

TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI GIỚI HẠN HÀM SỐ LIÊN TỤC

Câu 1: Cho dãy số (u_n) với $u_1 = 2; u_{n+1} = u_n + \frac{2}{3^n}, n \geq 1$. Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) $u_2 = \frac{20}{9}$.

b) $v_2 = \frac{2}{9}$.

c) $\lim v_n = 2$.

d) $\lim u_n = 3$.

Lời giải

a) S

$$u_2 = u_1 + \frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

b) Đ

$$v_n = u_{n+1} - u_n \Rightarrow v_n = \frac{2}{3^n} \Rightarrow v_2 = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}.$$

c) S

$$v_n = \frac{2}{3^n} \Rightarrow \lim v_n = \lim \frac{2}{3^n} = 0.$$

d) Đ

$$v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} = \frac{2}{3} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{3}{3^n}; \forall n \geq 2.$$

Mặt khác $v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} = u_n - 2; \forall n \geq 2$.

Nên $u_n = 3 - \frac{3}{3^n}$. Do đó $\lim u_n = \lim \left(3 - \frac{3}{3^n}\right) = 3$.

Câu 2: Cho hàm số

a) $f(2) = 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$.

c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -4$.

d) $a = -1010$ thì hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 2$.

Lời giải

a) S

$$f(2) = 2a + 2024.$$

b) Đ

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4.$$

c) S

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + 2024) = 2a + 2024.$$

d) Đ

Hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow 4 = 2a + 2024 \Leftrightarrow a = -1010$.

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2025}{x - 45} & \text{khi } x \neq 45 \\ 2m + 4 & \text{khi } x = 45 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số}).$$

Câu 3: Cho hàm số

Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi khẳng định sau?

- a) Tập xác định của hàm số $\mathbb{R} \setminus \{45\}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 45} f(x) = 90$.
- c) Hàm số liên tục tại $x = 20$ với mọi m .
- d) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m = 44$.

Lời giải

a) SAI

Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{45\}$. Vậy a) Sai

b) ĐÚNG

Ta có $\lim_{x \rightarrow 45} \frac{x^2 - 2025}{x - 45} = \lim_{x \rightarrow 45} (x + 45) = 90$. Vậy b) Đúng.

c) ĐÚNG.

Ta có $f(20) = 65$

$\lim_{x \rightarrow 20} \frac{x^2 - 2025}{x - 45} = \lim_{x \rightarrow 20} (x + 45) = 65 = f(20)$, nên $f(x)$ liên tục tại $x = 20$. Vậy c) Đúng.

d) SAI.

Với $x \neq 45$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 2025}{x - 45}$ hàm số xác định trên khoảng $(-\infty; 45) \cup (45; +\infty)$. Suy ra hàm số liên tục trên từng khoảng $(-\infty; 45)$ và $(45; +\infty)$.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x = 45 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 45} f(x) = f(45)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 45} \frac{x^2 - 2025}{x - 45} = 2m + 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 45} \frac{(x - 45)(x + 45)}{x - 45} = 2m + 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 45} (x + 45) = 2m + 4$$

$$\Leftrightarrow 90 = 2m + 45 \Leftrightarrow m = 43. \text{ Suy ra } m = 43 \text{ thì hàm số liên tục trên } \mathbb{R}.$$

Vậy d) Sai.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} & \text{khi } x > 1 \\ mx + 3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$$

Câu 4: Cho hàm số

Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi khẳng định sau?

- a) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$.
- c) Hàm số luôn liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.
- d) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m = -1$.

Lời giải

a) ĐÚNG

b) SAI.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} [(\sqrt{x}+1)(x+1)] = 4 \end{aligned}$$

Vậy b) **Sai**.

c) **ĐÚNG**.

Với $x > 1$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$, hàm số xác định trên $(1; +\infty)$. Do đó hàm số liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$. Vậy c) **Đúng**.

d) **SAI**.

* Với $x > 1$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$, hàm số xác định trên $(1; +\infty)$. Do đó hàm số liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

* Với $x < 1$ thì $f(x) = mx + 3$, hàm số xác định trên khoảng $(-\infty; 1)$. Do đó hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Hàm số liên tục trên $\square \Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (mx + 3) = m + 3, f(1) = m + 3$$

Suy ra $m + 3 = 4 \Leftrightarrow m = 1$. Hàm số liên tục trên $\square$ khi $m = 1$.

Vậy d) **Sai**

Câu 5: Cho các dãy số $(u_n), (v_n)$ với $u_n = \sqrt{4n^2 + 5n + 1}$ và $v_n = 2n + 1$. Xét tính đúng sai cho mỗi khẳng định sau:

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.
- b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 0$.
- d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \frac{1}{4}$.

Lời giải

a) **Sai**.

$$\text{Ta có } v_n = 2n + 1 = n \left(2 + \frac{1}{n} \right), \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2.$$

$$\text{Do đó, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n + 1) = +\infty.$$

b) **Đúng**.

$$\text{Ta có } u_n = \sqrt{4n^2 + 5n + 1} = n \sqrt{4 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{4 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} = 2.$$

$$\text{Do đó, } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{4n^2 + 5n + 1} = +\infty.$$

c) **Sai**.

$$u_n + v_n = \sqrt{4n^2 + 5n + 1} + 2n + 1 = n \left(\sqrt{4 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} + 2 + \frac{1}{n} \right), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \quad \text{và}$$

Ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} + 2 + \frac{1}{n} \right) = 4$$

$$\text{Do đó,} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{4n^2 + 5n + 1} + 2n + 1) = +\infty$$

d) Đúng.

$$u_n - v_n = \sqrt{4n^2 + 5n + 1} - (2n + 1) = \frac{(\sqrt{4n^2 + 5n + 1})^2 - (2n + 1)^2}{\sqrt{4n^2 + 5n + 1} + (2n + 1)} = \frac{n}{\sqrt{4n^2 + 5n + 1} + (2n + 1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + 5n + 1} + (2n + 1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} + \left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{4}$$

Do đó,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+3}-3}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ x^2 - x - m & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$$

Câu 6: Cho hàm số . Xét tính đúng sai cho mỗi khẳng định sau:

a) $f(-1) = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 6 - m$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{2}$

d) Tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ khi $m = \frac{11}{2}$

Lời giải

a) Sai.

$$f(-1) = (-1)^2 - (-1) - m = 2 - m$$

b) Sai.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - x - m) = 2^2 - 2 - m = 2 - m$$

c) Đúng.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{3x+3}-3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\sqrt{3x+3})^2 - 3^2}{(x-2)(\sqrt{3x+3}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} = \frac{1}{2}$$

Ta có:

d) Sai.

$$\text{Ta có:} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{2} \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 - m$$

$$\text{Tồn tại } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{khi} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow 2 - m = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$g(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ x - 1 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$$

Câu 7: Cho hàm số

Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- b) $g(-1) = -2$.
- c) Hàm số $g(x)$ liên tục tại $x = -1$.
- d) Hàm số $g(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Lời giải

a) Đ b) S c) S d) Đ

a) Ta có hàm số $y = \cos \frac{\pi x}{2}$ xác định trên $[-1; 1]$ và hàm số $y = x - 1$ xác định trên $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ nên hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$.

b) $g(-1) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

c) Ta có $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x - 1) = -2$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$.

Do đó hàm số $g(x)$ không liên tục tại $x = -1$.

d) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 0$ nên $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$.

Đồng thời $g(1) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$. Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Câu 8: Cho các hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$, $g(x) = \sqrt{x + 15}$ và $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x < 1 \\ g(x) & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$.

Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- b) Hàm số $g(x)$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.
- c) $h(1) = 4$.
- d) Hàm số $h(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

a) Đ b) Đ c) Đ d) S

a) Hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ xác định trên khoảng $(-\infty; 1)$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.

b) Hàm số $g(x) = \sqrt{x + 15}$ xác định trên khoảng $(1; +\infty)$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

c) $h(1) = g(1) = \sqrt{1+15} = 4$

d) Tập xác định của hàm số $h(x)$ là $\mathbb{R}$.

+) Trên khoảng $(-\infty; 1)$ ta có $h(x) = f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ nên hàm số $h(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.

+) Trên khoảng $(1; +\infty)$ ta có $h(x) = g(x) = \sqrt{x+15}$ nên hàm số $h(x)$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

+) Tại $x = 1$:

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+15} = 4$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$.

Do đó hàm số $h(x)$ không liên tục tại $x = 1$.

Vậy hàm số $h(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 9: Cho các dãy số (u_n) với $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Số hạng đầu tiên của (u_n) bằng $\frac{1}{3}$.

b) (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{3}$.

c) Số hạng thứ 4 bằng $\frac{1}{12}$.

d) Tổng của các số hạng của dãy số (u_n) nằm trong khoảng $(0; 1)$.

Lời giải

a) Đ

Ta có: $u_1 = \frac{1}{3}$.

b) Đ

Ta có: $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{3}$.

c) S

Ta có: $u_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$.

d) Đ

Ta có: (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{3}$ có $|q| < 1$ nên (u_n) là một cấp số nhân lùi

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \in (0;1)$$

vô hạn. Khi đó

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & \text{khi } x > 3 \\ x+m & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$$

Câu 10: Cho hàm số với m là tham số

a) Hàm số xác định trên $\square$.

b) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = \frac{1}{5}$.

c) Với $m = 4$ thì hàm số có giới hạn tại điểm $x = 3$.

d) Có 2 giá trị của tham số m để $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + f(x)}{x}$ là một số hữu hạn.

Lời giải

a) Đ

Hàm số có tập xác định $D = \square$

b) Đ

Ta có
$$\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{\sqrt{8+1}-2}{8-3} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{4}$$

c) S

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x+m) = 3+m$$

hàm số có giới hạn tại điểm $x = 3$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{4} = m+3 \Leftrightarrow m = -\frac{11}{4}$$

d) Đ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+m)^2 + x+m}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + (2m+1)x + m^2 + m}{x}$$

$$\text{Để } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + f(x)}{x} \text{ là một số hữu hạn thì } 0^2 + (2m+1).0 + m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

$$\text{Với } m = 0 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$$

$$\text{Với } m = -1 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1$$

Vậy có 2 giá trị của tham số m để $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + f(x)}{x}$ là một số hữu hạn.

Câu 11: Một bãi đỗ xe tính phí 60000 đồng cho giờ đầu tiên và thêm 40000 đồng cho mỗi giờ tiếp theo, tối đa là 200000 đồng.

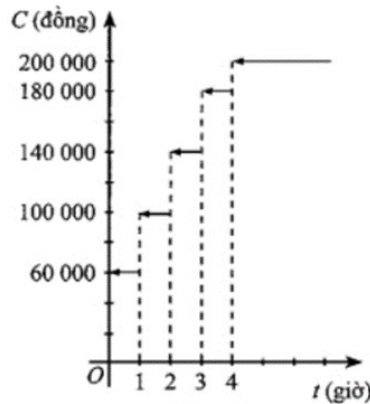
a) Đồ thị hàm số $C = C(t)$ biểu thị chi phí theo thời gian đỗ xe.

b) Hàm số $C = C(t)$ liên tục trên $[0; +\infty)$.

$$\lim_{t \rightarrow 3} C(t) = 180000$$

c) Từ đồ thị ta thấy

d) Một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người là 20000 đồng.



Lời giải

a) Đ

Đồ thị hàm số $C = C(t)$ biểu thị chi phí theo thời gian đỗ xe.

b) S

Từ đồ thị ta thấy hàm số $C(t)$ bị gián đoạn tại $t = 1; t = 2; t = 3; t = 4$ nên hàm số không liên tục trên $[0; +\infty)$.

c) S

$$\lim_{t \rightarrow 3^+} C(t) = 180000, \lim_{t \rightarrow 3^-} C(t) = 140000$$

ta có:

Vì $\lim_{t \rightarrow 3^+} C(t) \neq \lim_{t \rightarrow 3^-} C(t)$ nên không tồn tại $\lim_{t \rightarrow 3} C(t)$

d) S

Một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người luôn là $180000 - 140000 = 40000$.

Câu 12: Một bảng giá cước taxi được cho như sau:

Giá mở cửa $(0, 5km)$ Giá cước các km tiếp theo đến $30km$ Giá cước từ km thứ 31
10 000 đồng 13 500 đồng 11 000 đồng

a) Công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển

$$f(x) = \begin{cases} 5000 + 13500(x - 0,5); & 0,5 < x \leq 30 \\ 403250 + 11000(x - 30); & x > 30 \end{cases}$$

b) Công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển

$$f(x) = \begin{cases} 10000x; & x \leq 0,5 \\ 5000 + 13500(x - 0,5); & 0,5 < x \leq 30 \\ 403250 + 11000(x - 30); & x > 30 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 10000x; & x \leq 0,5 \\ 5000 + 13500(x - 0,5); & 0,5 < x \leq 30 \\ 403250 + 11000(x - 30); & x > 30 \end{cases}$$

c) Hàm số liên tục trên $\square$.

d) Khách hàng đi quãng đường $40km$ thì số tiền vị khách đó phải trả là 515000 đồng.

a) S

+) Đoạn mở cửa:

Giá mở cửa là 10.000 đồng cho 0,5 km đầu tiên.

Khi $0 < x \leq 0,5$, tiền cước là: $f(x) = 10\,000$

+) Đoạn từ 0,5 km đến 30 km:

Sau 0,5 km, giá cước là 13.500 đồng cho mỗi km. Ta có:

Khi $0,5 < x \leq 30$, tiền cước là: $f(x) = 10\,000 + 13\,500(x - 0,5)$

Vì 10.000 đồng là giá mở cửa, và ta trừ 0,5 km đầu tiên đã tính trong giá mở cửa.

+) Đoạn từ km thứ 31 trở đi:

Giá cước giảm còn 11.000 đồng mỗi km. Ta tiếp tục từ mức giá của 30 km đầu:

Khi $x > 30$, tiền cước là: $f(x) = 10\,000 + 13\,500(30 - 0,5) + 11\,000(x - 30)$

b) Đ

+) Đoạn mở cửa:

Giá mở cửa là 10.000 đồng cho 0,5 km đầu tiên.

Khi $0 < x \leq 0,5$, tiền cước là: $f(x) = 10\,000$

+) Đoạn từ 0,5 km đến 30 km:

Sau 0,5 km, giá cước là 13.500 đồng cho mỗi km. Ta có:

Khi $0,5 < x \leq 30$, tiền cước là: $f(x) = 10\,000 + 13\,500(x - 0,5)$

Vì 10.000 đồng là giá mở cửa, và ta trừ 0,5 km đầu tiên đã tính trong giá mở cửa.

+) Đoạn từ km thứ 31 trở đi:

Giá cước giảm còn 11.000 đồng mỗi km. Ta tiếp tục từ mức giá của 30 km đầu:

Khi $x > 30$, tiền cước là: $f(x) = 10\,000 + 13\,500(30 - 0,5) + 11\,000(x - 30)$

$$f(x) = \begin{cases} 10\,000x; & x \leq 0,5 \\ 5000 + 13\,500(x - 0,5); & 0,5 < x \leq 30 \\ 403\,250 + 11\,000(x - 30); & x > 30 \end{cases}$$

Nên

c) Đ

Xét tính liên tục của hàm số

Ta cần kiểm tra tính liên tục tại các điểm chuyển tiếp $x = 0,5$ và $x = 30$ +) Tại $x = 0,5$:

$$\lim_{x \rightarrow 0,5^-} f(x) = f(0,5) = 5\,000$$

$$\lim_{x \rightarrow 0,5^+} f(x) = 5\,000 + 13\,500(0,5 - 0,5) = 5\,000$$

Hàm số liên tục tại $x = 0,5$.+) Tại $x = 30$:

$$\lim_{x \rightarrow 30^-} f(x) = f(30) = 5\,000 + 13\,500(30 - 0,5) = 403\,205$$

$$\lim_{x \rightarrow 30^+} f(x) = 5\,000 + 13\,500(30 - 0,5) = 403\,205.$$

Hàm số liên tục tại $x = 30$.Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

d) S

Khách hàng đi quãng đường 40km thì số tiền vị khách đó phải trả là

$$f(40) = 403\,250 + 11\,000(40 - 30) = 513\,250$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ -6 & \text{khi } x = -2 \end{cases}$$

Câu 13: Cho hàm số

- a) $f(-2) = -6$
- b) $f(-2) = 6$
- c) $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = -5$
- d) Hàm số liên tục tại $x = -2$.

Lời giải

- a) Đ
- Khi $x = -2$, ta có $f(-2) = -6$.
- b) S
- $f(-2) = -6$
- c) Đ

$$\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{(x + 2)(x - 3)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)} (x - 3) = -5$$

- d) S
- $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = -5 \neq f(-2)$

Vậy hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại $x = -2$.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2 + x - 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

Câu 14: Cho hàm số

- a) $f(1) = 4$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$
- c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + 3$
- d) Hàm số liên tục tại $x = 1$ khi $a = -2$.

Lời giải

- a) S
- $f(1) = a \cdot 1 + 3 = a + 3$
- b) Đ
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 1) = 1$
- c) Đ
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + 3) = a + 3$
- d) Đ

Hàm số liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + 3 = 1 \Leftrightarrow a = -2$

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c là các số thực)

- a) Với $a = -3; b = 0; c = 2$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(-2; 0)$.
- b) Với $a = -3; b = 0; c = 2$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $(-2; 3)$.

- c) Với các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} -8+4a-2b+c > 0 \\ 8+4a+2b+c < 0 \end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox là 2.
- d) Với các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a+c > b+1 \\ a+b+c+1 < 0 \end{cases}$. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox là 3.

Lời giải

a) Đ

Ta có hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.Suy ra hàm số liên tục trên $[-2; 0]$.Ta có: $\begin{cases} f(-2) = -18 \\ f(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2; 0)$.

b) Đ

Ta có hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.Suy ra hàm số liên tục trên $[-2; 3]$.Ta có: $\begin{cases} f(-2) = -18 \\ f(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2; 0)$. $\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(2) = -2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; 2)$.Do đó phương trình có ít nhất hai nghiệm thuộc khoảng $(-2; 3)$.

c) S

Đặt $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Khi đó $\begin{cases} f(2) = 8 + 4a + 2b + c < 0 \\ f(-2) = -8 + 4a - 2b + c > 0 \end{cases}$ $f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$. $\begin{cases} f(2) < 0 \\ f(-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(-2) \cdot f(2) < 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại ít nhất một điểm trong khoảng $(-2; 2)$. $\begin{cases} f(2) < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại ít nhất một điểm trong khoảng $(2; +\infty)$. $\begin{cases} f(-2) > 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại ít nhất một điểm trong khoảng $(-\infty; -2)$.Mà hàm số $f(x)$ là hàm bậc ba nên đồ thị của nó cắt trục Ox tối đa tại 3 điểm.Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại đúng 3 điểm.

d) Đ

Vì hàm số đã cho là hàm đa thức bậc ba nên đồ thị hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và số giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox nhiều nhất là 3.

Theo đề bài ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

$$y(-1) = a + c - b - 1 > 0, \quad y(1) = a + b + c + 1 < 0,$$

Do đó hàm số đã cho có ít nhất một nghiệm trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$.

Từ đó suy ra số giao điểm cần tìm là 3.

Câu 16: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức

$$f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5} \quad (f(t) \text{ được tính bằng nghìn người}).$$

a) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.

b) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 23 nghìn người.

c) Giới hạn: $\lim_{t \rightarrow 5^+} f(t) = 20$

d) Số dân của thị trấn không vượt quá 26 nghìn người.

Lời giải

a) Đ

Vào đầu năm 1980, ta có $t = 10; f(10) = 18$.

Vậy số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.

b) S

Vào đầu năm 1995, ta có $t = 25; f(25) = 22$.

Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 22 nghìn người

b) S

$$\text{Giới hạn: } \lim_{t \rightarrow 5^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} \frac{26t + 10}{t + 5} = \frac{26 \cdot 5 + 10}{5 + 5} = 14$$

c) Đ

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{26t + 10}{t + 5} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{26 + \frac{10}{t}}{1 + \frac{5}{t}} = 26$$

Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 26$. Vậy Số dân của thị trấn không vượt quá 26 nghìn người.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$ và $g(x) = x + a$ (a, b là các tham số).

a) Giới hạn của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow +\infty$ bằng 0.

b) Giới hạn của hàm số $y = f(x) - g(x)$ khi $x \rightarrow -\infty$ bằng 1.

c) Nếu $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$ và $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$ khi đó $a = b$.

d) Nếu $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ khi đó giá trị của biểu thức $a + b = 1$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = +\infty$$

a) S

Vi $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 1$

b) Đ

c) S

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 4 + 2a + b$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + a) = 2 + a$

Do $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ nên ta có hệ $\begin{cases} 4 + 2a + b = -3 \\ 2 + a = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$

d) S

TH1: $1^2 + a \cdot 1 + b = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ nên không thỏa mãn yêu cầu của bài toán

TH2: $1^2 + a \cdot 1 + b = 0$ hay $b = -a - 1$

Ta có:

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - a - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1 + a)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1 + a) = 2 + a$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ nên $a = 3$

Từ đó, ta có $b = -4$

Vậy $a + b = -1$

Câu 18: Cho các dãy số $(a_n), (b_n), (c_n)$ với $a_n = n(n+2) + 2024$, $b_n = \frac{1}{a_n} + \frac{2}{a_n} + \frac{3}{a_n} + \dots + \frac{n}{a_n}$ và

$c_n = \frac{1}{a_1 - 2024} + \frac{1}{a_2 - 2024} + \dots + \frac{1}{a_n - 2024}$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n - 2024} = \frac{1}{2}$

b) $c_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{c_n} = \frac{1}{3}$

Lời giải

a) S

Sai vì ta có $\frac{1}{a_n - 2024} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n - 2024} = 0$

b) Đ

$$c_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + K + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

Đúng vì ta có

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

c) Đ

$$\lim b_n = \lim \frac{1+2+3+\dots+n}{a_n} = \lim \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n(n+2)+2024}$$

Đúng vì

$$= \lim \frac{n^2+n}{n^2+2n+2024} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2024}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

e) S

$$\lim c_n = \lim \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Sai vì ta có:

$$\lim \frac{b_n}{c_n} = \frac{\lim b_n}{\lim c_n} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

Nên

Câu 19: Trong hồ có chứa 6000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút. Biết rằng, nồng độ muối trong dung dịch được tính bằng công thức

$$C = \frac{m}{V}$$

a) Sau thời gian t , lượng nước được bơm vào hồ là $V(t) = 15t$.

b) Khối lượng muối được bơm vào hồ sau thời gian t là $m = 450t$.

c) Nồng độ muối trong hồ sau thời gian t phút là $C(t) = \frac{15t}{6000+450t}$.

d) Khi thời gian t phút càng lớn, nồng độ muối trong hồ sẽ càng cao nhưng không vượt quá $C(t) = 15$.

Lời giải

a) Đ

Đúng vì sau thời gian t phút, lượng nước được bơm vào hồ là $V(t) = 15t$.

b) Đ

Đúng vì khối lượng muối được bơm vào hồ sau thời gian t phút là $m = 450t$.

c) S

Sai vì nồng độ muối trong hồ sau thời gian t phút là $C = \frac{m}{V} = \frac{450t}{6000+15t} = \frac{30t}{400+t}$.

d) S

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{450t}{6000+15t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{400+t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30}{\frac{400}{t}+1} = \frac{30}{0+1} = 30$$

Sai vì . Vậy khi thời gian t phút càng lớn, nồng độ muối trong hồ sẽ càng cao nhưng không vượt quá $C(t) = 30$.

Câu 20: Cho các hàm số $f_1(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$; $f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2 \\ x - 1, & x = -2 \end{cases}$;

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} & \text{khi } x > 4 \\ 2x - m & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}; \quad f_4(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{khi } x < 1 \\ k^2 & \text{khi } x = 1 \\ (x - 2)^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

- a) Hàm số $f_1(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$.
 b) Hàm số $f_2(x)$ liên tục tại $x_0 = -2$.
 c) Hàm số $f_3(x)$ liên tục tại $x = 4$ khi $m = -24$.
 d) Với $k \neq \pm 1$ thì $f_4(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Lời giải

a) S

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ do đó $x_0 = 2 \notin D$.

Vậy hàm số gián đoạn tại $x_0 = 2$.

b) S

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ do đó $x_0 = -2 \in D$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4$, $f(-2) = -3$ do đó $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq f(-2)$

Vậy hàm số gián đoạn tại $x_0 = -2$.

c) Đ

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (2x - m) = 8 - m = f(4)$;

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x + 4)(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} [(x + 4)(\sqrt{x} + 2)] = 32.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 4$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 8 - m = 32 \Leftrightarrow m = -24.$$

d) Đ

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}. \text{ Ta có } \begin{cases} f(1) = k^2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 2)^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - x^2) = 1 \end{cases}$$

Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq f(1) \Leftrightarrow k^2 \neq 1 \Leftrightarrow k \neq \pm 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{2a+1}{6} & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{và} \quad g(x) = \sin \frac{\pi x}{4}.$$

Câu 21: Cho hàm số

a) $g(2)=1$.

b) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2}$.

c) Hàm số $g(x)$ liên tục tại $x_0=1$.

d) Khi $a < 1$ thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$.

Lời giải

a) Đ

Ta có: $g(2) = \sin \frac{2\pi}{4} = 1$

b) Đ

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1-1}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{1}{2}.$$

c) Đ

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{nên} \quad g(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x).$$

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

d) S

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \sin \frac{2\pi}{4} = 1 \quad \text{nên} \quad g(2) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x).$$

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Ta có: $f(2) = \frac{2a+1}{6}$. Khi đó,

$$\text{Hàm số } f(x) \text{ liên tục tại } x_0 = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \frac{2a+1}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1.$$

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x) = (m-1)x^3 + 2x + 1$ với m là tham số.

a) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Với $m = \frac{1}{2}$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(-1; 3)$.

c) Với mọi $m \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1; 1)$.

d) Với $m < 1$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm dương.

Lời giải

a) Đ

Với mọi m thì $y = f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) S

Khi $m = \frac{1}{2}$ ta có $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x + 1$. Đây là hàm liên tục trên $[-1; 0]$ và $[0; 3]$.

Ta có $\begin{cases} f(-1) = -\frac{1}{2} \\ f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0$ nên $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1; 0)$.

Ta có $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(3) = -\frac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(3) < 0$ nên $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(0; 3)$.

Từ đó suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm trên $(-1; 3)$.

c) Đ

Có $y = f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\begin{cases} f(-1) = -m \\ f(1) = m+2 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(1) = -m(m+2) < 0, \quad \forall m \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$

Suy ra $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1; 1)$ với mọi $m \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.

d) Đ

Có $y = f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 1 > 0$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(m-1)x^3 + 2x + 1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(m-1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right] = -\infty$ do $m < 1$.

Khi đó, tồn tại số $a > 0$ sao cho $f(a) < 0$.

Suy ra $f(0) \cdot f(a) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(0; a)$.

Suy ra $m < 1$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm dương.

Câu 23: Một bãi đậu xe ô tô đưa ra giá $T(x)$ khi thời gian đậu xe là x như sau:

$$T(x) = \begin{cases} 50000, & 0 < x \leq 2 \\ 120000, & 2 < x < 4 \\ 35000x, & x \geq 4 \end{cases}$$

a) $T(2) = 50000$

b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} T(x) = 120000$

c) Hàm số $T(x)$ liên tục tại $x = 4$.

d) Hàm số $T(x)$ liên tục trên $[4; +\infty)$.

Lời giải

a) Đ

$$T(2) = 50000$$

b) S

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (120000) = 120000 \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (35000x) = 140000$$

c) Đ

Vì $\lim_{x \rightarrow 4^-} T(x) = 120000 \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} T(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 4} T(x)$ suy ra hàm số $T(x)$ không liên tục tại $x = 4$.

d) Đ

Khi $x > 4$, $T(x) = 35000x$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(4; +\infty)$.

Ta lại có $\lim_{x \rightarrow 4^+} T(x) = T(4)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục trên $[4; +\infty)$

Câu 24: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = 4n^2 - n + 3$; $v_n = 3n^2 + 7$.

- a) $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{4}{3}$.
- b) $\lim \frac{u_n}{(v_n)^2} = \frac{4}{9}$.
- c) $\lim \frac{(u_n)^2}{v_n} = \frac{16}{3}$.
- d) $\lim \frac{u_n + an^2 + 7}{v_n} = 8$ khi đó $a = 20$.

Lời giải

a)
$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{4n^2 - n + 3}{3n^2 + 7} = \lim \frac{n^2 \left(4 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right)}{n^2 \left(3 + \frac{7}{n^2} \right)} = \lim \frac{4 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{7}{n^2}} = \frac{4}{3}$$

. Vậy **a** đúng.

b)
$$\lim \frac{u_n}{(v_n)^2} = \lim \frac{4n^2 - n + 3}{(3n^2 + 7)^2} = \lim \frac{n^2 \left(4 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right)}{n^4 \left(3 + \frac{7}{n^2} \right)^2} = \lim \left[\frac{1}{n^2} \cdot \frac{4 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{\left(3 + \frac{7}{n^2} \right)^2} \right] = 0$$

nên ý **b** sai.

c)
$$\lim \frac{(u_n)^2}{v_n} = \lim \frac{(4n^2 - n + 3)^2}{3n^2 + 7} = \lim \frac{n^4 \left(4 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right)^2}{n^2 \left(3 + \frac{7}{n^2} \right)} = \lim \left[n^2 \cdot \frac{\left(4 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right)^2}{3 + \frac{7}{n^2}} \right] = +\infty$$

Vậy ý **c** sai.

d)
$$\lim \frac{4n^2 - n + 3 + an^2 + 7}{3n^2 + 7} = \lim \frac{(a+4)n^2 - n + 10}{3n^2 + 7}$$

$$= \lim \frac{n^2 \left[(a+4) - \frac{1}{n} + \frac{10}{n^2} \right]}{n^2 \left(3 + \frac{7}{n^2} \right)} = \lim \frac{(a+4) - \frac{1}{n} + \frac{10}{n^2}}{3 + \frac{7}{n^2}} = \frac{a+4}{3}$$

$$\frac{a+4}{3} = 8 \Leftrightarrow a = 20.$$

Khi đó

Vậy ý **d** đúng.

Câu 25: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = 7^{n+1} - 3$; $v_n = 2 \cdot 7^n + 3^n$

- a) $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{7}{2}$.
- b) $\lim \frac{u_n}{(v_n)^2} = \frac{7}{4}$.

c) $\lim \frac{(u_n)^2}{v_n} = \frac{49}{2}$

d) $\lim \frac{u_n + a \cdot 7^n + 7}{v_n} = 8$ khi đó $a = 8$.

Lời giải

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{7^{n+1} - 3}{2 \cdot 7^n + 3^n} = \lim \frac{7^n \left(7 - \frac{3}{7^n} \right)}{7^n \left[2 + \left(\frac{3}{7} \right)^n \right]} = \lim \frac{7 - \frac{3}{7^n}}{2 + \left(\frac{3}{7} \right)^n} = \frac{7}{2}$$

a) Vậy **a** đúng.

$$\lim \frac{u_n}{(v_n)^2} = \lim \frac{7^{n+1} - 3}{(2 \cdot 7^n + 3^n)^2} = \lim \frac{7^n \left(7 - \frac{3}{7^n} \right)}{7^{2n} \left[2 + \left(\frac{3}{7} \right)^n \right]^2} = \lim \left[\frac{1}{7^n} \cdot \frac{7 - \frac{3}{7^n}}{\left(2 + \left(\frac{3}{7} \right)^n \right)^2} \right] = 0$$

b) nên ý **b** sai.

$$\lim \frac{(u_n)^2}{v_n} = \lim \frac{(7^{n+1} - 3)^2}{2 \cdot 7^n + 3^n} = \lim \frac{7^{2n} \left(7 - \frac{3}{7^n} \right)^2}{7^n \left[2 + \left(\frac{3}{7} \right)^n \right]} = \lim \left[7^n \cdot \frac{\left(7 - \frac{3}{7^n} \right)^2}{2 + \left(\frac{3}{7} \right)^n} \right] = +\infty$$

c) Vậy ý **c** sai.

$$\lim \frac{7^{n+1} - 3 + a \cdot 7^n + 7}{2 \cdot 7^n + 3^n} = \lim \frac{(a+7) \cdot 7^n + 4}{7^n \left[2 + \left(\frac{3}{7} \right)^n \right]}$$

d)

$$= \lim \frac{7^n \left[(a+7) + \frac{4}{7^n} \right]}{7^n \left[2 + \left(\frac{3}{7} \right)^n \right]} = \frac{a+7}{2}$$

$$\frac{a+7}{2} = 8 \Leftrightarrow a = 9.$$

Khi đó
Vậy ý **d** sai.

Câu 26: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{9^n + 3^{n+2}}{6^n + 9^{n+a}}$.

a) Khi $a = 0$ thì $\lim u_n = 1$.

b) Khi $a = 1$ thì $\lim u_n = 9$.

c) Khi $a = -1$ thì $\lim u_n = \frac{1}{9}$.

d) Có 2022 giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $[0; 2024]$ để $\lim u_n \leq \frac{1}{81}$.

Lời giải

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n + 3^{n+2}}{6^n + 9^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 9 \cdot \left(\frac{3}{9}\right)^n}{\left(\frac{6}{9}\right)^n + 1} = 1.$$

a) Khi $a = 0$ thì

Vậy ý **a** đúng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n + 3^{n+2}}{6^n + 9^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 9 \cdot \left(\frac{3}{9}\right)^n}{\left(\frac{6}{9}\right)^n + 9} = \frac{1}{9}.$$

b) Khi $a = 1$ thì

Vậy ý **b** sai.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n + 3^{n+2}}{6^n + 9^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 9 \cdot \left(\frac{3}{9}\right)^n}{\left(\frac{6}{9}\right)^n + \frac{1}{9}} = 9.$$

c) Khi $a = -1$ thì

Vậy ý **c** sai.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n + 3^{n+2}}{6^n + 9^{n+a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 9 \cdot \left(\frac{3}{9}\right)^n}{\left(\frac{6}{9}\right)^n + 9^a} = \frac{1}{9^a}$$

d) Ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \frac{1}{81} \Leftrightarrow \frac{1}{9^a} \leq \frac{1}{81} \Leftrightarrow a \geq 2$$

Khi đó

Mặt khác a nguyên và thuộc đoạn $[0; 2024]$ nên $a \in \{2; 3; 4; \dots; 2024\}$. Vậy có 2023 giá trị nguyên của a thỏa mãn. Do đó ý **d** sai.

Câu 27: Cho giới hạn $M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 18n + 1} \right)$, $N = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 + 2n} - n \right)$, $P = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - 3n + 1} - n \right)$ và $Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 + 3n} - \sqrt[3]{8n^3 + n} \right)$

a) $M = +\infty$.

b) $N = 1$.

c) $P = -\frac{3}{2}$.

d) $Q = \frac{3}{2}$.

Lời giải

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 18n + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{18}{n} + \frac{1}{n^2}} \right) = +\infty$$

a) Ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty; \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{18}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1 > 0$$

vì . Vậy ý **a** đúng

$$N = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 + 2n} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{4 + \frac{2}{n}} - 1 \right) = +\infty$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty; \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4 + \frac{2}{n}} - 1 \right) = 1 > 0$$

vì . Vậy ý **b** sai.

$$P = \lim \left(\sqrt{n^2 - 3n + 1} - n \right) = \lim \frac{n^2 - 3n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 - 3n + 1} + n} = \lim \frac{-3n + 1}{\sqrt{n^2 - 3n + 1} + n}$$

c) Ta có

$$= \lim \frac{-3 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{-3}{2}$$

. Vậy ý c đúng.

$$Q = \lim \left(\sqrt{4n^2 + 3n} - \sqrt[3]{8n^3 + n} \right) = \lim \left(\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n \right) + \lim \left(2n - \sqrt[3]{8n^3 + n} \right)$$

d) Ta có

$$= \lim \frac{4n^2 + 3n - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 3n} + 2n} + \lim \frac{8n^3 - 8n^3 - n}{4n^2 + 2n \cdot \sqrt[3]{8n^3 + n} + \sqrt[3]{(8n^3 + n)^2}}$$

$$= \lim \frac{3n}{\sqrt{4n^2 + 3n} + 2n} - \lim \frac{n}{4n^2 + 2n \cdot \sqrt[3]{8n^3 + n} + \sqrt[3]{(8n^3 + n)^2}}$$

$$= \lim \frac{3}{\sqrt{4 + \frac{3}{n}} + 2} - \lim \frac{\frac{1}{n}}{4 + 2 \cdot \sqrt[3]{8 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{\left(8 + \frac{1}{n^2}\right)^2}} = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}$$

Vậy ý d sai.

$$L = \lim \left(\sqrt{n^2 + a^2 n} - \sqrt{n^2 + (a+2)n + 1} \right)$$

Câu 28: Cho giới hạn

a) $a = 0$ thì $L = -1$.

b) $a = -2$ thì $L = 3$.

c) $a = 2$ thì $L = 0$.

$$d) \text{ Có 2 giá trị của } a \text{ để } \lim \left(\sqrt{n^2 + a^2 n} - \sqrt{n^2 + (a+2)n + 1} \right) = 0.$$

Lời giải

$$a) \ a = 0 \text{ thì } L = \lim \left(n - \sqrt{n^2 + 2n + 1} \right) = \lim \left[n - (n+1) \right] = \lim (-1) = -1$$

Vậy ý a đúng.

$$b) \ a = -2 \text{ thì } L = \lim \left(\sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt{n^2 + 1} \right) = \lim \frac{4n - 1}{\sqrt{n^2 + 4n} + \sqrt{n^2 + 1}}$$

$$= \lim \frac{4 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 2.$$

Vậy ý b sai.

$$c) \ a = 2 \text{ thì } L = \lim \left(\sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt{n^2 + 4n + 1} \right) = \lim \frac{-1}{\sqrt{n^2 + 4n} + \sqrt{n^2 + 4n + 1}}$$

$$= \lim \frac{-\frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + \sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}} = 0.$$

Vậy ý c đúng.

$$L = \lim \left(\sqrt{n^2 + a^2 n} - \sqrt{n^2 + (a+2)n+1} \right) = \lim \frac{(a^2 - a - 2)n - 1}{\sqrt{n^2 + a^2 n} + \sqrt{n^2 + (a+2)n+1}}$$

d)

$$= \lim \frac{(a^2 - a - 2) - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{(a+2)}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{a^2 - a - 2}{2}$$

$$L = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 - a - 2}{2} = 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases} . \text{ Suy ra có 2 giá trị của } a \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy ý d đúng.

$$L = \lim \frac{5n^2 - 3an^4}{(1-a)n^4 + 2n+1}.$$

Câu 29: Cho giới hạn

a) $a = 0$ thì $L = 0$.

b) $a > 2$ thì $L > 0$.

c) $a \in [0; 1]$ thì $L > 0$.

d) Có 5 giá trị nguyên của $a \in [-10; 10]$ để $L = \lim \frac{5n^2 - 3an^4}{(1-a)n^4 + 2n+1} > 0$.

Lời giải

$$L = \lim \frac{5n^2}{n^4 + 2n+1} = \lim \frac{5}{n^2 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^2}} = 0$$

a) Với $a = 0$ ta có

. Vậy ý a đúng.

$$L = \lim \frac{5n^2 - 3an^4}{(1-a)n^4 + 2n+1} = \lim \frac{\frac{5}{n^2} - 3a}{(1-a) + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4}} = \frac{-3a}{(1-a)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > 1 \end{cases}$$

b) Ta có

. Vậy ý b đúng.

$$L = \lim \frac{5n^2}{n^4 + 2n+1} = \lim \frac{5}{n^2 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^2}} = 0$$

c) TH1: Với $a = 0$ ta có

$$\Rightarrow L = \lim \frac{5n^2 - 3n^4}{2n+1} = \lim \frac{\frac{5}{n^2} - 3}{\frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4}} = -\infty$$

TH2: Với $a = 1$

$$L = \lim \frac{5n^2 - 3an^4}{(1-a)n^4 + 2n+1} = \lim \frac{\frac{5}{n^2} - 3a}{(1-a) + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4}} = \frac{-3a}{(1-a)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > 1 \end{cases}$$

TH3: Với $a \neq 1; a \neq 0$. Ta có

Từ, và vậy ý c sai.

$$L = \lim \frac{5n^2}{n^4 + 2n+1} = \lim \frac{5}{n^2 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^2}} = 0$$

d) TH1: Với $a = 0$ ta có

$$\Rightarrow L = \lim \frac{5n^2 - 3n^4}{2n+1} = \lim \frac{\frac{5}{n^2} - 3}{\frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4}} = -\infty$$

TH2: Với $a = 1$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 3an^4}{(1-a)n^4 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{n^2} - 3a}{(1-a) + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4}} = \frac{-3a}{(1-a)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > 1 \end{cases}$$

TH3: Với $a \neq 1; a \neq 0$. Ta có

Kết hợp a là số nguyên và $a \in [-10; 10]$, suy ra có 19 giá trị nguyên của a thỏa mãn $L > 0$
 Vậy ý d sai.

$$I = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax^2 + bx + c}{x - 3}$$

Câu 30: Cho giới hạn

- a) Khi $a = 0, b = 1, c = -3$ thì $I = 1$.
 b) Khi $a = 1, b = -4, c = 3$ thì $I = 0$.
 c) Khi $a = 1, b = 0, c = -9$ thì $I = 6$.
 d) Khi $a = 1$, biết rằng có duy nhất một cặp số thực $(b; c)$ thỏa mãn $I = 3$. Khi đó $b + c = -3$.

Lời giải

- a) Khi $a = 0, b = 1, c = -3$ thì $I = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x-3} = 1$. Vậy **a** đúng.
 b) Khi $a = 1, b = -4, c = 3$ thì $I = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-1) = 2$ nên ý **b** sai.
 c) Khi $a = 1, b = 0, c = -9$ thì $I = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$. Vậy ý **c** đúng.

- d) Để $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + bx + c}{x - 3} = 3$ thì ta phải có $x^2 + bx + c = (x-3)(x-m)$.

Khi đó $3-m=3 \Leftrightarrow m=0$. Vậy $x^2 + bx + c = (x-3)x = x^2 - 3x$.

Suy ra $b = -3$ và $c = 0$ nên ý **d** đúng.

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x-3}}, I_2 = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} + a\sqrt[3]{x+5} + b}{x-3}$$

Câu 31: Cho giới hạn

- a) $I_1 = 0$.
 b) Khi $a = 0, b = -2$ thì $I_2 = 1$.
 c) Khi $a = 0, b = -2$ thì $I_1 + I_2 = 2$.
 d) Khi $a = -1, b = 0$ thì $I_2 = \frac{1}{6}$.

Lời giải

- a) Ta có: $I_1 = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x-3} = 0$ nên ý **a** đúng.

- b) Khi $a = 0, b = -2$ thì $I_2 = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{4}$

Vậy ý **b** sai.

- c) Ta có: $I_1 = 0, I_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow I_1 + I_2 = \frac{1}{4}$. Nên ý **c** sai.

- d) Khi $a = -1, b = 0$ ta có

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+5}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} - \frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x-3} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} - \frac{x+5-8}{(x-3)\left(\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4\right)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

. Vậy ý **d** đúng.

Câu 32: Cho

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}; L_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-1} \text{ và } L_3 = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1}-4}{3-\sqrt{x+4}}.$$

- a) $L_1 = 0$.
- b) $L_2 = 1$.
- c) $L_1 - L_2 = -1$.
- d) $L_1 + 3L_2 + 2L_3 = -\frac{7}{2}$.

Lời giải

a) Ta có $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0$. Vậy **a)** đúng.

b) Ta có $L_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x^2} + \sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x^2} + \sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{3}$ nên **b)** sai.

c) Ta thấy: $L_1 - L_2 = -\frac{1}{3}$. Vậy **c)** sai.

d) $L_3 = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1}-4}{3-\sqrt{x+4}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{[(3x+1)-16](3+\sqrt{x+4})}{[9-(x+4)](\sqrt{3x+1}+4)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-3(3+\sqrt{x+4})}{\sqrt{3x+1}+4} = \frac{-18}{8} = -\frac{9}{4}.$$

Vậy $L_1 + 3L_2 + 2L_3 = 0 + 1 - \frac{9}{2} = \frac{-7}{2}$. Nên ý **d)** đúng.

Câu 33: Cho $f(x) = \sqrt{4x^2 - 7x + 12}$ và $g(x) = a|x| - 17$ với a là tham số. Đặt $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

a) Với $a = -1$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$.

d) Nếu $L = \frac{2}{3}$ thì $a = 3$.

Lời giải

a) Với $a = -1$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 17) = -\infty$ nên **a)** đúng.

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - 7x + 12} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}}$
 $= -\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}} = +\infty$. Vậy **b)** đúng.

c) Ta thấy $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}}}{x} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}} = -\sqrt{4} = -2$. Nên ý **c)** sai.

d) Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 7x + 12}}{a|x| - 17} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}}}{-x \left(a + \frac{17}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}}}{a + \frac{17}{x}} = \frac{2}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 3$. Vậy **d)** đúng.

Câu 34: Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1}$ và $g(x) = \frac{2x}{x + 1}$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = -2$$

a) Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} = 2$$

Và

Do đó ý **a** sai.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2 - 2 = -4$

Vậy ý **b** sai.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} = 2$$

c) Ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = 2$$

Vậy ý **c** đúng.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{2}{2} = 1$$

d)

Vậy ý **d** sai.

Câu 35: Cho $f(x) = \frac{-2x+1}{x-1}$ và $g(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -3$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x) + g(x)] = -2$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty$

Lời giải

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x+1}{x-1} = -3$

Vậy ý **a** đúng.

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x+1}{x-1}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x+1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0 \\ x-1 > 0, \forall x > 1 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x+1}{x-1} = -\infty$$

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x+1}{x-1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x+1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0 \\ x-1 < 0, \forall x < 1 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x+1}{x-1} = +\infty$$

Ta có:

Vậy ý **b** sai.

c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$

c)

Vậy ý **c** sai.

d) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2}{x-1} \right)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0 \\ x-1 < 0, \forall x < 1 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

Ta có:

Vậy ý **d** đúng.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ \sqrt{x^2+a}, & x > 1 \end{cases}$$

Câu 36: Cho hàm số với a là tham số thuộc tập số thực $\mathbb{R}$

a) $f(0) = 1$

- b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$
 c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a$
 d) Để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ thì $a = 8$.

Lời giải

- a) Ta có $f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. Vậy ý a) **đúng**.
 b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3$. Vậy ý b) **sai**.
 c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2 + a} = \sqrt{1 + a}$. Vậy ý c) **sai**.
 d) Để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ thì $\sqrt{1 + a} = 3 \Rightarrow a = 8$. Vậy ý d) **đúng**.

Câu 37: Nhận xét tính Đúng – Sai của mỗi nhận định sau.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 0$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$
 d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{4 \sin^2 x - 1} = 0$

Lời giải

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ là khẳng định a) **đúng**.
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$
 Khẳng định b) **sai**.

- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$ là khẳng định c) **đúng**.

- d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{4 \sin^2 x - 1} = 0$ là khẳng định d) **sai**.
 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{4 \sin^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{(2 \sin x - 1)(2 \sin x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1}{2 \sin x + 1} = \frac{1}{2}$

Câu 38: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

- a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{\pi}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$
 d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} = \frac{a}{2}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

a) . Do đó a) ĐÚNG.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Do đó b) SAI.

c) Ta có: $x^2 \cdot (-1) \leq x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \leq x^2 \cdot 1 \forall x$. Vì $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 \cdot (-1)] = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$. Theo định lý kẹp, suy ra:

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$. Do đó c) ĐÚNG.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^2 \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$. Do đó d) SAI.

Câu 39: Cho giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^3 + 6\sqrt{3}}{3 - x^2}$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$.

a) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} f(x) = 2$.

b) Nếu $a = 1$ và $b = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 5$.

c) Nếu $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} f(x) = a\sqrt{3} + b$ thì $a + b = 3$.

d) Nếu $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 1$ thì $a + b = -1$.

Lời giải

a) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^3 + 6\sqrt{3}}{3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^2 - 2\sqrt{3}x + 6}{\sqrt{3} - x} = 3\sqrt{3}$. Do đó a) SAI.

b) Nếu $a = 1$ và $b = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x}{x - 1} = 5$. Do đó b) ĐÚNG.

c) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} f(x) = a\sqrt{3} + b = 3\sqrt{3}$. Suy ra: $a = 3$ và $b = 0$. Vậy $a + b = 3$. Do đó c) ĐÚNG.

d) Nếu $a + b + 1 \neq 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$

Suy ra không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$.

Do đó $a + b + 1 = 0 \Rightarrow b = -a - 1$.

Thay vào giới hạn, ta được:

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - a - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1 + a)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1 + a) = a + 2$.

Khi đó, để $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 1$ thì $\begin{cases} a + 2 = 1 \\ b = -a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$.

Do đó d) ĐÚNG.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 3x + 1}{2(x-1)} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}, \text{ với } m \text{ là tham số.}$$

Câu 40: Cho hàm số

a) Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \square$.

b) $f(1) = m$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

d) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \square$. Vậy a) đúng.

Ta có:

$f(1) = m$. Vậy b) đúng.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{2} = \frac{1}{2}. \text{ Vậy c) sai.}$$

Để hàm số liên tục tại $x = 1$ khi:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}. \text{ Vậy d) đúng.}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} & \text{khi } x > 0 \\ mx^2 + 2m + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}, \text{ với } m \text{ là tham số.}$$

Câu 41: Cho hàm số

a) Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = [-4; +\infty)$.

b) $f(0) = 2m + \frac{1}{4}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{4}$.

d) Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\square$ khi $m = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \square$. Vậy a) sai.

Ta có:

$$f(0) = 2m + \frac{1}{4}. \text{ Vậy b) đúng.}$$

Mặt khác:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(mx^2 + 2m + \frac{1}{4} \right) = 2m + \frac{1}{4}. \text{ Vậy c) sai.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+4-2^2}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x+4}+2} \right) = \frac{1}{4}.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Nên để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\square$, khi hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$

Mà hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ khi:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow 2m + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = 0. \text{ Vậy d) sai.}$$

Câu 42: Chi phí sản xuất C phụ thuộc lượng đầu ra của sản phẩm Q , chẳng hạn:

$$C = f(Q) = \begin{cases} Q + 2 & \text{khi } 0 < Q \leq 3 \\ \frac{Q^2 - 2Q - 3}{Q - 3} & \text{khi } Q > 3 \end{cases}$$

- a) $\lim_{Q \rightarrow 0^+} f(Q)$ không tồn tại.
 b) $\lim_{Q \rightarrow 3^-} f(Q) = 5$.
 c) $\lim_{Q \rightarrow 3^+} f(Q) = 1$.
 d) Hàm số $f(Q)$ liên tục trên $(0; +\infty)$.

Lời giải

- a) Sai
 b) Đúng
 c) Sai
 d) Sai

Hàm số $f(Q)$ xác định trong $(0; +\infty)$.

Ta có: $\lim_{Q \rightarrow 0^+} f(Q) = \lim_{Q \rightarrow 0^+} (Q + 2) = 2$ nên câu a) sai.

$\lim_{Q \rightarrow 3^-} f(Q) = \lim_{Q \rightarrow 3^-} (Q + 2) = 5$ nên câu b) đúng.

$\lim_{Q \rightarrow 3^+} f(Q) = \lim_{Q \rightarrow 3^+} \frac{Q^2 - 2Q - 3}{Q - 3} = \lim_{Q \rightarrow 3^+} \frac{(Q + 1)(Q - 3)}{Q - 3} = \lim_{Q \rightarrow 3^+} (Q + 1) = 4$ nên câu c) sai.

Khi đó $\lim_{Q \rightarrow 3^-} f(Q) \neq \lim_{Q \rightarrow 3^+} f(Q)$ nên hàm số $f(Q)$ gián đoạn tại $Q = 3$. Suy ra hàm số không liên tục liên tục trên $(0; +\infty)$ nên câu d) sai.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức thỏa điều kiện $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$, $f(5) = 10$.

- a) Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$.
 b) Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(1; 5)$.
 c) Phương trình $f(x) = 7$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(1; 5)$.
 d) Phương trình $m[f(x) - 1](x + 1) - m = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số $m \neq 0$.

Lời giải

- a) Đúng
 b) Sai
 c) Đúng
 d) Đúng

+ Ta có hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và $f(-1) \cdot f(1) = -2 \cdot 2 = -4 < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$. Nên câu a) đúng.

+ Ta có hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 5]$ và $f(1) \cdot f(5) = 2 \cdot 10 = 20 > 0$ nên chưa thể kết luận được phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(1; 5)$. Nên câu b) sai.

+ Do hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 5]$ và $f(1) = 2, f(5) = 10$ nên phương trình $f(x) = a$ với $a \in (2; 10)$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 5)$. Vì $7 \in (2; 10)$ nên phương trình $f(x) = 7$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(1; 5)$. Nên c) đúng

+ Xét hàm số $h(x) = m[f(x) - 1](x + 1) - m$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ có:

$$h(1) = m[f(1) - 1](1 + 1) - m = m[2 - 1](1 + 1) - m = m;$$

$$h(-1) = m[f(-1) - 1](-1 + 1) - m = -m;$$

Suy ra $h(1)h(-1) = -m^2 < 0$ với mọi giá trị của tham số $m \neq 0$.

Vậy phương trình $m[f(x) - 1](x + 1) - m = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$ với mọi $m \neq 0$. Nên d) đúng

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ x - 3m & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$$

Câu 44: Cho hàm số. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi khẳng định sau?

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$.

b) Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 0)$.

c) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m = -1$.

d) Hàm số không xác định tại $x = 1$.

Lời giải

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4$. Vậy **a** đúng.

b) Khi $x \in (-\infty; 0)$ thì $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$. Hàm số phân thức hữu tỉ liên tục trên từng khoảng xác định nên nó liên tục trên khoảng $(-\infty; 0)$. Vậy **b** đúng.

c) Với $m = -1$. Ta có $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ x - 3m & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Vậy **c** đúng.

a) Ta có $f(1) = 1 - 3m$. Do đó hàm số xác định tại $x = 1$. Vậy **d** sai.

Câu 45: Xác định tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

a) Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 3}{3n + 4}$ bằng $\frac{3}{4}$.

b) Phép tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 2024n}{n^3 + 12}$ có kết quả giới hạn là 1 hằng số dương.

c) Giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 - 2n^3 + 3n - 2025}{n^2 - 2n}$ có kết quả là $+\infty$.

d) Tham số $m = 10$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + m \cdot n + 5} - n) = 5$.

Lời giải

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{3n+4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left(1 + \frac{3}{n}\right)}{n \left(3 + \frac{4}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{3 + \frac{4}{n}} = \frac{1}{3}$$

a) Ta có . Vậy a **sai**.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 2024n}{n^3 + 12} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{2024}{n^2}}{1 + \frac{12}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

b) . Vậy b **sai**.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^4 - 2n^3 + 3n - 2025}{n^2 + 2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^3} - \frac{2025}{n^4}}{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}} = +\infty$$

c) . Vậy c **đúng**.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + mn + 5} - n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m \cdot n + 5}{\sqrt{n^2 + mn + 5} + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m + \frac{5}{n}}{\sqrt{1 + \frac{m}{n} + \frac{5}{n^2}} + 1} = \frac{m}{1+1} = 5 \Rightarrow m = 10$$

d) Vậy d **đúng**

Câu 46: Xác định tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

a) Phép tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-4^n}{1+4^n}$ có kết quả là hữu hạn.

b) Phép tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n - 2 \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^n}$ có kết quả là hữu hạn.

c) Phép tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n - 3^n)$ có kết quả là $+\infty$

d) Với $a > b > 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^{n+1} + b^n}{2 \cdot a^n + b^{n+1}} = 1$ thì $a = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Lời giải

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-4^n}{1+4^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

a) . Vậy a **đúng**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n - 2 \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n - 2 \cdot 5 \cdot 5^n}{2 \cdot 2^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 10}{2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} = \frac{-10}{1} = -10$$

b) . Vậy b **đúng**.

c) Giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n - 3^n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \cdot \left(\frac{2^n - 3^n}{3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \cdot \left(\frac{2^n}{3^n} - \frac{3^n}{3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \cdot \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right) = -\infty$. Vậy c **sai**.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^{n+1} + b^n}{2 \cdot a^n + b^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a \cdot a^n + b^n}{2 \cdot a^n + b \cdot b^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a + \left(\frac{b}{a}\right)^n}{2 + b \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^n} = \frac{a+0}{2+b \cdot 0} = 1 \Leftrightarrow a = 2$$

d) . Vậy d **đúng**

Câu 47: Cho các giới hạn $L_1 = \lim \frac{2^n}{3^n} = \lim f(n)$; $L_2 = \lim \frac{3^n}{4^n} = \lim g(n)$ và $L_3 = \frac{a \cdot 3^n + b \cdot 2^n + c}{d \cdot 3^n + e \cdot 4^n}$

Xác định tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

a) $L_1 = \frac{2}{3}$

b) $L_1 \neq L_2$

c) $L_1 \cdot L_2 = \lim [f(n) \cdot g(n)]$

d) Nếu $e = 0$ thì tồn tại duy nhất giá trị a sao cho $2L_3 = L_1 + 1$

Lời giải

a) $L_1 = \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. Vậy **a** sai.

b) Tương tự ta có $L_2 = \lim \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 = L_1$. Vậy **b** sai.

c) Do các giới hạn L_1, L_2 xác định nên $L_1 \cdot L_2 = \lim [f(n) \cdot g(n)]$ xác định. Vậy **c** đúng.

d) Nếu $e = 0$ thì $L_3 = \frac{a \cdot 3^n + b \cdot 2^n + c}{d \cdot 3^n} = \frac{a + b \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + c \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}{d} = \frac{a}{d} \Rightarrow 2L_3 = \frac{2a}{d}$

$2L_3 = L_1 + 1 \Leftrightarrow \frac{2a}{d} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{d}{2} (d \neq 0)$ nên có vô số giá trị a . Vậy **d** sai.

Câu 48: Cho các giới hạn $L = \lim \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2} = \lim f(n)$, $L' = \lim (\sqrt{4n^2 + n} - \sqrt{4n^2 + 2}) = \lim g(n)$ và

$L'' = \lim (\sqrt{n^2 + 2n - n + a})$ trong đó $a \in \mathbb{R}$ là tham số.

Xác định tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

a) $L = \frac{3}{4}$

b) $L + L' = 1$

c) $\lim [f(n) \cdot g(n)] = \frac{3}{8}$

d) Tồn tại duy nhất giá trị a để $L'' = \frac{2}{a}(L + L')$

Lời giải

a) $L = \lim \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2} = \lim \frac{\sqrt{9 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{4 - \frac{2}{n}} = \frac{3}{4}$. Vậy **a** đúng.

b) $L' = \lim (\sqrt{4n^2 + n} - \sqrt{4n^2 + 2}) = \lim \frac{n - 2}{\sqrt{4n^2 + n} + \sqrt{4n^2 + 2}} = \lim \frac{1 - \frac{2}{n}}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + \sqrt{4 + \frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{4}$

Suy ra $L + L' = 1$. Vậy **b** đúng.

$$c) \lim [f(n) \cdot g(n)] = \lim f(n) \cdot \lim g(n) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \neq \frac{3}{8}. \text{ Vậy c sai.}$$

$$d) L'' = \lim \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n + a \right) = \lim \left(\frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} + a \right) = \lim \left(\frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} + a \right) = 1 + a$$

$$L'' = \frac{2}{a} (L + L') \Leftrightarrow 1 + a = \frac{2}{a} \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 (N) \\ a = 1 (N) \end{cases} \text{ nên có 2 giá trị } a. \text{ Vậy d sai.}$$

Câu 49: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = -1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^3 - x^2 - x - 2} > 0$$

$$d) \text{ Để } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{ax+b} = 2 \text{ thì } a+b = \frac{3}{2}.$$

Lời giải

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1. \text{ Vậy ý a sai.}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}. \text{ Vậy ý b đúng.}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^3 - x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{7} > 0. \text{ Vậy ý c đúng.}$$

$$d) \text{ Để } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{ax+b} = 2$$

thì $+ ax + b$ có nghiệm bằng 2 $\Leftrightarrow 2a + b = 0 \Leftrightarrow b = -2a$.

$$+ \text{ Khi đó: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{ax+b} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{a(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{a} = \frac{1}{a} = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -1$$

Vậy $a+b = -\frac{1}{2}$, ý d sai.

Câu 50: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

$$a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{\sqrt{x} - 2} = 12$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1} < 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - \sqrt{x} + 2}{\sqrt{x+5} - 3} > 18$$

d) Để $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{f(x)+9}-3}{ax+b} = 2$ thì $4a+2b=-1$.

Lời giải

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-1)(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x-1)(\sqrt{x}+2) = 12$. Vậy a đúng.

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2-6x+9}-1} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-1)(x-4)(\sqrt{x^2-6x+9}+1)}{x^2-6x+8}$
 $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-1)(x-4)(\sqrt{x^2-6x+9}+1)}{(x-4)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2-6x+9}+1)}{x-2} = 3$. Vậy b sai.

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+5}-3} = \lim_{x \rightarrow 4} \left[\frac{f(x)}{\sqrt{x+5}-3} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3} \right]$
 $= \lim_{x \rightarrow 4} \left[\frac{(x-1)(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4} - \frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} \right]$
 $= \lim_{x \rightarrow 4} \left[(x-1)(\sqrt{x+5}+3) - \frac{(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x}+2)} \right] = 18 - \frac{3}{2} = \frac{33}{2}$. Vậy c sai.

d) Để $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{f(x)+9}-3}{ax+b} = 2$ thì
 $+ ax+b$ có nghiệm bằng 4 $\Leftrightarrow 4a+b=0 \Leftrightarrow b=-4a$
 $+ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{f(x)+9}-3}{ax+b} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{a(x-4)(\sqrt{f(x)+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-1)(x-4)}{a(x-4)(\sqrt{f(x)+9}+3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-1}{a(\sqrt{f(x)+9}+3)} = \frac{3}{6a} = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow b = -1 \Rightarrow 4a+2b = -1$

Vậy d đúng.

Câu 51: Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Kết quả của $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x}-2)(x+2)}{\sqrt{x}-2}$ là 4.

b) Kết quả của $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$ là 3.

c) Kết quả của $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x-1}-1}$ là 2.

d) Kết quả của $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2-\sqrt{3-x}}{\sqrt[3]{x}+1}$ là 3.

Lời giải

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x}-2)(x+2)}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$. Vậy a đúng.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+3} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

b) Ta có

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x} + 1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x} + 1} = 2$$

. Vậy **b** sai.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt{x-1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1} + 1)(\sqrt{x+7} - 3)(\sqrt{x+7} + 3)}{(\sqrt{x-1} + 1)(\sqrt{x-1} - 1)(\sqrt{x+7} + 3)}$$

c) Ta có

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)}{(\sqrt{x+7} + 3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} + 1}{\sqrt{x+7} + 3} = \frac{1}{3}$$

. Vậy **c** sai.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - \sqrt{3-x}}{\sqrt[3]{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}{(x+1)(2 + \sqrt{3-x})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}{(2 + \sqrt{3-x})} = \frac{3}{4}$$

d) Ta có

. Vậy **d** sai.

Câu 52: Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Kết quả của $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x+3}$ là $\frac{1}{2}$.

b) Kết quả của $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{x-1}$ là 0.

c) Kết quả của $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 7} + x)$ là 2.

d) Kết quả của $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 1} + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 2})$ là $\frac{-13}{6}$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{1}{2}$$

a) Ta có

. Vậy **a** đúng.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 0$$

b) Ta có

. Vậy **b** đúng.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 7} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 7}{\sqrt{x^2 - 3x + 7} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3 + \frac{7}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}} - 1} = \frac{3}{2}$$

c) Ta có

. Vậy **c** sai.

d) Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 1} + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 1} + x - x + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 2})$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(\sqrt{x^2 + 3x - 1} + x)(\sqrt{x^2 + 3x - 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 3x - 1} - x} + \frac{(\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 2})^3 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2 + 2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 2} + x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+3x-1}-x} + \frac{-2x^2+2}{\sqrt[3]{(x^3-2x^2+2)^2} + x\sqrt{x^3-2x^2+2} + x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}-1} + \frac{-2+\frac{2}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}}+1} \right) = -\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{13}{6}$$

. Vậy **d** đúng.

Câu 53: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^m - 3x + 2}{3x^n + 5}$, với $m, n \in \mathbb{N}$.

- a) Khi $m = n = 2$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- b) Khi $m = 2, n = 3$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- c) Khi $m = 3, n = 2$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- d) Khi $1 < m < n$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 2}{3x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{5}{x^2}} = \frac{2}{3}$$

- a) Khi $m = n = 2$ thì . Vậy **a** sai.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 2}{3x^3 + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{3 + \frac{5}{x^3}} = 0$$

- b) Khi $m = 2, n = 3$ thì . Vậy **b** đúng.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{\frac{3}{x} + \frac{5}{x^3}} = +\infty$$

- c) Khi $m = 3, n = 2$ thì . Vậy **c** đúng.

- d) Khi $1 < m < n$ thì

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^m - 3x + 2}{3x^n + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^m}{x^n} - \frac{3x}{x^n} + \frac{2}{x^n}}{\frac{3x^n}{x^n} + \frac{5}{x^n}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x^{n-m}} - \frac{3}{x^{n-1}} + \frac{2}{x^n}}{3 + \frac{5}{x^n}} = 0$$

. Vậy **d** sai

Câu 54: Cho hàm số $f(x) = \frac{x+a}{x-b}$

- a) Khi $a = 1, b = 2$ thì $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.
- b) Khi $a > 1, b = 2$, thì $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.
- c) Khi $a > 1, b = 2$, thì $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$.
- d) Khi $a = -1, b > 2$ thì $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = -\infty$.

Lời giải

a) Khi $a = 1$, $b = 2$ thì $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x+1) = 3 > 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$ và $x-2 > 0$ khi $x > 2$ nên
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$.

Vậy **a** đúng.

b) Khi $a > 1$, $b = 2$ thì $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x+a) = 2+a > 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$ và $x-2 > 0$ khi $x > 2$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+a}{x-2} = +\infty$.

Vậy **b** đúng.

c) Khi $a > 1$, $b = 2$ thì $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x+a) = 2+a > 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) = 0$ và $x-2 < 0$ khi $x < 2$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+a}{x-2} = -\infty$.

Vậy **c** đúng.

d) Khi $a = -1$, $b > 2$ thì $\lim_{x \rightarrow b^+} (x+a) = \lim_{x \rightarrow b^+} (x-1) = b-1 > 0$, $\lim_{x \rightarrow b^+} (x-b) = 0$ và $x-b > 0$ khi

$x > b$. Suy ra $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} \frac{x-1}{x-b} = +\infty$.

Vậy **d** sai.

Câu 55: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x^2-(m+2)x+2m} = +\infty$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Giới hạn $I_1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-1) = 3$.

b) Giới hạn $I_2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} [x^2 - (m+2)x + 2m] = 0$ và $x^2 - (m+2)x + 2m > 0$ khi $x > 2$ với mọi giá trị $m \in S$.

c) $-12 \in S$.

d) Có 3 số nguyên dương trong tập hợp S .

Lời giải

a) Tính giới hạn một phía $I_1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-1) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Vậy **a** đúng.

b) Với mọi giá trị $m \in S$.

Do $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-1) = 3 > 0$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x^2-(m+2)x+2m} = +\infty$ nên $I_2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} [x^2 - (m+2)x + 2m] = 0$ và $x^2 - (m+2)x + 2m > 0$ khi $x > 2$.

Vậy **b** đúng.

c) Thay $m = -12$, ta được $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x^2+10x-24} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{(x-2)(x+12)} = +\infty$.

Do đó $-12 \in S$.

Vậy **c** đúng.

d) Xét $f(x) = x^2 - (m+2)x + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = m \end{cases}$.

+ Nếu $m = 2$, ta có $f(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 = 0$ và $(x-2)^2 > 0 \quad \forall x > 2$ nên $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{(x-2)^2} = +\infty$

+ Nếu $m \neq 2$ ta có bảng xét dấu $f(x) = x^2 - (m+2)x + 2m$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x^2 - (m+2)x + 2m} = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} [x^2 - (m+2)x + 2m] = 0 \quad \text{và} \quad x^2 - (m+2)x + 2m > 0 \quad \text{khi}$$

$x > 2$. Suy ra $x_2 = 2 > x_1 = m$.

Kết hợp 2 trường hợp, ta có $m \leq 2$ hay $S = (-\infty; 2]$.

Khi đó S chứa 2 số nguyên dương là 1, 2.

Vậy d sai.

Câu 56: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Giới hạn $I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x - 1) = 1$

b) Giới hạn $I_2 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2 \cos 2x + 4) = 2$

c) Giới hạn $I_3 = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} 2 \sin \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = -\sqrt{3}$

d) Giới hạn $I_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + (m+1) \cos x - m^2}{2 \sin^2 x} = -\frac{7}{4}$. Khi đó $m \leq 0$.

Lời giải

a) $I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x - 1) = 2 \sin 0 - 1 = -1 \Rightarrow$ ý a Sai.

b) $I_2 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2 \cos 2x + 4) = 2 \cos \pi + 4 = 2 \cdot (-1) + 4 = 2 \Rightarrow$ ý b Đúng.

c) $I_3 = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} 2 \sin \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \sin \left(-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow$ ý c Sai.

d) Ta xét: $I_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + (m+1) \cos x - m^2}{2 \sin^2 x}$

Do $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin^2 x) = 0$ mà $I_4 = -\frac{7}{4}$ nên giới hạn thuộc dạng $\frac{0}{0}$,

tức là $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + (m+1) \cos x - m^2) = 0 \Leftrightarrow 1 + (m+1) \cdot 1 - m^2 = 0$

$$\Leftrightarrow -m^2 + m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Khi $m = -1$, ta có $I_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 x}{2 \sin^2 x} = -1$

$$I_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + 3 \cos x - 4}{2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos^2 x + 3 \cos x - 5}{2(1 - \cos^2 x)}$$

Khi $m = 2$, ta có

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \cos x + 5)(\cos x - 1)}{-2(\cos x + 1)(\cos x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + 5}{-2(\cos x + 1)} = \frac{2 \cdot 1 + 5}{-2 \cdot (1 + 1)} = -\frac{7}{4}$$

Do đó, $m = 2 > 0 \Rightarrow$ ý d sai.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{3x-2}-x} & \text{khi } x > 1 \\ x+m & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$$

Câu 57: Cho hàm số với m là tham số và hàm số $g(x) = 3x - 1$.

- a) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -2$.
- b) Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 2$.
- c) Hàm số $f(x) + g(x)$ liên tục tại $x = -3$.
- d) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi $m = 1$.

Lời giải

- a) Với $x \leq 1$ ta có $f(x) = x + m$ luôn xác định với mọi $x \leq 1$.

Suy ra hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -2$.

Vậy ý a đúng.

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{3x-2}-x}$$

- b) Xét $x > 1$ ta có

Hàm số không xác định tại $x = 2$ nên hàm số gián đoạn tại $x = 2$.

Vậy ý b đúng.

- c) Ta có $g(x) = 3x - 1$ luôn xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $g(x)$ liên tục tại $x = -3$.

Mà hàm số $f(x)$ cũng liên tục tại $x = -3$ suy ra hàm số $f(x) + g(x)$ liên tục tại $x = -3$.

Vậy ý c đúng.

$$d) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{3x-2}-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{3x-2}+x)}{3x-2-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{3x-2}+x}{2-x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + m; f(1) = 1 + m$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 1 + m = 2 \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy ý d đúng.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-x-1}{x^2-5x+4} & \text{khi } x > 1 \\ 3x+m & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$$

Câu 58: Cho hàm số với m là tham số và hàm số $g(x) = x^2 - x - 2$.

- a) Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; 1)$.
- b) Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.
- c) Hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.

- d) Với $m = \frac{11}{4}$ thì hàm số $f(x)$ liên tục trên tập xác định.

a) Xét $x \leq 1$ ta có $f(x) = 3x + m$ xác định với mọi $x \leq 1$.

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; 1)$.

Vậy ý **a** đúng.

b) Hàm số $f(x)$ không xác định tại $x = 4$ nên hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 4$.

Vậy hàm số $f(x)$ không liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

Vậy ý **b** sai.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

c) Ta có

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

Hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ không xác định tại $x = -1 \in (-\infty; 1)$ nên hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = -1$.

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

Vậy hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ không liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Vậy ý **c** sai.

d) Xét $x \leq 1$ ta có $f(x) = 3x + m$ xác định với mọi $x \leq 1$ (1)

$$\text{Xét } x > 1 \text{ ta có } f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - x - 1}{x^2 - 5x + 4}$$

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \neq 1 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

Hàm số xác định khi

$$\text{Mà } x > 1 \Rightarrow x \in (1; +\infty) \setminus \{4\} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Hàm số xác định trên các khoảng $(-\infty; 1); (1; 4); (4; +\infty)$ nên hàm số liên tục trên các khoảng này.

Xét tại $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3} - x - 1}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 3 - (x + 1)^2}{(x - 1)(x - 4)(\sqrt{x+3} + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x - 2}{(x - 4)(\sqrt{x+3} + x + 1)} = \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x + m) = 3 + m.$$

$$f(1) = 3 + m.$$

Hàm số liên tục trên tập xác định khi hàm số liên tục tại $x = 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 3 + m = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{11}{4}.$$