chọn ngẫu nhiên 1 tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất tấm thẻ được chọn đánh số chia hết cho 2

b, Chọn ngẫu nhiên 2 tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất để tích của 2 số đánh trên 2 tấm thẻ được chọn là số âm.

Câu 5: (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AC > AB$), các đường cao AD, BE, CF, trực tâm H. Điểm I nằm giữa B và C sao cho $IB = 2IC$. Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với AI. Gọi Q là giao điểm của đường thẳng d và CH, G là điểm trên tia CH sao cho Q là trung điểm của GH. Gọi J là giao điểm của AG và BH.

a. Chứng minh $\triangle QAH$ đồng dạng với $\triangle AIB$

b. Gọi K là trung điểm của BI.

Chứng minh $\triangle AHG$ đồng dạng với $\triangle KBA$ và $AG = 2AJ$

c. Giả sử AABC cân tại C. Gọi N là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC.

Chứng minh rằng: $CE.CN - FE.FN = CF^2$

Câu 6: (1,0 điểm)

Giả sử các điểm trên mặt phẳng được tô bởi 2 màu đỏ hoặc xanh. Chứng tỏ rằng luôn tìm được tam giác có 3 đỉnh và trọng tâm cùng màu.

ĐÁP ÁN

Câu 1:

$$a) \text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \\ x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2025}{x} = \left(\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2 + x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} \right) \frac{x+2025}{x} \\ & = \left(\frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 + x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} \right) \frac{x+2025}{x} \\ & = \frac{x+2025}{x} \end{aligned}$$

$$b) A = \frac{K}{x} - \frac{2024}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = -2$ (TMĐKXĐ)

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{4}$ tại $x = -2$.

Câu 2:

$$a) \text{Đặt } A = 2023^{2024} + 1; B = n^3 + 2024n$$

Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{Z}$ để $A \vdots B(1)$

$$B = n^3 + 2024n = n^3 - n + 2025n = (n-1)n(n+1) + 2025n$$

Vì $n-1; n; n+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên $(n-1)n(n+1) \vdots 3$

Mà $2025n \vdots 3$ (do $2025 \vdots 3$)

$$\Rightarrow B = (n-1)n(n+1) + 2025n \vdots 3(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \vdots 3$ (*)

Lại có $2023 \equiv 1 \pmod{3}$

$$\Rightarrow 2023^{2024} \equiv 1^{2024} \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow A = 2023^{2024} + 1 \equiv 2 \pmod{3}$$

$\Rightarrow A \not\vdots 3$ (trái với (*) mâu thuẫn) nên giả sử là sai

Vậy không tồn tại số nguyên n thỏa mãn đề bài.

b) Ta có: $P(1) = (1 + 1 + 1^2)^{2024} = 3^{2024} = m + n$

$$P(-1) = (1 - 1 + (-1)^2)^{2024} = 1 = m - n$$

Do đó: $2m = 3^{2024} + 1 \Rightarrow m = \frac{3^{2024} + 1}{2}$

Lại có: $3^{2024} \equiv (-1)^{2024} \pmod{4} \Rightarrow 3^{2024} \equiv 1 \pmod{4}$

$$\Rightarrow 3^{2024} = 4k + 1 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow m = \frac{3^{2024} + 1}{2} = 2k + 1$$

Suy ra m lẻ

Mà $n = m - 1$ nên n chẵn

Câu 3:

a) $(x^2 + x + 1)^2 = 3 \cdot (x^4 + x^2 + 1)$

$$(x^2 + x + 1)^2 = 3 \cdot (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 1 - 3x^2 + 3x - 3) = 0$$

$$(x^2 + x + 1) \cdot (-2x^2 + 4x - 2) = 0$$

$$-2(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$(x^2 + x + 1) \cdot (x - 1)^2 = 0$$

Mà $x^2 + x + 1 > 0$ nên $x = 1$

b) $(y + 1)^4 + y^4 = (x + 1)^2 + x^2$

$$2y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$y^4 + 2y^3 + 3y^2 + 2y = x^2 + x$$

$$(y^2 + y)^2 + 2(y^2 + y) = x^2 + x$$

$$(y^2 + y + 1)^2 = x^2 + x + 1$$

Ta có với mọi số nguyên không âm: $x^2 < x^2 + x + 1 \leq x^2 + 2x + 1$

Suy ra: $x^2 < (y^2 + y + 1)^2 \leq x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

Nên $(y^2 + y + 1)^2 = (x + 1)^2$

Hay $x^2 + x + 1 = (x + 1)^2$ suy ra $(x, y) = (0, 0)$

Từ $x \geq -1 \Rightarrow x + 2 \geq 1 > 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 3x - 2$

$$\Rightarrow x^5 \geq (3x - 2)x^2 = 3x^3 - 2x^2$$

Tương tự, $y^5 \geq (3y - 2)y^2 = 3y^3 - 2y^2; \Rightarrow z^5 \geq (3z - 2)z^2 = 3z^3 - 2z^2$

Vậy,

$$x^5 + y^5 + z^5 \geq 3(x^3 + y^3 + z^3) - 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq x^2 + y^2 + z^2 \text{ vì } x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2 + y^2 + z^2$$

Câu

4:

1. Đổi 2 giờ 42 phút = 2,7 giờ

Gọi thời gian vòi chảy vào chảy được lượng nước từ khi bể không chứa nước đến lúc nước trong bể ngang chỗ đặt vòi chảy ra là x (giờ). ĐK: $0 < x < 1,5$

Trong 1 giờ, vòi chảy vào chảy được lượng nước vào bể là $1:1,5 = \frac{2}{3}$ (bể), vòi chảy ra tháo ra khỏi bể một lượng nước là: $\frac{2}{3}:2 = \frac{1}{3}$ (bể)

Khi lượng nước ngang vòi chảy ra nếu mở cả 2 vòi thì 1 giờ lượng nước trong bể có thêm là $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (bể)

Trong x giờ vòi chảy vào được lượng nước là: $\frac{2}{3}x$ (bể)

Trong $2,7 - x$ giờ còn lại cả 2 vòi cùng chảy vào được lượng nước là $\frac{1}{3}(2,7 - x)$ (bể)

Ta có phương trình: $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(2,7 - x) = 1$ nên $x = 0,3$ (thỏa mãn)

Vậy thời gian để vòi chảy vào được lượng nước từ khi bể không chứa nước đến lúc nước ngang vòi chảy ra là 0,3 giờ.

2.

a) Có 5 kết quả có thể là : -1; 0; 1; 2; 3. Do chọn ngẫu nhiên nên các kết quả có thể này là đồng khả năng

Có 2 kết quả thuận lợi của biến cố tám thẻ được chọn đánh số chia hết cho 2 là: 0; 2

Vậy xác suất tám thẻ được chọn đánh số chia hết cho 2 là: $\frac{2}{5}$

b) Các trường hợp có thể xảy ra của các số đánh trên 2 tám thẻ khi chọn ngẫu nhiên trong hộp là:

Xét ΔAHG và ΔKBA có $\angle AHG = \angle ABK (cmt); \frac{AB}{GH} = \frac{BK}{AH}$

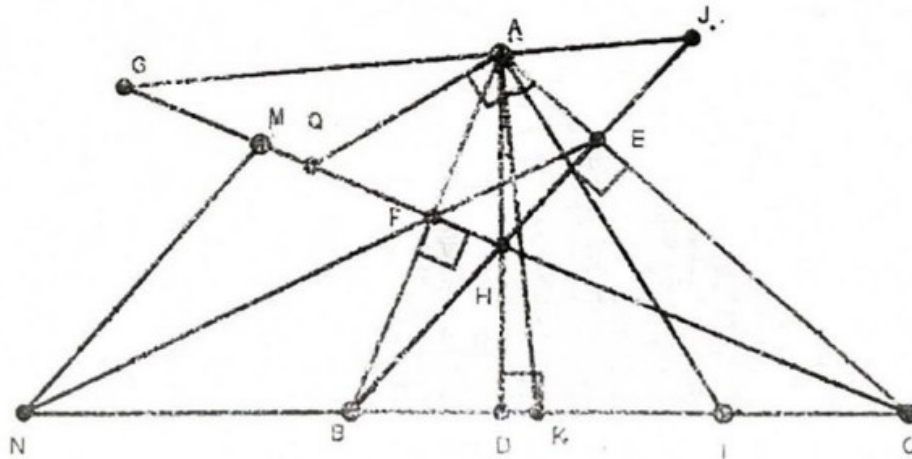
Suy ra $\Delta AHG \sim \Delta KBA (c.g.c) \Rightarrow \frac{AG}{AK} = \frac{AH}{BK} \quad (1)$

Chứng minh tương tự $\Delta AJH \sim \Delta KAC \Rightarrow \frac{AJ}{AK} = \frac{AH}{KC}$

Mặt khác $KC = 2KB \Rightarrow \frac{AJ}{AK} = \frac{AH}{2KB} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AJ}{AK} = \frac{AG}{2.AK} \Rightarrow AG = 2.AJ$

c)



Trên tia đối của tia FC lấy điểm M sao cho $\angle NM = \angle FCE$

Xét tam giác CEF và tam giác NMF có

$$\begin{cases} \angle FCE = \angle FNM (dd) \\ \angle FCE = \angle FNM \end{cases} \Rightarrow \Delta CEF \sim \Delta NMF (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{MF} = \frac{CF}{FN} \Rightarrow EF \cdot FN = FM \cdot CF \quad (3)$$

Tam giác ABC cân tại C có CF là đường cao đồng thời CF là đường phân giác

Nên $\angle FCN = \angle FCE$

Xét tam giác CNM và tam giác CFE có

$$\begin{cases} \angle MCN = \angle FCE (\Delta NMF \sim \Delta CEF) \\ \angle FCN = \angle FCE \end{cases} \Rightarrow \Delta CNM \sim \Delta CFE (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{CN}{CF} = \frac{CM}{CE} \Rightarrow CE \cdot CN = CM \cdot CF \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$CE \cdot CN - FE \cdot FN = CM \cdot CF - FM \cdot CF = CF(CM - FM) = CF^2$$

Câu 6:

Lấy 5 điểm bất kì phân biệt trên mp.

Theo nguyên lí Dirichle, tồn tại 3 điểm cùng màu, giả sử là màu đỏ. Gọi 3 điểm là A, B, C. Xét trọng tâm G của tam giác ABC.

TH1: G được tô đỏ $\Rightarrow$ tam giác ABC thỏa mãn

TH2: ô tô xanh. là lấy A, B, C sao cho $AA' = 3GA$; $BB' = 3GB$; $CC' = 3GC$ (A nằm giữa GA', B và C tương tự)

Gọi M, N, P là trung điểm 3 cạnh tam giác ABC.

|Còn $AA' = 3GA = 6GM$ nên $AA' = 2AM$. Tương tự $BB' = 2BN$; $CC' = 2CP$.

Vì vậy mà các tam giác A'BC, B'CA và C'AB tương ứng nhận A, B, C làm trọng tâm. Bên cạnh đó, có thể thấy các tam giác ABC và A'B'C' có chung trọng tâm G.

Nếu A', B', C' cùng tô xanh thì có tam giác A'B'C' và G thỏa mãn

Nếu 1 trong 3 điểm đc tô đỏ, giả sử là A thì tam giác A'BC và trọng tâm A cùng được tô đỏ $\Rightarrow$ thỏa mãn

Vậy luôn tìm được tam giác có 3 đỉnh và trọng tâm cùng màu.

ĐỀ HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 NĂM 2024-2025 HSG HUYỆN BẾN CÁT CHƯƠNG TRÌNH MỚI

Câu 1:

$$P = \left(\frac{2x+4}{x\sqrt{x}-8} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+4} \right) \cdot \left(\frac{x\sqrt{x}+8}{4+2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right).$$

1. Cho biểu thức

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P khi $x = 7 + 4\sqrt{3}$

2. Tính a + b biết $\left(a + \sqrt{a^2 + 2024}\right)\left(b + \sqrt{b^2 + 2024}\right) = 2024.$

Câu 2:

1. Một công ty vận tải dự định chở 54 tấn hàng để hưởng ứng phong trào “Hướng về Miền Trung thân yêu”. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định. Vì vậy công ty phải bổ sung thêm 3 xe, lúc này mỗi xe chở ít hơn dự định 1 tấn hàng. Hỏi ban đầu công ty dự định dùng bao nhiêu chiếc xe để chở hàng, biết các xe chở số tấn hàng bằng nhau.

$$\begin{cases} 3y^2 + 2xy + 3 = 4y\sqrt{x^2 + 3} \quad (1) \\ y(y - x) = 3 - 3y \quad (2) \end{cases}$$

2. Giải hệ phương trình:

3. Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + 4$ (với m là tham số).

a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (P) và (d). Tìm m để:

$$T = \frac{2mx_1 - x_1x_2 + 2mx_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2} \text{ nhận giá trị nguyên.}$$

Câu 3: Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Trên cung nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tiếp tuyến Ax, By của (O) và lấy điểm C sao cho $CA < CB$. Trên đoạn OA lấy điểm D (D khác O, A). Đường thẳng vuông góc với CD tại C cắt Ax, By lần lượt tại E và F. Đoạn thẳng AC cắt DE tại G, BC cắt DF tại H. OC cắt GH tại I. Gọi J, K lần lượt là trung điểm của DE, DF.

a) Chứng minh $\Delta AGE \sim \Delta FHC$

b) Chứng minh I là trung điểm của GH và I, J, K thẳng hàng.

c) Gọi M là giao điểm của JO và DK. Chứng minh ΔJOK vuông và DE, IM, KO đồng quy.

Câu 4: Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. M là điểm di động trên nửa đường tròn (M không trùng với A, B). Qua M kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn. Gọi D, C lần lượt là hình chiếu của A, B trên tiếp tuyến ấy. Xác định vị trí của M để tứ giác ABCD có diện tích lớn nhất.

Câu 5:

1. Cho các số $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh:

$$\sqrt{4a^2 - 4a^2b^2} + \sqrt{16b^2 - 12b^2c^2} + \sqrt{6c^2 - 3c^2a^2} \leq 5.$$

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình:

$$3(x^2 + 2y^2 - 1) - 4(xy + 2y) = 0.$$

ĐÁP ÁN

Câu 1:

$$P = \left(\frac{2x+4}{x\sqrt{x}-8} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+4} \right) \cdot \left(\frac{x\sqrt{x}+8}{4+2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right).$$

1. Cho biểu thức

a) Rút gọn biểu thức P.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x\sqrt{x} - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{2x+4}{\sqrt{x^3-2^3}} - \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x+4}} \right) \left(\frac{\sqrt{x^3+2^3}}{4+2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) \\
 &= \frac{2x+4-\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x+4})} \cdot \left[\frac{(\sqrt{x}-2)(x-2\sqrt{x+4})}{2(2+\sqrt{x})} - \sqrt{x} \right] \\
 &= \frac{x+2\sqrt{x+4}}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x+4})} \cdot \left(\frac{x-2\sqrt{x+4}}{2} - \sqrt{x} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{x-4\sqrt{x+4}}{2} = \frac{1}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{2} = \frac{\sqrt{x}-2}{2}
 \end{aligned}$$

b) Tính giá trị của P khi $x = 7 + 4\sqrt{3}$

Khi $x = 7 + 4\sqrt{3}$ ta có

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}-2}{2} = \frac{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}-2}{2} \\
 &= \frac{2+\sqrt{3}-2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

2. Tính a + b biết $(a + \sqrt{a^2 + 2024})(b + \sqrt{b^2 + 2024}) = 2024$.

Ta có: $(\sqrt{a^2 + 2024} + a)(\sqrt{a^2 + 2024} - a) = a^2 + 2024 - a^2 = 2024$.

Kết hợp với giả thiết ta suy ra $\sqrt{a^2 + 2024} - a = \sqrt{b^2 + 2024} - b$

Tương tự ta cũng có: $\sqrt{b^2 + 2024} - b = \sqrt{a^2 + 2024} + a$

$$\Rightarrow \sqrt{b^2 + 2024} - b + \sqrt{a^2 + 2024} - a = \sqrt{a^2 + 2024} + a + \sqrt{b^2 + 2024} + b$$

$$\Rightarrow a + b = 0$$

Câu 2:

1. Một công ty vận tải dự định chở 54 tấn hàng để hưởng ứng phong trào “Hướng về Miền Trung thân yêu”. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định. Vì vậy công ty phải bổ sung thêm 3 xe, lúc này mỗi xe chở ít hơn dự định 1 tấn hàng. Hỏi ban đầu công ty dự định dùng bao nhiêu chiếc xe để chở hàng, biết các xe chở số tấn hàng bằng nhau.

Gọi x (chiếc) là số xe dự định của công ty ($x \in \mathbb{N}^*, x < 54$)

Số xe tham gia vận chuyển là x + 3 (chiếc)

Số tấn hàng trên mỗi chiếc theo dự định $\frac{54}{x}$.

Số tấn hàng trên mỗi chiếc thực tế $\frac{60}{x+3}$.

Theo bài ra ta có phương trình $\frac{54}{x} - \frac{60}{x+3} = 1$

$$\Leftrightarrow 54(x+3) - 60x = x(x+3) \Leftrightarrow x^2 + 9x - 162 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9(n) \\ x = -18(l) \end{cases}$$

Vậy lúc đầu công ty có 9 chiếc xe.

$$\begin{cases} 3y^2 + 2xy + 3 = 4y\sqrt{x^2 + 3} \quad (1) \\ y(y-x) = 3 - 3y \quad (2) \end{cases}$$

2. Giải hệ phương trình:

Phương trình (1) tương đương:

$$\begin{aligned} 4y^2 - 4y\sqrt{x^2 + 3} + x^2 + 3 &= x^2 - 2xy + y^2 \\ \Leftrightarrow (2 - \sqrt{x^2 + 3})^2 &= (x-y)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} = 3y - x \\ \sqrt{x^2 + 3} = x + y \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{TH1: } \sqrt{x^2 + 3} = 3y - x.$$

$$\begin{cases} 3y = x \\ 6xy = 9y - 3 \\ xy = y^2 + 3y - 3 \end{cases}$$

Kết hợp với (2) ta có hệ

$$\Rightarrow 9y^2 - 3 = 6(y^2 + 3y - 3) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1; x = 1 \quad (TM) \\ y = 5; x = \frac{37}{5} \quad (T.M) \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \sqrt{x^2 + 3} = x + y$$

$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2xy = -y^2 + 3 \\ xy = y^2 + 3y - 3 \end{cases}$$

Kết hợp với (2) ta có:

$$\Rightarrow -y^2 + 3 = 2(y^2 + 3y - 3) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1; x = 1 \quad (TM) \\ y = -3; x = 1 \quad (L) \end{cases}$$

$$(x; y) = (1; 1); \left(\frac{37}{5}; 5\right).$$

Vậy hệ có nghiệm

3. Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + 4$ (với m là tham số).

a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2 = mx + 4 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0.$$

Ta có: $\Delta = m^2 + 16 > 0$, với mọi m nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt, suy ra đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (P) và (d). Tìm m để:

$$T = \frac{2mx_1 - x_1x_2 + 2mx_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2} \text{ nhận giá trị nguyên.}$$

Theo định lý Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = -4 \end{cases}$$

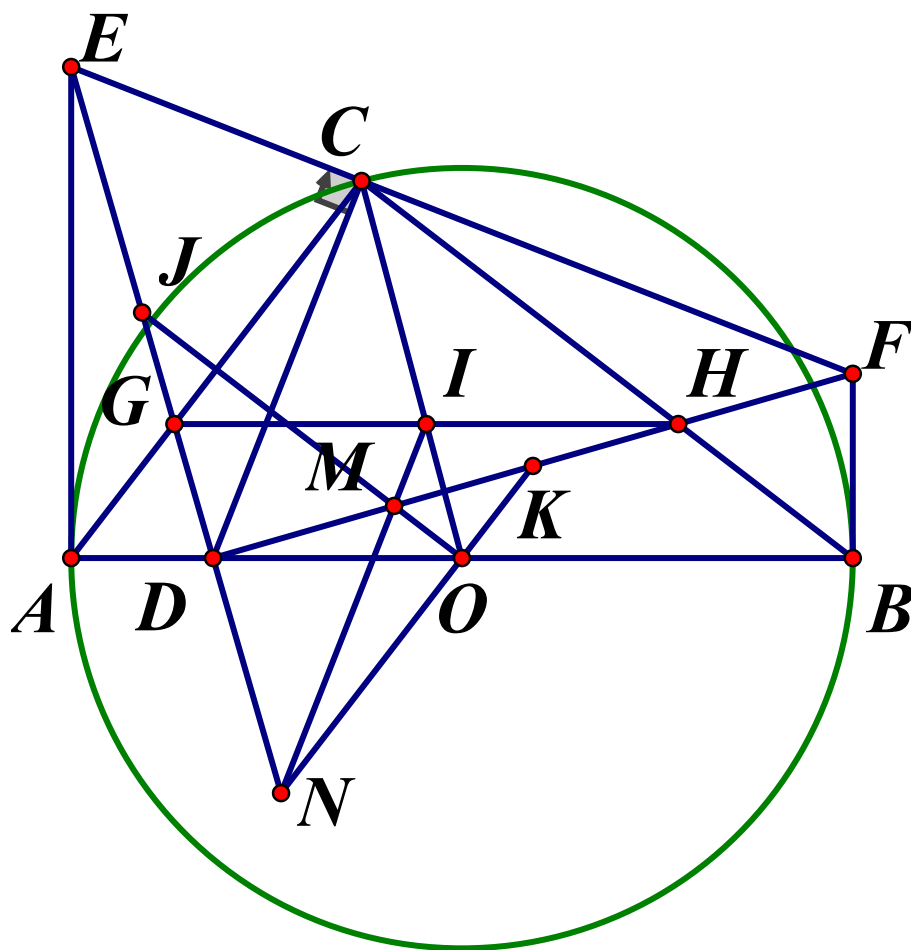
$$T = \frac{2m(x_1 + x_2) - x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{2m^2 + 7}{m^2 + 8}$$

Khi đó:

$$T = 2 - \frac{9}{m^2 + 8} \Rightarrow T \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m^2 + 8 \in U(9)$$

Mà $m^2 + 8 \geq 8, \forall m \Rightarrow m^2 + 8 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Câu 3: Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Trên cung nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tiếp tuyến Ax, By của (O) và lấy điểm C sao cho $CA < CB$. Trên đoạn OA lấy điểm D (D khác O, A). Đường thẳng vuông góc với CD tại C cắt Ax, By lần lượt tại E và F. Đoạn thẳng AC cắt DE tại G, BC cắt DF tại H. OC cắt GH tại I. Gọi J, K lần lượt là trung điểm của DE, DF.



a) Chứng minh $\Delta AGE \sim \Delta FHC$

Ta có: $\angle A = \angle B$ (cùng chắn AC)

Tứ giác CDBF nội tiếp $\Rightarrow \angle ABC = \angle FDC$ (cùng chắn CD) $\Rightarrow \angle A = \angle FDC$ (1)

Tứ giác ADCE nội tiếp $\Rightarrow \angle AED = \angle ACD$ (cùng chắn AD)

Mà $\angle ACD = \angle BCF$ (cùng phụ $\angle BCD$) $\Rightarrow \angle AED = \angle BCF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta AGE \sim \Delta FHC$

b) Chứng minh I là trung điểm của GH và I, J, K thẳng hàng.

Ta có: $\angle GDC = \angle AGE = \angle HFC \Rightarrow$ Tứ giác CGDH nội tiếp $\Rightarrow \angle GH = \angle DH$

Mà $\angle DH = \angle BFC$ (Tứ giác CDBF nội tiếp)

$\Rightarrow \angle GH = \angle BFC$

Mà $\angle BFC = \angle CAB \Rightarrow \angle GH = \angle CAB \Rightarrow GH \parallel AB \Rightarrow \frac{GI}{OA} = \frac{IH}{OB}$

Vì $OA = OB$ nên $GI = IH \Rightarrow I$ là trung điểm của GH.

Vì I, J lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác CGDH, ADCE nên $IJ \perp CD$

Vì J, K lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác ADCE, BDCF nên $JK \perp CD$

Do đó: I, J, K thẳng hàng.

c) Gọi M là giao điểm của JO và DK. Chứng minh ΔJOK vuông và DE, IM, KO đồng quy.

Ta có: J là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADCE $\Rightarrow OJ \perp AC \Rightarrow OJ \parallel BC$ (do $BC \perp AC$)

Mặt khác, $\begin{cases} JE = JD \\ KF = KD \end{cases} \Rightarrow JK \parallel EF$ (tính chất đường trung bình)

Do đó: $\angle MLK = \angle BEF$

Mà tứ giác BDCF nội tiếp $\Rightarrow \angle BCF = \angle BDF$ (cùng chắn BF)

$\Rightarrow \angle MJK = \angle BDF = \angle ODK \Rightarrow$ Tứ giác JDOK nội tiếp

$\Rightarrow \angle JOK = \angle JDK$

Mà $\angle JDK = 90^\circ$ (do CGDH nội tiếp và $\angle GCH = 90^\circ$)

$\Rightarrow \angle JOK = 90^\circ \Rightarrow \Delta JOK$ vuông tại O.

Gọi N là giao điểm của ED và OK

Ta có: M là trực tâm ΔJNK nên $NM \perp JK$ (3)

$$\angle MOI = \angle JOC = \angle OCB = \angle OBC = \angle CFD \text{ (vì } OJ \parallel BC)$$

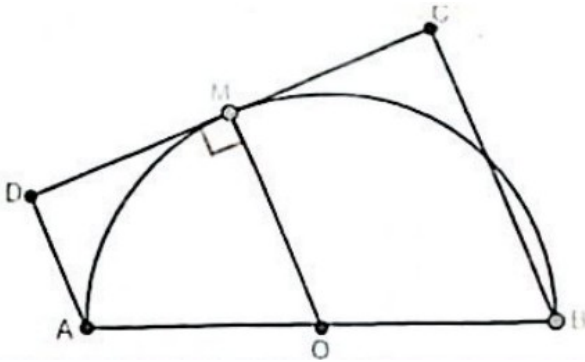
$$\text{Mà } \angle CFD = \angle IKD \text{ (JK } \parallel \text{ EF)}$$

$$\Rightarrow \angle MOI = \angle KIM \Rightarrow \text{Tứ giác IMOK nội tiếp}$$

$$\Rightarrow IM \perp JK \quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ DE, IM, KO đồng quy.

Câu 4: Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. M là điểm di động trên nửa đường tròn (M không trùng với A, B). Qua M kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn. Gọi D, C lần lượt là hình chiếu của A, B trên tiếp tuyến ấy. Xác định vị trí của M để tứ giác ABCD có diện tích lớn nhất.



Ta có: $AD \perp DC, BC \perp DC \Rightarrow AD \parallel BC$

$\Rightarrow$ ABCD là hình thang mà $\angle ADC = 90^\circ$ nên ABCD là hình thang vuông.

$$OM \perp DC \Rightarrow OM \parallel AD \text{ mà O là trung điểm AB nên } OM = \frac{AD + BC}{2}$$

$$\text{Do đó: } S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot DC = OM \cdot DC = R \cdot DC$$

Vì ABCD là hình thang vuông nên $DC \leq AB$. Vậy $S_{ABCD} \leq R \cdot AB = 2R^2$

Dấu bằng xảy ra khi $DC = AB$. Khi đó ABCD là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow CD \parallel AB$$

Vậy M nằm chính giữa $\overline{AB}$.

Câu 5:

1. Cho các số $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh:

$$\sqrt{4a^2 - 4a^2b^2} + \sqrt{16b^2 - 12b^2c^2} + \sqrt{6c^2 - 3c^2a^2} \leq 5.$$

$$\sqrt{4a^2 - 4a^2b^2} = a \cdot \sqrt{4 - 4b^2} \leq \frac{a^2 + 4 - 4b^2}{2}$$

Ta có:

$$\sqrt{16b^2 - 12b^2c^2} = 2b \sqrt{4 - 3c^2} \leq \frac{4b^2 + 4 - 3c^2}{2}$$

$$\sqrt{6c^2 - 3c^2a^2} = \sqrt{3c}\sqrt{2-a^2} \leq \frac{3c^2 + 2 - a^2}{2}$$

Cộng về theo về ta có:

$$a\sqrt{4-4b^2} + b\sqrt{16-12c^2} + c\sqrt{6-3a^2} \leq \frac{a^2 + 4 - 4b^2}{2} + \frac{4b^2 + 4 - 3c^2}{2} + \frac{3c^2 + 2 - a^2}{2} = 5.$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} \sqrt{4-4b^2} = a \\ \sqrt{4-3c^2} = 2b \\ \sqrt{2-a^2} = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+4b^2 = a^2 \\ 4-3c^2 = 4b^2 \\ 2-c^2 = 3c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = \frac{3}{4} \\ c^2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ c = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình:

$$3(x^2 + 2y^2 - 1) - 4(xy + 2y) = 0.$$

Xét phương trình: $3(x^2 + 2y^2 - 1) - 4(xy + 2y) = 0.$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6y^2 - 3 - 4xy - 8y = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4xy + 2y^2 + x^2 + 4y^2 - 3y - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-y)^2 + x^2 + 4(y-1)^2 = 7$$

$$\Rightarrow 4(y-1)^2 \leq 7 \Rightarrow |y-1| \leq \frac{7}{4} \Rightarrow y \in \{0, 1, 2\}$$

+ Với $y = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

+ Với $y = 1 \Rightarrow 3(x^2 + 1) - 4(x + 2) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 5 = 0$ (pt không có nghiệm nguyên)

$$\Rightarrow 3(x^2 + 7) - 4(2x + 4) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{3} (l) \end{cases}$$

+ Với $y = 2$

Vậy các cặp số nguyên (x, y) cần tìm là (1; 0); (-1; 0); (1; 2).

**PHÒNG GD & ĐT THỌ
XUÂN**

**ĐỀ GIAO LƯU ĐỘI TUYỂN HSG CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2024 - 2025**

Môn thi: TOÁN LỚP 9 THCS

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề thi này có 01 trang, gồm 05 câu.

Câu 1 (2,0 điểm): Cho biểu thức
$$A = \frac{x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} + 6}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \frac{x - 7\sqrt{x} - 8}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{2x + 10\sqrt{x} + 12}{x - \sqrt{x} - 6}$$
 với $x \geq 0, x \neq 9.$

Rút gọn A, và tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{4}{A}$ nhận giá trị nguyên.

Câu 2 (2,0 điểm): Cho a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7$; $a + b + c = 23$; $\sqrt{abc} = 3$.

Tính giá trị biểu thức $H = \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{b} - 6}$.

Câu 3 (2,0 điểm): Giải phương trình: $9x^2 = (x^2 + x - 5)(\sqrt{3x+1} - 1)^2$.

Câu 4 (2,0 điểm): Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{3x^2 + 33} + 3\sqrt{2x+y-1} = 3x+y+6 \end{cases}$$

Câu 5 (2,0 điểm): Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $3^x - 32 = y^2$.

Câu 6 (2,0 điểm): Giả sử n là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7. Chứng minh rằng $4n^3 - 5n - 1$ không là số chính phương.

Câu 7 (2,0 điểm): Cho 1 hộp gồm các thẻ đánh số 1;2;3;4;5;6;7;8. Mỗi thẻ khác nhau đánh các số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 2 thẻ trong hộp. Tính xác suất của biến cố “ Tích của 2 thẻ được lấy ra là một số chẵn”.

Câu 8 (5,0 điểm): Cho đường tròn $(O; R)$ và hai đường kính AB, CD sao cho tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O; R)$ cắt đường thẳng BC, BD tại hai điểm tương ứng là E và F . Gọi P, Q lần lượt tại trung điểm AE, AF .

- 1) Chứng minh rằng trực tâm H của ΔBPQ là trung điểm của AO .
- 2) Các đường thẳng AB và CD thỏa mãn điều kiện gì thì diện tích tam giác BPQ nhỏ nhất.
- 3) Biết ΔBEF có hình vuông $BMKN$ nội tiếp ($K \in EF; M \in BE, N \in BF$) sao cho tỉ số giữa các cạnh hình vuông và bán kính đường tròn nội tiếp ΔBEF là $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$. Tính các góc nhọn của ΔBEF .

Câu 9 (1,0 điểm): Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^2 + 1 + bc} + \frac{1}{b^2 + 1 + ac} + \frac{1}{ab(c^3 + 1) + 1}$.

----- HẾT -----

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THỌ XUÂN**

**HƯỚNG DẪN CHẤM
GIAO LƯU ĐỘI TUYỂN HSG
CẤP TỈNH NĂM HỌC 2024 – 2025
MÔN THI: TOÁN - LỚP 9
(Hướng dẫn chấm gồm có 09 trang)**

Câu	Nội dung	Điểm
-----	----------	------

1	<p>Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} + 6}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \frac{x - 7\sqrt{x} - 8}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{2x + 10\sqrt{x} + 12}{x - \sqrt{x} - 6}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.</p> <p>Rút gọn A, và tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{4}{A}$ nhận giá trị nguyên.</p>	2.0
	$A = \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 6)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 8)}{(\sqrt{x} + 1)^2} - \frac{2(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2)}$ $= \frac{x - \sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x} + 1} - \frac{2(\sqrt{x} + 3)}{\sqrt{x} - 3}$	0,5
	$= \frac{x - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x} + 1} = \frac{x + 8}{\sqrt{x} + 1}$	0,5
	<p>Theo BĐT Côsi, ta có $A = \sqrt{x} + 1 + \frac{9}{\sqrt{x} + 1} - 2 \geq 2\sqrt{9} - 2 = 4$</p>	0,5
	<p>Để $\frac{4}{A} \in \mathbb{Z}$ thì $A = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = \frac{9}{\sqrt{x} + 1} \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn). Vậy $x = 4$.</p>	0,5
2	<p>Cho a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7$; $a + b + c = 23$; $\sqrt{abc} = 3$.</p> <p>Tính giá trị biểu thức $H = \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{b} - 6}$.</p>	2.0
	<p>Ta có $(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = a + b + c + 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$</p> <p>mà $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7$; $a + b + c = 23$ nên $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 13$</p>	0,5
	<p>Ta có $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7 \Rightarrow \sqrt{c} - 6 = -\sqrt{a} - \sqrt{b} + 1$</p> <p>nên $\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6 = \sqrt{ab} - \sqrt{a} - \sqrt{b} + 1 = (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1)$</p> <p>Tương tự $\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6 = (\sqrt{b} - 1)(\sqrt{c} - 1)$; $\sqrt{ac} + \sqrt{b} - 6 = (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{c} - 1)$</p>	0,5
	<p>Vậy $H = \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{b} - 6}$</p> $= \frac{1}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1)} + \frac{1}{(\sqrt{b} - 1)(\sqrt{c} - 1)} + \frac{1}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{c} - 1)} =$	0,5

	$= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) - 3}{\sqrt{abc} + (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) - (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) - 1} = \frac{7-3}{3+7-13-1} = -1$ <p>Vậy $H = -1$.</p>	0,5
3	<p>Giải phương trình: $9x^2 = (x^2 + x - 5)(\sqrt{3x+1} - 1)^2$.</p>	2.0
	<p>Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{3}$. Phương trình tương đương:</p> $9x^2(\sqrt{3x+1} + 1)^2 = (x^2 + x - 5)(\sqrt{3x+1} - 1)^2(\sqrt{3x+1} + 1)^2$	0,5
	$\Leftrightarrow 9x^2(\sqrt{3x+1} + 1)^2 = (x^2 + x - 5) \cdot 9x^2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x - 5 = (\sqrt{3x+1} + 1)^2 \quad (1) \end{cases}$	0,5
	$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 = 2\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 14 = 4\sqrt{3x+1}$ $\Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 15 + \sqrt{3x+1}(\sqrt{3x+1} - 4) = 0$ $\Leftrightarrow (x-5)(2x+3) + \frac{3(x-5)\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4} = 0$ $\Leftrightarrow (x-5) \left(2x+3 + \frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4} \right) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 2x+3 + \frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4} = 0 \end{cases}$ <p>Do $x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow 2x+3 > 0 \Rightarrow 2x+3 + \frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4} = 0$ vô nghiệm.</p> <p>Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x = 0, x = 5$.</p>	0,5
4	<p>Giải hệ phương trình</p> $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 & (1) \\ \sqrt{3x^2 + 33} + 3\sqrt{2x+y-1} = 3x+y+6 & (2) \end{cases}$	2.0
	<p>ĐKXD: $\begin{cases} 2x+y-1 \geq 0 \\ x+y \neq 0 \end{cases}$</p>	0,25
	$(1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy + \frac{2xy}{x+y} = 1$	0,25

$\Leftrightarrow (x+y)^3 - 2xy(x+y) + 2xy = (x+y)$	
<p>Đặt $S = x + y, P = xy$ ($S^2 \geq 4P$) ta có:</p> $S^3 - 2SP + 2P = S \Leftrightarrow S(S+1)(S-1) - 2P(S-1) = 0$ $\Leftrightarrow (S-1)(S^2 + S - 2P) = 0$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ S^2 + S - 2P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x^2 + y^2 + x + y = 0 \end{cases}$	0,25
<p>TH1: Với $x+y=1 \Rightarrow y=1-x$, thay vào ⁽²⁾ ta được:</p> $\sqrt{3x^2+33} + 3\sqrt{2x+1-x-1} = 3x+1-x+6$ $\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+33} + 3\sqrt{x} = 2x+7$ $\Rightarrow 3x^2+33+2\sqrt{3x^2+33} \cdot 3\sqrt{x} + 9x = 4x^2+28x+49$ $\Rightarrow 6\sqrt{3x^2+33} \cdot \sqrt{x} = x^2+19x+16$	0,25
$\Rightarrow 36(3x^2+33)x = x^4+361x^2+256+38x^3+32x^2+608x$ $\Leftrightarrow x^4-70x^3+393x^2-580x+256=0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2(x-4)(x-64)=0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=0 & (TM) \\ x=4 \Rightarrow y=-3 & (TM) \\ x=64 \Rightarrow y=-63 & (TM) \end{cases}$	0,25
<p>TH2: Với $x^2+y^2+x+y=0$. Ta coi đây là phương trình bậc hai ẩn x.</p> <p>Để tồn tại x thì $\Delta = 1-4(y^2+y) \geq 0 \Leftrightarrow 4y^2+4y-1 \leq 0$</p> $\Leftrightarrow 4\left(y+\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\left(y+\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) \leq 0$ $\Leftrightarrow -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ <p>Tương tự ta cũng có $-\frac{1+\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$.</p>	0,25
<p>Suy ra $2x+y-1 \leq 2 \cdot \frac{-1+\sqrt{2}}{2} + \frac{-1+\sqrt{2}}{2} - 1 < 0$, không thỏa mãn điều kiện $2x+y-1 \geq 0$ nên trường hợp này hệ vô nghiệm.</p> <p>Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $\{(1;0), (4;-3), (64;-63)\}$.</p>	0,25

5	Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $3^x - 32 = y^2$.	2.0
	<p>*) Nếu x lẻ, đặt $x=2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$). Thay vào PT ta có:</p> $3^{2k+1} - 32 = y^2 \Leftrightarrow 3 \cdot 9^k - 32 = y^2$	0,25
	<p>Ta có: $9 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 9^k \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 3 \cdot 9^k \equiv 3 \pmod{8} \Rightarrow 3 \cdot 9^k - 32 \equiv 3 \pmod{8}$</p> <p>Do đó $y^2 \equiv 3 \pmod{8}$ (vô lý vì số chính phương chia cho 8 dư 0 hoặc 1)</p>	0,25
	<p>*) Nếu x chẵn, đặt $x=2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Thay vào PT ta có:</p> $3^{2k} - 32 = y^2 \Leftrightarrow (3^k - y)(3^k + y) = 32 \quad (1)$	0,25
	<p>Do $3^k + y > 3^k - y > 0$ và $3^k + y; 3^k - y$ là các số chẵn nên từ (1) xảy ra các trường hợp sau:</p> $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^k - y = 2 \\ 3^k + y = 16 \end{cases} \\ \begin{cases} 3^k - y = 4 \\ 3^k + y = 8 \end{cases} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^k = 9 \\ y = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} 3^k = 6 \\ y = 2 \end{cases} \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$	0,25
	Vậy PT đã cho có nghiệm nguyên dương (x; y) duy nhất (4;7).	0,25
6	Giả sử n là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7. Chứng minh rằng $4n^3 - 5n - 1$ không là số chính phương.	2.0
	<p>Giả sử tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7 và $4n^3 - 5n - 1$ là số chính phương.</p> <p>Ta có $4n^3 - 5n - 1 = (n+1)(4n^2 - 4n - 1)$</p> <p>Đặt UCLN $(n+1; 4n^2 - 4n - 1) = d$ ($d \in \mathbb{N}^*$)</p> <p>Suy ra $\begin{cases} n+1 : d \\ 4n^2 - 4n - 1 : d \end{cases}$</p>	0,5
	<p>Có $4n^2 - 4n - 1 = 4n(n+1) - 8(n+1) + 7 : d \Rightarrow 7 : d$</p> <p>Vì $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7 nên $n(n+1)$ không chia hết cho 7, suy ra $n+1$ không chia hết cho 7, suy ra $d \neq 7 \Rightarrow d = 1$.</p>	0,5
	<p>Do đó, $n+1$ và $4n^2 - 4n - 1$ là hai số nguyên tố cùng nhau, mà tích của chúng là số chính phương suy ra $n+1$ và $4n^2 - 4n - 1$ là các số chính phương.</p> <p>Suy ra $4n^2 - 4n - 1 = a^2$ ($a \in \mathbb{N}$) $\Leftrightarrow (2n-1)^2 - a^2 = 2 \Leftrightarrow (2n-a-1)(2n+a-1) = 2$</p>	0,5

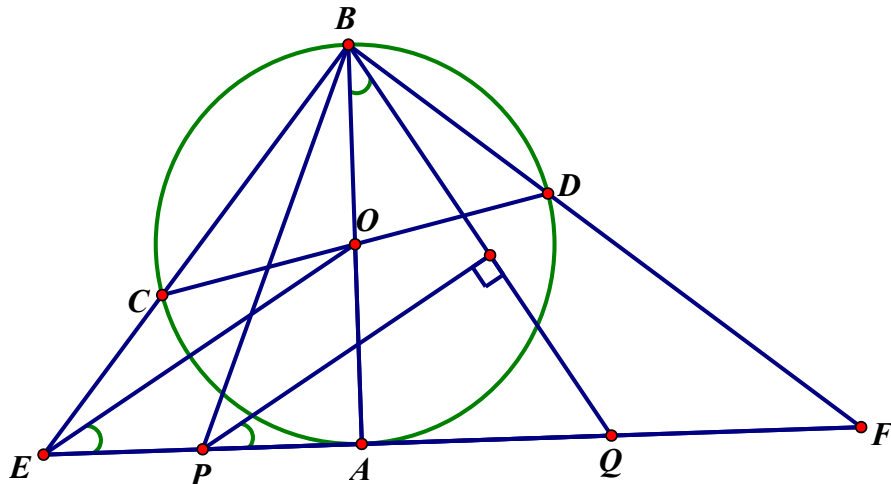
	<p>$\forall 2n - a - 1 \leq 2n + a - 1$</p> $\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2n - a - 1 = 1 \\ 2n + a - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{5}{4} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 2n - a - 1 = -2 \\ 2n + a - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$ <p>không thoả mãn n, a là các số tự nhiên.</p> <p>Vậy giả sử là sai, ta có điều phải chứng minh.</p>	0,5
7	<p>Cho 1 hộp gồm các thẻ đánh số 1;2;3;4;5;6;7;8. Mỗi thẻ khác nhau đánh các số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 2 thẻ trong hộp. Tính xác suất của biến cố “ Tích của 2 thẻ được lấy ra là một số chẵn”</p>	2,0
	<p>Trong hộp có 4 thẻ ghi số lẻ, 4 thẻ ghi số chẵn</p> <p>Lấy ngẫu nhiên hai thẻ ở trong hộp, sau đó tính tích hai số được đánh ở hai tấm thẻ đó nên ta có các khả năng sau:</p> <p><u>Trường hợp 1:</u> Thẻ số ban đầu lấy ra ghi số lẻ, như vậy thẻ ban đầu có 4 khả năng là 1;3;5;7</p> <p>Khi đó thẻ sau có thể 7 khả năng xảy ra, trong đó có 4 khả năng sẽ là số chẵn, như vậy có 4 tích là số chẵn</p> <p>Vậy trường hợp này có số biến cố xảy ra là $4.7 = 28$ (biến cố)</p> <p>Số biến cố mà tích là số chẵn là $4.4 = 16$ (biến cố)</p>	0,75
	<p><u>Trường hợp 2:</u> Thẻ số ban đầu lấy ra ghi số chẵn, như vậy thẻ ban đầu có 4 khả năng là 2;4;6;8</p> <p>Khi đó thẻ sau có thể 7 khả năng xảy ra, và tích đều là số chẵn</p> <p>Vậy trường hợp này có số biến cố xảy ra là $4.7 = 28$ (biến cố)</p> <p>Số biến cố mà tích là số chẵn là $4.7 = 28$ (biến cố)</p>	0,75
	<p>Như vậy:</p> <p>Tổng số biến cố xảy ra là $28 + 28 = 56$ (biến cố)</p> <p>Số biến cố mà tích là số chẵn là $16 + 28 = 44$ (biến cố)</p> <p>Xác suất của biến cố “ Tích của 2 thẻ được lấy ra là một số chẵn” là</p> $\frac{44}{56} = \frac{11}{14}$	0,5
8	<p>Cho đường tròn $(O; R)$ và hai đường kính AB, CD sao cho tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O; R)$ cắt đường thẳng BC, BD tại hai điểm tương ứng là E</p>	6.0

và F. Gọi P, Q lần lượt tại trung điểm AE, AF.

a) Chứng minh rằng trực tâm H của $\triangle BPQ$ là trung điểm của AO.

b) Các đường thẳng AB và CD thỏa mãn điều kiện gì thì diện tích tam giác BPQ nhỏ nhất.

c) Biết $\triangle BEF$ có hình vuông BMKN nội tiếp ($K \in EF$; $M \in BE$, $N \in BF$) sao cho tỉ số giữa các cạnh hình vuông và bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle BEF$ là $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$. Tính các góc nhọn của $\triangle BEF$.



a. Chứng minh rằng trực tâm H của $\triangle BPQ$ là trung điểm của AO.

2,0

Do BA là đường cao $\triangle BPQ$ nên trực tâm $H \in BA$

0,25

Ta có $\triangle BEF$ vuông tại B (CD là đường kính) $\Rightarrow BA^2 = AE \cdot AF$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF} \Rightarrow \frac{AE}{AO} = \frac{AB}{AQ} \Rightarrow \triangle AEO \sim \triangle ABQ \text{ (c.g.c)}$$

0,75

$$\Rightarrow \angle AEO = \angle ABQ \text{ lại có } \angle ABQ = \angle APH \text{ (Cùng phụ với } \angle AQB)$$

0,5

$$\Rightarrow \angle AEO = \angle APH \Rightarrow EO \parallel PH;$$

$\triangle AEO$ có $PE = PA$ (gt) và $PH \parallel EO \Rightarrow HO = HA$
hay H là trung điểm của đoạn thẳng OA.

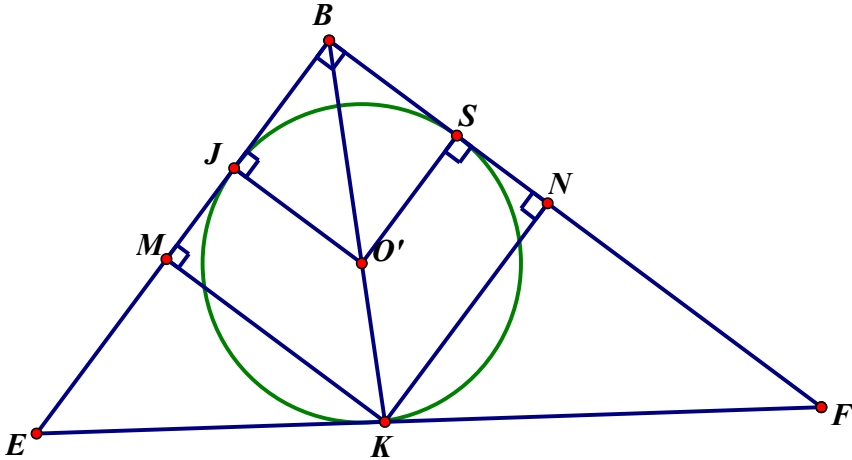
0,5

b. Các đường thẳng AB và CD thỏa mãn điều kiện gì thì diện tích tam giác BPQ nhỏ nhất.

2,0

$$S_{BPQ} = \frac{AB \cdot PQ}{2} = R \cdot PQ = R \cdot (AP + AQ)$$

$$= R \cdot \frac{AE + AF}{2} \geq \frac{R}{2} \cdot 2\sqrt{AE \cdot AF} = R\sqrt{AB^2} = 2R^2$$

	$S_{BPQ} = 2R^2 \Leftrightarrow AE=AF \Leftrightarrow \triangle BEF$ vuông cân tại B $\Leftrightarrow \triangle BCD$ vuông cân tại B $\Leftrightarrow AB \perp CD$	
	<p>c. Biết $\triangle BEF$ có hình vuông $BMKN$ nội tiếp ($K \in EF$; $M \in BE$, $N \in BF$) sao cho tỉ số giữa các cạnh hình vuông và bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle BEF$ là $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. Tính các góc nhọn của $\triangle BEF$.</p> 	1,0
	<p>Gọi O' là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BEF. Do tứ giác $BMKN$ là hình vuông $\Rightarrow BK$ là đường phân giác của $\angle EBF$ $\Rightarrow O' \in BK$</p>	0,25
	<p>Kẻ $O'J \perp BE$; $O'S \perp BF \Rightarrow O'S \parallel KN \Rightarrow \frac{BK}{BO'} = \frac{KN}{O'S} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ Mà $\frac{BK}{BO'} = \frac{BO' + O'K}{BO'} = 1 + \frac{O'K}{BO'} \Rightarrow \frac{O'K}{BO'} = \frac{\sqrt{2}}{2}$</p>	0,25
	<p>Lại có FO' là phân giác $\angle BFE \Rightarrow \frac{FK}{FB} = \frac{O'K}{O'B} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow FB = \sqrt{2} \cdot FK \Rightarrow FB^2 = 2FK^2$ Tương tự: $EB^2 = 2EK^2$</p>	0,25
	<p>$\Rightarrow EF^2 = EB^2 + FB^2 = 2(EK^2 + FK^2)$ Hay $(EK + KF)^2 = 2(EK^2 + FK^2) \Leftrightarrow (EK - KF)^2 = 0 \Leftrightarrow EK = KF$ $\Rightarrow \triangle EBF$ vuông cân tại B $\Rightarrow \angle BEF = \angle BFE = 45^\circ$</p>	0,25
9	<p>Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức</p> $P = \frac{1}{a^2 + 1 + bc} + \frac{1}{b^2 + 1 + ac} + \frac{1}{ab(c^3 + 1) + 1}$	1.0

$P = \frac{a}{a^3 + a + abc} + \frac{b}{b^3 + b + abc} + \frac{c}{abc(c^3 + 1) + c}$ $\leq \frac{a}{a^3 + a + 1} + \frac{b}{b^3 + b + 1} + \frac{c}{c^3 + c + 1}$	0,25
<p>"$x > 0$, ta luôn có $(x-1)^2(x+1)^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x + 1 \geq 0$</p> <p>$\Leftrightarrow x^3 + x + 1 \geq x^2 + 2x \Leftrightarrow \frac{x}{x^3 + x + 1} \leq \frac{1}{x+2}$, đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.</p> $\frac{a}{a^3 + a + 1} + \frac{b}{b^3 + b + 1} + \frac{c}{c^3 + c + 1} \leq \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2}$ <p>Suy ra</p>	0,25
<p>Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \leq 1$ (6)</p> <p>Thật vậy, (6) $\Leftrightarrow (a+2)(b+2) + (b+2)(c+2) + (a+2)(c+2) \leq (a+2)(b+2)(c+2)$</p> <p>$\Leftrightarrow ab + bc + ca + abc \geq 4$</p>	0,25
<p>Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $ab + bc + ca \geq 3\sqrt{ab \cdot bc \cdot ca} = 3$</p> <p>Mặt khác $abc \geq 1 \Rightarrow ab + bc + ca + abc \geq 4$ nên (6) đúng, suy ra $P \leq 1$.</p> <p>Vậy $\max P = \frac{\sqrt{3}}{3}$ khi $a = b = c = 1$.</p>	0,25